第3章 几何造型技术

几何造型技术是一项研究在计算机中如何表示物体模型形状的技术。它从诞生到现在仅仅经历了30多年的发展历史，但是，由于几何造型技术研究的迅速开展和计算机硬件性能的大幅度提高，目前已经出现了许多以几何造型作为核心的实用化系统，并且在航空航天、汽车、造船、机械、建筑和电子等行业都得到了广泛的应用。

在几何造型系统中，有三种描述物体的三维模型，即线框模型、曲面模型和实体模型。线框模型是计算机图形学和CAD/CAM领域最早用于表示物体的模型，计算机绘图是这种模型的一个重要应用。线框模型用顶点和棱边来表示物体，由于没有面的信息，它不能表示表面含有曲面的物体。另外，它不能明确地定义给定点与物体之间的关系(点在物体内部、外部或表面上)，所以线框模型不能处理许多重要问题，如不能生成剖切图、消隐图、明暗色彩图，不能用于数控加工等，应用范围受到了很大的限制。

曲面模型在线框模型的基础上，增加了物体中面的信息，用面的集合来表示物体，而用环来定义面的边界。曲面模型扩大了线框模型的应用范围，能够满足面面求交、线面消隐、明暗色彩图和数控加工等需要。但在该模型中，只有一张张面的信息，物体究竟存在于表面的哪一侧，并没有给出明确的定义，无法计算和分析物体的整体性质，如物体的表面积、体积和重心等，也不能将这个物体作为一个整体去考察它与其他物体相互关联的性质，如是否相交等。

实体模型是最高级的模型，它能完整表示物体的所有形状信息，可以无歧义地确定一个点是在物体外部、内部或表面上，这种模型能够进一步满足物性计算、有限元分析等应用的要求。

虽然三维曲面模型表示三维物体的信息并不完整，但它能够表达复杂的雕刻曲面，在几何造型中具有重要的地位，对于支持曲面的三维实体模型，曲面模型是它的基础。本章将主要介绍有关曲面和实体的造型技术。

3.1 参数曲线和曲面

曲线、曲面可以用显式、隐式和参数表示，由于参数表示的曲线、曲面具有几何不变性等优点，计算机图形学中常用参数形式描述曲线、曲面。本节讨论一些参数曲线和曲面表示的基础知识。

3.1.1 曲线曲面的表示

曲线和曲面的表示方程有参数表示和非参数表示之分，非参数表示又分为显式表示和隐式表示。

对于一条平面曲线，显式表示的一般形式是$y=f(x)$。该方程中，一个x值与一个y值对应，所以显式方程不能表示封闭或多值曲线，例如不能用显式方程表示一个圆。

如果将一条平面曲线方程表示成$f(x,y)=0$的形式，称之为隐式表示。隐式表示的优点是易于判断函数$f(x,y)$是否大于、小于或等于0，也就易于判断点是落在所表示的曲线

上还是位于曲线的哪一侧。

用非参数方程(无论是显式还是隐式)表示曲线曲面,会存在一些问题,如与坐标轴相关,会出现斜率为无穷大的情形(如垂线),不便于计算机编程等。

在几何造型系统中,曲线曲面方程通常表示成参数形式,即曲线曲面上任一点的坐标均表示成给定参数的函数。假定用 t 表示参数,平面曲线上任一点 P 可表示为

$$P(t) = [x(t), y(t)]$$

空间曲线上任一个三维点 P 可表示为

$$P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

最简单的参数曲线是直线段,端点为 P_1、P_2 的直线段参数方程可表示成

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t, \quad t \in [0,1]$$

又如,圆在计算机图形学中应用十分广泛,其在第一象限内的单位圆弧的非参数显式表示为

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

其参数形式可表示为

$$P(t) = \left[\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right], \quad t \in [0,1]$$

在曲线、曲面的表示上,参数方程比显式、隐式方程有更多的优越性,主要表现在如下方面。

(1) 可以满足几何不变性的要求。

(2) 有更大的自由度来控制曲线、曲面的形状。如一条二维三次曲线的显式表示为

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

只有 4 个系数控制曲线的形状;而二维三次曲线的参数表达式为

$$P(t) = \begin{bmatrix} a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4 \\ b_1 t^3 + b_2 t^2 + b_3 t + b_4 \end{bmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

有 8 个系数可用来控制此曲线的形状。

(3) 对非参数方程表示的曲线、曲面进行变换,必须对曲线、曲面上的每个型值点进行几何变换;而对参数表示的曲线、曲面,可对其参数方程直接进行几何变换。

(4) 便于处理斜率为无穷大的情形,不会因此而中断计算。

(5) 参数方程中,代数、几何相关和无关的变量是完全分离的,而且对变量个数不限,从而便于用户把低维空间中曲线、曲面扩展到高维空间去。这种变量分离的特点使得可以用数学公式处理几何分量。

(6) 规格化的参数变量 $t \in [0,1]$,使其相应的几何分量是有界的,而不必用另外的参数去定义边界。

(7) 易于用矢量和矩阵表示几何分量,简化了计算。

3.1.2 曲线的基本概念

一条用参数表示的三维曲线是一个有界点集,可写成一个带参数的、连续的、单值的数学函数,其形式为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ z = z(t) \end{cases}$$

下面给出参数曲线的几个基本概念。

1. 位置矢量

如图 3.1 所示,曲线上任一点的位置矢量可表示为

$$P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

其一阶、二阶和 k 阶导数矢量(如果存在的话)可分别表示为

$$P'(t) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$$

$$P''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}t^2}$$

$$P^k(t) = \frac{\mathrm{d}^k P}{\mathrm{d}t^k}$$

2. 切矢量

若曲线上 R,Q 两点的参数分别是 t 和 $t+\Delta t$,矢量 $\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t)$ 的大小可以用连接 R,Q 的弦长表示。如果在 R 处切线存在,则当 $\Delta t \to 0$ 时,Q 趋向于 R,矢量 ΔP 的方向趋向于该点的切线方向。如选择弧长 s 作为参数,则 $T = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta s}$ 是单位切矢量。因为,根据弧长微分公式有

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2$$

引入参数 t,上式可改写为

$$(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)^2 = (\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)^2 + (\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)^2 = |\, P'(t) \,|^2$$

为了方便,t 增加的方向数学上一般取为 s 增加的方向。考虑到矢量的模非负,所以有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\, P'(t) \,| \geqslant 0$$

即弧长 s 是 t 的单调增函数,故其反函数 $t(s)$ 存在,且一一对应。由此得 $P(t) = P(t(s)) = P(s)$,于是

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{P'(t)}{|\, P'(t) \,|}$$

即 T 是单位切矢量。

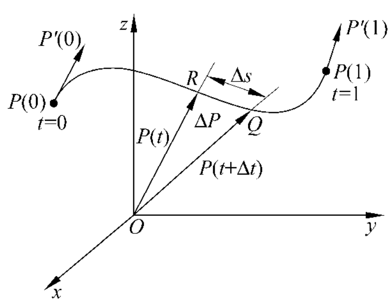


图 3.1　表示一条参数曲线的有关矢量

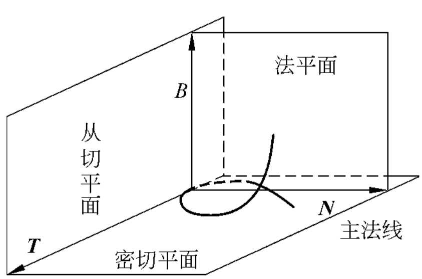


图 3.2　曲线的法矢量

3. 法矢量

对于空间参数曲线上任意一点，所有垂直切矢量 $\boldsymbol{T}$ 的矢量有一束，且位于同一平面上，该平面称为法平面，如图 3.2 所示。

若曲线上任一点的单位切矢记为 $\boldsymbol{T}$，因为 $[\boldsymbol{T}(s)]^2=1$，两边对 s 求导矢可得 $2\boldsymbol{T}(s)\cdot\boldsymbol{T}'(s)=0$，可见 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ 是一个与 $\boldsymbol{T}$ 垂直的矢量。与 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ 平行的法矢称为曲线在该点的主法矢，主法矢的单位矢量称为单位主法矢量，记为 $\boldsymbol{N}$。矢量积 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$ 是第三个单位矢量，它垂直于 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$。平行于矢量 $\boldsymbol{B}$ 的法矢称为曲线的副法矢，$\boldsymbol{B}$ 则称为单位副法失量。

对于一般参数 t，可以推导出

$$\boldsymbol{B}=\frac{P'(t)\times P''(t)}{|P'(t)\times P''(t)|}$$

$$\boldsymbol{N}=B\times T=\frac{(P'(t)\times P''(t))\times P'(t)}{|P'(t)\times P''(t)|\cdot|P'(t)|}$$

$\boldsymbol{T}$(切矢)、$\boldsymbol{N}$(主法矢)和 $\boldsymbol{B}$(副法矢)构成了曲线上的活动坐标架，且 $\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$ 构成的平面称为法平面，$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{T}$ 构成的平面称为密切平面，$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{T}$ 构成的平面称为从切平面。

4. 曲率和挠率

由于 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$ 与 N 平行，若令 $T'=\kappa N$，则 $\kappa=|T'|=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta T}{\Delta s}\right|=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta T}{\Delta\theta}\right|\left|\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$，即 $\kappa=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$，称之为曲率。其几何意义是曲线的单位切矢对弧长的转动率(如图 3.3(a)所示)，与主法矢同向。曲率的倒数 $\rho=1/\kappa$，称为曲率半径。

又因为 $B(s)\cdot T(s)=0$，两边对 s 求导矢得

$$B'(s)\cdot T(s)+B(s)\cdot T'(s)=0$$

将 $T'=\kappa N$ 代入上式，并注意到 $B(s)\cdot N(s)=0$，得到

$$B'(s)\cdot T(s)=0$$

因为 $[B(s)]^2=1$，所以两边对 s 求导得到 $B'(s)\cdot B(s)=0$。可见，$B'(s)$ 既垂直于 $T(s)$，又垂直于 $B(s)$，故有 $B'(s)/\!/N(s)$，再令 $B'(s)=-\tau N(s)$，τ 称为挠率。因为 $|\tau|=\left|\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}\right|=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta B}{\Delta s}\right|=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta B}{\Delta\phi}\right|\left|\dfrac{\Delta\phi}{\Delta s}\right|$，即 $|\tau|=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\phi}{\Delta s}\right|$，所以挠率的绝对值等于副法线方向(或密切平面)对于弧长的转动率(如图 3.3(b)所示)。挠率 τ 大于 0、等于 0 和小于 0 分别表示曲线为右旋空间曲线、平面曲线和左旋空间曲线。

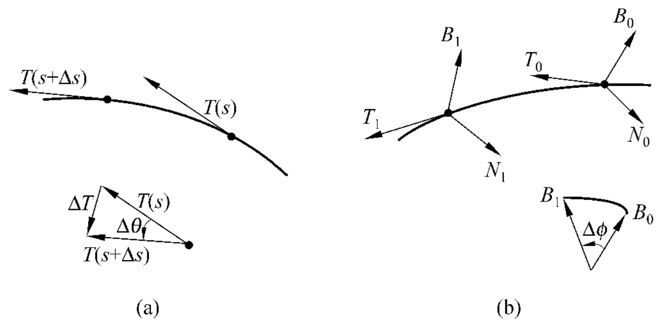


图 3.3 曲率和挠率

同样，对 $N(s)=B(s)\times T(s)$ 两边求导，可以得到

$$N'(s)=-\kappa T(s)+\tau B(s)$$

将 T'、N'、B'和 T、N、B 的关系写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix}T'\\N'\\B'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\kappa&0\\-\kappa&0&\tau\\0&-\tau&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\N\\B\end{bmatrix}$$

对于一般参数 t，可以推导出曲率 κ 和挠率 τ 的计算公式如下

$$\kappa=\frac{|P'(t)\times P''(t)|}{|P'(t)|^3}$$

$$\tau=\frac{(P'(t)\times P''(t))\cdot P'''(t)}{(P'(t)\times P''(t))^2}$$

3.1.3 插值、拟合和光顺

1. 插值、拟合和逼近

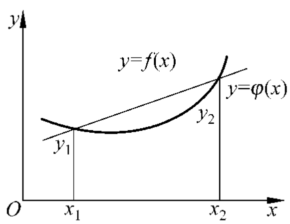
给定一组有序的数据点 $P_i(i=0,1,\cdots,n)$，构造一条曲线顺序通过这些数据点，称为对这些数据点的插值，所构造的曲线称为插值曲线。

1) 线性插值

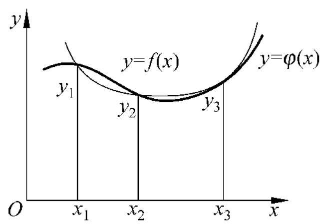
假设给定函数 $f(x)$在两个不同点 x_1 和 x_2 的值，用一个线性函数 $y=\varphi(x)=ax+b$ 近似代替 $f(x)$，称 $\varphi(x)$为 $f(x)$的线性插值函数。其中，线性函数的系数 a,b 通过条件 $\begin{cases}\varphi(x_1)=y_1\\\varphi(x_2)=y_2\end{cases}$确定。如图 3.4(a)所示。

2) 抛物线插值

抛物线插值又称为二次插值。设已知 $f(x)$在三个互异点 x_1,x_2,x_3 的函数值为 y_1,y_2,y_3，要求构造一个函数 $\varphi(x)=ax^2+bx+c$，使 $\varphi(x)$在节点 $x_i(i=1,2,3)$处与 $f(x)$在 x_i 处的值相等，如图 3.4(b)所示。由此可构造 $\varphi(x_i)=f(x_i)=y_i(i=1,2,3)$的线性方程组，求得 a,b,c，即构造了 $\varphi(x)$的插值函数。



(a) 线性插值



(b) 抛物线插值

图 3.4 线性插值和抛物线插值

构造一条曲线使之在某种意义下最接近给定的数据点(但未必通过这些点)，称为对这些数据点进行拟合，所构造的曲线为拟合曲线。

在计算数学中，逼近通常是指用一些性质较好的函数近似表示一些性质不好的函数。在计算机图形学中，逼近继承了这方面的含义，因此插值和拟合都可以视为逼近。

2. 光顺(Fairing)

光顺通俗的含义是指曲线的拐点不能太多,曲线拐来拐去就会不顺眼。对平面曲线而言,相对光顺的条件如下。

(1) 具有二阶几何连续性(G^2)。

(2) 不存在多余拐点和奇异点。

(3) 曲率变化较小。

3.1.4 参数化

过三点 P_0、P_1 和 P_2 构造参数表示的插值多项式可以有无数条,这是因为参数 t 在[0,1]区间的分割可以有无数种,即 P_0、P_1 和 P_2 可对应不同的参数值,如 $t_0=0, t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=1$ 或 $t_0=0, t_1=\frac{1}{3}, t_2=1$。其中,每个参数值称为节点(knot)。

对于一条插值曲线,型值点 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ 与其参数域 $t \in [t_0, t_n]$ 内的节点之间有一种对应关系。对于一组有序的型值点所确定一种参数分割,称之为这组型值点的参数化。参数化的常用方法有以下几种。

1. 均匀参数化(等距参数化)

使每个节点区间长度 $\Delta_i = t_{i+1} - t_i, i=0,1,\cdots,n-1$,为正常数 d,节点在参数轴上呈等距分布:$t_{i+1} = t_i + d$。

2. 累加弦长参数化

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_i = t_{i-1} + |\Delta P_{i-1}|, \quad i=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

其中 $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$ 为向前差分矢量,即弦边矢量。这种参数法如实反映了型值点按弦长的分布情况,能够克服型值点按弦长分布不均匀的情况下采用均匀参数化所出现的问题。

3. 向心参数化法

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_i = t_{i-1} + |\Delta P_{i-1}|^{1/2}, \quad i=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

累加弦长法没有考虑相邻弦边的拐折情况,而向心参数化法假设在一段曲线弧上的向心力与曲线切矢从该弧段始端至末端的转角成正比,加上一些简化假设,得到向心参数化法。此法尤其适用于非均匀型值点分布。

4. 修正弦长参数化法

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_i = t_{i-1} + K_i |\Delta P_{i-1}|, \quad i=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

其中,$K_i = 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{|\Delta P_{i-2}|\theta_{i-1}}{|\Delta P_{i-2}| + |\Delta P_{i-1}|} + \frac{|\Delta P_i|\theta_i}{|\Delta P_{i-1}| + |\Delta P_i|}\right)$,$\theta_i = \min\left(\pi - \angle P_{i-1}P_iP_{i+1}, \frac{\pi}{2}\right)$,$|\Delta P_{-1}| = |\Delta P_n| = 0$。弦长修正系数 $K_i \geqslant 1$。从公式可知,与前后邻弦长 $|\Delta P_{i-2}|$ 和 $|\Delta P_i|$ 相比,若 $|\Delta P_{i-1}|$ 越小,且与前后邻弦边夹角的外角 θ_{i-1} 和 θ_i $\left(\text{不超过}\frac{\pi}{2}\text{时}\right)$越大,则修

正系数 K_i 就越大。

由上述参数化方法得到的区间一般是$[t_0,t_n]\neq[0,1]$，通常将参数区间$[t_0,t_n]$规格化为$[0,1]$，这只需对参数化区间作如下处理

$$t_0=0,\quad t_i=\frac{t_i}{t_n},\quad i=0,1,\cdots,n$$

3.1.5 参数曲线的代数和几何形式

本节以三次参数曲线为例，讨论参数曲线的代数和几何形式。

1. 代数形式

一条三次曲线的代数形式是

$$\begin{cases}x(t)=a_{3x}t^3+a_{2x}t^2+a_{1x}t+a_{0x}\\ y(t)=a_{3y}t^3+a_{2y}t^2+a_{1y}t+a_{0y}, \quad t\in[0,1]\\ z(t)=a_{3z}t^3+a_{2z}t^2+a_{1z}t+a_{0z}\end{cases}$$

方程组中 12 个系数唯一地确定了一条三次参数曲线的位置与形状。上述代数式写成矢量式是

$$P(t)=a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0,\quad t\in[0,1] \tag{3.1}$$

其中 a_0,a_1,a_2,a_3 是代数系数矢量，$P(t)$是三次参数曲线上任一点的位置矢量。

2. 几何形式

描述参数曲线的条件有端点位矢、端点切矢和曲率等。对三次参数曲线，若用其端点位矢 $P(0)$、$P(1)$和切矢 $P'(0)$、$P'(1)$描述，并将 $P(0)$、$P(1)$、$P'(0)$和 $P'(1)$简记为 P_0、P_1、P'_0 和 P'_1，代入式(3.1)得(如图 3.5 所示)

$$\begin{cases}a_0=P_0\\ a_1=P'_0\\ a_2=-3P_0+3P_1-2P'_0-P'_1\\ a_3=2P_0-2P_1+P'_0+P'_1\end{cases} \tag{3.2}$$

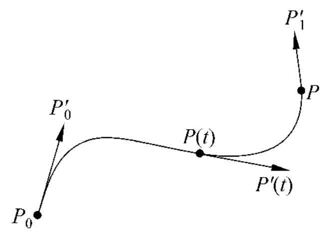


图 3.5 Ferguson 曲线端点位矢和切矢

将式(3.2)代入式(3.1)整理后得

$$P(t)=(2t^3-3t^2+1)P_0+(-2t^3+3t^2)P_1+(t^3-2t^2+t)P'_0 \\ +(t^3-t^2)P'_1,\quad t\in[0,1] \tag{3.3}$$

令$\begin{cases}F_0(t)=2t^3-3t^2+1\\ F_1(t)=-2t^3+3t^2\\ G_0(t)=t^3-2t^2+t\\ G_0(t)=t^3-t^2\end{cases}$，将 F_0,F_1,G_0,G_1 代入式(3.3)，可将其简化为

$$P(t)=F_0P_0+F_1P_1+G_0P'_0+G_1P'_1,\quad t\in[0,1] \tag{3.4}$$

式(3.4)是三次 Hermite(Ferguson)曲线的几何形式，几何系数是 P_0、P_1、P'_0和 P'_1。F_0，F_1，G_0，G_1 称为调和函数(或混合函数)，即该形式下的三次 Hermite 基。它们具有如下性质

$$\begin{bmatrix}F_i(j) & F'_i(j)\\ G_i(j) & G'_i(j)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_{ij} & 0\\ 0 & \delta_{ij}\end{bmatrix},\quad i,j=0,1 \tag{3.5}$$

F_0 和 F_1 专门控制端点的函数值对曲线的影响，而同端点的导数值无关；G_0 和 G_1 则专

门控制端点的一阶导数值对曲线形状的影响，而同端点的函数值无关。或者说，F_0 和 G_0 控制左端点的影响，F_1 和 G_1 控制右端点的影响。图 3.6 给出了这 4 个调和函数的图形。

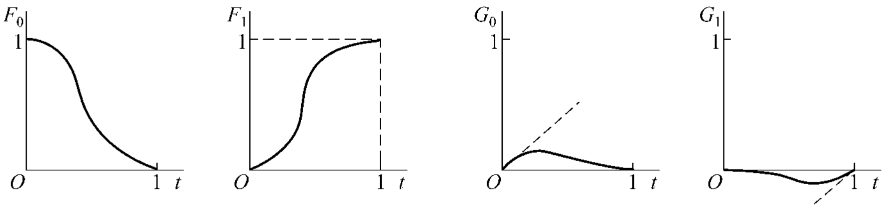


图 3.6　三次调和函数

3.1.6　连续性

设计一条复杂曲线时，出于设计和制造上的考虑，常常通过多段曲线组合而成，这需要解决曲线段之间如何实现光滑连接的问题。

曲线间连接的光滑度的度量有两种：一种是函数的可微性，使得组合参数曲线在连接处具有直到 n 阶连续导矢，即 n 阶连续可微，这类光滑度称为 C^n 或 n 阶参数连续性；另一种称为几何连续性，组合曲线在连接处满足不同于 C^n 的某一组约束条件，称为具有 n 阶几何连续性，简记为 G^n。曲线光滑度的两种度量方法并不矛盾，C^n 连续包含在 G^n 连续之中。下面详细讨论两条曲线拼接的连续性问题。

首先通过一个反例来说明引进几何连续的重要性。

例　令

$$\Phi(t)=\begin{cases} V_0+\dfrac{V_1-V_0}{3}t, & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ V_0+\dfrac{V_1-V_0}{3}+(t-1)\,\dfrac{2(V_1-V_0)}{3}, & 1\leqslant t\leqslant 2 \end{cases}$$

$\Phi(t)$在$[0,2]$上表示一条连接 V_0、V_1 的直线段，但却有 $\Phi'(1^-)=\dfrac{1}{3}(V_1-V_0)$，$\Phi'(1^+)=\dfrac{2}{3}(V_1-V_0)$，即 $\Phi'(1^-)=\Phi'(1^+)$。

$\Phi(t)$明明是一条直线，却非 C^1 连续，说明用参数连续描述光滑性是不恰当的，因此有必要引进一种新的连续性度量，这就是几何连续。

如图 3.7 所示，对于参数 $t\in[0,1]$的两条曲线 $P(t)$和 $Q(t)$，若要求在结合处达到 G^0 连续或 C^0 连续，即两曲线在结合处位置连续，则需要：

$$P(1)=Q(0) \tag{3.6}$$

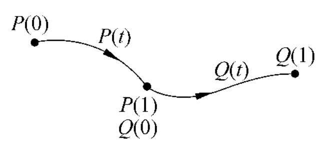


图 3.7　两条曲线的连续性

若要求在结合处达到 G^1 连续，就是说两条曲线在结合处在满足 G^0 连续的条件下，并有公共的切矢

$$Q'(0)=\alpha P'(1)\quad(\alpha>0) \tag{3.7}$$

当 $\alpha=1$ 时，G^1 连续就成为 C^1 连续。

若要求在结合处达到 G^2 连续，就是说两条曲线在结合处在满足 G^1 连续的条件下，并有公共的曲率矢

$$\frac{P'(1)\times P''(1)}{|P'(1)|^3}=\frac{Q'(0)\times Q''(0)}{|Q'(0)|^3} \tag{3.8}$$

将(3.7)式代入可得：

$$P'(1)\times Q''(0)=\alpha^2 P'(1)\times P''(1)$$

这个关系可化简为

$$Q''(0)=\alpha^2 P''(1)+\beta P'(1) \tag{3.9}$$

β 为任意常数。当 $\alpha=1,\beta=0$ 时，G^2 连续就成为 C^2 连续。

至此可以看到，C^1 连续保证 G^1 连续，C^2 连续能保证 G^2 连续，但反过来不行。也就是说，C^n 连续的条件比 G^n 连续的条件要苛刻。

3.1.7 参数曲面的基本概念

和曲线一样，曲面也有显示表示、隐式表示和参数表示，计算机图形学中最常用的是参数表示。经常采用矩形域作为曲面的参数域。

一张定义在矩形域上的参数曲面可以表示为

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v), \quad (u,v)\in[0,1]\times[0,1]\\ z=z(u,v)\end{cases}$$

记为 $P(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，$(u,v)$ 称为参数。

参数曲面中常见的基本概念如下(如图 3.8 所示)。

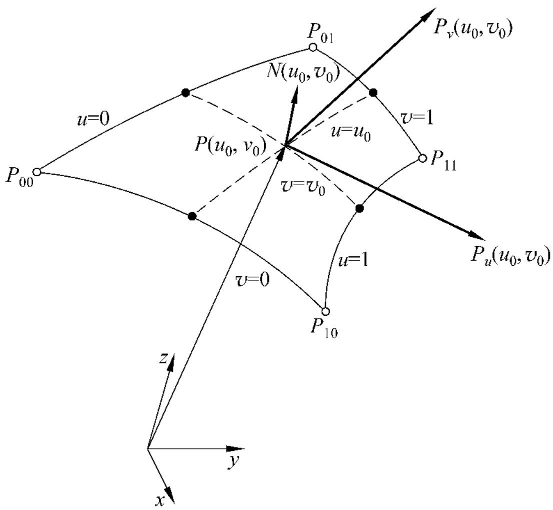


图 3.8 参数曲面

(1) 曲面上的点。将给定的参数值 u_0,v_0 代入参数方程，可得曲面上的点 $P(u_0,v_0)$。

(2) 曲面上一点的切向量(切矢)。对给定的参数值 u_0,v_0，曲面上的点 $P(u_0,v_0)$处的 u 切矢和 v 切矢分别为 $\left.\frac{\partial P(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}$，$\left.\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\right|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}$。

(3) 曲面上一点的法向量(法矢)。对给定的参数值 u_0,v_0，曲面上的点 $P(u_0,v_0)$处的

法向量为 $N(u_0,v_0)=\left.\dfrac{\partial P(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=u_0\\v=v_0}}\times\left.\dfrac{\partial P(u,v)}{\partial v}\right|_{\substack{u=u_0\\v=v_0}}$。

(4) 角点。将参数 $u,v=0$ 或 1 代入曲面的参数方程 $P(u,v)$，得到曲面的 4 个角点为 $P(0,0)$、$P(0,1)$、$P(1,0)$和 $P(1,1)$，可简记为 P_{00}，P_{01}，$P_{10}P_{11}$。

(5) 边界线。将参数 $u=0,1$ 或 $v=0,1$ 代入曲面的参数方程 $P(u,v)$，得到曲面的 4 条边界线为 $P(u,0)$、$P(u,1)$、$P(0,v)$和 $P(1,v)$，可简记为 P_{u0}，P_{u1}，P_{0v}，P_{1v}。

3.2 Bézier 曲线与曲面

由于几何外形设计的要求越来越高，传统的曲线曲面表示方法已不能满足用户的需求。1962 年，法国雷诺汽车公司的 P. E. Bézier 构造了一种以逼近为基础的参数曲线和曲面的设计方法，并用这种方法完成了一个称为 UNISURF 的曲线和曲面设计系统。1972 年，该系统被投入应用。Bézier 方法将函数逼近论同几何表示结合起来，使得设计师在计算机上设计曲线曲面就像使用作图工具一样得心应手。

3.2.1 Bézier 曲线的定义和性质

1. 定义

给定空间 $n+1$ 个点的位置矢量 $P_i(i=0,1,\cdots,n)$，则 Bézier 曲线可定义为

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(t),\quad t\in[0,1]$$

其中 $P_i(i=0,1,\cdots,n)$构成该 Bézier 曲线的特征多边形，$B_{i,n}(t)$是 n 次 Bernstein 基函数

$$B_{i,n}(t)=C_n^it^i(1-t)^{n-i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i\cdot(1-t)^{n-i},\quad(i=0,1,\cdots,n)$$

其中 $0^0=1,0!=1$。

图 3.9 是三次 Bézier 曲线的实例。

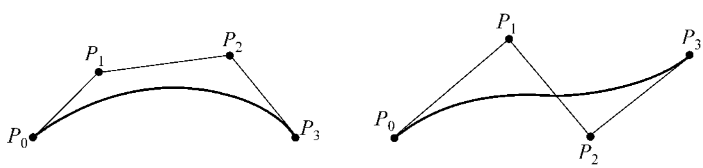


图 3.9　三次 Bézier 曲线

2. Bernstein 基函数的性质

(1) 正性。

$$B_{i,n}(t)>0,\quad t\in(0,1)\quad(i=0,1,\cdots,n)$$

(2) 端点性质。

$$B_{i,n}(0)=\begin{cases}1, & i=0\\0, & i\neq 0\end{cases},\quad B_{i,n}(1)=\begin{cases}1, & i=n\\0, & i\neq n\end{cases}$$

(3) 权性。