第 三 章

导数的应用

在建立了导数的概念之后，本章将介绍中值定理、利用导数求极限的方法——洛必达法则、利用导数确定函数的单调区间、凹凸区间及求一元函数极值和作函数图形的方法，进一步研究导数在实际问题中的应用.

第一节　中值定理与洛必达法则

这里所讲的中值定理是微分学中值定理，它包括罗尔中值定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理.

一、罗尔中值定理

定理 3.1　若函数 $f(x)$满足：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续，

(2) 在开区间(a,b)内可导，

(3) $f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

这就是罗尔(Rolle)中值定理.

罗尔中值定理的几何意义为：闭区间$[a,b]$上的连续曲线弧段，除端点外处处都有不垂直于 x 轴的切线，且曲线弧段在两个端点处的纵坐标相同，则曲线弧段上至少存在一点，过该点的切线平行于 x 轴，如图 3.1 所示.

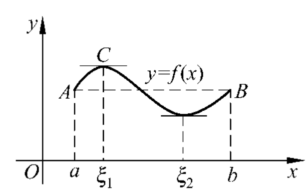

图　3.1

必须指出，罗尔中值定理的条件有三个，如果缺少其中任何一个条件，定理将不成立.

例如，$f(x)=|x|$在闭区间$[-1,1]$上连续，且 $f(-1)=f(1)=1$，但是$|x|$在开区间$(-1,1)$内有不可导的点 $x=0$，故这里不存在 $\xi(-1,1)$，使 $f'(\xi)=0$. 又如，$f(x)=x$ 在闭区间$[0,1]$上连续，且在开区间$(0,1)$内可导，但是 $f(0)=0$，$f(1)=1$，故不存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

例 3.1　设函数 $f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，且 $f(1)=0$，证明：在区间$(0,1)$内至少存在一点 c，使得 $cf'(c)+f(c)=0$.

证明　令 $F(x)=xf(x)$. 由题设可知：$F(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，且在开区间$(0,1)$内可导. 易见 $F(0)=0$. 由于 $f(1)=0$，可知 $F(1)=0$. 从而 $F(x)$在$[0,1]$上满足

罗尔中值定理的条件. 故至少存在一点 $c\in(0,1)$,使得 $F'(c)=0$,即 $cf'(c)+f(c)=0$.

罗尔中值定理中的第三个条件是相当特殊的,它使罗尔中值定理的应用受到限制. 如果取消定理中的第三个条件并改变相应的结论,就得到更一般的拉格朗日中值定理.

二、拉格朗日中值定理

定理 3.2 若函数 $f(x)$满足:

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续,

(2) 在开区间(a,b)内可导,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

也可以写成

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

上述定理称为拉格朗日(Lagrange)中值定理. 在此定理中,若 $f(a)=f(b)$,就变成罗尔中值定理. 也就是说,罗尔中值定理是拉格朗日中值定理的特殊情况.

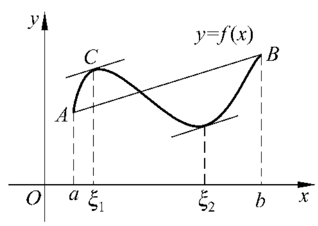

图 3.2

拉格朗日定理的几何意义为:闭区间$[a,b]$上的连续曲线弧,除端点外处处有不垂直于 x 轴的切线,那么在曲线上至少存在一点,使曲线在该点处的切线平行于过曲线两端点的连线,如图 3.2 所示.

拉格朗日中值定理还有下面两个推论:

推论 1 若 $f'(x)$在区间(a,b)内恒为零,则 $f(x)$在区间(a,b)内必为常数.

事实上,对于区间(a,b)内的任意两点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,则 $f(x)$在区间$[x_1,x_2]$上满足拉格朗日中值定理的条件,因此有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0\quad(x_1<\xi<x_2).$$

因为 $f'(\xi)=0$,故有 $f(x_1)=f(x_2)$. 由 x_1,x_2 的任意性可知,$f(x)$在区间(a,b)内为常数.

推论 2 若在区间(a,b)内恒有 $f'(x)=g'(x)$,则 $f(x)=g(x)+C$(C 为任意常数).

该推论的证明留给读者.

例 3.2 对于函数 $f(x)=\ln x$,在闭区间$[1,\mathrm{e}]$上验证拉格朗日定理的正确性.

解 对于函数 $f(x)=\ln x$ 在闭区间$[1,\mathrm{e}]$上连续,在开区间$(1,\mathrm{e})$内可导,又

$$f(1)=\ln 1=0,\quad f(\mathrm{e})=\ln \mathrm{e}=1,\quad f'(x)=\frac{1}{x},$$

由拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(1,\mathrm{e})$,使得

$$\frac{\ln \mathrm{e}-\ln 1}{\mathrm{e}-1}=\frac{1}{\xi},$$

解得

$$\xi=\mathrm{e}-1\in(1,\mathrm{e}).$$

关于中值定理,对于更一般的情况,还有下面的柯西(Cauchy)中值定理.

三、柯西中值定理

定理 3.3　若函数 $f(x)$和 $g(x)$满足：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续，

(2) 在开区间(a,b)内可导，且 $g'(x)\neq 0$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

在上式中，如果 $g(x)=x$，就变成拉格朗日中值定理，所以拉格朗日中值定理是柯西中值定理的特例.

四、洛必达法则

两个无穷小量之比的极限可能存在$\left(\text{如}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$，也可能不存在$\left(\text{如}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\infty\right)$，所以把这种不确定的极限称作未定式. 并记作“$\frac{0}{0}$”，除了“$\frac{0}{0}$”型未定式外还有其他多种类型，如“$\frac{\infty}{\infty}$”、“$0\cdot\infty$”、“$\infty-\infty$”、“$1^\infty$”、“$0^0$”、“$\infty^0$”等. 本节主要解决“$\frac{0}{0}$”和“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式.

在前面已经用恒等变形法、变量替换法等技巧解决了某些未定式的极限计算，但在很多情况下我们会感到这些方法非常困难. 下面介绍的洛必达法则，是解决这类极限的一种简便、快捷、有效的方法.

1. “$\frac{0}{0}$”型未定式的极限

定理 3.4(洛必达法则)　如果 $f(x)$和 $g(x)$满足下列条件：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；

(2) 在点 x_0 的左、右近旁(点 x_0 可除外)可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为无穷大)，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明从略.

说明：对于 $x\to\infty$时的“$\frac{0}{0}$”型未定式，上述法则同样适用，事实上，只要令 $z=\frac{1}{x}$，即可变为 $z\to 0$ 来处理.

例 3.3　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-x}{1-e^x}$.

解　这是“$\frac{0}{0}$”型未定式，由洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-x}{1-e^x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{(3x^2-x)'}{(1-e^x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-1}{-e^x}=\frac{-1}{-1}=1.$$

例 3.4 求极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$.

解 这是“$\dfrac{0}{0}$”型未定式,由洛必达法则,得

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to a}\frac{(e^x-e^a)'}{(x-a)'}=\lim_{x\to a}\frac{e^x}{1}=e^a.$$

有些未定式,利用洛必达法则后,仍是“$\dfrac{0}{0}$”型未定式,需要连续运用洛必达法则,直到得到答案为止.

例 3.5 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

解 这是“$\dfrac{0}{0}$”型未定式,由洛必达法则,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

例 3.6 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解 这是“$\dfrac{0}{0}$”型未定式,由洛必达法则,得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}.$$

2. “$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式的极限

定理 3.5(洛必达法则) 如果 $f(x)$和 $g(x)$满足下列条件:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$;

(2) 在点 x_0 的左、右近旁(点 x_0 可除外)可导,且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为无穷大),则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

对于 $x\to\infty$时的“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式,上述法则同样适用. 只要令 $z=\dfrac{1}{x}$,即可变为 $z\to 0$ 来处理.

例 3.7 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{100}}{e^x}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{100}}{e^x}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{100x^{99}}{e^x}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{100\cdot 99x^{98}}{e^x}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\cdots\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{100!}{e^x}=0.$

例 3.8　求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}$.

解　当 $x\to0^+$ 时,有 $\ln\cot x\to+\infty$ 和 $\ln x\to-\infty$,这是"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式,由洛必达法则,得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x\cdot(-\csc^2 x)}{\dfrac{1}{x}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\cos x\sin x}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}=-1.$$

例 3.9　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^n x}{x}$($n$ 为正整数).

解　所给极限为"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型.由洛必达法则,得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^n x}{x}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to+\infty}\frac{n\ln^{n-1}x\cdot\dfrac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n\ln^{n-1}x}{x}.$$

当 $n>1$ 时,所得极限仍为"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型.再次适用洛必达法则,重复上述运算(n 次),可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^n x}{x}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\ln^{n-2}x}{x}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\cdots\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{x}=0.$$

3. 可化为"$\dfrac{0}{0}$"型或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式的极限

对于"$0\cdot\infty$"、"$\infty-\infty$"、"1^∞"、"0^0"、"∞^0"型未定式,在形式上适当作些变化,就可化为"$\dfrac{0}{0}$"型或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型,然后利用洛必达法则求极限.

例 3.10　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$.

解　这是"$0\cdot\infty$"型未定式.

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)\xlongequal{0\cdot\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1.$$

例 3.11　求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

解　所给极限为"$\infty-\infty$"型,先将所给函数式通分,再利用洛必达法则,得

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)\xlongequal{\infty-\infty}\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

例 3.12 求极限$\lim\limits_{x\to0}(1-\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 这是"1^∞"型的未定式.

$$\lim_{x\to0}(1-\sin 2x)^{\frac{1}{x}}\xlongequal{1^\infty}\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(1-\sin 2x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-\sin 2x)}{x}},$$

而

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-\sin 2x)}{x}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to0}\frac{\frac{-2\cos 2x}{1-\sin 2x}}{1}=-2,$$

所以

$$\lim_{x\to0}(1-\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=e^{-2}.$$

需要指出的是,洛必达法则是求解未定型极限的有效方法,但是对未定型的极限,有时存在极限却不能用洛必达法则求之.有时可用其他方法求解且较洛必达法则简单.因此,遇到未定型极限,应该先进行分析,再选择适当的方法.

应用洛必达法则时应注意以下几个问题.

(1) 洛必达法则只能对"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"型直接使用,因此,每次使用前,必须检验是不是"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式;

(2) 如果有可约因子,或有非零极限值的乘数因子,则可先约分或提取出来,以简化计算步骤;

(3) 洛必达法则中的条件是充分而非必要的,当洛必达法则失效时不能判断原极限一定不存在,这时应改用其他方法求极限;

例如,求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$时,两次使用洛必达法则后,又还原成原来的形式,因而洛必达法则对它失效,事实上

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1.$$

(4) 用洛必达法则求未定式的极限时,若配合使用等价无穷小代换等变形,有时会更简便.

例 3.13 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x-\sin 3x}{(1-\cos x)\ln(1+2x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x-\sin 3x}{(1-\cos x)\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x-\sin 3x}{\frac{x^2}{2}\cdot 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to0}\frac{3-3\cos 3x}{3x^2}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to0}\frac{9\sin 3x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{9\cdot 3x}{6x}=\frac{9}{2}.$$

习题一

1. 下列函数在给定区间上是否满足罗尔中值定理条件？若满足，就求出定理中的 ξ：

(1) $f(x)=2x^2-x-3$，$[-1,1.5]$；　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$[-2,2]$.

2. 函数 $f(x)=x^3-3x$ 在区间$[0,2]$上是否满足拉格朗日定理的条件？若满足，试求出使定理成立的 ξ 值.

3. 证明：对于任意 $x\in[-1,1]$，恒有 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

4. 下列计算错在哪儿？

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3-2x^2+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-1}{3x^2-4x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4}{6x-4}=2$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{1}=1$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{-\sin x}=-1$；

(4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\infty-\infty=0$；

(5) 若 $a>b>0$，则$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=1^\infty=1$；

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{2\mathrm{e}^{2x}}=1$.

5. 利用洛必达法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{\tan 5x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\cot x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-1}$；

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x\ln x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$；　　(12) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$.

第二节　函数的单调性与极值

函数的单调性是函数的一个重要特性，它反映了函数在某个区间上随自变量的增大而增大(或减小)的一个特征.但是，利用函数单调性的定义来判断函数的单调性往往是比

较困难的.现在介绍利用导数的有关知识判定函数单调性的方法.

一、函数单调性的判别方法

先从几何上直观分析,容易看到,图3.3所示的曲线是上升的,其上每一点处的切线与 x 轴正向的夹角都是锐角,切线的斜率大于零,也就是说 $f(x)$ 在相应点处的导数大于零;相反的,图3.4所示的曲线是下降的,其上每一点处的切线与 x 轴正向的夹角都是钝角,切线的斜率小于零,也就是说 $f(x)$ 在相应点处的导数小于零.

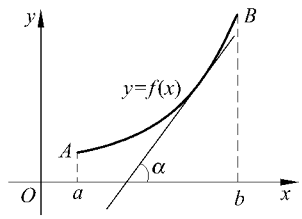

图 3.3

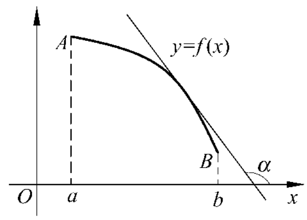

图 3.4

由此可见,函数的单调性与导数的符号之间有着密切的联系.那么,能否用函数导数的符号来判断函数的单调性呢?由拉格朗日中值定理可以得到函数单调性的判定方法.

定理3.6 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导,则有:

(1) 如果在区间 (a,b) 内恒有 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加;

(2) 如果在区间 (a,b) 内恒有 $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调减少.

证明 在区间 (a,b) 内任取两点 x_1 与 x_2,且设 $x_1<x_2$,由拉格朗日中值定理知,存在 $\xi\in(x_1,x_2)$,使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1).$$

(1) 若在区间 (a,b) 内 $f'(x)>0$,则 $f'(\xi)>0$,而 $x_2-x_1>0$,因此 $f(x_2)>f(x_1)$,故 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加.

(2) 若在区间 (a,b) 内 $f'(x)<0$,则 $f'(\xi)<0$,从而 $f(x_2)<f(x_1)$,于是 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调减少.

注意:有些函数的导数仅在个别点处为零,并不影响函数在该区间内的单调性.例如函数 $y=x^3$ 在 $x=0$ 处的导数为零,但很容易观察出它在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

为了便于解决这方面的问题,可把判断函数的单调性的一般步骤归纳如下:

(1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域;

(2) 求 $f'(x)$;

(3) 求出使 $f'(x)=0$ 及 $f'(x)$ 不存在的点;

(4) 用以上各点作为分界点,将函数定义域分为若干个小区间;列表考察 $f'(x)$ 在各个小区间内的符号,从而判断 $f(x)$ 的单调性.

例3.14 判定函数 $y=x^3$ 的单调性.

解 (1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$;

(2) $y'=3x^2\geqslant 0$；

(3) 除点 $x=0$ 以外，$y'>0$，则可以判定函数 $y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

例 3.15　求函数 $f(x)=x^3-3x$ 的单调区间.

解　(1) 函数 $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$；

(2) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$；

(3) 令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=1$；

(4) 列表考察：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

由上表可知，$f(x)$在区间$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$内单调增加；在区间$(-1,1)$内单调减少.

例 3.16　确定函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$的单调区间.

解　(1) 函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$；

(2) $f'(x)=\dfrac{e^x(1+x)-e^x}{(1+x)^2}=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$；

(3) 令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$；

(4) 列表考察：

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	↘		↗

容易看出，$f(x)$在区间$(-\infty,-1)$和$(-1,0)$内单调减少，在区间$(0,+\infty)$内单调增加.

二、函数的极值

1. 函数极值的定义

定义 3.1　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处及左、右附近有定义，若对点 x_0 附近某一范围内的任意一点 $x(x\neq x_0)$，均有

(1) $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$为函数 $f(x)$的极大值，x_0 称为 $f(x)$的极大值点；

(2) $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$为函数 $f(x)$的极小值，x_0 称为 $f(x)$的极小值点.

函数的极大值与极小值统称为函数的极值；极大值点与极小值点统称为极值点.

应当指出的是，函数的极值是函数的一个局部概念，它只是与极值点邻近的函数值相

比较是较大或较小,而不意味着它在函数的整个定义区间内为最大或最小. 如图 3.5 所示的函数 $f(x)$,它在点 x_1 和点 x_3 处各取得极大值,在点 x_2 和点 x_4 处各取得极小值.

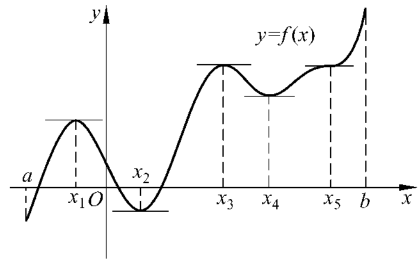

图 3.5

从图 3.5 中可以看到,极大值 $f(x_1)$ 甚至小于极小值 $f(x_4)$,还可以看到,这些极大值都不是函数在定义区间上的最大值,极小值也不是定义区间上的最小值. 同时,不难看出,极值点处如果有切线,切线一定是水平方向的. 但有水平切线的点不一定是极值点. 如图中曲线在点 x_5 处的切线是水平的,但 x_5 却不是极值点.

下面来讨论函数极值存在的必要条件和充分条件.

2. 函数极值的判定及其求法

定理 3.7(极值存在的必要条件) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,且在点 x_0 处取得极值,则 $f'(x_0)=0$.

若 $f'(x_0)=0$,则称 x_0 为 $f(x)$ 的驻点.

关于这个定理需要说明两点:

(1) $f'(x_0)=0$ 只是 $f(x)$ 在点 x_0 取得极值的必要条件,而不是充分条件;

(2) 导数不存在(但连续)的点也有可能取得极值.

例如,函数 $y=x^3$ 在 $x=0$ 时,导数等于零,但在该点并不取得极值;函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$,$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$,显然 $f'(0)$ 不存在,但在 $x=0$ 处却取得极小值,如图 3.6 所示.

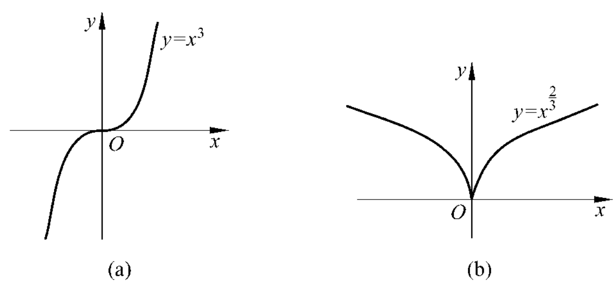

图 3.6

不难看出,函数的极值点只能在驻点和导数不存在的点中产生,但是驻点和导数不存在的点又不一定是极值点. 要判定驻点和导数不存在的点是否为极值点有以下定理:

定理 3.8(极值存在的第一充分条件) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近可导,且满足 $f'(x_0)=0$.

(1) 若当 $x<x_0$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>x_0$ 时,$f'(x)<0$,则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点,$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值(如图 3.7(a)所示);

(2) 若当 $x<x_0$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>x_0$ 时,$f'(x)>0$,则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点,