21世纪

第3章 运输问题

运输问题实际上是一种线性规划问题，当然可以用单纯形法对其进行求解，但由于运输问题的系数矩阵具有特殊的结构，所以可以找到比单纯形法更为简单的算法对其求解，这样就可以节约大量的时间和精力。

本章主要介绍运输问题的数学模型、求解方法、应用、电子表格的建模和求解及案例分析。

3.1 运输问题及其数学模型

一般地，运输问题可以这样描述：设有 m 个产地，n 个销地，第 i 个产地 A_i 的产量为 a_i $(i=1,2,\cdots,m)$，第 j 个销地 B_j 的销量为 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$，第 i 个产地 A_i 到第 j 个销地 B_j 的单位运价为 c_{ij}，有关数据见产销平衡表和单位运价表，如表 3.1 和表 3.2 所示，总产量等于总销量，问如何调运才能使总的运输费用最省？

表 3.1　产销平衡表

产地＼销地	B_1	B_2	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_n	产　量
A_1							a_1
A_2							a_2
$\vdots$							$\vdots$
A_i							a_i
$\vdots$							$\vdots$
A_m							a_m
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_n	

表 3.2　单位运价表

产地＼销地	B_1	B_2	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_n
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1j}	$\cdots$	c_{1n}
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2j}	$\cdots$	c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	c_{i1}	c_{i2}	$\cdots$	c_{ij}	$\cdots$	c_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mj}	$\cdots$	c_{mn}

设 x_{ij} 表示第 i 个产地 A_i 到第 j 个销地 B_j 的运量，z 为总运输费用，在产销平衡的条件下，则有以下数学模型：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{3.1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\cdots,m) & (3.2)\\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\cdots,n) & (3.3)\\ x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n) & (3.4)\end{cases}$$

从运输问题的数学模型可以看出，运输问题是有 mn 个变量，$m+n$ 个约束方程的线性规划问题，其系数矩阵如图 3.1 所示。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{array} \\
\begin{array}{r} m\text{ 行}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ n\text{ 行}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array}
\end{array}
$$

图 3.1　产销平衡运输问题的系数矩阵

观察运输问题的数学模型不难看出，运输问题具有以下两个特点：

(1) 变量 x_{ij} 的系数列向量只有两个分量为 1(第 m 行和第 $m+n$ 行)，其余的分量都为零；即

$$\boldsymbol{p}_{ij} = (0,0,\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第 } i \text{ 个分量}}}{1},\cdots,0,0,\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第 } m+j \text{ 个分量}}}{1},\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

(2) 相互独立的约束方程的个数为 $m+n-1$ 个，因为

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

正是运输问题具有上述两个特点，所以可以找到比单纯形法更为简单的方法对运输问题进行求解，这种方法就是表上作业法。

3.2　运输问题的求解——表上作业法

运输问题是一种线性规划问题，当然可以用单纯形法对其进行求解。但由于运输问题本身具有自己的特点，所以可以采用表上作业法进行求解。用表上作业法求解运输问题的步骤与用单纯形法求解线性规划的步骤是类似的，具体的步骤如下：

(1) 写出运输问题的表格模型，即产销平衡表和单位运价表，转(2)；

(2) 确定初始调运方案(相当于确定初始基本可行解),转(3);

(3) 检验方案是否最优(相当于最优性的判别),若是最优方案,则停止计算;否则转(4);

(4) 调整调运方案,得新的方案(相当于从一个基本可行解过渡到另外一个基本可行解),转(5);

(5) 重复(3)、(4),直到求出最优调运方案。

依据表上作业法的求解步骤,运输问题的求解需要解决以下3个问题:①初始调运方案的确定;②最优方案的判别;③方案的调整。下面就分别加以解决。

3.2.1 初始调运方案的确定

对于产销平衡的运输问题,初始调运方案总是存在的,并且存在有限最优调运方案。这是因为对于运输问题(3.1)~(3.4)来讲,总能找到一个基本可行解,比如令

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{Q} \quad (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n) \tag{3.5}$$

其中 $Q = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$,则式(3.5)就是运输问题的一个可行解;而且目标函数(式(3.1))有上界,目标函数值不会趋近于∞,由此证明运输问题最优解必是有限最优解。

对于初始调运方案的确定,目前有3种方法:①最小元素法;②西北角法(又称左上角法,或阶梯法);③伏格尔法(又称最大差额法)。在介绍各种方法之前,先来看一个例子。

例 3.1 某工厂下设3个分厂 A_1、A_2、A_3,假设这3个分厂生产的产品是同质的,现在需要把3个分厂生产的产品运送到4个销售部 B_1、B_2、B_3、B_4,每个分厂生产的产品数量(单位为件)、每个销售部需要的产品数量(单位为件)以及每个产地到每个销售部的单位运价(单位为元/件)如表3.3所示。问如何进行调运能够使总运费最省?

表 3.3 相关数据表

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产　量
A_1	8	6	7	11	4
A_2	13	10	5	9	7
A_3	5	4	8	12	6
销量	5	3	4	5	17

1. 最小元素法

该方法的基本思想是就近供应,即从单位运价表中最小的运价开始确定产销关系,然后次小。一直到给出初始调运方案,即给出初始基本可行解为止。用最小元素法确定初始调运方案的步骤如下:

从单位运价表中找出单位运价最小的元素,在产销平衡表的相应位置上填上一个尽可能大的数,则产地的产量或销地的销量至少有一个被满足。若某一个产地的产量被满足,则在单位运价表中把相应的行划去;若某一个销地的销量被满足,则在单位运价表中把相应的列划去,重复上述过程,直到单位运价表中所有的元素均被划去,这时在产销平衡表中得到的方案就是初始调运方案。

下面用最小元素法确定例 3.1 的初始调运方案。

解 首先写出这个问题的产销平衡表(表 3.4)和单位运价表(表 3.5)。

表 3.4 产销平衡表

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产 量
A_1					4
A_2					7
A_3					6
销量	5	3	4	5	17

表 3.5 单位运价表

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	6	7	11
A_2	13	10	5	9
A_3	5	4	8	12

依据最小元素法确定初始调运方案的步骤，首先从单位运价表中找出单位运价最小的元素 4，在产销平衡表 A_3B_2 的位置上填上一个尽可能大的数，即把 A_3 这个产地的产量尽可能多地分配给 B_2 这个销地，由于 A_3 这个产地的产量为 6，B_2 这个销地的销量为 3，所以只能在 A_3B_2 的位置填上 3(见表 3.6)，在产销平衡表中填上 3 这个数字以后，B_2 这个销地的销量就得到了满足，然后在单位运价表中把相应的 B_2 所在的列划去(见表 3.7)，表示其它产地没有必要再给 B_2 这个销地运送产品，即 3 件产品由 A_3 运往 B_2 这个销地，这时 A_3 还有 3 件产品没有分配出去。然后再在单位运价表中找出一个单位运价最小的元素 5，因为 $A_3 \to B_1$，$A_2 \to B_3$ 的运价均为 5，这时可以任选其一，不妨选 $A_3 \to B_1$ 的运价，即把 A_3 的产品尽可能多地运往 B_1，由于 A_3 只有 3 件产品没有分配出去，尽管 B_1 需要 5 件，也只能在 A_3B_1 的位置填上 3，填上 3 这个数字以后，A_3 这个产地的产量全部分配出去，即 A_3 这个产地的产量得到了满足，然后在单位运价表中把 A_3 所在的行划去(见表 3.7)，表示 A_3 这个产地的产量全部分配出去，没有可能再给其它销地运送任何数量的产品，即 3 件产品由 A_3 运往 B_1 这个销地，这时 B_1 还有 2 件产品没有满足。然后再在单位运价表中找出一个单位运价最小的元素，即 $A_2 \to B_3$ 的单位运价 5 最小，在 A_2B_3 的位置填上 4，在单位运价表中把 B_3 所在的列划去。重复上述过程，直到单位运价表中所有的元素都被划掉为止，这时在产销平衡表中得到的方案就是初始调运方案(见表 3.6)。初始调运方案是：A_1 运往 $B_2$2 件，运往 $B_4$2 件，A_2 运往 $B_3$4 件，运往 $B_4$3 件，A_3 运往 $B_1$3 件，$B_2$3 件，即得到的初始的基本可行解是 $x_{11}=2$，$x_{14}=2$，$x_{23}=4$，$x_{24}=3$，$x_{31}=3$，$x_{32}=3$。总运费为

$$z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 2\times 8 + 2\times 11 + 4\times 5 + 3\times 9 + 3\times 5 + 3\times 4 = 112(\text{元})$$

表 3.6 最小元素法确定的初始调运方案

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	2			2	4
A_2			4	3	7
A_3	3	3			6
销量	5	3	4	5	

表 3.7 最小元素法在单位运价表上的操作

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	6	7	11	⑥
A_2	13	10	5	9	⑤
A_3	5	4	8	12	②
	④	①	③	⑥	

注：①～⑥表示画虚线的顺序。

从上述初始调运方案的确定过程可以看出，在产销平衡表中有些位置填上了数字，有些位置是空格。为此，给出数字格和空格的定义。

数字格：产销平衡表中有数字的格称为数字格，与数字格对应的变量就是基变量。

空格：没有数字的格称为空格，与空格对应的变量就是非基变量。

关于最小元素法的几点说明：

(1) 数字格必须为 $m+n-1$ 个(若在产销平衡表中填上一个数，产地的产量和销地的销量同时得到了满足，则在划去的行和列的任一位置上补上一个零)。

(2) 数字格不能构成闭回路，即基变量是线性无关的。

(3) 任一空格有且仅有一条闭合回路，即每一个非基变量可以用基变量线性唯一地表出。

缺点：为了节省一处的费用，有时造成在其他处要多花几倍的运费。

2. 西北角法(左上角法)

该方法的基本思想是优先安排产销平衡表中编号最小的产地和销地之间的运输任务，而不是优先考虑具有最小单位运价的运输任务。其具体步骤如下：

首先从产销平衡表的西北角出发，每次选取的变量 x_{ij} 都是左上角的第一个元素，将第一行(A_1)的供应量先分配给第一列(B_1)，若 A_1 的供应量大于 B_1 的需求量，第一行剩余的部分再分配给第二列(B_2)；由西往东分配，直至 A_1 供应量全部分完为止；当 A_1 的供应量小于 B_1 的需求量时，第一列没有满足的部分由第二行分配(A_2)，将 A_2 的部分或全部先分配给 B_1，以弥补 B_1 的短缺数量，若有剩余再往 B_2 分配。以此类推，直至求出调运方案为止。

再看例 3.1。首先从产销平衡表中的西北角出发，由表 3.3 可知，其左上角是 A_1B_1 的位置，即将 A_1 的产量尽可能多地分配给 B_1 这个销地，由于 4(A_1 的产量)$<$5(B_1 的销量)，所以在 A_1B_1 的位置填上 4(见表 3.8)，因 A_1 的产量全部分配完毕，则在单位运价表中把 A_1 所在的行划掉(见表 3.9)，由于 B_1 这个销地还有 1 件产品没有满足，于是再将 A_2 这个产地的产量分配给 B_1 1 件，即在 A_2B_1 的位置填上 1，这时 B_1 这个销地的销量也得到了满足，那么在单位运价表中将 B_1 所在的列划去，接着再将 A_2 这个产地的产量分配给 B_2，在 A_2B_2 的位置填上 3，在单位运价表中把 B_2 所在的列划去，如此继续，在 A_2B_3 的位置填上 3，把 A_2 所在的行划去，在 A_3B_3 的位置填上 1，把 B_3 所在的列划去，再在 A_3B_4 的位置填上 5，把 A_3 所在的行和 B_3 所在的列同时划去，这时在产销平衡表中得到的方案就是初始调运方案(见表 3.8)。用西北角法得到的初始调运方案是：A_1 运往 B_1 4 件；A_2 运往 B_1 1 件，运往 B_2 3 件，运往 B_3 3 件；A_3 运往 B_3 1 件，运往 B_4 5 件，即得到的初始基本可行解是 $x_{11}=4$，$x_{21}=1$，$x_{22}=3$，$x_{23}=3$，$x_{33}=1$，$x_{34}=5$。总运费为

$$z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}=4\times 8+1\times 13+3\times 10+3\times 5+1\times 8+5\times 12=158(\text{元})$$

表 3.8　用西北角法确定的初始调运方案

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4				4
A_2	1	3	3		7
A_3			1	5	6
销量	5	3	4	5	

表 3.9　西北角法在单位运价表上的操作

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	6	7	11	①
A_2	13	10	5	9	④
A_3	5	4	8	12	⑥
	②	③	⑤	⑥	

注：①～⑥表示画虚线的顺序。

3. 伏格尔法

该方法的基本思想是次小运费“就近运给”。即：如果一个产地的产品不能按最小运费就近供应，就考虑次小运费。各行(各列)的最小运费与次小运费之差称为行差(列差)。差额越大，说明不能按最小运费调运时，运费增加就越多，为避免损失，因而对差额最大处，应当采用最小运费调运，其步骤如下：

在单位运价表中计算出各行和各列的次小运费和最小运费的差额，并填入单位运价表中的最后一行和最后一列，从行或列的差额中找出一个差额最大者，若差额最大者位于行，选择该行单位运价最小的元素，在产销平衡表的相应位置上填上一个尽可能大的数，如果产量被满足，则在单位运价表中把相应的行划去，如果是销量被满足，则在单位运价表中把相应的列划去；若差额最大者位于列，选择该列单位运价最小的元素，在产销平衡表的相应位置上填上一个尽可能大的数，如果产量被满足，则在单位运价表中把相应的行划去，如果是销量被满足，则在单位运价表中把相应的列划去，重复上述过程，直到单位运价表中所有的元素均被划去，这时在产销平衡表中得到的方案就是初始调运方案。

再看例 3.1。首先在单位运价表 3.5 中计算出各行、各列的次小运费和最小运费的差额并填入单位运价表中的倒数第五行和倒数第五列得表 3.10。从表 3.10 中找出差额最大的是 4，与 4 对应的是第二行，在第二行中单位运价最小的是 5，那么就在产销平衡表中 A_2B_3 的位置填上一个尽可能大的数，由于 A_2 的产量是 7，B_3 的销量是 4，则在 A_2B_3 的位置上填上 4，这样 B_3 这个销地的销量得到了满足，于是在单位运价表中把 B_3 所在的列划去。然后再从未被划去的单位运价表中计算出各行和各列的次小运费和最小运费的差额并填入单位运价表中的倒数第四行和倒数第四列，最大差额是 3，与 3 对应的是第一列，在第一列中最小元素是 5，那么就在产销平衡表 A_3B_1 的位置填上一个尽可能大的数，由于 A_3 产地的产量是 4 件，B_1 的销量是 5 件，所以在 A_3B_1 位置填上 5，这样 B_1 这个销地的销量得到了满足，就在单位运价表中把 B_1 所在的列划去。然后再从未被划去的单位运价表中计算出各行、各列的次小运费和最小运费的差额并填入单位运价表中的倒数第三行和倒数第三列，找出差额最大的是 8，与 8 对应的是第三行，在第三行中单位运价最小的是 4，那么就在产销平衡表中 A_3B_2 的位置填上一个尽可能大的数，由于 A_3 的产量是 6，已经分配给 $B_1$5 件，只能分配给 $B_2$1 件，则在 A_3B_2 的位置填上 1，这样 A_3 这个产地的产量得到了满足，于是在单位运价表中把 A_3 所在的行划去。重复上述过程，在 A_1B_2 的位置上填上 2，划去 B_2 所在的

列，在 A_1B_4 的位置填上 2，划去 A_1 所在的列，在 A_2B_3 的位置填上 3，同时划去 A_2 所在的行、B_4 所在的列，这时在产销平衡表中得到的方案就是初始调运方案（见表 3.11）。

表 3.10　次小运费与最小运费的差额

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	行差额	行差额	行差额	行差额	行差额
A_1	8	6	7	11	1	2	5	5	11
A_2	13	10	5	9	4	1	1	1	9
A_3	5	4	8	12	1	1	8		
列差额	3	2	2	2					
列差额	3	2		2					
列差额		2		2					
列差额		4		2					
列差额		2							
列差额		9							

表 3.11　用伏格尔法确定的初始调运方案

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量（件）
A_1		2		2	4
A_2			4	3	7
A_3	5	1			6
销量	5	3	4	5	

用伏格尔法得到的初始调运方案是：A_1 运往 B_2 2 件，运往 B_4 2 件；A_2 运往 B_3 4 件，运往 B_4 3 件；A_3 运往 B_1 5 件，运往 B_2 1 件，即得到的初始基本可行解为 $x_{12}=2$，$x_{14}=2$，$x_{23}=4$，$x_{24}=3$，$x_{31}=5$，$x_{32}=1$。总运费为 $z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}=2\times6+2\times11+4\times5+3\times9+5\times5+1\times4=110$（元）。

优点：计算量小，距离最优解更近，常用来替代最优解。

缺点：寻找初始基本可行解不容易。

3.2.2　最优方案的判别

得到的调运方案是不是最优方案，通常需要对方案的最优性进行判别。对方案最优性的判别就是要求出各个非基变量的检验数，即各个空格处的检验数。如果每个空格处的检验数都满足大于等于零，表明任何一个空格处运量增加一个单位，总运费就要增加，这说明当前的方案就是最优方案；否则，如果存在某个空格处的检验数小于等于零，则说明当前的方案不是最优方案，需要对方案进行调整。对最优性的判别有两种方法：一是闭回路法；二是位势法，下面分别加以介绍。

1. 闭回路法

所谓闭回路就是以空格为始点和终点，其余顶点为数字格构成的一个封闭回路。如何来画一个闭合回路呢？就是从一个空格开始，用水平或垂直线向前画，碰到一个数字格要么

旋转 90°,要么直接通过。如果选择旋转 90°,则必须以该数字格为顶点,继续向前画,直到返回始点;如果选择直接通过,那么该数字格就不是顶点,继续选择其他的数字格为顶点,直到返回始点为止。在闭回路上通常规定:始点是偶点,依次奇偶相间进行标注;偶点标"+",表示运量增加;奇点标"−",表示运量减少,这样做能够保证每个产地的产量不变,同时每个销地的销量不变。闭回路是多种多样的,有的比较简单,有的则复杂一点。图 3.2(a)、(b)、(c)所示的都是闭回路。

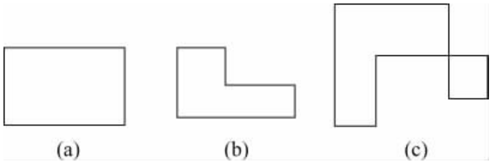

图 3.2　闭回路的例子

用闭回路法对方案的最优性进行判别,就是从每个空格出发,以其他的数字格为顶点作一个封闭的回路。在这个闭合回路上,让空格处的运量增加一个单位,同时调整闭合回路上其他数字格上的运量,然后考虑整个闭合回路运费的增加值,这个增加值就是空格处的检验数。

现在来判别一下例 3.1 用最小元素法得到的初始调运方案是否是最优方案。首先从产销平衡表中的每一个空格出发作一个闭合回路,然后考虑每一个闭合回路上运费的增加值。从空格 A_1B_2 出发,以 A_3B_2、A_3B_1、A_1B_1 为顶点作一个闭合回路,A_1B_2 为偶点,然后偶奇相间进行标注,如表 3.12 所示,这样 A_1B_2 增加一个单位,总运费会增加 6−4+5−8=−1,即 x_{12}的检验数为−1。同样以 A_1B_3、A_2B_1、A_2B_2、A_3B_3、A_3B_4 为顶点作一个闭合回路,闭合回路的路径如表 3.13 所示。

表 3.12　闭合回路的画法

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	2 (−)	(+)		2	4
A_2			4	3	7
A_3	3 (+)	(−) 3			6
销量	5	3	4	5	

表 3.13　所有的闭合回路

始　　点	路　　径	检　验　数
A_1B_2	$A_1B_2-A_2B_2-A_3B_1-A_1B_1-A_1B_2$	6−4+5−8=−1
A_1B_3	$A_1B_3-A_1B_4-A_2B_4-A_2B_3-A_1B_3$	7−11+9−5=0
A_2B_1	$A_2B_1-A_1B_1-A_1B_4-A_2B_4-A_2B_1$	13−8+11−9=7
A_2B_2	$A_2B_2-A_2B_4-A_1B_4-A_1B_1-A_3B_1-A_3B_2-A_2B_2$	10−9+11−8+5−4=5
A_3B_3	$A_3B_3-A_2B_3-A_2B_4-A_1B_4-A_1B_1-A_3B_1-A_3B_3$	8−5+9−11+8−5=4
A_3B_4	$A_3B_4-A_1B_4-A_1B_1-A_3B_1-A_3B_4$	12−11+8−5=4

从表 3.13 可以看出,并不是所有空格处的检验数都满足大于等于零,所以该初始调运方案不是最优方案。

2. 位势法

(1) 用位势法进行最优性判别的基本理论

运输问题的数学模型

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \tag{3.6}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad (i=1,2,\cdots,m) & (3.7)\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \quad (j=1,2,\cdots,n) & (3.8)\\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) & (3.9)\end{cases}$$

设对应于约束条件(3.7)和式(3.8)的对偶变量分别是 $u_i(i=1,2,\cdots,m)$ 和 $v_j(j=1,2,\cdots,n)$，则运输问题的对偶问题是：

$$\max w=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j \tag{3.10}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}u_i+v_j\leqslant c_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) & (3.11)\\ u_i,v_j\ \text{无约束} & (3.12)\end{cases}$$

由第2章表2.4可知，所有变量的检验数都可以写成 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$，则变量 x_j 的检验数可写成

$$\sigma_j=c_j-C_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j=c_j-Y\boldsymbol{P}_j \tag{3.13}$$

其中，Y 为对偶问题的一个基本解；$\boldsymbol{P}_j$ 为变量 x_j 的系数列向量。

对于变量 x_{ij}，则有

$$\sigma_{ij}=c_{ij}-C_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_{ij}=c_{ij}-Y\boldsymbol{P}_{ij}$$

由于

$$\boldsymbol{P}_{ij}=(0,0,\cdots,1,\cdots,0,0,\cdots,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$
$$Y=(u_1,u_2,\cdots,u_m,v_1,v_2,\cdots,v_n)$$

所以 x_{ij} 的检验数可以写成

$$\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j) \tag{3.14}$$

又基变量的检验数为0，所以对于基变量 x_{ij} 有

$$\sigma_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j=0 \tag{3.15}$$

即

$$c_{ij}=u_i+v_j \tag{3.16}$$

运输问题基变量的个数为 $m+n-1$ 个，因此满足式(3.15)的约束方程有 $m+n-1$ 个，但对偶问题的对偶变量是 $m+n$ 个。显然方程的个数小于变量的个数，故满足式(3.15)的方程组有无穷多组解，必然有一个变量为自由变量。这样不妨任给一个变量的值，利用式(3.15)就可以求出其他 $m+n-1$ 个变量。求出所有的变量 u_i(称为行位势)和 v_j(称为列位势)后，再利用式(3.14)就可求出所有非基变量的检验数。

(2) 用位势法进行最优性判别的步骤

依据上面的基本理论，归纳出用位势法进行最优性判别的步骤如下：

① 建立位势表。将有数字格的位置换上相应的单位运价，任给一个行位势或列位势(比如令 $u_1=0$)，利用式(3.15)写出其他的位势，行位势和列位势相加得空格处的位势(对于基变量：行位势和列位势之和等于单位运价)。

② 建立检验数表。空格处的单位运价减空格处的位势得空格处的检验数。

③ 若所有空格处的检验数均满足大于等于零，则取得最优解。

用位势法对例 3.1 用最小元素法得到的初始调运方案进行最优性的判别。

解 按照位势法求检验数的步骤，首先建立位势表，将表 3.6 中有数字格的位置换成相应的单位运价，并令 $u_1=0$，得表 3.14（括号里的数字表示空格处的位势，行位势和列位势之和得空格处的位势）。

表 3.14 位势表

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	行位势 u_i
A_1	8	(7)	(7)	11	0
A_2	(6)	(5)	5	9	−2
A_3	5	4	(4)	(8)	−3
列位势 v_j	8	7	7	11	

然后建立检验数表。用空格处的单位运价减空格处的位势，得空格处的检验数，如表 3.15 所示。

表 3.15 检验数表

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1		−1	0	
A_2	7	5		
A_3			4	4

从表 3.15 可以看出，用位势法得到的检验数和用闭回路法得到的检验数是一致的。因为所有变量的检验数不满足都大于等于零，所以初始方案不是最优方案。这就需要对当前的方案进行调整。

3.2.3 方案的调整

如果得到的方案不是最优方案，如何来对方案进行调整呢？可采用闭回路法对方案进行调整。具体的步骤如下：

（1）在所有小于零的检验数中找出一个最小的，从这个最小检验数对应的空格出发，以其他数字格为顶点构成闭回路。可以证明，此闭回路存在且唯一。

（2）在闭回路上进行运量调整，使选定空格处的运量尽可能地增加。空格处运量增加的最大值等于要减少数字格的最小值。

（3）运量调整后，必然有某个数字格变成零。把一个变成零的数字格抹去，得新的调运方案。

对例 3.1 用最小元素法得到的初始调运方案进行调整。

最优性的判别表明：该初始调运方案不是最优方案，需要对方案进行调整。观察表 3.15，只有 A_1B_2 的检验数小于零。因此，以 A_1B_2 为始点，从空格 A_1B_2 出发，以 A_3B_2、A_3B_1、A_1B_1 为顶点作一个闭合回路，见表 3.16。让 A_1B_2 位置上的运量尽可能地增加，它增加的最大值只能等于要减少数字格 A_3B_2、A_1B_1 的最小值，这样在 A_1B_2 位置只能填上 2，而 A_1B_1 的位置变为 0，把这个零抹去，得到新的方案见表 3.17。

表 3.16 闭合回路

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	2 (−)	(+)		2	4
A_2			4	3	7
A_3	3 (+)	(−) 3			6
销量	5	3	4	5	

表 3.17 新的调运方案

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1		2		2	4
A_2			4	3	7
A_3	5	1			6
销量	5	3	4	5	

那么这个新的方案是否是最优方案呢？再来求一下各个空格处的检验数。建立新的位势表(见表 3.18)和检验数表(见表 3.19)。

表 3.18 新的位势表

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	行位势 u_i
A_1	(7)	6	(7)	11	0
A_2	(5)	(4)	5	9	−2
A_3	5	4	(5)	(9)	−2
列位势 v_j	7	6	7	11	

表 3.19 新的检验数表

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1		0	
A_2	8	6		
A_3			1	3

从表 3.19 可以看出，所有变量的检验数都满足大于等于零，表明当前的方案就是最优方案，即 $x_{12}=2$，$x_{14}=2$，$x_{23}=4$，$x_{24}=3$，$x_{31}=5$，$x_{32}=1$。总运费为

$$z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}=2\times6+2\times11+4\times5+3\times9+5\times5+1\times4=110(\text{元})$$

关于调运方案调整的几点补充说明：

(1) 如果小于零的检验数中最小的检验数不止一个，则可任选其一，以其他的数字格为顶点构成一个闭合的回路。

(2) 在方案的调整过程中，如果变为零的数字格不止一个，仅抹掉一个零，以保证数字格的个数是 $m+n-1$ 个。