

第3章 命题逻辑

3.1 命题的有关概念

【习题 3.1】

1. 指出下列语句哪些是命题,对于命题指出其真值.

- (1) 北京在 2008 年举办奥运会.
- (2) 离散数学是计算机专业的必修课.
- (3) $x > y$.
- (4) 西南大学是一所“211 工程”建设的学校.
- (5) 1 是素数.
- (6) 很多人喜欢超级女声节目.
- (7) 月收入超过 2000 元要上缴个人所得税.

解 (1) 是命题,真值为 1.

(2) 是命题,真值为 1.

(3) 不是命题,因为 x 和 y 的取值未定,于是无法确定 $x > y$ 的真值.

(4) 是命题,真值为 1.

(5) 是命题,真值为 0.

(6) 是命题,真值为 1.

(7) 是命题,真值为 1.

2. 找出下列各命题的所有原子命题,并分别用小写英文字母表示.

- (1) 我不去游泳.
- (2) 张三一边看书,一边听 MP3 音乐.
- (3) 小李能歌善舞.
- (4) 这学期我选修“人工智能”或“模式识别”课程.
- (5) 明天去深圳的飞机是上午八点或上午八点半起飞.
- (6) 如果我有时间,我就回家去看望我的父母.
- (7) 我今天进城,除非天下雨.
- (8) 小张既没有外出也没有上网,他在睡觉.
- (9) 你只有刻苦学习,才能取得好成绩.
- (10) 仅当你走,我留下值班.

解 (1) p : 我去游泳.

(2) p : 张三看书, q : 张三听 MP3 音乐.

(3) p : 小李能歌, q : 小李善舞.

(4) p : 这学期我选修“人工智能”课程, q : 这学期我选修“模式识别”课程.

- (5) p : 明天去深圳的飞机是上午八点起飞, q : 明天去深圳的飞机是上午八点半起飞.
 (6) p : 我有时间, q : 我回家去看望我的父母.
 (7) p : 我今天进城, q : 天下雨.
 (8) p : 小张外出, q : 小张上网, r : 他睡觉.
 (9) p : 你刻苦学习, q : 你取得好成绩.
 (10) p : 你走, q : 我留下值班.

3.2 逻辑联结词

【习题 3.2】

1. (1) 设 p : 现在很多人都有车, 求 $\neg p$.
 (2) 写出“ -2 是偶数或 3 是正数”的否定命题.
 (3) 设 p : 每个自然数都是整数, 求 $p \vee \neg p$.

解 (1) $\neg p$: 现在不是很多人都有车.

(2) “ -2 是偶数或 3 是正数”的否定命题为“ -2 不是偶数并且 3 不是正数”.

(3) $p \vee \neg p$: 每个自然数都是整数或者不是每个自然数都是整数.

2. 令 p : 今天有雨, q : 明天有雨, 问 $p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, p \oplus q, p \uparrow q, p \downarrow q$ 和 $p \overset{n}{\rightarrow} q$ 分别表示什么复合命题?

解 $p \wedge q$: 今明两天都有雨.

$p \vee q$: 今天或者明天有雨.

$p \rightarrow q$: 如果今天有雨, 那么明天有雨.

$p \oplus q$: 今明两天只有一天有雨.

$p \uparrow q$: 不可能今明两天都有雨.

$p \downarrow q$: 不可能今天或明天有雨.

$p \overset{n}{\rightarrow} q$: 不可能今天有雨, 则明天有雨.

3. 令 p : 我们去图书馆, q : 我们去上网, 问 $\neg(p \wedge q)$ 表示什么复合命题?

解 $\neg(p \wedge q)$: 我们不能既去图书馆又去上网.

4. 令 p : 我生病, q : 我去上课, 则“虽然我没有生病, 但我不去上课”该如何用符号表示?

解 $\neg p \wedge \neg q$.

5. “张红和张兰是姐妹”中的和与联结词 $\wedge$ 有什么不同?

解 “张红和张兰是姐妹”中的和表示的是两个人之间的关系, 而联结词 $\wedge$ 表示的是两个命题之间的“和”. 特别注意, 不能将“张红和张兰是姐妹”分解成“张红是姐妹”且“张兰是姐妹”.

6. 写出一个命题, 它可以表示为 $p \leftrightarrow (\neg q \wedge r)$.

解 令 p : 今天体育课考试, q : 今天下雨, r : 马老师来了, 则 $p \leftrightarrow (\neg q \wedge r)$ 表示“今天体育课考试当且仅当今天不下雨并且马老师来了”.

3.3 命题公式及其真值表

【习题 3.3】

1. 将下列命题符号化.

- (1) 若 a 和 b 是奇数, 则 $a+b$ 是偶数.
- (2) 只有在正整数 $n \leq 2$ 时, 不定方程 $x^n + y^n = z^n$ 才有正整数解.
- (3) 天在下雨, 我没有去书店.
- (4) 两矩阵相等当且仅当其对应的元素分别相等.
- (5) 这苹果虽然甜, 但我不打算买.
- (6) 除非我接到正式邀请, 否则我不去参加圣诞晚会.
- (7) 我和小王是同学.
- (8) 因为他要看今晚的 NBA 篮球比赛, 所以他没有来上自习.
- (9) 尽管她学习成绩不太好, 但她的动手能力很强.
- (10) 我的手机没电了, 借你的手机用一下.

解 (1) 令 p : a 是奇数, q : b 是奇数, r : $a+b$ 是偶数,
所以 $p \wedge q \rightarrow r$.

(2) 令 p : 正整数 $n \leq 2$ 时, q : 不定方程 $x^n + y^n = z^n$ 有正整数解,
所以 $q \rightarrow p$.

(3) 令 p : 天在下雨, q : 我去书店,
所以 $p \wedge \neg q$.

(4) 令 p : 两矩阵相等, q : 两矩阵对应的元素分别相等,
所以 $p \leftrightarrow q$.

(5) 令 p : 这苹果甜, q : 我打算买,
所以 $p \wedge \neg q$.

(6) 令 p : 我接到正式邀请, q : 我去参加圣诞晚会,
所以 $\neg p \rightarrow \neg q$.

(7) 令 p : 我和小王是同学,
所以 p .

(8) 令 p : 他看今晚的 NBA 篮球比赛, q : 他来上自习,
所以 $p \wedge \neg q$.

(9) 令 p : 她学习成绩好, q : 她的动手能力很强,
所以 $\neg p \wedge q$.

(10) 令 p : 我的手机没电了, q : 借你的手机用一下,
所以 $p \wedge q$.

2. 设 p, q 和 r 为命题变元, 列出下列命题公式的真值表.

(1) $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$.

(2) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$.

(3) $(p \vee q) \rightarrow r$.

(4) $(p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r))$.

解 (1) $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$ 的真值表如表 3-1 所示.

表 3-1

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \wedge (p \vee q)$	$\neg p \wedge (p \vee q) \rightarrow q$
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

(2) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$ 的真值表如表 3-2 所示.

表 3-2

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0

(3) $(p \vee q) \rightarrow r$ 的真值表如表 3-3 所示.

表 3-3

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

(4) $A = (p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r))$ 的真值表如表 3-4 所示.

表 3-4

p	q	r	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$	A
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0

p	q	r	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$	A
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1

3. 设 p, q, r 和 s 为命题变元, 判断下列命题公式的类型.

(1) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$.

(2) $((p \rightarrow r) \vee \neg r) \rightarrow (\neg(q \rightarrow p) \wedge q)$.

(3) $((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q))$.

(4) $p \rightarrow (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)$.

解 (1) $A = (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$ 的真值表如表 3-5 所示.

表 3-5

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \wedge q$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	A
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1

由真值表可知, $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$ 是永真式.

(2) 在取 $p=0, q=1, r=1$ 时, 则 $((p \rightarrow r) \vee \neg r) \rightarrow (\neg(q \rightarrow p) \wedge q)$ 为 1, 在取 $p=0, q=0, r=0$ 时, 则 $((p \rightarrow r) \vee \neg r) \rightarrow (\neg(q \rightarrow p) \wedge p)$ 为 0, 于是 $((p \rightarrow r) \vee \neg r) \rightarrow (\neg(q \rightarrow p) \wedge q)$ 是中性式.

(3) 根据联结词 $\leftrightarrow$ 的定义, 对于命题公式 $((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q))$, 分别考虑 $(p \vee q) \rightarrow r$ 和 $r \rightarrow (p \wedge q)$. 很显然, 在 $p=0, q=0, r=0$ 时, $(p \vee q) \rightarrow r$ 和 $r \rightarrow (p \wedge q)$ 都为 1, 在这种指派下原命题公式为 1. 若 $(p \vee q) \rightarrow r$ 为 0, 则可取 $p=1, q=1, r=0$, 而这时 $r \rightarrow (p \wedge q)$ 为 1, 于是在这种指派下原命题公式为 0.

故 $((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q))$ 是中性式.

(4) 取 $p=1, q=1, r=1, s=1$ 时, 则 $p \rightarrow (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)$ 为 0, 取 $p=0, q=0, r=0, s=0$

时,则 $p \rightarrow (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)$ 为 1, 于是 $p \rightarrow (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)$ 是中性式.

4. 证明: 对于任意命题公式 A 、 B 和 C , 下列命题公式均永真:

- (1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.
- (2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$.
- (3) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$.

证 (1) 假定 $B \rightarrow A$ 取 0, 则 $B=1, A=0$, 因此 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 永真.

(2) 对于命题变元 p, q 和 $r, D=(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ 的真值表如表 3-6 所示.

表 3-6

p	q	r	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	D
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

由真值表可知, 命题公式 $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ 是永真式, 故对于任意命题公式 A, B 和 $C, (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 是永真式.

(3) 假定 $B \rightarrow A$ 取 0, 则 $B=1, A=0$, 于是 $\neg A=1, \neg B=0$, 进而 $\neg A \rightarrow \neg B$ 取 0, 因此 $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 永真.

5. 证明: 对于任意命题公式 A 和 B , 有 $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 永真.

证 对于任意命题变元 p 和 q , 列出 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 的真值表如表 3-7 所示.

表 3-7

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1

由真值表可知, $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 是永真式, 根据永真式的代入定理知, 对于任意命题公式 A 和 B , 有 $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 永真.

6. 对于任意命题公式 A, B 和 C , 证明下列命题公式永真.

- (1) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.

(2) $(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow C$.

(3) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$.

(4) $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$.

证 (1) 假定 $A \rightarrow B$ 取 0, 则 $A=1, B=0$, 于是 $\neg A=0$, 因此 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 永真.

(2) 若 $(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow C$ 为 0, 则

$$(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) = 1 \text{ 且 } C = 0,$$

由 $(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) = 1$, 可得 $A \vee B = 1, A \rightarrow C = 1, B \rightarrow C = 1$. 由于 $C = 0$, 由 $A \rightarrow C = 1$ 和 $B \rightarrow C = 1$, 可推出 $A = 0$ 且 $B = 0$, 进而 $A \vee B = 0$, 这与 $A \vee B = 1$ 矛盾.

故 $(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow C$ 永真.

(3) 假定 $\neg A$ 取 0, 则 $A = 1$.

若 $B = 0$, 则 $A \rightarrow B = 0$, 进而 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) = 0$.

若 $B = 1$, 则 $\neg B = 0$, 于是 $A \rightarrow \neg B = 0$, 进而 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) = 0$.

因此 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ 永真.

(4) 假定 $\neg A \rightarrow B$ 取 0, 则 $\neg A = 1, B = 0$, 进而 $A = 0$, 所以 $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ 永真.

3.4 逻辑等值的命题公式

【习题 3.4】

1. 证明: 命题公式间的等值关系是等价关系.

证 (1) 对于任意命题公式 A , 显然 $A = A$, 所以 $=$ 是自反的.

(2) 对于任意命题公式 A 和 B , 若 $A = B$, 则 $B = A$, 于是 $=$ 是对称的.

(3) 对于任意命题公式 A, B 和 C , 若 $A = B$ 且 $B = C$, 则 $A = C$, 因此 $=$ 是传递的.

由(1)、(2)和(3)知, $=$ 是等价关系.

2. 证明主教材中定理 3-5 中的分配律(6)和 De Morgan 律(8).

证 (1) 先证明析取对合取可分配: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

对于任意命题变元 p, q 和 r , 分别列出 $p \vee (q \wedge r)$ 及 $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 的真值表如表 3-8 所示.

表 3-8

$p \quad q \quad r$	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1 1 1	1	1	1	1	1
1 1 0	0	1	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	1	1
0 1 0	0	1	0	0	0
0 0 1	0	0	1	0	0
0 0 0	0	0	0	0	0

由真值表可知, $p \vee (q \wedge r)$ 和 $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 在任何指派下有相同的真值, 所以 $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$. 于是 $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ 对于任意命题公式 A, B 和 C 均成立.

再证明合取对析取可分配: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

对于任意命题变元 p, q 和 r , 分别列出 $p \wedge (q \vee r)$ 及 $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 的真值表如表 3-9 所示.

表 3-9

p q r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1 1 1	1	1	1	1	1
1 1 0	1	1	0	1	1
1 0 1	1	0	1	1	1
1 0 0	0	0	0	0	0
0 1 1	1	0	0	0	0
0 1 0	1	0	0	0	0
0 0 1	1	0	0	0	0
0 0 0	0	0	0	0	0

由真值表可知, $p \wedge (q \vee r)$ 和 $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 在任何指派下有相同的真值, 所以 $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. 于是 $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, 对于任意命题公式 A, B 和 C 均成立.

(2) 先证明 $\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.

对于任意命题变元 p, q , 分别列出 $\neg (p \vee q)$ 及 $\neg p \wedge \neg q$ 的真值表如表 3-10 所示.

表 3-10

p q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg (p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
1 1	1	0	0	0	0
1 0	1	0	1	0	0
0 1	1	1	0	0	0
0 0	0	1	1	1	1

由真值表可知, $\neg (p \vee q)$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 在任何指派下有相同的真值, 所以 $\neg (p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$. 于是 $\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ 对于任意命题公式 A, B 均成立.

再证明 $\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$.

对于任意命题变元 p, q , 分别列出 $\neg (p \wedge q)$ 及 $\neg p \vee \neg q$ 的真值表如表 3-11 所示.

由真值表可知, $\neg (p \wedge q)$ 和 $\neg p \vee \neg q$ 在任何指派下有相同的真值, 所以 $\neg (p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$. 于是 $\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ 对于任意命题公式 A, B 均成立.

表 3-11

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg (p \wedge q)$	$\neg q \vee \neg p$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

3. 设 A, B, C 是任意的命题公式,判断下列命题是否成立,阐述理由.

(1) 若 $A \wedge C = B \wedge C$,则 $A = B$.

(2) 若 $A \vee C = B \vee C$,则 $A = B$.

(3) 若 $\neg A = \neg B$,则 $A = B$.

解 (1) 不成立. 取 $A = p, B = p \vee q, C = p$,则 $A \wedge C = p \wedge p = p$ 且 $B \wedge C = (p \vee q) \wedge p \stackrel{\text{吸收律}}{=} p$. 于是 $A \wedge C = B \wedge C$. 而显然 $p \neq p \vee q$,即 $A \neq B$.

(2) 不成立. 取 $A = p, B = p \wedge q, C = p$,则 $A \vee C = p \vee p = p$ 且 $B \vee C = (p \wedge q) \vee p \stackrel{\text{吸收律}}{=} p$,于是 $A \vee C = B \vee C$. 而显然 $p \neq p \wedge q$,即 $A \neq B$.

(3) 成立. 因为 $\neg A = \neg B$,所以 $\neg \neg A = \neg \neg B$,于是 $A = B$.

4. 设 A, B 是任意的命题公式,证明下列各式.

(1) $A \oplus B = \neg (A \leftrightarrow B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

(2) $A \rightarrow B = \neg A \vee B$.

(3) $A \uparrow B = \neg (A \wedge B)$.

(4) $A \downarrow B = \neg (A \vee B)$.

证 这些等值式的证明,可以先针对命题变元进行,再根据主教材中定理 3-2 和永真式的代入定理就得到要证明的结论. 下面都是将 A 看做命题变元 p 且 B 看做命题变元 q ,利用真值表进行的证明.

(1) 列出命题公式 $p \oplus q, \neg (p \leftrightarrow q)$ 和 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 如表 3-12 所示.

表 3-12

p	q	$p \oplus q$	$\neg (p \leftrightarrow q)$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	0

由真值表知,命题公式 $p \oplus q, \neg (p \leftrightarrow q)$ 和 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 在任何指派下的取值都相同,因此 $p \oplus q = \neg (p \leftrightarrow q) = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$. 故对于任意命题公式 A, B ,有 $A \oplus B = \neg (A \leftrightarrow B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

(2) 列出命题公式 $p \rightarrow q$ 和 $\neg p \vee q$ 如表 3-13 所示.

表 3-13

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

由真值表知,命题公式 $p \rightarrow q$ 和 $\neg p \vee q$ 在任何指派下的取值都相同,故 $p \rightarrow q = \neg p \vee q$.

(3) 列出命题公式 $p \uparrow q$ 和 $\neg (p \wedge q)$ 如表 3-14 所示.

表 3-14

p	q	$p \wedge q$	$p \uparrow q$	$\neg (p \wedge q)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

由真值表知,命题公式 $p \uparrow q$ 和 $\neg (p \wedge q)$ 在任何指派下的取值都相同,于是 $p \uparrow q = \neg (p \wedge q)$,故对于任意命题公式 A, B ,有 $A \rightarrow B = \neg A \vee B$.

(4) 列出命题公式 $p \downarrow q$ 和 $\neg (p \vee q)$ 如表 3-15 所示.

表 3-15

p	q	$p \vee q$	$p \downarrow q$	$\neg (p \vee q)$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	1

由真值表知,命题公式 $p \downarrow q$ 和 $\neg (p \vee q)$ 在任何指派下的取值都相同,所以 $p \downarrow q = \neg (p \vee q)$,故对于任意命题公式 A, B ,有 $A \downarrow B = \neg (A \vee B)$.

5. 设 A, B, C 是任意的命题公式,证明下列各式.

- (1) $A \oplus B = B \oplus A$.
- (2) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.
- (3) $A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$.
- (4) $\neg (A \leftrightarrow B) = A \leftrightarrow \neg B$.

证 (1) 根据主教材中定理 3-6 有 $A \oplus B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$,于是

$$B \oplus A = (B \wedge \neg A) \vee (\neg B \wedge A)$$

由于 $\wedge$ 和 $\vee$ 满足交换律,所以