第 1 章

微　分　学

本章主要介绍以下内容：

（1）函数、反函数、复合函数、函数的定义域和值域等概念。

（2）数列的极限和函数的极限的概念，极限的四则运算法则；自变量趋向无穷大或有限值时函数极限存在的条件。

（3）函数连续的概念、连续函数的性质。

（4）导数的概念及其几何意义，微分的概念。

（5）函数可导的充分必要条件、函数可导与连续的关系。

（6）导数的四则运算法则、复合函数的求导法则、隐函数求导法。

（7）基本初等函数的导数公式和微分公式。

（8）利用微分进行近似计算。

1.1　函数

1.1.1　函数概念

1. 区间和邻域

在介绍函数概念以前，有必要先介绍区间和邻域的概念。

在数学中，某些指定的数集在一起就成为一个**数集**。显然，数集是关于数的集合。常用的数集及其代号是：**自然数集 N**（包括 0 和所有正整数）、**整数集 Z**、**有理数集 Q** 和**实数集 R**。其中，涉及最多的是实数集 **R**。

区间是 **R** 的一个连续子集。中学阶段已经学过区间及其表示方法，例如，$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$、$(a,b)=\{x|a<x<b\}$、$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$、$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$和$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$等。本书将用字母 I 泛指任何一种区间。

【说明】　在无穷区间表示方法中，$-\infty$ 和 $+\infty$ 都不是数。它们的实际含义将在

1.2.2 小节介绍,现在仅把它们当做符号,而且在它们的两侧只能用圆括号,不能用方括号。$-\infty$和$+\infty$分别读做“负无穷大”和“正无穷大”。有时,$-\infty$和$+\infty$统一记为∞。

设 x_0 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,数集$\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$称为点 x_0 的**δ 邻域**,记做 $U(x_0,\delta)$;点 x_0 和数 δ 分别称为这个邻域的**中心**和**半径**。数集$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$称为点 x_0 的**空心δ 邻域**,记做$\mathring{U}(x_0,\delta)$;点 x_0 和 δ 也分别称为$\mathring{U}(x_0,\delta)$的中心和半径。δ 邻域和空心 δ 邻域在数轴上的表示,见图 1-1 所示。

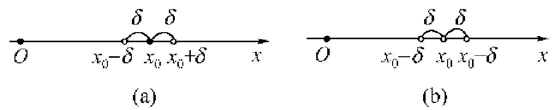

图 1-1

2. 函数

在一个实际问题中,往往同时存在着几个变量。一般情况下它们之间有确定的相依关系,即一个变量的变化受其他变量变化的影响。先看两个实例。

实例 1-1 圆面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系。

根据几何学知识,圆面积 A 与它的半径 r 之间的关系是

$$A = \pi r^2$$

当半径 r 在区间$(0,+\infty)$内任意取定一个数值时,由上式就可以确定圆的面积 A。

实例 1-2 某地一昼夜时间内温度 T 与时间 t 之间的相依关系。

图 1-2 是某地气象站自动记录仪记录的该地某日一昼夜时间内温度 T(℃)随时间 t(h)变化的曲线。对于这个时间范围内的每一时刻 t,都可以在图 1-2 中量出对应的温度 T 的值。

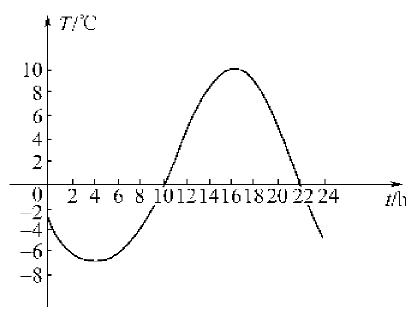

图 1-2

虽然上面两个实例中变量的实际含义不一样,相互的依赖关系也不同。但从纯粹的变量关系看,这两个实例有这样的共同之处:当一个变量取定某一值时,另一变量就按某种对应法则有确定的值与之对应。两个变量间这种对应关系就是数学上的函数概念。

定义 1-1 设 x 和 y 是两个变量,D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集,如果对于每一个数 $x\in D$,变量 y 按照某种对应法则有惟一确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的**函数**,记做

$$y = f(x)$$

并称变量 x 为该函数的**自变量**,变量 y 为**因变量**,f 是函数中表示对应法则的记号,D 是函数的**定义域**,也可以记做 $D(f)$,数集

$$W=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$$

为函数的**值域**，也可以记做 R_f 或 $f(D)$。

对于自变量 x 取定义域中某一定值 x_0，函数 $y=f(x)$ 的相应值叫做当 $x=x_0$ 时的函数值，通常用记号 $f(x_0)$ 或 $f(x)\Big|_{x=x_0}$，或 $y\Big|_{x=x_0}$，或 $y(x_0)$ 等表示。

表示函数的方法有**解析法**(也称**公式法**)、**图像法**、**表格法**等。实例 1-1 用的是解析法，实例 1-2 用的是图像法，诸如三角函数表就是表格法。

还需要指出的是，函数可以含有一个或多个自变量。含有一个自变量的函数称为**一元函数**。含有多个自变量的函数称为**多元函数**。本书只介绍一元函数。

通过下面的实例 1-3 和例 1-1、例 1-2 可以加深对函数的理解。

实例 1-3　分析由方程 $x^2+y^2=r^2$ 确定的两个变量 x 和 y 之间的相依关系。

该方程与直角坐标系中圆心在原点、半径为 r 的圆相对应。如果把 x、y 分别看成自变量和因变量，则该函数的定义域是 $[-r,r]$。当 x 取 r 或 $-r$ 时，对应的函数值都只有一个，但当 x 取开区间 $(-r,r)$ 内任一数值时，对应的函数值都是两个。

如果对于自变量取定义域内某些值时，对应的函数值是多个，这样的函数称为**多值函数**。如果对于自变量取定义域内任何值时，对应的函数值都只有一个，这样的函数称为**单值函数**。以后凡没有特别说明时，函数都是指单值函数。

例 1-1　某汽车公司规定从甲地运货至乙地的收费标准是：如果货物质量不超过 30 千克，则每千克收费 1.5 元；如果货物质量超过 30 千克，则超出部分每千克收费增至 2.5 元。试写出货物运费 F 与货物质量 m 之间的函数关系。

解　按题意，当 $m>30$ 时，运费的计算方法是 $F=1.5\times30+2.5(m-30)$，化简后为 $F=2.5m-30$。于是，本题的函数关系是

$$F=f(m)=\begin{cases}1.5m & (0<m\leqslant 30)\\ 2.5m-30 & (m>30)\end{cases}$$

像例 1-1 这样，在定义域的不同子集(也是区间)用不同的表达式表示的函数称为**分段函数**。在实际问题中分段函数是很常见的。

例 1-2　已知因变量 y 取自变量 x 的绝对值，建立该函数表达式并画出它的图像。

解　按题意，该函数表达式为

$$y=|x|=\begin{cases}x & (x\geqslant 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$$

它的图像如图 1-3 所示。

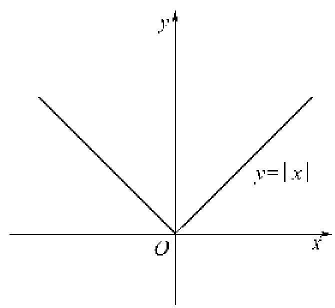

图　1-3

例 1-3　求下列函数的定义域：(1) $y=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{x}$；

(2) $y=\lg(x^2-4)$

解 (1) 只有当 $3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$ 时函数表达式才有意义,所以该函数的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,3]$。

(2) 只有当 $x^2-4>0$ 时函数表达式才有意义,所以该函数的定义域是 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$。

下面简单介绍函数的几种特性。

定义 1-2 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义。如果存在正数 M,使得对任意的 $x\in I$,均有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内是**有界**的。M 为 $y=f(x)$ 在区间 I 内的一个**界**。如果不存在这样的常数 M,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内是**无界**的。

有界函数的图像在区间 I 内被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条直线之间。

显然,函数是否有界、界的大小取决于函数和区间两个因素。对于有界函数,界不是惟一的。例如,函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界,它的最小的界是 1;但是在区间 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上,函数 $y=\sin x$ 的最小的界是 $\frac{1}{2}$。再看函数 $y=\tan x$,它在 $\mathbf{R}$ 上无界;但是在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上有界,最小的界是 1。

定义 1-3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则必定 $-x\in D$)。

如果对任意的 $x\in D$,均有

$$f(-x)=f(x)$$

则称函数 $y=f(x)$ 是**偶函数**。

如果对任意的 $x\in D$,均有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称函数 $y=f(x)$ 是**奇函数**。

奇函数的图像关于坐标原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称。

中学阶段学过的函数中,奇函数有 $y=x$、$y=\sin x$、$y=\tan x$ 等,偶函数有 $y=x^2$、$y=\cos x$ 等。而 $y=2^x$、$y=\lg x$ 和 $y=\sqrt{x}$ 既不是奇函数,也不是偶函数。

研究函数奇偶性的好处在于,如果一个函数是奇函数(或偶函数),则只要研究自变量大于等于零的这一半就可以推知全貌。

由定义 1-3 不难推出如下结论:

若干个奇函数的和(或差)是奇函数;

若干个偶函数的和(或差)是偶函数;

两个奇函数(或偶函数)的积(或商)是偶函数;

一个奇函数与一个偶函数的积(或商)是奇函数。

一个奇函数与一个偶函数的和(或差)既不是偶函数,也不是奇函数。

例如,$y=x+\tan x$、$y=x^2\sin x$ 都是奇函数;而 $y=\frac{\sin x}{x}$、$y=(x^2-2)x^2\cos x$ 都是偶函数;但是,$y=x^2+\sin x$ 既不是偶函数,也不是奇函数。

定义 1-4　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D。如果存在常数 $T>0$,使得对任一 $x\in D$,都有 $x\pm T\in D$,且等式

$$f(x\pm T)=f(x)$$

一定成立,则称函数 $y=f(x)$是**周期函数**,T 称为该函数的**周期**。周期函数的周期通常是指它的最小正周期。

例如,$y=\sin x$ 和 $y=\tan x$ 都是周期函数,前者的周期是 2π,后者的周期是 π。

研究函数周期性的好处在于,如果一个函数是周期函数,则只要知道它在某个周期内的情况就可以推知它在整个定义域的情况了。

由定义 1-4 不难推出如下结论:

如果两个函数的周期有最小公倍数,则这两个函数的和(或差、或积、或商)也是周期函数,其周期就是这个最小公倍数。

周期函数与常数的和、差、积还是周期函数,并且周期不变。

例如,$\sin x$ 和 $\tan x$ 的周期分别是 2π 和 π,则 $\sin x+\tan x$ 的周期是 2π;$u_1=\sin 20t$ 和 $u_2=\sin 30t$ 的周期分别是$\frac{\pi}{10}$和$\frac{\pi}{15}$,则 $u=u_1+u_2=\sin 20t+\sin 30t$ 的周期就是$\frac{\pi}{5}$;而 $\sin x+5$、$2\sin x$ 和 $\sin x$ 的周期相同,都是 2π。

定义 1-5　设函数 $y=f(x)$在区间 I 内有定义。如果对任意的 $x_1,x_2\in I$,且 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $y=f(x)$在区间 I 内是**单调增加**的。如果在同样条件下恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $y=f(x)$在区间 I 内是**单调减少**的。单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**。

显然,函数单调增加还是单调减少取决于函数和区间两个因素。例如,2^x 在区间 $\mathbf{R}$ 上和 $\tan x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上都是单调增加的;而 $\sin x$ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是单调增加的,在区间$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上是单调减少的。

3. 反函数

在研究两个变量之间的函数关系时,往往根据问题的需要选定其中一个为自变量,另一个为因变量。然而,考虑问题的角度不同,对同一个问题可以选择不同的变量为自变

量。例如,在实例 1-1 中,也可以把圆面积 A 取做自变量,则圆的半径 r 就是 A 的函数,并且有 $r=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$。

定义 1-6 设有函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 R_f。若对每一个 $y\in R_f$,都有惟一确定的 $x\in D$ 满足 $f(x)=y$,那么就可以把 y 作为自变量,而 x 是 y 的函数。这个新的函数称为 $y=f(x)$的**反函数**,记作

$$x = f^{-1}(y)$$

这个函数的定义域为 R_f,值域为 D。相应地,函数 $y=f(x)$称为**直接函数**。

从定义 1-6 可知,$x=f^{-1}(y)$和 $y=f(x)$互为反函数。习惯上往往用字母 x 表示自变量,用字母 y 表示因变量。因此,函数 $y=f(x)$的反函数通常表示成 $y=f^{-1}(x)$。

显然,如果把反函数的图像和它的直接函数的图像画在同一个坐标系中,则它们的图形是关于直线 $y=x$ 为对称的。

例 1-4 求 $y=\log_3(2x-3)$的反函数。

解 从方程 $y=\log_3(2x-3)$中解出 x 为

$$x = \frac{1}{2}(3^y + 3)$$

则所求的反函数为

$$y = \frac{1}{2}(3^x + 3)$$

实际上,并不是任何函数都有反函数的。那么,什么样的函数存在反函数呢?下面对 $y=x^2$ 进行讨论,并得出一般的结论。

由 $y=x^2(-\infty<x<+\infty)$可解得 $x=\pm\sqrt{y}$ $(y\geqslant 0)$。这表明,对于每一个 $y>0$,x 有两个不同的对应值$\pm\sqrt{y}$。因此,按定义 1-6,$y=x^2$ 不存在反函数。

下面,换一个方式研究这个问题:将 $y=x^2$ 在两个定义区间$(x\geqslant 0)$和$(x<0)$分别进行讨论。

对于 $y=x^2(x\geqslant 0)$,可解得 $x=\sqrt{y}$ $(y\geqslant 0)$。这表明,对于每一个 $y>0$,x 有惟一确定的值$\sqrt{y}$,因此 $y=x^2(x\geqslant 0)$存在反函数 $y=\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$。

对于 $y=x^2(x<0)$,可解得 $x=-\sqrt{y}$ $(y>0)$。这表明,对于每一个 $y>0$,x 有惟一确定的值$-\sqrt{y}$,因此 $y=x^2(x<0)$存在反函数 $y=-\sqrt{x}$ $(x>0)$。

从上面的讨论可以得到如下的一般结论:若函数 $y=f(x)$在某个定义区间上单调增加或单调减少,则它在该区间上必定存在反函数。

1.1.2 复合函数与初等函数

在大量的函数中,常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数

6 类是最常见的和最基本的，这些函数称为**基本初等函数**。基本初等函数是构建复杂函数的基础。

1. 复合函数

对于函数 $y=\sin x$，如果令 $x=\omega t$，并将它代入 $y=\sin x$，就可以得到函数 $y=\sin\omega t$。$y=\sin\omega t$ 可以看成由 $y=\sin x$ 和 $x=\omega t$ 复合而成。

定义 1-7　设函数 $y=f(u)$的定义域是 D_1，函数 $u=\varphi(x)$的定义域是 D_2，当 x 在 $u=\varphi(x)$的定义域 D_2 或其中一部分取值时，$u=\varphi(x)$的函数值均在 $y=f(u)$的定义域 D_1 内。对于这样取定的 x 的值，通过 u 有确定的值 y 与之对应，从而可以得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**，记做

$$y=f[\varphi(x)]$$

而 u 称为**中间变量**。

例如，$y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2$ 及 $u=\cos x$ 复合而成的复合函数，其定义域是$(-\infty,+\infty)$。

关于复合函数，需要说明一点：不是任何两个函数都可以复合成一个函数的。例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+8$ 就不能复合成一个函数。因为由函数 $u=x^2+8$ 确定的 u 的值域是$[8,+\infty)$，不在函数 $y=\arcsin u$ 的定义域内。因此，求复合函数的定义域时，要考虑构成复合函数的所有基本初等函数都有意义。

复合函数的概念在微积分中非常重要，读者务必准确理解。复合函数也可以由三个或更多个函数复合而成。

例 1-5　指出下列各函数的复合过程：

(1) $T=\ln(\tan\alpha)$　　(2) $y=\sqrt{\lg x}$

(3) $p=e^{x^2}$　　(4) $y=\sin^3\left(10t+\dfrac{\pi}{6}\right)$

解　(1) $T=\ln(\tan\alpha)$是由 $T=\ln y$ 和 $y=\tan\alpha$ 复合而成的。

(2) $y=\sqrt{\lg x}$是由 $y=\sqrt{u}$和 $u=\lg x$ 复合而成的。

(3) $p=e^{x^2}$ 是由 $p=e^s$ 和 $s=x^2$ 复合而成的。

(4) $y=\sin^3\left(10t+\dfrac{\pi}{6}\right)$是由 $y=u^3$、$u=\sin\alpha$ 和 $\alpha=10t+\dfrac{\pi}{6}$三个函数复合而成的。

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成并能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**。例如，$y=3x-1$、$u=\sin(\omega t+\varphi)$（ω,φ 是常数）都是初等函数。

关于初等函数，需要说明一点：凡不能用一个式子表示的函数都不是初等函数。一般情况下，分段函数不是初等函数，含有绝对值符号的函数一般也不是初等函数。

定义 1-8 函数

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad (a_i \text{ 是常数}, n \geqslant 1 \text{ 是自然数}, a_n \neq 0)$$

称为**多项式函数**,简称**多项式**。

多项式函数是很重要的初等函数。

多项式通常用 P_n 表示,其中 n 表示该多项式中变量的最高指数。

例如,$P_4=2x^4-3x^3+x+1$、$P_2=3x^2-2x-1$、$P_1=5x-7$ 都是多项式函数。

多项式依函数中自变量的最高指数 n 的具体数值有特有的名称,$n=1$ 时称为**一次函数**,$n=2$ 时称为**二次函数**等。

【说明】 由于多项式函数的求导和积分(将分别在 1.3 节和第 2 章介绍)都能直接进行,因此在分析复合函数的复合过程时,通常把多项式函数看成基本构成成分。所以,在微积分的许多场合把多项式函数和六类基本初等函数同等对待。

1.2 极限

研究函数变化的基本工具是极限的方法。极限的概念是微积分学中最基本的概念,后面将要介绍的函数的连续性、导数、定积分等概念都要以极限为基础。

两千多年前,中国古人就有了初步的极限概念。公元 263 年,中国数学家刘徽根据朴素的极限思想先后计算了圆内接正六边形、正十二边形、正二十四边形、正四十八边形……的面积,他算出的圆周率是 3.141 592 6,这已经是很好的近似值了,非常了不起。

1.2.1 数列的极限

数列是按照某种法则产生的一系列数的依次排列。无穷数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$(常简记为$\{x_n\}$)可以看做自变量为正整数 n 的函数,即 $x_n=f(n)$。因此,数列的极限是一类特殊函数的极限。

定义 1-9 对数列$\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时,数列$\{x_n\}$无限接近一个常数 a,那么 a 就称为数列$\{x_n\}$的**极限**,或称数列$\{x_n\}$**收敛**于 a,记为

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a$$

或

$$x_n \to a \qquad (\text{当 } n \to +\infty)$$

如果数列$\{x_n\}$没有极限,就说数列$\{x_n\}$是**发散**的。显然,如果一个数列有极限,则此极限是惟一的。

定义 1-9 中“如果当 n 无限增大时,数列$\{x_n\}$无限接近一个常数 a”的实质是:随着 n 的无限增大,x_n 与常数 a 的距离$|x_n-a|$可以任意小,即要多小都可以有多小(不排除数列的某些项取常数 a 的可能)。

例 1-6 根据极限的定义,判断下列各数列是否有极限,对于收敛的数列指出其极限:

(1) $1,2,3,\cdots,n,\cdots$

(2) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$

(3) $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$

(4) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

(5) $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$

解　对上述每个数列，将它们逐项在数轴上表示出来，如图 1-4 所示。可以看出第 1、第 3 两个数列没极限，其他数列都有极限。第 2 个数列的极限是 0，第 4 个数列的极限是 1，第 5 个数列的极限也是 1。

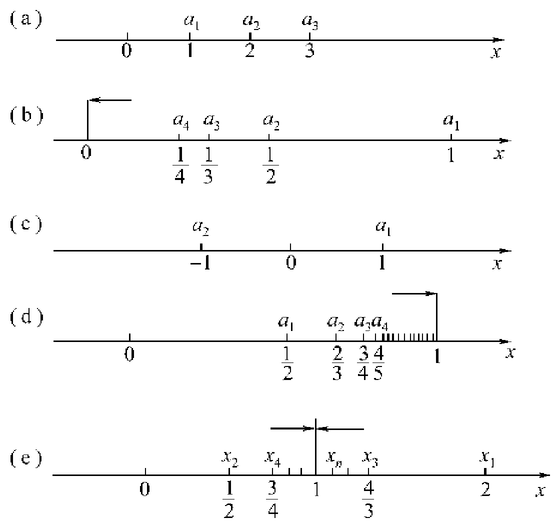

图　1-4

1.2.2　函数的极限

如前所述，数列可以看成自变量取正整数值的函数。所以，数列的极限是一种特殊的函数极限。一般函数的极限比数列的极限复杂，需要分两种情况讨论。

1. 自变量趋向无穷大时函数的极限

对函数 $y=\frac{1}{x}$，当 $|x|$ 无限增大时，对应的函数值 y 无限接近常数 0（参看图 1-5），这时就称 $y=\frac{1}{x}$ 以 0 为极限。自变量趋向无穷大时函数极限的定义如下：

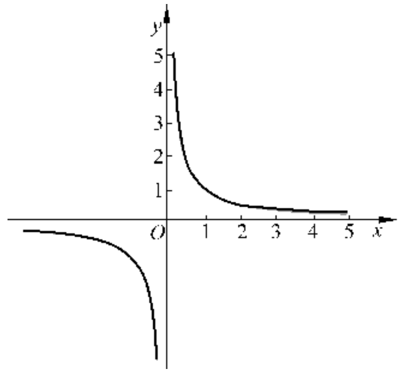

图 1-5

定义 1-10 设函数 $y=f(x)$对绝对值无论怎样大的自变量都有定义,如果当$|x|$无限增大(即 $x\to\infty$)时,函数$f(x)$无限接近某个常数 A,那么 A 就称为函数 $f(x)$当 x 趋向无穷大时的**极限**,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (当\ x\to\infty)$$

如果$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在,则函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时没有极限。

定义 1-10 中"如果当$|x|$无限增大(即 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$无限接近某个常数 A"的实质是:随着 x 的绝对值的无限增大,函数 $f(x)$与常数 A 的距离$|f(x)-A|$可以任意小,即要多小都可以有多小(不排除 $f(x)$取常数 A 的可能)。

如果在定义 1-10 中限制 x 只取正值或者只取负值,即有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

称函数 $f(x)$当 x 趋向正无穷大(或负无穷大)时的极限为 A。

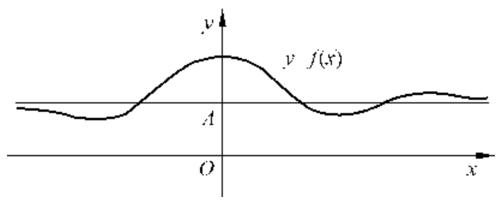

图 1-6

如图 1-6 所示,极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 意味着:随着$|x|$无限增大,函数曲线无限接近直线 $y=A$。

对于函数 $y=\dfrac{1}{x}$,其图像如图 1-5 所示。由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0, \quad 并且 \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

两个极限相等,从而有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$