第3章

电路的基本分析方法

3.1 教学要求

(1) 熟练掌握常见二端电路和多端电路的等效变换。

(2) 熟练掌握节点分析法、回路分析法(包括网孔分析法)的原理及用观察方法列写回路方程、节点方程的规则。

(3) 理解电路对偶性及对偶电路的概念。

3.2 重点和难点

1. 电路的等效变换

(1) 等效变换的概念是本章的重点之一,只有理解等效变换,尤其是"对外电路等效"的含义,才能正确处理各种情况下的等效变换。

(2) 在进行戴维南电路和诺顿电路相互等效变换时应注意:①变换前后两种电源的参考方向;②如果与电压源串联的电阻为零,则不存在诺顿电路;③如果与电流源并联的电阻为无穷大,则不存在戴维南电路。

(3) 在进行独立电源常见连接方式的等效变换时应注意:①只有大小相等、极性相同的电压源才能并联;②只有大小相等、方向相同的电流源才能串联;③电压源与任何可连接支路并联,都可对外等效为电压源;④电流源与任何可连接支路串联,都可对外等效为电流源。

(4) 对含受控源电路可类似于含源电路那样进行等效变换,但应注意,在变换过程中不能将受控源的控制变量变换掉。

(5) 电容并联时如各电容的初始电压相等,则并联等效电容的初始电压与各电容的初始电压相同;如各电容的初始电压不等,则在并联的瞬间,各电容上的电荷将重新分配,使各电容的初始电压相等,等效电容的初始电压为该初始电压。电感串联时如各电感的初始电流相等,则串联等效电感的初始电流与各电感的初始电流相同;如各电感的初始电流不等,则在串联的瞬间,各电感上的磁通链将重新分配,使各电感的初始电流相等,等效电感的初始电流为各电感串联后的初始电流。

2. 回路分析法与网孔分析法

列写回路方程或网孔方程时应注意以下几点:

(1) 列写方程前应将电路中的诺顿电路(支路)等效变换为戴维南电路(支路)。

(2) 不能忽略无伴电流源两端的电压。对无伴电流源支路,在选择回路时可适当处理,或者采用广义网孔分析法,或者无伴电流源支路仅包含于一个回路,可使分析简化。

(3) 把与电压源并联的元件看成开路处理。

(4) 将受控电源按独立电源处理,并用回路电流表示其控制量。

3. 节点分析法

列写节点方程时应注意以下几点：

(1) 列写方程前应将电路中的戴维南电路(支路)等效变换为诺顿电路(支路)。

(2) 不能忽略流经无伴电压源的电流。对无伴电压源支路，或者采用广义节点分析法，或者选择无伴电压源的一端为参考节点，可使分析简化。

(3) 把与电流源串联的元件看成短路处理。

(4) 将受控电源按独立电源处理，并用节点电压表示其控制量。

4. 电路的对偶性及对偶电路

对偶性是电路分析中的一种普遍现象，掌握对偶性的概念有助于加深对具有对偶性的电路现象、规律、公式、方程等的理解。对一个已知平面电路画出对偶电路是一个难点。在画对偶电路时应充分掌握电路的各个对偶因素，特别注意对偶电流源(电压源)在对偶电路相应支路中的方向。一般来说，对平面网络，由于电路的节点电压方程和其对偶电路的网孔电流方程相同，所以电流源(及其对偶的电压源)的方向可根据它与对应的节点(及其对偶的网孔)关系来确定。

3.3 典型例题

例 3.1 求例图 3.1(a)、(b)电路的等效电路(电压源与电阻相串联)。

【分析】 对例图 3.1(a)等效变换时应注意对外电路而言，一个独立电压源与其他元件并联的模型可等效为该电压源；对例图 3.1(b)等效变换时应注意对外电路而言，一个独立电流源与其他元件串联的模型可等效为该电流源。

解

例图 3.1(a)电路的等效变换过程如例图 3.1(c)所示；例图 3.1(b)电路的等效变换过程如例图 3.1(d)所示。

例 3.2 电路如例图 3.2 所示。已知 $R_1=R_2=R_3=4\Omega$，$R_4=6\Omega$，$u_S=12e^{-t}$ V。(1)试求例图 3.2(a)电路中 a、b 两点间电压 u_{ab}；(2)若将 a、b 两点用理想导线短接，如例图 3.2(b)所示，试求流过导线的电流 i_{ab}。

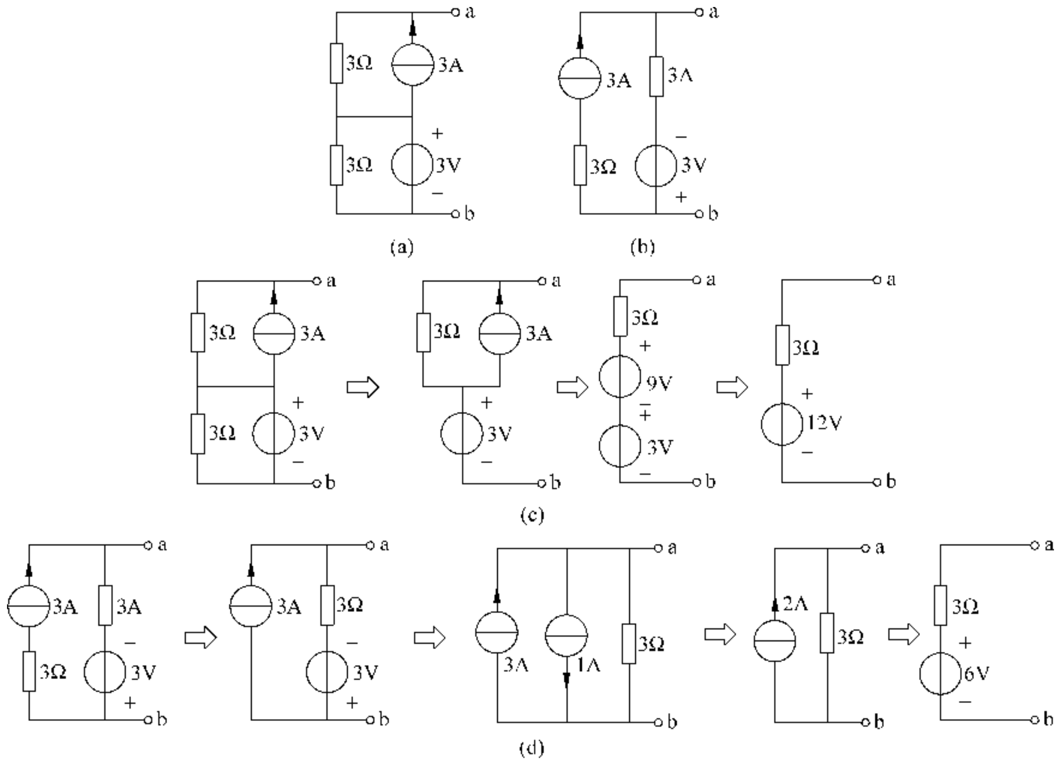
【分析】 此题中两个电路为简单电路，可直接应用 KVL、KCL 和欧姆定律求解。例图 3.2(a)中对开路电压 u_{ab} 可应用广义 KVL 求得，即假想 a、b 两点连通，对开口回路 a-c-b-a 列写 KVL 方程求解；例图 3.2(b)中先求总电流 i，然后利用“反比分流”求出 i_1 和 i_2，最后对节点 a 列写 KCL 方程求得短路电流 i_{ab}。

解

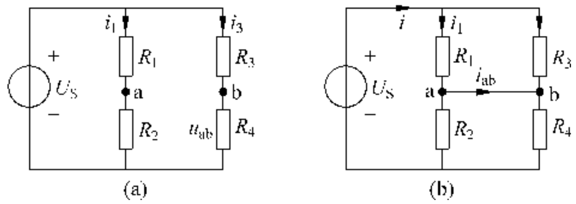
(1) 设电流 i_1 和 i_3 参考方向如例图 3.2(a)所示，则由“串联同流”、“并联同压”和 KVL 得

$$i_1=\frac{U_S}{R_1+R_2}=\frac{12e^{-t}}{4+4}A=1.5e^{-t}A$$

$$i_3=\frac{U_S}{R_3+R_4}=\frac{12e^{-t}}{4+6}A=1.2e^{-t}A$$



例图 3.1



例图 3.2

再由 KVL 可得

$$u_{ab}=-i_1R_2+i_3R_3=(-1.5\mathrm{e}^{-t}\times 4+1.2\mathrm{e}^{-t}\times 4)\mathrm{V}=-1.2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{V}$$

(2) a、b 两点用导线连接后，电路如例图 3.2(b)所示，并在此例图中设定电流 i、i_1、i_2 和 i_{ab}的参考方向。则总电流为

$$i=\frac{U_S}{\dfrac{R_1R_3}{R_1+R_3}+\dfrac{R_2R_4}{R_2+R_4}}=\frac{12\mathrm{e}^{-t}}{2+2.4}\mathrm{A}=2.5\mathrm{e}^{-t}\mathrm{A}$$

由分流公式得

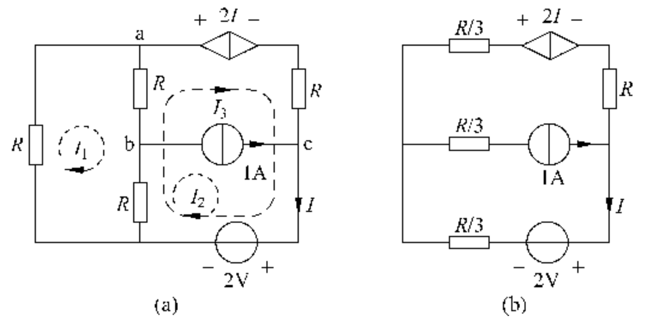
$$i_1=i\frac{R_3}{R_1+R_3}=2.5\mathrm{e}^{-t}\times\frac{4}{4+4}\mathrm{A}=1.25\mathrm{e}^{-t}\mathrm{A}$$

$$i_2 = i\frac{R_4}{R_2+R_4} = 2.5\mathrm{e}^{-t}\times\frac{6}{4+6}\mathrm{A} = 1.5\mathrm{e}^{-t}\mathrm{A}$$

再由 KVL 得

$$i_{ab} = i_1 - i_2 = (1.25\mathrm{e}^{-t} - 1.5\mathrm{e}^{-t})\mathrm{A} = -0.25\mathrm{e}^{-t}\mathrm{A}$$

例 3.3 如例图 3.3(a)所示电路，已知 $R=6\Omega$，试求独立电压源和电流源发出的功率。



例图 3.3

【分析】 此题有多种求解方法。由于存在一个无伴电流源和一个无伴电压源，故采用回路法可选择无伴电流源只包含在一个回路中时，仅需列写 2 个回路电流方程；采用节点法可选择无伴电压源的一端作为参考点时，只需列写 2 个节点电压方程；考虑到受控源为受控压源形式，故选用回路分析法较为便利。另外，本题中存在一个电阻值相等的 Π 形电路，故应用 Π-T 形等效变换，可以方便地求解化简后的电路。

解 1

回路分析法。设回路及其方向如例图 3.3(a)所示，则可列出回路方程如下：

$$\begin{cases}3RI_1 - RI_2 - 2RI_3 = 0\\ -2RI_1 + RI_2 + 3RI_3 = -2I - 2\mathrm{A}\\ I_2 = 1\mathrm{A}\\ I = I_3 + 1\end{cases}$$

代入已知数据解得

$$I_1 = 0,\quad I_3 = -0.5\mathrm{A},\quad I = 0.5\mathrm{A}$$

电源发出的功率为

$P_{US} = -U_S I = (-2\times0.5)\mathrm{W} = -1\mathrm{W}$

$P_{IS} = I_S[2 + R\times(I_2 + I_3 - I_1)] = 1\times[2 + 6\times(1-0.5-0)\times6]\mathrm{W} = 5\mathrm{W}$

解 2

节点分析法。标定参考节点和独立节点如例图 3.3(a)所示，则可列出节点方程如下：

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\right)U_a - \frac{1}{R}U_b - \frac{1}{R}U_c = \frac{2I}{R}\\ -\frac{1}{R}U_a + \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\right)U_b = -1\\ -\frac{1}{R}U_a + \frac{1}{R}U_c = 1 - I\\ U_c = 2\end{cases}$$

代入已知数据解得

$$U_a = 0, \quad U_b = -3\text{V}, \quad I = 0.5\text{A}$$

电源发出的功率为

$$P_{US} = -U_S I = (-2 \times 0.5)\text{W} = -1\text{W}$$

$$P_{IS} = I_S(U_c - U_b) = 1 \times [2 - (-3)]\text{W} = 5\text{W}$$

解 3 Π-T 形等效变换。如例图 3.3(b)所示，应用 KVL 可得

$$(R/3 + R)(I - 1) + 2I + 2 + (R/3)I = 0$$

解得

$$I = 0.5\text{A}$$

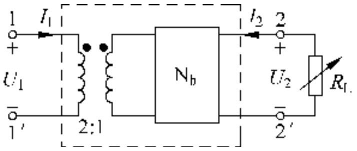
则电源供出的功率为

$$P_{US} = -U_S I = (-2 \times 0.5)\text{W} = -1\text{W}$$

$$P_{IS} = I_S \times [2 + (R/3)I + (R/3) \times 1] = 1 \times [2 + 2 \times 0.5 + 2 \times 1]\text{W} = 5\text{W}$$

例 3.4 例图 3.4 所示为理想变压器和二端口电路 $\mathrm{N_b}$ 级联的电路。已知虚框所示整个二端口短路矩阵满足互易条件，设 1-1′端口接入电压 $U_1 = 100\text{V}$，当 $R_L \to \infty$ 时，$I_1 = 2\text{A}$，$I_2 = -20\text{A}$，$U_2 = 20\text{V}$；当 $R_L = 0$ 时，$I_2 = -20\text{A}$，求：(1) 整个二端口的传输参数矩阵；(2) $\mathrm{N_b}$ 的传输参数矩阵。

【分析】 此题可先由已知条件求得整个二端口的传输参数矩阵 $\boldsymbol{A}$，并由互易条件知 a 参数中只有 3 个参数是独立的；再由 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_b$ 可求得 $\mathrm{N_b}$ 的传输参数矩阵 $\boldsymbol{A}_b$，其中 $\boldsymbol{A}_1$ 为理想变压器的传输参数矩阵。



例图 3.4

解

(1) 对整个二端口网络的传输方程为

$$\begin{cases} U_1 = a_{11}U_2 + a_{12}(-I_2) \\ I_1 = a_{21}U_2 + a_{22}(-I_2) \end{cases}$$

由已知条件，当 2-2′开路($I_2 = 0$)时有

$$\begin{cases} 100 = 20a_{11} \\ 2 = 20a_{21} \end{cases}$$

解得

$$a_{11} = 5, \quad a_{21} = 0.1$$

由已知条件，当 2-2′短路($U_2 = 0$)时有 $100 = 20a_{12}$，解得

$$a_{12} = 5$$

根据 a 参数矩阵的互易条件 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$，解得

$$a_{22} = 0.3$$

即得整个二端口的传输参数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 5\Omega \\ 0.1\text{S} & 0.3 \end{bmatrix}$$

(2) 整个二端口网络为两个二端口网络的级联，则有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_b$$

其中,根据理想变压器的端口特性有

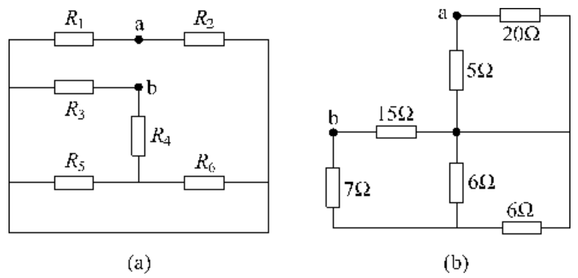
$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{n} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

可得 $\mathrm{N_b}$ 的传输参数矩阵为

$$\boldsymbol{A}_\mathrm{b}=\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.5 & 2.5\Omega \\ 0.2\mathrm{S} & 0.6 \end{bmatrix}$$

3.4 习题选解

3.1 试求题图 3.1 所示一端口电路的等效电阻 R_{ab}。已知 $R_1=5\Omega,R_2=20\Omega,R_3=15\Omega,R_4=7\Omega,R_5=R_6=6\Omega$。



题图 3.1

解

用等效变换方法将题图 3.1(a)变换为题图 3.1(b),利用电阻串并联求得

$$R_{ab}=[15 \mathbin{/\!/} (7+6 \mathbin{/\!/} 6)+5 \mathbin{/\!/} 20]\Omega=10\Omega$$

Matlab 计算程序:

```
%采用 Matlab 求解题 3.1
    clear all; close all;
    Rab = pllz(15,7 + pllz(6,6)) + pllz(5,20)
```

计算结果:

```
    Rab = 10
```

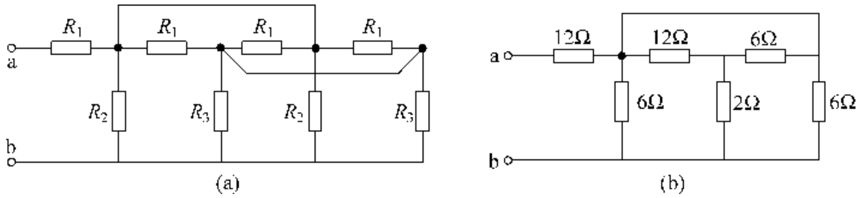
3.2 试求题图 3.2 所示一端口电路的等效电阻 R_{ab}。已知 $R_1=12\Omega,R_2=6\Omega,R_3=4\Omega$。

解

用等效变换方法将题图 3.2(a)变换为题图 3.2(b)。

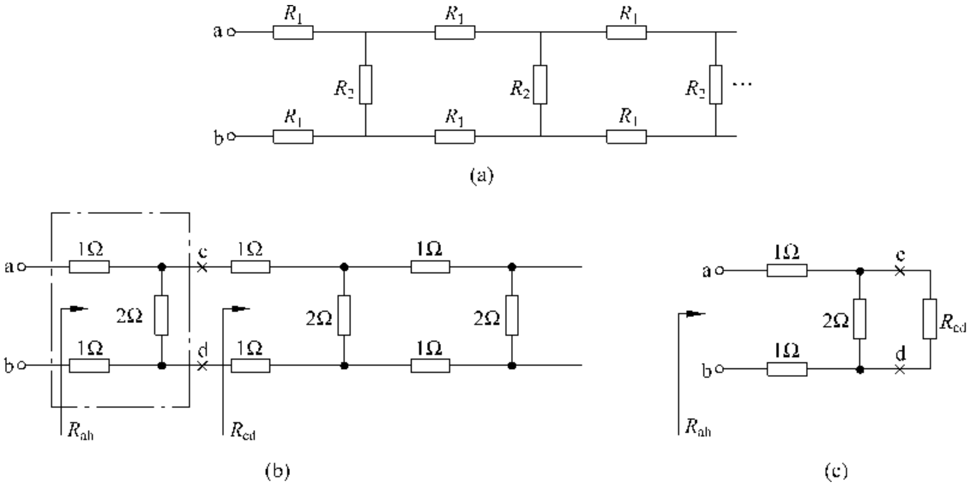
利用电阻串并联可求得

$$R_{ab}=14\Omega$$



题图 3.2

3.3 题图 3.3 所示电路为一无限阶梯电路，已知 $R_1=1\Omega$，$R_2=2\Omega$。试求其端口的等效电阻 R_{ab}。



题图 3.3

解

将无限网络看成是由无限多个梯形网组成的，每个梯形网如题图 3.3(b)中的虚线框所示，去掉第一个梯形网，从 cd 端看进去仍是一个无限网络，故有 $R_{ab}=R_{cd}$。

作出题图 3.3(b)的等效电路如题图 3.3(c)所示。

可得关系式

$$\begin{cases} R_{ab}=R_{cd} \\ R_{ab}=1+\dfrac{2R_{cd}}{2+R_{cd}}+1 \end{cases}$$

解得 $R_{ab}=3.236\Omega$。

Matlab 计算程序：

```
% 采用 Matlab 求解题 3.3
    clear all; close all;
    syms Rab
    R1 = 1; R2 = 2;
```

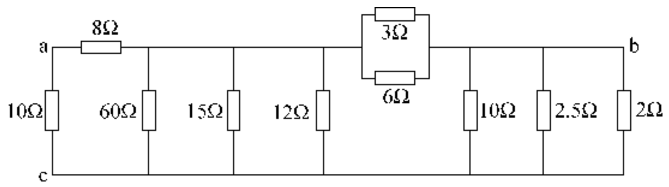
```
    eq = Rab - (R1 + pllz(R2,Rab) + R1);
    Rab = solve(eq)
```

计算结果：

```
    Rab = 5 ^(1/2) + 1
          1 - 5 ^(1/2)
```

舍弃不合理的负解即可得到正确的结果。

3.4 如题图 3.4 所示电路，试用电阻串并联等效计算 a、c 两端点间的等效电阻 R_{ac}。使用电阻串并联等效能否计算出等效电阻 R_{ab}、R_{bc}，试说明你的理由。



题图 3.4

解

等效电阻 R_{ac} 为

$$R_{ac} = 10 /\!/ \{8 + [60 /\!/ 15 /\!/ 12 /\!/ (6 /\!/ 3 + 10 /\!/ 2.5 /\!/ 2)]\}\Omega$$
$$= 10 /\!/ \{8 + [60 /\!/ 15 /\!/ 12 /\!/ 3]\}\Omega = 10 /\!/ \{8 + 2\}\Omega = 5\Omega$$

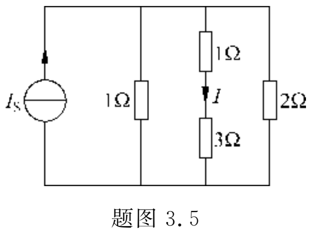
使用串并联电阻等效可以计算出等效电阻 R_{bc} 但不能计算 R_{ab}，因为从电路的 ab 端看进去并不是电阻的串联和并联的组合。

3.5 如题图 3.5 所示电路，已知 $I_S=7A$，试计算电流 I。

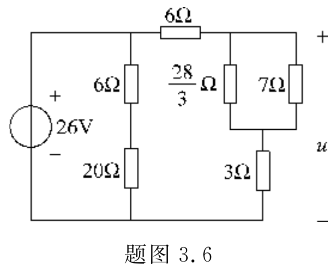
解

由分流公式得

$$I = \frac{\frac{1}{(3+1)}}{1+\frac{1}{(3+1)}+\frac{1}{2}} I_S = \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} I_S = \frac{1}{7} \times 7A = 1A$$



题图 3.5



题图 3.6

3.6 试求题图 3.6 电路中的电压 u。

解

电压 u 的大小为

$$u = 26 \times \frac{\frac{28}{3} /\!/ 7 + 3}{6 + \frac{28}{3} /\!/ 7 + 3}\mathrm{V} = 26 \times \frac{4+3}{6+4+3}\mathrm{V} = 14\mathrm{V}$$

3.7 如题图 3.7 所示电路，试用 KCL 和 KVL 计算各电流源两端的电压和流过各电压源的电流。

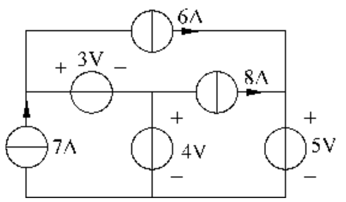
解

电源的电压与电流取非一致参考方向，则有

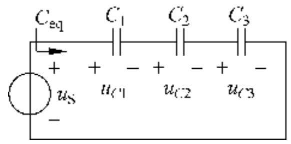
$u_{7\mathrm{A}} = (3+4)\mathrm{V} = 7\mathrm{V}$， $u_{8\mathrm{A}} = (5-4)\mathrm{V} = 1\mathrm{V}$， $u_{6\mathrm{A}} = u_{8\mathrm{A}} - 3\mathrm{V} = -2\mathrm{V}$

$i_{3\mathrm{V}} = (6-7)\mathrm{A} = -1\mathrm{A}$， $i_{4\mathrm{V}} = 8\mathrm{A} + i_{3\mathrm{V}} = (8-1)\mathrm{A} = 7\mathrm{A}$，

$i_{5\mathrm{V}} = -(6+8)\mathrm{A} = -14\mathrm{A}$



题图 3.7



题图 3.8

3.8 如题图 3.8 所示电路，已知 $u_S = 60\mathrm{V}$，$C_1 = 200\mu\mathrm{F}$，$C_2 = 50\mu\mathrm{F}$，$C_3 = 10\mu\mathrm{F}$。试求：(1)总等效电容 C_{eq}；(2)每个电容上的电量及总电量；(3)每个电容两端的电压。

解

(1) $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{200\times10^{-6}} + \frac{1}{50\times10^{-6}} + \frac{1}{10\times10^{-6}} = 0.125\times10^6$

因此

$$C_{eq} = \frac{1}{0.125\times10^6}\mathrm{F} = 8\mu\mathrm{F}$$

(2) $q = q_1 = q_2 = q_3 = C_{eq}u_S = (8\times10^{-6})\times(60)\mathrm{C} = 480\mu\mathrm{C}$

(3) $u_{C1} = \frac{q_1}{C_1} = \frac{480\times10^{-6}}{200\times10^{-6}}\mathrm{V} = 2.4\mathrm{V}$，$u_{C2} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{480\times10^{-6}}{50\times10^{-6}}\mathrm{V} = 9.6\mathrm{V}$

$u_{C3} = \frac{q_3}{C_3} = \frac{480\times10^{-6}}{10\times10^{-6}}\mathrm{V} = 48\mathrm{V}$

3.9 如题图 3.9 所示电路，已知 $u_S = 48\mathrm{V}$，$C_1 = 800\mu\mathrm{F}$，$C_2 = 60\mu\mathrm{F}$，$C_3 = 1200\mu\mathrm{F}$。试求：(1)总等效电容 C_{eq}；(2)每个电容上的电量；(3)总电量。

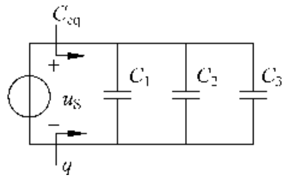
解

(1) $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 = 800\mu\mathrm{F} + 60\mu\mathrm{F} + 1200\mu\mathrm{F} = 2060\mu\mathrm{F}$

(2) $q_1 = C_1 u_S = (800\times10^{-6})\times(48)\mathrm{C} = 38.4\mathrm{mC}$

$q_2 = C_2 u_S = (60\times10^{-6})\times(48)\mathrm{C} = 2.88\mathrm{mC}$

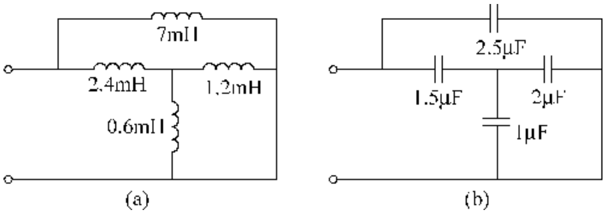
$q_3 = C_3 u_S = (1200\times10^{-6})\times(48)\mathrm{C} = 57.6\mathrm{mC}$



题图 3.9

(3) $q=q_1+q_2+q_3=38.4\text{mC}+2.88\text{mC}+57.6\text{mC}=98.88\text{mC}$

3.10　如题图 3.10 所示电路，试求端口的等效电感 L_{eq} 和等效电容 C_{eq}。



题图 3.10

解

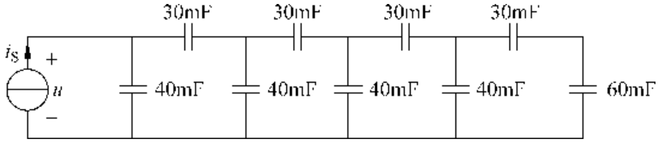
(a) $1.2\text{mH}//0.6\text{mH}=\dfrac{1.2\times0.6}{1.2+0.6}\text{mH}=0.4\text{mH}$

$$L_{eq}=7\text{mH}//(2.4+0.4)\text{mH}=\frac{7\times2.8}{7+2.8}\text{mH}=2\text{mH}$$

(b) $1\mu\text{F}+2\mu\text{F}=3\mu\text{F}$

$$C_{eq}=2.5\mu\text{F}+\frac{1.5\times3}{1.5+3}\mu\text{F}=(2.5+1)\mu\text{F}=3.5\mu\text{F}$$

3.11　如题图 3.11 所示电路，当 $i_S=10\cos(2t)\text{mA}(t\geqslant0)$ 时，试求从电源看进去的等效电容 C_{eq} 和 u。



题图 3.11

解

由于 $(40+30//60)\text{mF}=(40+20)\text{mF}=60\text{mF}$，由题图可知等效电容为

$$C_{eq}=60\text{mF}$$

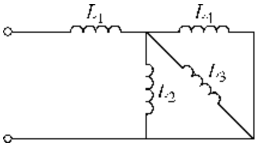
电流源两端的电压为

$$u(t)=\frac{1}{C_{eq}}\int_{-\infty}^{t}i_S(t)\text{d}t=\frac{1}{60\times10^{-3}}\int_0^t10\cos(2t)\times10^{-3}\text{d}t\text{V}=\frac{1}{12}\sin(2t)\text{V}$$

3.12　如题图 3.12 所示一端口电路，已知 $L_1=0.56\text{H}$，$L_2=1.2\text{H}$，$L_3=1.2\text{H}$，$L_4=1.8\text{H}$。试求等效电感 L_{eq}。

解

电感 L_2，L_3 的大小相等，它们并联的值为 $L'=0.6\text{H}$，0.6H 的电感再与 $L_4=1.8\text{H}$ 的电感并联得 $L''=\dfrac{L'\times L_4}{L'+L_4}=0.45\text{H}$，电感 L_1 与电感 L'' 串联，得 $L_{eq}=L_1+L''=1.01\text{H}$。



题图 3.12

3.13　如题图 3.13 所示电路，已知 $i_S=\sin(t)\text{A}(t\geqslant0)$，试