第1章 函　　数

1.1 基本概念

1.1.1 函数的定义

设有两个变量 x 和 y，x 的变域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则 f 都有一个确定的 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y = f(x).$$

并称 x 为自变量，y 为因变量，变域 D 为函数的定义域，而称因变量的变域为函数的值域.

函数概念的两个要素：定义域和对应关系.

两个函数当且仅当定义域和对应关系均相同时才表示同一函数，否则，它们表示两个不同的函数.

例 1.1　在下列各组函数中，找出两个函数等价的一组：

(1) $y=x^0$ 与 $y=1$；　　(2) $y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；

(3) $y=\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}}$；　　(4) $y=\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 与 $y=\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$.

[解]　(1) $y=x^0$ 的定义域为 $x\neq 0$；$y=1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，故该组的两个函数不等价.

(2) $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $x\geqslant 0$；$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域为全数轴，故该组的两个函数也不等价.

(3) 所给两个函数的定义域均为 $x\neq 0$，且对应关系也相同，故该组的两个函数等价.

(4) $y=\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 的定义域为 $\begin{cases} x-3\geqslant 0 \\ x-2>0 \end{cases}$　即 $x\geqslant 3$，

而 $y=\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$ 的定义域为 $\begin{cases} \frac{x-3}{x-2}\geqslant 0 \\ x-2\neq 0 \end{cases}$　即 $x\geqslant 3$ 或 $x<2$，

故该组的两个函数不等价.

例 1.2　在下列各组函数中，找出两个函数等价的一组：

(1) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$　$(x\neq 1)$；

(2) $y=\log_2(x-1)+\log_2(x-2)$ 与 $y=\log_2(x-1)(x-2)$；

(3) $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$；

(4) $y=x$ 与 $y=\sin(\arcsin x)$.

读者经思考后可做出明确回答.

评注 函数的表示只与定义域和对应关系有关,而与用什么字母表示无关,这个性质很重要(参看1.4节有关内容).

1.1.2 函数的定义域与值域

1. 函数的定义域

根据实际问题建立的函数的定义域,就是具有实际意义的实自变量值的集合;由解析式子表示的函数的定义域,就是使运算有意义的实自变量值的集合.

2. 函数定义域的求法

首先要熟悉下列简单函数的定义域:

$y=\frac{1}{x}$,定义域为 $x\neq 0$; $y=\sqrt[2n]{x}$,定义域为 $x\geqslant 0$;

$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$,定义域为 $x>0$; $y=\sin x$ 或 $\cos x$,定义域为 $(-\infty,+\infty)$;

$y=\tan x$,定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$; $y=\cot x$,定义域为 $x\neq k\pi,k\in Z$;

$y=\arcsin x$ 或 $\arccos x$,定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

求复杂函数的定义域,就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

例 1.3 求下列函数的定义域:

(1) $y=\log_{x-1}(16-x^2)$; (2) $y=\sqrt{\arcsin x+\frac{\pi}{4}}$;

(3) $y=\sqrt{\sin x}+\lg(16-x^2)$; (4) $y=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$.

[解]

(1) $\begin{cases}16-x^2>0\\x-1>0\\x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4<x<4\\x>1\\x\neq 2\end{cases}\Rightarrow 1<x<2$ 及 $2<x<4$.

(2) $\begin{cases}\arcsin x+\frac{\pi}{4}\geqslant 0\\|x|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1$.

(3) $\begin{cases}\sin x\geqslant 0\\16-x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2n\pi\leqslant x\leqslant 2n\pi+\pi\\-4<x<4\end{cases}\quad(n=0,\pm 1,\cdots)$

$\Rightarrow -4<x\leqslant-\pi$ 及 $0\leqslant x\leqslant\pi$.

(4) $\begin{cases}2x-x^2\geqslant 0\\2x-1>0\\\lg(2x-1)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\x>\frac{1}{2}\\x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}<x<1$ 及 $1<x\leqslant 2$.

3. 函数值域的求法

配方法,这是一种主要方法,比较常用;判别式法;通过求反函数的定义域借以达到求原

函数的值域;利用微积分法;利用三角函数的性质.

例1.4 求下列函数的值域:

(1) $y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+17$;

(2) $y=\dfrac{5}{2x^2-4x+3}$;

(3) $y=2-\sqrt{3x^2-10x+9}$;

(4) $y=\dfrac{x+1}{x+2}$;

(5) $y=3-2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(6) $y=\arcsin\dfrac{2}{x-3}$;

(7) $y=\dfrac{\sin x-3}{\sin x+3}$;

(8) $y=2^x-2^{2x}+1$.

[解] (1)应用配方法,则

$$\begin{aligned} y &= [(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)]+17 \\ &= (x^2-5x+5-1)(x^2-5x+5+1)+17 \\ &= (x^2-5x+5)^2+16 \end{aligned}$$

故 $y\in[16,+\infty)$.

(2)应用配方法或判别式法,将原式改写为

$$2yx^2-4yx+3y-5=0$$

而
$$\Delta=(-4y)^2-8y(3y-5)\geqslant 0$$

故
$$y(y-5)\leqslant 0,\text{即 } 0\leqslant y\leqslant 5$$

显然 $y\neq 0$,可知 $y\in(0,5]$.

(3)应用配方法,则

$$y=2-\sqrt{3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{2}{3}}$$

故
$$y\in\left(-\infty,2-\frac{\sqrt{6}}{3}\right].$$

(4)应用反函数法,当 $x\neq -2$ 时,由原式可知

$$xy+2y=x+1,\text{即 } x=\frac{1-2y}{y-1},\quad y\neq 1$$

由此得
$$y\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty).$$

(5)应用反函数法,由原式可知 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3-y}{2}+\dfrac{\pi}{12}$

其定义域为
$$\left|\frac{3-y}{2}\right|\leqslant 1\quad\text{或}\quad |y-3|\leqslant 2$$

故
$$y\in[1,5].$$

(6)应用反函数法,由原式可知 $x=3+\dfrac{2}{\sin y}$

其定义域为
$$y\neq n\pi,\quad n\in Z$$

又因
$$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},$$

故
$$y\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right].$$

(7)利用三角函数的性质,则原式$=1-\dfrac{6}{\sin x+3}$

由于 $$-1\leqslant\sin x\leqslant 1,\quad 2\leqslant\sin x+3\leqslant 4$$

于是 $$\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{\sin x+3}\leqslant\frac{1}{2}$$

故 $1-\dfrac{6}{2}\leqslant y\leqslant 1-\dfrac{6}{4}$, 即 $y\in\left[-2,-\dfrac{1}{2}\right]$.

(8)原式$=\dfrac{5}{4}-\left(2^x-\dfrac{1}{2}\right)^2$

故 $$y\in\left(-\infty,\frac{5}{4}\right].$$

例 1.5 已知 $f(x)=\dfrac{4x-a}{x^2+1}$,a 为实常数.

(1)当 $f(x)$的极大值为 1 时,问 a 的值如何?

(2)当 a 取(1)所确定的值时,求 $f(x)$的值域.

[解] (1)$f'(x)=-\dfrac{4x^2-2ax-4}{(x^2+1)^2}$

令 $f'(x)=0$,得 $$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+16}}{4}$$

故 $$x_1=\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4},\quad x_2=\frac{a-\sqrt{a^2+16}}{4}.$$

又 $$f''(x)=\frac{2(4x^3-3ax^2-12x+a)}{(x^2+1)^3},$$

经计算得 $$f''(x_1)<0,\quad f''(x_2)>0$$

故 $$f(x_1)=\frac{4x_1-a}{x_1^2+1}.$$

为极大值,由此可得 $$\frac{4x_1-a}{x_1^2+1}=1,\quad 即\quad 4x_1-a=x_1^2+1$$

将 $x_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2+16}}{4}$代入,可知 $a=3$.

(2)当 $a=3$ 时,$f(x)=\dfrac{4x-3}{x^2+1}$

将 $a=3$ 代入 x_1,x_2 的表达式,可知当 $x=2$ 时,$f(x)$有极大值 1;当 $x=-1/2$ 时,$f(x)$有极小值-4.

又因 $$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-3}{x^2+1}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{x^2+1}=0$$

故 $f(2)=1$,$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4$ 分别是 $f(x)$的最大值和最小值,因此 $f(x)\in[-4,1]$.

例 1.6 设 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$,求其值域.

[解] 因为$|\sin t|$是以 π 为周期的连续函数,所以 $f(x)$可能也是以 π 为周期的函数.

事实上 $$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|\,dt \xlongequal{令\,t=u+\pi} \int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(\pi+u)|\,du$$
$$=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,du=f(x)$$

因为 $f(x)$是以 π 为周期的函数，故只需讨论在$[0,\pi]$上的情况，如图 1-1 所示.

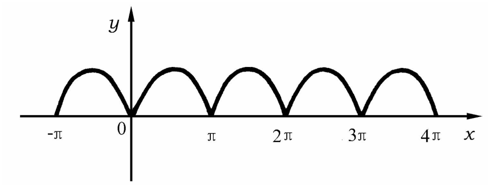


图 1-1

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\sin t|\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\,dt=\sqrt{2},$$
$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\,dt \xlongequal{由图像知} 2\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t\,dt=2-\sqrt{2},$$
$$f(0)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=1,$$
$$f(\pi)=\int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt \xlongequal{由图像知} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=1.$$

由此可知，$f(x)$ 的最大值为$\sqrt{2}$，最小值为 $2-\sqrt{2}$

故 $$f(x)\in[2-\sqrt{2},\sqrt{2}].$$

1.1.3　反函数的定义

设给定一个函数 $y=f(x)$，其值域为 R，如果对于一个 $y\in R$，由方程 $y=f(x)$可唯一确定一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记作
$$x=\varphi(y),$$
称为 $y=f(x)$的反函数.

习惯上，$y=f(x)$的反函数通常记作
$$y=f^{-1}(x)\quad 或\quad y=\varphi(x).$$

评注

(1)$y=f(x)$的图像与其反函数 $x=\varphi(y)$的图像重合；而 $y=f(x)$的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2)只有一一对应的函数才有反函数. 例如 $y=x^2$ 没有反函数；但当 $x\geqslant 0$ 时，$y=x^2$ 有反函数$y=\sqrt{x}$.

反函数的求法步骤：

第一步:把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出;

第二步:把从第一步得到的表达式中的 x 与 y 对换,所得结果就是要求的 $y=f(x)$ 的反函数.

例 1.7 求下列函数的反函数:

(1) $y=\dfrac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$;　(2) $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$;　(3) $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$.

[解] (1) 当 $x\neq 0$ 时,将原式变形为

$$y(10^{2x}-1)=10^{2x}+1+(10^{2x}-1)\quad 即\quad (y-2)10^{2x}=y$$

解得
$$x=\frac{1}{2}\lg\frac{y}{y-2},$$

故反函数为
$$y=\frac{1}{2}\lg\frac{x}{x-2}.$$

(2) 当 $x\neq -1$ 时,将原式变形为

$$\frac{y-1}{2}=\sin\frac{x-1}{x+1}\quad 即\quad \frac{x-1}{x+1}=\arcsin\frac{y-1}{2}$$

解得
$$x=\frac{\arcsin\dfrac{y-1}{2}+1}{1-\arcsin\dfrac{y-1}{2}},$$

故反函数为
$$y=\frac{\arcsin\dfrac{x-1}{2}+1}{1-\arcsin\dfrac{x-1}{2}}.$$

(3) 当 $x\geqslant -\dfrac{1}{4}$ 时,将原式变形为

$$y(1+\sqrt{1+4x})=1-\sqrt{1+4x}\quad 即\quad \sqrt{1+4x}=\frac{1-y}{1+y}$$

解得
$$x=-\frac{y}{(1+y)^2},$$

故反函数为
$$y=-\frac{x}{(1+x)^2}.$$

1.1.4 分段函数的定义

在定义域内,如果对应于不同的区间,函数有着不同的表达形式,则称这样的函数为分段函数.一般来讲,分段函数不是初等函数,但也有例外,例如

$$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

既可看作分段函数,又可看作初等函数.

常见的几个分段函数:

(1) y 是 x 的最大整数部分,记为 $y=[x]$;

(2)符号函数　$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0.\\ -1, & x<0\end{cases}$

两个函数的图形如图1-2、图1-3所示.

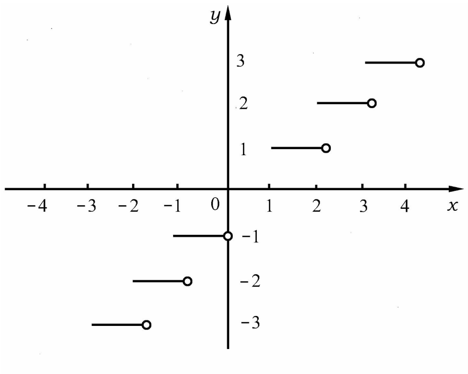


图1-2

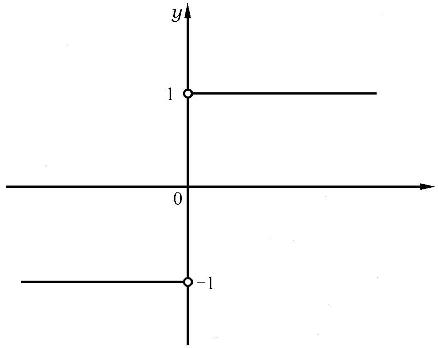


图1-3

(3)狄里克莱(Dirichlet)函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数时}\\ 0, & x\text{ 为无理数时}\end{cases}$$

①该函数虽难以画出,但有如下特征:它是偶函数.事实上,当 x 为有理数时,$-x$ 也是有理数,故 x 和 $-x$ 所对应的函数值都为1,两者相等,即 $f(x)=f(-x)$;而当 x 为无理数时,$-x$ 也是无理数,且 $f(x)=0=f(-x)$,故该函数为偶函数.

②任何正有理数 l 皆为其周期.事实上,当 x 为有理数时,$x+l$ 也是有理数,故 $f(x)=1=f(x+l)$;当 x 为无理数时,$x+l$ 也是无理数,故 $f(x)=0=f(x+l)$.可见 l 为 $f(x)$ 的周期.

例1.8　求下列函数的反函数:

(1)$f(x)=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$;　　(2)$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$.

[解]　(1)由 $y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1+x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ -(1+x^2), & x<0\end{cases}$

解得
$$x=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y>1\\ 0, & y=0\\ -\sqrt{-(y+1)}, & y<-1\end{cases},$$

故反函数为
$$y=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x>1\\ 0, & x=0\\ -\sqrt{-(x+1)}, & x<-1\end{cases}.$$

(2)由 $y=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$

解得
$$x=\begin{cases}\sqrt{1+y}, & -1\leqslant y\leqslant 0\\ -\sqrt{y}, & 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases},$$

故反函数为
$$y=\begin{cases}\sqrt{1+x}, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ -\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}.$$

1.1.5 复合函数的定义

设函数 $y=f(u)$,其定义域为 U,而 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X,值域为 D. 如果 $D\subseteq U$,则对于 X 内的每一个 x 值经过中间变量 u,相应地得到唯一确定的一个 y 值,则称变量 y 通过中间变量 u 而成为 x 的复合函数. 记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

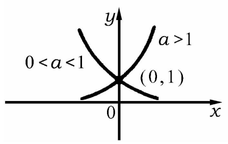
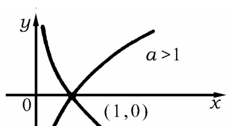
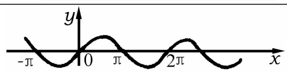
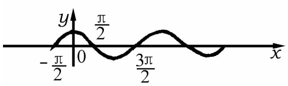
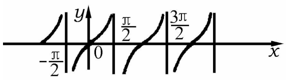
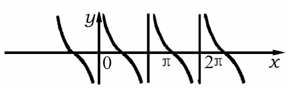
评注 中间变量 u 作为函数时的值域 D 应包含在它作为自变量时的定义域 U 内,这一条件是必不可少的.

例如 $y=\arcsin u$, $u=x^2+2$,就不能构成复合函数 $y=\arcsin(x^2+2)$,这是因为 $D=\{u\mid 2\leqslant u<+\infty\}$ 不包含于 $U=\{u\mid -1\leqslant u\leqslant 1\}$ 之中.

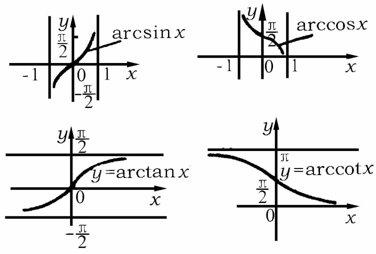
1.1.6 五个基本初等函数

如表 1-1 所示.

表 1-1

函数名称	定义域	值 域	图 像	基本关系式
幂函数 $y=x^{\mu}$	随 μ 的不同而不同	随 μ 的不同而不同		
指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$		
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$		
三角函数				
$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$		$\sin(\arcsin x)=x$ $(\lvert x\rvert\leqslant 1)$
$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$		$\cos(\arccos x)=x$ $(\lvert x\rvert\leqslant 1)$
$y=\tan x$	$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $n\in Z$	$(-\infty,+\infty)$		$\tan(\arctan x)=x$ $x\in R$
$y=\cot x$	$x\neq n\pi$ $n\in Z$	$(-\infty,+\infty)$		$\cot(\operatorname{arccot} x)=x$ $x\in R$

续表

函数名称	定义域	值　域	图　像	基本关系式
反三角函数				
$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		$\arcsin(\sin x)=x$ $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$		$\arccos(\cos x)=x$ $x\in[0,\pi]$
$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		$\arctan(\tan x)=x$ $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$y=\text{arccot}\,x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$		$\text{arccot}(\cot x)=x$ $x\in(0,\pi)$
三个恒等式	$a^{\log_a x}=x$，	$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，	$\arctan x+\text{arccot}\,x=\frac{\pi}{2}$	

1.2　函数的基本性质

1.2.1　函数的有界性

设函数 $y=f(x)$在 X 上有定义，如果 $\exists M>0$，使得对于一切 $x\in X$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 X 上有界，否则称 $f(x)$无界. 例如 $y=\sin x,\cos x,\arctan x,\text{arccot}\,x$ 均为有界函数. 事实上，

$$|\sin x|\leqslant 1,\quad |\cos x|\leqslant 1,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$|\arctan x|\leqslant\frac{\pi}{2},\quad |\text{arccot}\,x|\leqslant\pi,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

评注　函数 $f(x)$的有界与无界是相对于某个区间而言的. 例如 $y=f(x)=1/x$ 相对于区间$(0,1)$是无界的，而相对于区间$[0.001,2]$却是有界的.

1.2.2　函数的单调性

设函数 $y=f(x)$在区间 X 上有定义，如果对于 $\forall x_1,x_2\in X$，不妨设 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$在 X 上是单调增加的（或单调减少的）；若恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$或（$f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$在 X 上是单调不减的（或单调不增的）.

1.2.3　函数的奇偶性

设函数 $f(x)$在 X 上有定义，如果对于 $\forall x\in X$，恒有 $f(x)=f(-x)$，则称 $f(x)$为偶函数；如果对于 $\forall x\in X$，恒有 $f(x)=-f(-x)$，则称 $f(x)$为奇函数.

偶函数 $f(x)$的图像关于 y 轴对称；奇函数 $f(x)$的图像关于坐标原点对称.

评注

(1)判别给定函数的奇偶性，主要是根据奇偶性的定义.

(2)记住关系式 $f(x)+f(-x)=0$，是判别 $f(x)$为奇函数的一种有效方法.

(3)函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若定义域关于原点不对称,则该函数必不是奇、偶函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

就不具有奇偶性.

(4)常见的偶函数有 $\cos x$, x^{2n}(n 为正整数);奇函数有 $\sin x$, $\tan x$, $1/x$, x^{2n+1}(n 为正整数).

(5)判别函数的奇偶性常用的一些性质:

①两偶函数之和是偶函数;两奇函数之和是奇函数.

②两奇(或偶)函数之积(当分母不为零时之商)是偶函数.

③一奇函数与一偶函数之积(当分母不为零时之商)是奇函数.

例 1.9 判别下列函数的奇偶性:

(1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; (2) $y=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ $(a>0)$;

(3) $y=\begin{cases}x(1-x), & x\geqslant 0\\ x(1+x), & x<0\end{cases}$;(4) $y=F(x)\left[\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right]$其中 $a>0, a\neq 1$, $F(x)$为奇函数.

[解] (1)令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,则

$$\begin{aligned}f(x)+f(-x)&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{x^2+1})\\&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})\\&=\ln(-x^2+x^2+1)=0\end{aligned}$$

故该函数为奇函数.

(2)令 $f(x)=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$,则

$$f(-x)=(-x)\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=-x\frac{1-a^x}{1+a^x}=x\frac{a^x-1}{a^x+1}=f(x),$$

故该函数为偶函数.

(3)令 $f(x)=\begin{cases}-x^2+x, & x\geqslant 0\\ x^2+x, & x<0\end{cases}$

当 $x\geqslant 0$ 时 $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x=-f(x)$

当 $x<0$ 时 $f(-x)=-(-x)^2-x=-x^2-x=-f(x)$

故该函数为奇函数.

(4)令 $f(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$,则

$$f(x)+f(-x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}+\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=\frac{1}{a^x-1}-\frac{a^x}{a^x-1}+1=0,$$

可知 $f(x)$为奇函数,又因 $F(x)$为奇函数,故 $y=F(x)f(x)$为偶函数.

例 1.10 设函数 $f(x)$连续,则在下列函数中,必为偶函数的是 [ ].

A. $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$ B. $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$

C. $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$　　　　D. $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$

[解]　$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的奇偶性与 $f(x)$ 的奇偶性的关系是:若 $f(x)$ 为偶函数,则 $F(x)$ 为奇函数;若 $f(x)$ 为奇函数,则 $F(x)$ 为偶函数.

因为 $t[f(t)+f(-t)]$ 为奇函数,故 $\int_0^x [f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$ 为偶函数,所以选 A.

1.2.4　函数的周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义,如果存在一个与 x 无关的正数 $T\neq 0$,使得对于任一 $x\in X$,恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数. T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常把满足关系式 $f(x+T)=f(x)$ 的最小正数称为 $f(x)$ 的周期.

1.3　错解分析

例 1.11　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+1}, & x\geqslant 2\\ \dfrac{2-x}{x+1}, & x<2, \text{且 } x\neq -1\end{cases}$,　求 $f(a)$.

[错解]　$f(a)=\begin{cases}\dfrac{a-2}{a+1}\\ \dfrac{2-a}{a+1}\end{cases}$.

[错因分析]　主要是对分段函数不够清楚.

[正确解法]　应对常数 a 分情况讨论:

当 $a\geqslant 2$ 时,$f(a)=\dfrac{a-2}{a+1}$;

当 $a<2$ 时,$f(a)=\dfrac{2-a}{a+1}$　$(a\neq -1)$.

例 1.12　设分段函数　$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0\\ x^2+\ln x, & x>0\end{cases}$

求 $f(1-x)$,$f(x-1)$.

[错解]　$f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x), & x\leqslant 0\\ (1-x)^2+\ln(1-x), & x>0\end{cases}$

$$f(x-1)=\begin{cases}\sin(x-1), & x\leqslant 0\\ (x-1)^2+\ln(x-1), & x>0\end{cases}.$$

[错因分析]　忽视了改变自变量形式的同时,要相应地考虑定义域的变化这个关键点.

[正确解法]　$f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x), & 1-x\leqslant 0\\ (1-x)^2+\ln(1-x), & 1-x>0\end{cases}$

即
$$f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x), & x\geqslant 1\\ (1-x)^2+\ln(1-x), & x<1\end{cases}$$

类似地
$$f(x-1)=\begin{cases}\sin(x-1), & x\leqslant 1\\ (x-1)^2+\ln(x-1), & x>1\end{cases}.$$

例 1.13 设 $H(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$, 求 $y=H(x)-H(x-1)$.

[错解] 因 $H(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$

故
$$H(x-1)=\begin{cases}0, & x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

于是
$$y=H(x)-H(x-1)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0, & x\geqslant 1\end{cases}.$$

[错因分析] 把解不等式组取公共部分的做法错误地运用到函数运算上来.

[正确解法] 分段函数 $H(x)$ 的分界点为 $x=0$,而 $H(x-1)$ 的分界点为 $x=1$,它们将数轴分成 $(-\infty,0)$,$[0,1)$ 与 $[1,+\infty)$ 三部分,对三个区间分别讨论 $H(x)-H(x-1)$ 就可得出正确结论.

当 $x<0$ 时, $H(x)-H(x-1)=0$

当 $0\leqslant x<1$ 时, $H(x)-H(x-1)=1$

当 $x\geqslant 1$ 时, $H(x)-H(x-1)=0$

由此得
$$y=H(x)-H(x-1)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 及 } x\geqslant 1\\ 1, & 0\leqslant x<1\end{cases}.$$

例 1.14 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\quad (x>0)$, $g(x)=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$

问函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一函数?

[错解] 令 $\dfrac{1}{x}=t(t>0)$,则 $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$

故可知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 表示同一函数.

[错因分析] 忽视了两个函数等价的条件是定义域和对应关系要完全相同.

[正确解法] 易知 $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$ 的定义域为 $x>0$,而 $g(x)=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$ 的定义域为 $x\neq 0$,故两者不表示同一函数.

例 1.15 求 $y=(x-|x|)\sqrt{-\sin^2\pi x}$ 的定义域.

[错解] 要使 $-\sin^2\pi x\geqslant 0$,必须 $\sin\pi x=0$,即 $x=k(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

[错因分析] 上述解题方法还是有一定正确性的,但考虑问题不够全面.

事实上,当 $x\neq k(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时,虽然 $\sqrt{-\sin^2\pi x}$ 取虚数值,但若考虑 $x-|x|=0$,$y=(x-|x|)\sqrt{-\sin^2\pi x}$ 还是有意义的,其值为零.

[正确解法] 当 $x\geqslant 0$ 时,$x-|x|=0$,不论 $\sqrt{-\sin^2\pi x}$ 取何值,函数总有意义,其值

为零；

又当 $x=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$\sqrt{-\sin^2\pi x}=0$. 于是，由以上讨论可知该函数的定义域为：

$$x\geqslant0 \text{ 及 } x=-k \quad (k=1,2,\cdots).$$

例 1.16　求下列函数的定义域：　$F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x^2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$

[错解]　由于 $x=0$ 是被积函数的间断点，因而 $F(x)$的定义域为 $x\neq0$.

[错因分析]　主要是不了解可积函数类，错误地认为只有连续函数才可积.

[正确解法]　因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，所以 $x=0$ 为第一类间断点. 故 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$在包含$x=0$的区间内积分有意义，于是题设的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

1.4　难题解题技巧及分析

1.4.1　函数的复合

将两个或两个以上函数进行复合，通常有三种方法：代入法、分析法和图示法.

1. 代入法

将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代，这种构造复合函数的方法称为代入法.

例 1.17　设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求 $f[f(f(x))]$；　$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

[解]　$$f(f(x))=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}\quad(x\neq0),$$

$$f[f(f(x))]=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=x,$$

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{f(x)}}=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}-1}=\frac{1}{x}\quad(x\neq0).$$

例 1.18　设 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{n\text{次}}$，若 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)$.

[解]　$$f_2(x)=f(f(x))=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

由以上二式可推测
$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$
而由数学归纳法可证明确有上式成立.

2. 分析法

所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,从而得出复合函数的方法. 该法适用于普通函数与分段函数,或分段函数之间的复合.

例 1.19 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ x, & x\geqslant 1 \end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases} x+2, & x<0 \\ x^2-1, & x\geqslant 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

[解] $f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1 \\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1 \end{cases}$

(1)当 $\varphi(x)<1$ 时:

或 $x<0$,$\varphi(x)=x+2<1$,即 $\begin{cases} x<0 \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow x<-1$

或 $x\geqslant 0$,$\varphi(x)=x^2-1<1$,即 $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2<2 \end{cases} \Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}$.

(2)当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时:

或 $x<0$,$\varphi(x)=x+2\geqslant 1$,即 $\begin{cases} x<0 \\ x\geqslant -1 \end{cases} \Rightarrow -1\leqslant x<0$

或 $x\geqslant 0$,$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$,即 $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2\geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow x\geqslant \sqrt{2}$

综上所述,有
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{x+2}, & x<-1 \\ x+2, & -1\leqslant x<0 \\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2} \\ x^2-1, & x\geqslant \sqrt{2} \end{cases}.$$

例 1.20 设 $f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<0 \\ 1, & x\geqslant 0 \end{cases}$, 求 $f[f(x)]$.

[解] $f[f(x)]=\begin{cases} 1+f(x), & f(x)<0 \\ 1, & f(x)\geqslant 0 \end{cases}$

(1)当 $f(x)<0$ 时:

或 $x<0$,$f(x)=1+x<0$,即 $\begin{cases} x<0 \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow x<-1$

或 $x\geqslant 0$,$f(x)=1<0$,矛盾.

(2)当 $f(x)\geqslant 0$ 时:

或 $x<0$,$f(x)=1+x\geqslant 0$,即 $\begin{cases} x<0 \\ x\geqslant -1 \end{cases} \Rightarrow -1\leqslant x<0$

或 $x\geqslant 0$,$f(x)=1>0$,即 $x\geqslant 0$

综上所述，有
$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1\\ 1, & -1\leqslant x<0 \text{ 及 } x\geqslant 0\end{cases}$$
即
$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1\\ 1, & x\geqslant -1\end{cases}.$$

例 1.21　设 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 0, & |x|>2\end{cases}$，　求 $f[f(x)]$.

［解］　$f[f(x)]=\begin{cases}4-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 2\\ 0, & |f(x)|>2\end{cases}$

(1)当 $|f(x)|\leqslant 2$ 时：

或 $|x|\leqslant 2$，$|f(x)|=|4-x^2|\leqslant 2$，即
$$\begin{cases}|x|\leqslant 2\\ 2\leqslant x^2\leqslant 6\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \sqrt{2}\leqslant |x|\leqslant 2$$
或 $|x|>2$，$|f(x)|=|0|\leqslant 2$，即 $|x|>2$.

(2)当 $|f(x)|>2$ 时：

或 $|x|\leqslant 2$，$|f(x)|=|4-x^2|>2$，即
$$\begin{cases}|x|\leqslant 2\\ |x|>\sqrt{6} \text{ 或 } |x|<\sqrt{2}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad |x|<\sqrt{2}$$
或 $|x|>2$，$|f(x)|=|0|>2$，矛盾.

综上所述，有
$$f[f(x)]=\begin{cases}0, & |x|<\sqrt{2}\\ 4-(4-x^2)^2, & \sqrt{2}\leqslant |x|\leqslant 2.\\ 4, & |x|>2\end{cases}$$

例 1.22　设 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+3, & x\leqslant 1\\ \sqrt{x-1}, & 1<x<2,\\ 3-x, & x\geqslant 2\end{cases}$　$\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x<0\\ x-1, & x\geqslant 0\end{cases}$

求 $f[\varphi(x)]$.

［解］　$f[\varphi(x)]=\begin{cases}\varphi^2(x)+2\varphi(x)+3, & \varphi(x)\leqslant 1\\ \sqrt{\varphi(x)-1}, & 1<\varphi(x)<2\\ 3-\varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 2\end{cases}$

(1)当 $\varphi(x)\leqslant 1$ 时：

或 $-2\leqslant x<0$，$\varphi(x)=x^2\leqslant 1$，即
$$\begin{cases}-2\leqslant x<0\\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad -1\leqslant x<0$$
或 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x-1\leqslant 1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x\leqslant 2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad 0\leqslant x\leqslant 2.$

(2)当 $1<\varphi(x)<2$ 时：

或 $-2\leqslant x<0$，$\varphi(x)=x^2$，而 $1<x^2<2$，即

$$\begin{cases} -2\leqslant x<0 \\ 1<x^2<2 \end{cases} \Rightarrow \quad -\sqrt{2}<x<-1$$

或 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x-1$，而 $1<x-1<2$，即

$$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ 2<x<3 \end{cases} \Rightarrow \quad 2<x<3.$$

(3)当 $\varphi(x)\geqslant 2$ 时：

或 $-2\leqslant x<0$，$\varphi(x)=x^2\geqslant 2$，即

$$\begin{cases} -2\leqslant x<0 \\ x^2\geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow \quad -2<x\leqslant -\sqrt{2}$$

或 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x-1\geqslant 2$，　即 $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x\geqslant 3 \end{cases} \Rightarrow \quad x\geqslant 3$

综上所述，有

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} 3-x^2, & -2\leqslant x\leqslant -\sqrt{2} \\ \sqrt{x^2-1}, & -\sqrt{2}<x<-1 \\ x^4+2x^2+3, & -1\leqslant x<0 \\ (x-1)^2+2(x-1)+3, & 0\leqslant x\leqslant 2. \\ \sqrt{(x-1)-1}, & 2<x<3 \\ 3-(x-1), & x\geqslant 3 \end{cases}$$

3. 图示法

所谓图示法是借助于图形的直观性达到函数复合的一种方法. 适用于两个分段函数的复合. 图示法的程序：

(1)画出中间变量函数 $u=\varphi(x)$ 的图像；

(2)在 xou 坐标面上画出 $y=f(u)$ 的分界点(是若干条平行于 x 轴的直线)；

(3)写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间；

(4)把(3)所得结果代入 $y=f(u)$ 中，便得复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间.

例 1.23　设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$，$\varphi(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ x^2, & x\geqslant 0 \end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.

［解］　先求 $f[\varphi(x)]=\dfrac{1}{2}(\varphi(x)+|\varphi(x)|)$　(a)

作出 $u=\varphi(x)$ 的图像，如图 1-4 所示，以及 $f(u)=\dfrac{1}{2}(u+|u|)$ 的分界点 $u=0$($x-u$ 平面上的 x 轴).

当 $x<0$ 时，$u=x$，　$(u<0)$

当 $x\geqslant 0$ 时，$u=x^2$，　$(u\geqslant 0)$

将以上所得结果代入(a)式，得

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & x\geqslant 0 \end{cases}$$

再求 $\varphi[f(x)]=\begin{cases} f(x), & f(x)<0 \\ f^2(x), & f(x)\geqslant 0 \end{cases}=\begin{cases} v, & v<0 \\ v^2, & v\geqslant 0 \end{cases}$　　(b)

作出 $v=f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$ 的图像，如图 1-5 所示，以及 $v=0$（即 $x-v$ 平面上的 x 轴）.

当 $x<0$ 时，$v=0$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$v=x(v\geqslant 0)$.

把以上结果代入(b)式，得　$\varphi[f(x)]=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & x\geqslant 0 \end{cases}$.

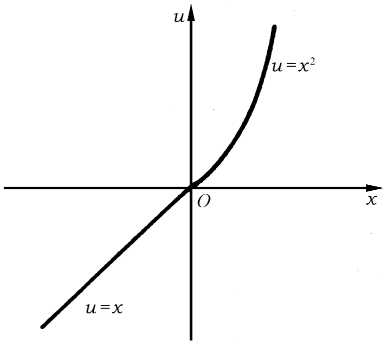


图 1-4

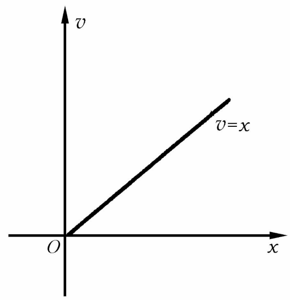


图 1-5

例 1.24　用图示法求解例 1.22.

［解］　$f[\varphi(x)]=f(u)=\begin{cases} u^2+2u+3, & u\leqslant 1 \\ \sqrt{u-1}, & 1<u<2 \\ 3-u, & u\geqslant 2 \end{cases}$　　(a)

(1)画出 $u=\varphi(x)=\begin{cases} x^2, & -2\leqslant x<0 \\ x-1, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 的图像，如图 1-6 所示.

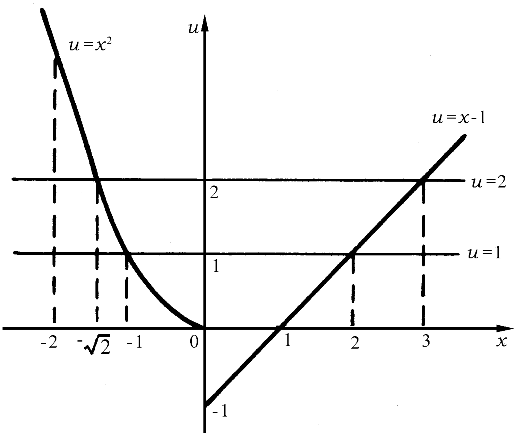


图 1-6

(2)从图 1-6 中可看出：

当$-1\leqslant x<0$ 时，　$u=\varphi(x)=x^2\leqslant 1$

当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，　$u=\varphi(x)=x-1\leqslant 1$

当$-\sqrt{2}<x<-1$ 时，　$u=x^2$　$(1<u<2)$

当$-2\leqslant x<-\sqrt{2}$时，　$u=x^2$　$(u\geqslant 2)$

当 $2<x<3$ 时，　$u=x-1$　$(1<u<2)$

当 $x\geqslant 3$ 时，　$u=x-1$　$(u\geqslant 2)$

将以上结果代入(a)式，得

$$f[f(x)]=\begin{cases}3-x^2, & -2\leqslant x\leqslant -\sqrt{2}\\ \sqrt{x^2-1}, & -\sqrt{2}<x<-1\\ x^4+2x^2+3, & -1\leqslant x<0\\ (x-1)^2+2(x-1)+3, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ \sqrt{(x-1)-1}, & 2<x<3\\ 3-(x-1), & x\geqslant 3\end{cases}.$$

1.4.2　由给定的关系式求解 $f(x)$的表达式

1. 利用函数表示法与用什么字母表示无关的“特性”求 $f(x)$

例 1.25　设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$　$(x\neq 0)$，求 $f(x)$.

[解]　令$\dfrac{1}{x}=t$，$x=\dfrac{1}{t}$，则得　$f(t)=\dfrac{1}{t}+\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{t}\right)^2}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}$

即
$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\quad (x\neq 0).$$

2. 将表达式化为对应号 $f(\quad)$中变量的相关形式，再用“特性”求 $f(x)$

例 1.26　设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x+\tan x$，求 $f(x)$.

[解]　$f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x+\tan x=\dfrac{\cos x+\cos^2 x+\sin x}{\cos x}$

$$=\frac{1-2\sin^2\dfrac{x}{2}+\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^2\pm 2\sin\dfrac{x}{2}\sqrt{1-\sin^2\dfrac{x}{2}}}{1-2\sin^2\dfrac{x}{2}}$$

令 $\sin\dfrac{x}{2}=t$，则有
$$f(t)=\frac{1-2t^2+(1-2t^2)^2\pm 2t\sqrt{1-t^2}}{1-2t^2},$$

故
$$f(x)=\frac{1-2x^2+(1-2x^2)^2\pm 2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}.$$

3. 利用“特性”得到另外的关系式,通过解方程组求出 $f(x)$

例 1.27　设 $f(x)$满足方程 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$,其中 a,b,c 为常数,且 $|a|\neq|b|$,求 $f(x)$并证明它是奇函数.

［解］　由于
$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x} \tag{a}$$
若令 $x=\frac{1}{t}$,则(a)式变为
$$af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$$
即
$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx \tag{b}$$
解方程组
$$\begin{cases} af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x} \\ bf\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx \end{cases}$$
可得
$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right),$$
又因
$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)$$
$$=-\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)=-f(x)$$
故 $f(x)$为奇函数.

例 1.28　设 $f(x)$满足关系式
$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=af(x)+\varphi(x)(a^2\neq 1),$$
其中,当 $x\neq 1$ 时,$\varphi(x)$是有定义的已知函数,求 $f(x)$.

［解］　由于
$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=af(x)+\varphi(x) \tag{a}$$
若令 $t=\frac{x}{x-1}$,则 $x=\frac{t}{t-1}$,(a)式变为　$f(t)=af\left(\frac{t}{t-1}\right)+\varphi\left(\frac{t}{t-1}\right)$

即
$$f(x)=af\left(\frac{x}{x-1}\right)+\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right) \tag{b}$$
解方程组(a)、(b),可得　$f(x)=\frac{1}{1-a^2}\left[a\varphi(x)+\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]$.

例 1.29　设 $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=2x$,　　(a)

$x\neq 0,x\neq 1$,求 $f(x)$.

［解］　令 $t=\frac{x-1}{x}$,$x=\frac{1}{1-t}$,代入原方程(a),得　$f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f(t)=\frac{2}{1-t}$

故
$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2}{1-x} \tag{b}$$
再令$\frac{1}{1-x}=\frac{u-1}{u}$,$x=\frac{1}{1-u}$,代入(b)式,得

$$f\left(\frac{1}{1-u}\right)+f\left(\frac{u-1}{u}\right)=\frac{2(u-1)}{u}$$

即
$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2(x-1)}{x} \tag{c}$$

解方程组(a)、(b)、(c),可得 $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1$.

4. 利用分析法求 $f(x)$

例 1.30 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,$f'(0)$ 存在,且对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$,恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$,求 $f(x)$.

[解] 由于
$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy \tag{a}$$

令 $y=0$,则有
$$f(x)=f(x)+f(0) \quad\Rightarrow\quad f(0)=0$$

由(a)式可得
$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)}{y}+2x$$

当 $y\to 0$ 时,对上式取极限,于是有

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\left[\frac{f(y)-f(0)}{y-0}+2x\right]=f'(0)+2x$$

积分得
$$f(x)=f'(0)x+x^2+c,$$

令 $x=0$,得 $c=0$,故
$$f(x)=f'(0)x+x^2.$$

例 1.31 已知 $\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}a=nf(x)$,其中 $f'(x)$存在,求 $f(x)$.

[解] 因为
$$\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}a \xlongequal{\text{令 } u=ax} \int_0^x f(u)\frac{\mathrm{d}u}{x}=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

故
$$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=nf(x),\quad \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=nf(1)$$

即
$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=nxf(x),$$

两边对 x 求导,得
$$f(x)=nf(x)+nxf'(x)$$

故
$$\frac{1-n}{nx}=\frac{f'(x)}{f(x)},$$

积分得
$$\frac{1-n}{n}\ln x+\ln c=\ln f(x),$$

于是 $f(x)=cx^{\frac{1-n}{n}}$,两边在$[0,1]$积分可得 $c=f(1)$,故 $f(x)=x^{\frac{1-n}{n}}f(1)$.

例 1.32 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$,则 $F(x)$ [ ].

A. 为正常数 B. 为负常数 C. 恒为0 D. 不为常数

[解] 由于函数 $\mathrm{e}^{\sin t}\sin t$ 是以 2π 为周期的,

所以 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\mathrm{d}\cos t=-\left(\mathrm{e}^{\sin t}\cos t\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos^2 t\cdot\mathrm{e}^{\sin t}\mathrm{d}t\right)=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\cos^2 t\mathrm{d}t>0$$

故选 A.

例 1.33　求满足方程 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x + \int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$　　(a)

的可微函数 $f(x)$.

［解］　由于 $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{令 u=x-t} \int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u$

$$= x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$$

于是原方程(a)变为　$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x + x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$

将上式两边对 x 求导得 $f(x) = 1 + \int_0^x f(u)\mathrm{d}u + xf(x) - xf(x)$

故
$$f(x) = 1 + \int_0^x f(u)\mathrm{d}u \tag{b}$$

将(b)式对 x 求导得
$$f'(x) = f(x)$$

积分得
$$f(x) = c\mathrm{e}^x \tag{c}$$

在(b)式中令 $x=0$,可知 $f(0)=1$;在(c)式中令 $x=0$,可得 $c=1$,于是

$$f(x) = \mathrm{e}^x.$$

例 1.34　求满足下列方程　$f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$的函数 $f(x)$. 其中已知 $f'(0)$ 存在.

［解］　由于
$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$$

令 $y=0$,可得 $f(0)=0$. 注意到
$$\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}=f'(0)$$
$$\lim_{y\to 0}f(y)=f(0)=0$$

则
$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}-f(x)}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)[1+f^2(x)]}{y[1-f(x)f(y)]}=f'(0)[1+f^2(x)]$$

故
$$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}=f'(0),$$

积分得
$$\arctan[f(x)]=f'(0)x+C,令 x=0 得 C=0$$

于是
$$f(x)=\tan[f'(0)x].$$

例 1.35　设 $f(x)$在 $x=0$ 附近有界,且满足方程　$f(x)-\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{x}{2}\right)=x^2$,求 $f(x)$.

［解］　由于
$$f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2,$$

故
$$\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2^2}f\left(\frac{x}{2^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

$$\frac{1}{2^2}f\left(\frac{x}{2^2}\right)-\frac{1}{2^3}f\left(\frac{x}{2^3}\right)=\frac{1}{2^2}\left(\frac{x}{2^2}\right)^2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)^2$$

将以上各式两边分别相加得 $f(x)-\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=x^2\left(1+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{3(n-1)}}\right)$,

当 $n\to\infty$ 时两边取极限,注意到 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有界以及等比级数的性质,则有

$$f(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{2^3}}$$

即

$$f(x)=\frac{8}{7}x^2.$$

例 1.36 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$,有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 试证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且求 $f(x)$.

[证法 1] 由于

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{a}$$

令 $y=0$,则有

$$f(x)=f(x)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$$

任取 $x\in(-\infty,+\infty)$,由于

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)-f(x)]$$
$$=f(0)=0$$

故 $f(x)$ 在点 x 处连续. 由 x 的任意性知,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 又因

$$\lim_{y\to x}f(x+y)=\lim_{y\to x}[f(x)+f(y)]$$

故

$$f(2x)=2f(x),$$

设当 $n=k\geqslant 2$ 时,$f(kx)=kf(x)$,则

$$f[(k+1)x]=f[kx+x]=f(kx)+f(x)$$
$$=kf(x)+f(x)=(k+1)f(x)$$

可见,对于 $n=k+1$ 时上式也成立. 由数学归纳法可知

$$f(nx)=nf(x)$$

令 $x=\frac{1}{n}$,则

$$f(1)=nf\left(\frac{1}{n}\right)$$

即

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}f(1)$$

由 $f(x)$ 的连续性,可证

$$f(x)=xf(1).$$

[证法 2] $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的证明同[证法 1].

因为 $f(x)$ 连续,所以 $f(x)$ 可积. 对(a)式两边在 $[0,x]$ 上进行积分得

$$xf(y)=\int_0^x f(x+y)\mathrm{d}x-\int_0^x f(x)\mathrm{d}x \tag{b}$$

令 $t=x+y$,右端第一个积分变为 $\int_0^x f(x+y)\mathrm{d}x=\int_y^{x+y}f(t)\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{x+y} f(t)\mathrm{d}t + \int_y^0 f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{x+y} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^y f(t)\mathrm{d}t$$

于是(b)式变为

$$xf(y) = \int_0^{x+y} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^y f(t)\mathrm{d}t \tag{c}$$

交换(c)式右边 x,y 的位置,其结果不变,故　$xf(y)=yf(x)$

即对于 $x\neq0,y\neq0$,有

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(y)}{y}$$

由 x,y 的任意性,可知

$$\frac{f(x)}{x}=c \quad (c\text{ 为常数})$$

即

$$f(x)=cx$$

令 $x=1$,有 $c=f(1)$,故

$$f(x)=f(1)x.$$

1.4.3　证明给定函数是否为周期函数的方法

1. 证明 $f(x)$是以 T 为周期的函数的方法

一般是验证关系式 $f(x+T)=f(x)$成立.

例 1.37　设 $f(x)$是以 $T>0$ 为周期的函数,证明 $f(ax)(a>0)$是以$\frac{T}{a}$为周期的函数.

[证]　令 $F(x)=f(ax)$. 由于

$$F\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)$$
$$=f(ax)=F(x)$$

故$\frac{T}{a}$为 $f(ax)$的周期.

例 1.38　设 $f_1(x),f_2(x)$均为周期函数,其周期分别为 T_1,T_2,且$\frac{T_1}{T_2}=\frac{n}{m}$($m,n$ 均为正整数),证明 $F(x)=f_1(x)+f_2(x),G(x)=f_1(x)f_2(x)$也都是周期函数,且周期均为 $T=mT_1=nT_2$.

[证]

$$\begin{aligned}F(x+T)&=f_1(x+T)+f_2(x+T)\\&=f_1(x+mT_1)+f_2(x+nT_2)\\&=f_1(x)+f_2(x)=F(x)\\G(x+T)&=f_1(x+T)f_2(x+T)\\&=f_1(x+mT_1)f_2(x+nT_2)\\&=f_1(x)f_2(x)=G(x)\end{aligned}$$

故可知 $mT_1=nT_2=T$ 确为 $F(x),G(x)$的周期.

2. 证明 $f(x)$为非周期函数的方法

相对而言,证明给定函数 $f(x)$为非周期函数的难度要大些. 通常采用如下方法:

(1)利用周期性的定义找出周期 T,经过正确的运算推出所找到的周期 T 与自变量 x

有关,与周期的定义矛盾,从而否定 $f(x)$ 为周期函数.

(2)用反证法,该法有两条思路:

①周期函数的零值点是周期分布,即任何两个相邻的零值点之间等距离.若某个函数的零值点非周期性分布,即可断定该函数不是周期函数;

②假设所给函数为周期函数,通过推算得出与熟知的事实相矛盾的结果,于是可做出否定性结论.

例 1.39 $\cos\sqrt{x}$是不是周期函数?

[解] $\cos\sqrt{x}$不是周期函数.证明如下:

[证法 1] 若不然,则存在一个与 x 无关的常数 $T>0$,对一切 $x\geqslant 0$,恒有

$$\cos\sqrt{x+T}=\cos\sqrt{x}$$

即
$$\cos\sqrt{x+T}-\cos\sqrt{x}=0$$

就有
$$-2\sin\frac{\sqrt{x+T}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+T}-\sqrt{x}}{2}=0,$$

于是得
$$\sin\frac{\sqrt{x+T}+\sqrt{x}}{2}=0\quad 或\quad \sin\frac{\sqrt{x+T}-\sqrt{x}}{2}=0,$$

若前者成立,令 $x=0$,则有 $\sin\dfrac{\sqrt{T}}{2}=0$,$\dfrac{\sqrt{T}}{2}=k\pi$,$T=4k^2\pi^2\quad(k=1,2,\cdots)$

再令 $x=4\pi^2$,则
$$\sin\frac{\sqrt{4\pi^2+4k^2\pi^2}+\sqrt{4\pi^2}}{2}=0$$

即
$$\sin(\sqrt{k^2+1}+1)\pi=0.$$

要使上式成立,$\sqrt{k^2+1}+1$ 必须为整数,这只有当 $k=0$ 时才有可能,但这又与 $T\neq 0$ 相矛盾.

同理,若 $\sin\dfrac{\sqrt{x+T}-\sqrt{x}}{2}=0$,也同样可推出矛盾.从而证明了 $\cos\sqrt{x}$不是周期函数.

[证法 2] 设 $f(x)=\cos\sqrt{x}$,其零值点为

$$x_k=\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\quad(k=0,1,2\cdots)$$

$$\begin{aligned}x_{k+1}-x_k&=\left[(k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right]^2-\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\\&=2(k+1)\pi^2\end{aligned}$$

当 k 增大时,$x_{k+1}-x_k$ 随 k 的增大而增大,函数的零值点不呈周期分布,故可知 $\cos\sqrt{x}$ 不是周期函数.

例 1.40 $f(x)=x+\sin x$ 是否为周期函数?

[解] 设 $f(x)$为周期函数,$T>0$ 为其周期,于是有

$$(x+T)+\sin(x+T)=x+\sin x$$

即
$$\sin(x+T)-\sin x=-T$$

亦即
$$2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)=-T$$

就有
$$\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)=-\frac{T}{2\sin\frac{T}{2}}.$$
可看出上式左边是一个变数，而右边是一个常数，这是不可能的，故该函数不是周期函数.

例 1.41　证明 $f(x)=\sin\sqrt{3}x+\cos\sqrt{5}x$ 不是周期函数.

［证］　用反证法. 设 $f(x)$是周期函数，则其周期 T 是$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$与$\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$的最小公倍数，即
$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}m\quad(m=1,2,3,\cdots)$$
$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{5}}n\quad(n=1,2,3,\cdots)$$
于是
$$\frac{m}{n}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$
这是不可能的，因为有理数决不能等于无理数. 故该函数不是周期函数.

习题 1

一、填空题

1. 已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$______. 定义域为______.
2. 设 $f(\arcsin x)$的定义域为$[-1,0]$，则 $f(x)$的定义域为______.
3. 设 $f(x)$的定义域为$[0,4]$，则 $f(\lg x)$的定义域为______.
4. 已知 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}(x\neq1)$，$g(x)=1-x$，则 $f[g(x)]=$______.
5. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$______.

二、单项选择题

1. $\arcsin(x+a)=\arctan\frac{-bx}{\sqrt{1-x^2}}$，则 a,b 分别为　　　　[　　].

A. $a=0,b=2$　　B. $a=0,b=-2$　　C. $a=0,b=-1$　　D. $a=0,b=1$

2. 与 $f(x)=\sqrt{x^2}$等价的函数是　　　　[　　].

A. x　　B. $(\sqrt{x})^2$　　C. $(\sqrt[3]{x})^3$　　D. $x\operatorname{sgn}x$

3. 设函数 $f(x)=x\tan x\mathrm{e}^{\sin x}$，则 $f(x)$是　　　　[　　].

A. 偶函数　　B. 无界函数　　C. 周期函数　　D. 单调函数

4. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且对任意的 $x\neq0$，$f(x)\neq0$，$f(xy)=f(x)f(y)$，则$f(x)$为　　　　[　　].

A. x^α（α 为任意实数）　　B. $\frac{|x|}{x}$　　C. $\operatorname{sgn}x$　　D. 无法判断

5. 已知对任何实数 x，$f(x)$都能满足 $f(x+1)+f(x-1)=2f(x)$. 则 $f(x)$是　　　　[　　].

A. 对数函数　　B. 三角函数　　C. 二次三项式　　D. 线性函数

6. $f(x)$是在$(-\infty,+\infty)$内连续的偶函数,且 $F(x)=\int_0^x(x-2t)\times f(t)\mathrm{d}t$,则$F(x)$是　　[　　].

A. 偶函数　　B. 奇函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 既偶且奇函数

7. 设 $f(x)$在区间$(0,1)$内有定义,则 $f(\sin x)+f(\lg x)$的定义域是　　[　　].

A. $0\leqslant x\leqslant\pi$ 及 $2\pi\leqslant x\leqslant 3\pi$　　B. $1<x<\pi$ 及 $2\pi<x<3\pi$

C. $\begin{cases}1<x<\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$ 及 $\begin{cases}2\pi<x<\dfrac{5\pi}{2}\\ \dfrac{5\pi}{2}<x<3\pi\end{cases}$　　D. $1<x<10$

三、计算题

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\ln[\cos(\ln x)]$;　　(2) $y=\sqrt{\cos 8x-1}+\arcsin\dfrac{3x-1}{8}$;

(3) $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;　　(4) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{x^2-8x+15}}+\lg[\lg(x^2-5x+16)-1]$.

2. 已知 $f(3x-1)=x^2,-\infty<x<+\infty$,求 $f(f(x))$的值域.

3. 设函数在任何有限区间上有界,且满足方程 $f(x)-\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{x}{2}\right)=x-x^2$,求 $f(x)$.

4. 设 φ 为可微函数,且 $\int_0^1\varphi(xt)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\varphi(x)+1,x\neq 0$,求 $\varphi(x)$.

5. 若函数 $f(x)$在数轴上处处有定义,恒不为零,$f'(0)$存在,且对任意实数 x,y,恒有 $f(x+y)=f(x)f(y)$,求 $f(x)$.

6. 已知 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$,求 $f(x)$和 $f(f(x))$.

7. 设 $f(x)=x,x\geqslant 0$, $g(x)=\begin{cases}\cos x & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

试在区间$[0,+\infty)$上求 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$ 的表达式.

8. 已知 $f(x)$可导,且对任意实数 a,b,有

$$f(a+b)=\mathrm{e}^a f(b)+\mathrm{e}^b f(a),\ f'(0)=0,\text{试求 } f(x).$$

9. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是奇函数,且 $f(1)=a$,又对任何 x 值均有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$.

(1)用 a 表示 $f(2)$和 $f(5)$; (2)问 a 取何值时,$f(x)$是以2为周期的函数.

10. 设有一有理整式 $f(x)$满足关系式:

$$xf''(x)+(1-x)f'(x)+3f(x)=0,\text{且 } f(0)=1,\text{求 } f(x).$$

11. 求下列函数的反函数及其定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\quad(0<x<+\infty)$;　　(2) $y=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\quad(-\infty<x<+\infty)$.

12. 已知 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,求(1)函数 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$的定义域;(2)若$f(x+a)+f(x-a)=f(x^2-a^2)(a>0)$,试求满足等式的函数 $f(x)$.

13. 下列函数中，哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是周期函数？

(1) $y=\tan|x|$；　(2) $y=x-[x]$；　(3) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$；

(4) $y=|\sin x|+|\cos x|$；　(5) $y=|\sin x+\cos x|$；　(6) $y=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$；

(7) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

14. 已知 $f(x)$为奇函数，$g(x)$为偶函数，试考察下列复合函数的奇偶性：

(1) $f[g(x)]$；　(2) $g[f(x)]$；　(3) $f[f(x)]$；

(4) $f\{f[g(x)]\}$；　(5) $f[g(x)]+g[f(x)]$；　(6) $f[g(x)]\cdot f[f(x)]$.

四、证明题

1. 设函数 $f(x)$的定义域和值域都是$(-\infty,+\infty)$，令 $A=\{x\mid f(x)=x\}$，$B=\{x\mid f(f(x))=x\}$，若 $f(x)$ 为单调增函数，则 $A=B$.

2. 任一在实数轴上有定义的函数均可分解为奇函数与偶函数之和.

3. 设 $f(x)$在$(0,+\infty)$上有定义，$x_1>0$，$x_2>0$，求证：

(1)若$\dfrac{f(x)}{x}$单调下降，则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$；

(2)若$\dfrac{f(x)}{x}$单调上升，则 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$.

4. 已知 $x_1>0$，$x_2>0$，求证：

(1)当 $0<p\leqslant 1$ 时，$(x_1+x_2)^p\leqslant x_1^p+x_2^p$；　(2)当 $p>1$ 时，$(x_1+x_2)^p\geqslant x_1^p+x_2^p$.

5. 证明：若函数 $f(x)$定义在$(-\infty,+\infty)$上，存在正常数 k、T，对任意的 x，都有$f(x+T)=kf(x)$，则 $f(x)=a^x\varphi(x)$，其中 a 是正常数，$\varphi(x)$是以 T 为周期的周期函数.

答案与提示

一、填空题

1. $\arcsin(1-x^2)$，$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

2. $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$.　3. $[1,10000]$.

4. $\dfrac{x}{2-x}(x\neq 2)$.　5. 1.

二、单项选择题

1. C.　2. D.　3. B.　4. C.　5. D.　6. A.　7. C.

三、计算题

1. (1) $(e^{2k\pi-\frac{\pi}{2}},e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}})(k=0,\pm 1,\cdots)$；　(2) $x=\dfrac{1}{4}k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots)$；

(3) $[-1,1)$及 $x=2$；　(4) $(3,5)$及$(-\infty,1]$.

2. $\left[\dfrac{1}{9},+\infty\right)$.　3. $\dfrac{4x}{21}(7-6x)$.　4. $cx+2$.

5. $e^{f'(0)x}$.　6. $\dfrac{1}{x+1}$，$\dfrac{x}{1+2x}$.

7．提示：利用 $\varphi(x)=\int_0^x g(t)f(x-t)\mathrm{d}t$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1-\cos x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2}\\ x-\dfrac{\pi}{2}+1, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

8．提示：利用导数定义 $f(x)=x\mathrm{e}^{x+1}$

9．(1) $f(2)=2a, f(5)=5a$；　　(2) $a=0$

10．提示：设 $f(x)$ 为一个三次多项式，用待定系数法确定常数

$$f(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-3x+1$$

11．(1) $y=x+\sqrt{x^2+1}, (-\infty,+\infty)$；　　(2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}), (-\infty,+\infty)$

12．(1) $[a, 1-a]$；　　(2) $f(x)=\ln x, (0<x\leqslant 1)$

13．(1)，(3)，(4)为偶函数；(6)，(7)为奇函数；周期函数为：

(1) $T=\pi$，　(2) $T=1$，　(4) $T=\dfrac{\pi}{2}$，　(5) $T=2\pi$

14．(1)，(2)，(4)，(5)为偶函数；　(3)，(6)为奇函数

四、证明题

略.