第 1 章　行　列　式

1.1 行列式的概念

1.1.1　排列与逆序

1. n 级排列

由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个无重复的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 n 级排列. n 级排列共有 $n!$ 个.

2. 逆序

在一个 n 级排列中,如果一个较大数排在一个较小数之前,就称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数,称为这个排列的逆序数,用 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 或 τ 表示排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数.

如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数为偶数,则称它为偶排列;如果排列的逆序数为奇数,则称它为奇排列.

3. 对换

排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中,交换任意两数 i_t 与 i_s 的位置,称为一次对换. 对换改变排列的奇偶性. 任何一个排列都可经过若干次对换变成自然顺序,并且所做对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

【解题提示】　任一排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数可计算如下:

$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$ 后边比 i_1 小的数的个数 $+ i_2$ 后边比 i_2 小的数的个数.

$+ \cdots + i_{n-1}$ 后边比 i_{n-1} 小的数的个数.

【例 1.1】　求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

(1) 5 3 2 1 4　(2) $n(n-1)\cdots 2\cdot 1$　(3) 1 3 5 $\cdots(2n-1)$　2 4 6$\cdots(2n)$

【解】　(1) $\tau(5\ 3\ 2\ 1\ 4) = 4+2+1+0 = 7$,此排列为奇排列.

(2) $\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$

由于 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性需根据 n 而定,故讨论如下:

当 $n=4k$ 时, $\dfrac{n(n-1)}{2} = 2k(4k-1)$ 是偶数;

当 $n=4k+1$ 时, $\dfrac{n(n-1)}{2} = 2k(4k+1)$ 是偶数;

当 $n=4k+2$ 时, $\dfrac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$ 是奇数;

当 $n=4k+3$ 时, $\dfrac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+3)$ 是奇数.

综上所述,当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,此排列为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时,此排列为奇排列,其中 k 为任意非负整数.

(3) 该排列中前 n 个数 $1,3,5,\cdots,(2n-1)$ 之间不构成逆序,后 n 个数 $2,4,6,\cdots,(2n)$ 之间也不构成逆序,只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序.

$$\tau(1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\ 6\cdots(2n))=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

奇偶性情况与(2) 完全一致.

1.1.2 n 阶行列式的定义

由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式.其值是所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,各项的符号由 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 决定.当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时,对应项取正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时,对应项取负号.即

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中,$D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和,$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

注:n 阶行列式 $D=\left|a_{ij}\right|$ 的项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中,$i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列.

【例 1.2】 填空题

(1) 在五阶行列式中,项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号应取________;

(2) 四阶行列式中,带负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项为________;

(3) 如果 n 阶行列式中负项的个数为偶数,则 $n\geqslant$ ________;

(4) 如果 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 n^2-n,那么此行列式的值为________;

(5) 在函数

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

中,x^3 的系数是________.

【解】 (1) 正 (2) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ (3) 3 (4) 0 (5) -1.

【分析】 (1) 适当调整该项元素位置,使第一个下标按自然顺序排列,则第二个下标排列为 2 5 1 3 4,其逆序数为 4,故取正号.或由 $\tau(1\ 3\ 5\ 4\ 2)+\tau(2\ 1\ 4\ 3\ 5)=6$ 也知该项符号为正.

(2) 由行列式的定义可知，包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$，其中 i,j 为 2，4 或 4，2，又此项符号为负，所以 $i\ 3\ 1\ j$ 为奇排列，从而 $i=4,j=2$.

(3)n 阶行列式中，共有 $n!$ 项，其中正、负项各占一半，若负项的个数为偶数，必有 $n\geqslant 3$.

(4)n 阶行列式中，共有 n^2 个元素，若等于零的元素个数大于 n^2-n，那么不等于零的元素个数就小于 n，又 n 阶行列式的每一项是 n 个不同元素的乘积，所以必定为零，从而此行列式的值也为零.

(5) 根据行列式的定义，仅当 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 4 个元素相乘才能出现 x^3 项，这时该项排列的逆序数为 $\tau(2\ 1\ 3\ 4)=1$，$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-x^3$，故含 x^3 项的系数为 -1.

【例 1.3】　选择题

(1) 若 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{5j}a_{44}$ 是五阶行列式中带有正号的一项，则 i,j 的值为[　　].

A. $i=1,j=3$　　　　B. $i=2,j=3$

C. $i=1,j=2$　　　　D. $i=2,j=1$

(2) 下列各项中，[　　] 为某五阶行列式中带有正号的项.

A. $a_{13}a_{44}a_{32}a_{41}a_{55}$　　　　B. $a_{21}a_{32}a_{41}a_{15}a_{54}$

C. $a_{31}a_{25}a_{43}a_{14}a_{52}$　　　　D. $a_{15}a_{31}a_{22}a_{44}a_{53}$

(3) 设 $D=|a_{ij}|$ 为 n 阶行列式，则第二对角线上元素的乘积 $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$ 在行列式中的符号为[　　].

A. 正　　B. 负　　C. $(-1)^n$　　D. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

【解】　(1) C　(2) D　(3) D.

【分析】　(1) 由行列式的定义知，每一项应取自不同行不同列的五个元素之积，因此 i,j 只能取 1，2，故可立即排除 A、B，当 $i=1,j=2$ 时，$a_{11}a_{23}a_{35}a_{52}a_{44}=a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}a_{52}$，且 $\tau(1\ 3\ 5\ 4\ 2)=4$ 为偶排列，故 C 为正确答案；当 $i=2,j=1$ 时，此项应取负号，故不正确.

(2)A 中有取自同一行的元素 a_{44}，a_{41}；B. 中有取自同一列的元素，均不是行列式的项，C，D 虽均为五阶行列式的一项，但 C 应取负号，故只有 D 正确.

(3) 因为 $\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$

故 D 为正确答案.

1.2 性质、定理与公式

1.2.1　行列式的基本性质

性质 1　行列式的行和列互换后，行列式的值不变.

性质 2　行列式的两行(或两列) 互换，行列式改变符号.

推论　若行列式中有两行(或两列) 完全相同，则该行列式的值等于零.

性质 3　数乘行列式等于用这个数乘该行列式中的某一行(或一列).

推论　若行列式中有一行(或一列) 元素全为零，则该行列式的值为零.

性质 4　若行列式中有两行(或两列) 元素对应成比例，则该行列式的值为零.

性质 5　如果行列式的某一行(或一列) 的所有元素都可表示为两项之和，则该行列式等于两个加数所在行列式的和，这两个行列式的这一行(或列) 的元素分别为对应的两个加

数之一,其余各行(列)的元素与原行列式相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6 将行列式某行(或列)的 k 倍加到另一行(或列),其值不变.

注:(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,一般地 $|\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|\pm|\boldsymbol{B}|$

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵一般地,$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$,但 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,则 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$,需特别注意 $|k\boldsymbol{A}|\neq k|\boldsymbol{A}|$.

(4) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$,特别地,若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反对称矩阵,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,则当 n 为奇数时,$|\boldsymbol{A}|=0$.

【例1.4】 填空题

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×3 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 4×4 矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=1$,$|\boldsymbol{B}|=-2$,则 $||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|=$ ________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×3 矩阵,$|\boldsymbol{A}|=-2$,把 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)$,其中 $\boldsymbol{A}_j(j=1,2,3)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列,则 $|\boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_1,3\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|=$ ________.

(3) 设 α,β,γ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的3个根,则行列式 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=$ ________.

【解】 (1) -8 (2) 6 (3) 0.

【分析】 (1) 因为 $||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|^3|\boldsymbol{A}|=(-2)^3\cdot1=-8$,注意 $||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=(-2)\cdot1=-2$ 是错误的.

(2) 此题需要综合应用行列式的性质.

$|\boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_1,3\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|=|\boldsymbol{A}_3,3\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|+|-2\boldsymbol{A}_1,3\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|$,对于 $|-2\boldsymbol{A}_1,3\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|$,第一列和最后一列对应元素成比例,故其值为零,而

$$|\boldsymbol{A}_3,3\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|=-|\boldsymbol{A}_1,3\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|=-3|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|=-3|\boldsymbol{A}|=6.$$

(3) 由根与系数的关系知 $\alpha+\beta+\gamma=0$,于是

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \beta & \gamma \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha & \beta \\ \alpha+\beta+\gamma & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=0.$$

【例1.5】 选择题

(1) 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$,$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$,其中 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}_2$、$\boldsymbol{\gamma}_3$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为4维列向量,且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=4$,$|\boldsymbol{B}|=1$,则行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ [ ].

A. 5　　B. 4　　C. 50　　D. 40

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=2$,把 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4]$,其中 $\boldsymbol{A}_j(j=1,2,3,4)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列,则 $|-\boldsymbol{A}_2,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_4,-\boldsymbol{A}_3|=$ [ ].

A. -2　　B. 2　　C. 1　　D. 0

(3) 设 $|\boldsymbol{A}|$ 是三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,$\boldsymbol{A}$ 中3个列向量以 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 表示,即 $|\boldsymbol{A}|=$

$|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|$，则 $|\boldsymbol{A}|$ 等于[　　].

A. $|\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|$　　B. $|-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2,-\boldsymbol{A}_3|$

C. $|\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_1|$　　D. $|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3|$

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}|=$[　　].

A. 4　　B. -4　　C. 16　　D. -16

(5) $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，k 是非零常数，则 $|(k\boldsymbol{A})^*|=$[　　].

A. $k|\boldsymbol{A}|^{n-1}$　　B. $|k||\boldsymbol{A}|^{n-1}$

C. $k^{n(n-1)}|\boldsymbol{A}|^{n-1}$　　D. $k^{n-1}|\boldsymbol{A}|^{n-1}$

(6) 行列式 $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}=$[　　].

A. 1000　　B. -1000　　C. 2000　　D. -2000

【解】　(1) D　(2) B　(3) D　(4) D　(5) C　(6) C.

【分析】　(1) 这里首先应区分矩阵相加是对应元素相加，而行列式相加(或拆分)，只有一行(列)不同，其余各行(列)都相同时才能相加(或拆分). 另外应注意 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$，正确计算如下：

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4|=8|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|\\&=8[|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|+8|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|]=8(4+1)=40\end{aligned}$$

故选 D.

(2) 利用行列式的性质有

$$\begin{aligned}|-\boldsymbol{A}_2,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_4,-\boldsymbol{A}_3|&=(-1)^4|\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_3|\\&=|\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_3|=-|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_3|\\&=|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4|=|\boldsymbol{A}|=2.\end{aligned}$$

故 B 为正确答案.

(3) 同(1)、(2)题类似，有

$$|\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|=-|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|=-|\boldsymbol{A}|;$$

$$|-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2,-\boldsymbol{A}_3|=(-1)^3|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|=-|\boldsymbol{A}|;$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_1|&=|2(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3),\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_1|\\&=2|\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2|\\&=2|\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2|+2|\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2|\\&=2|\boldsymbol{A}_2,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2|+2|\boldsymbol{A}_3,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2|\\&=2|\boldsymbol{A}_3,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2|\\&=2|\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2|=2|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|\\&=2|\boldsymbol{A}|.\end{aligned}$$

这里先把后两列加到第一列；提取公因子之后，又把第一列的(－1)倍加到第二、三列；最后利用行列式的加法性质.

$$|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3|=|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2|+|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|$$

$$
\begin{aligned}
&= |\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3| \\
&= |\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_3| + |\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3| \\
&= |\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3| = |\boldsymbol{A}|
\end{aligned}
$$

故 D 为正确答案.

(4) $\left| -|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A} \right| = |-2\boldsymbol{A}| = (-2)^3|\boldsymbol{A}| = -8\times 2 = -16$.

(5) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$，$|(k\boldsymbol{A})^*| = |k^{n-1}\boldsymbol{A}^*| = (k^{n-1})^n|\boldsymbol{A}^*| = k^{n(n-1)}|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(6) 把第二列的(-1)倍加到第一列，(-2)倍加到第三列得

$$
\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2000.
$$

【例 1.6】 选择题

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 阶方阵，则必有[　　].

A. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$　　B. $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}|$

C. $\left||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\right| = \left||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\right|$　　D. $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|$

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{A}|=0$ 的必要条件是[　　].

A. 两行(列)元素对应成比例　　B. 必有一行为其余行的线性组合

C. $\boldsymbol{A}$ 中有一行元素全为零　　D. 任一行为其余行的线性组合

【解】 (1) B　(2) B.

【分析】 (1) 一般地 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$；$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}| = |-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})| = (-1)^n|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|$；$\left||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\right| = |\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{B}|$，$\left||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\right| = |\boldsymbol{B}|^n|\boldsymbol{A}|$，故 $\left||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\right| \neq \left||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\right|$；只有 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{BA}|$ 正确.

(2) A、C、D 均为 $|\boldsymbol{A}|=0$ 的充分条件，而非必要条件，故选 B.

1.2.2 行列式按行(列)展开定理

设 $D = |a_{ij}|$ 为 n 阶行列式，则有

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} D, & i=k \\ 0, & i\neq k \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n)
$$

$$
\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = \begin{cases} D, & j=k \\ 0, & j\neq k \end{cases} \quad (j=1,2,\cdots,n)
$$

其中，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

k 阶子式：n 阶行列式中，任取 k 行 k 列，这 k 行 k 列交点处元素按原来的顺序位置组成的 k 阶行列式称为原 n 阶行列式的 k 阶子式，记为 M_s.

k 阶子式的代数余子式：划去 k 阶子式所在的 k 行 k 列元素，剩下的元素按原来的顺序位置组成的 $n-k$ 阶行列式称为 k 阶子式的余子式，记为 N_s，若 k 阶子式所在行的序数是 $i_1 i_2 \cdots i_k$，列的序数是 $j_1 j_2 \cdots j_k$，则称

$$
A_s = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} N_s
$$

为 M_s 的代数余子式.

行列式按 k 行(列)展开(又称拉普拉斯展开):

在行列式 D 中,任意取定 k 行或 k 列($1 \leqslant k \leqslant n-1$),则这 k 行或 k 列中所有的 k 阶子式(共有 $C_n^k = t$ 个,记为 $M_1, M_2, \cdots, M_t$)分别与它们对应的代数余子式的乘积之和等于该行列式,即

$$D = \sum_{s=1}^{t} M_s A_s = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \cdots + M_t A_t$$

注:(1) 记 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为 $n \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

此公式对于涉及到伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的计算或证明题非常有用,应当牢记.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,则

$$|\boldsymbol{A}^{-1}| = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} = |\boldsymbol{A}|^{-1}$$

(3) 设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则

$$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1} \quad (n \geqslant 2)$$

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|, \qquad \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$$

但应注意

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$$

1.2.3　克莱姆(Cramer)法则

方程 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

称为 n 元非齐次线性方程组,当其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,此方程组有唯一解,且可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 是将行列式 D 中第 j 列元素换成常数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$,其余元素不变而得到的行列式的值.

当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ 时,对应方程组称为 n 元齐次线性方程组.

注:(1) 克莱姆法则只适用于方程的个数与未知量的个数相等的线性方程组.

(2)n 元非齐次线性方程组,当系数行列式 $D \neq 0$ 时有唯一解;当系数行列式 $D = 0$ 时,克莱姆法则失效,方程组可能有解也可能无解.

(3)n 元齐次线性方程组,当系数行列式 $D \neq 0$ 时,有唯一零解;当系数行列式 $D = 0$ 时,齐次线性方程组有非零解(无穷多解).

【例 1.7】 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

其中 $a_i \neq a_j (i \neq j;\ i,j = 1,2,\cdots,n)$.

则线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 的解是________.

【解】 因为 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| \neq 0$

所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 有唯一解 $x_j = \dfrac{D_j}{D} (j = 1,2,\cdots,n)$

显然 $D_1 = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = D, D_2 = \cdots = D_n = 0$

所以有解为 $(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

【例 1.8】 选择题

(1) 设线性方程组 $\begin{cases} bx - ay = -2ad \\ -2cy + 3bz = bc \\ cx + az = 0 \end{cases}$,则[ ].

A. 当 a,b,c 取任意实数时,方程组均有解　　B. 当 $a = 0$ 时,方程组无解

C. 当 $b = 0$ 时,方程组无解　　D. 当 $c = 0$ 时,方程组无解

(2) 对于非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

以下结论中,[ ]不正确.

A. 若方程组有解,则系数行列式 $D \neq 0$

B. 若方程组无解,则 $D = 0$

C. 若方程组有解,或者有唯一解,或者有无穷多解

D. $D \neq 0$ 是方程组有唯一解的充分必要条件

【解】 (1) A (2) A.

【分析】

(1) 方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = -5abc$

当 $abc \neq 0$ 时,方程组有唯一解;当 $a = 0$ 或 $b = 0$ 或 $c = 0$ 时,代入方程后,易知方程组均有无穷多解,故 A 正确.

(2) 比如方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$
的系数行列式为零,此方程组显然有解,故 A 是错的,应选 A. 易证明 B、C、D 都是正确的.

1.3 行列式的计算

1.3.1 几种特殊行列式的计算

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

1.3.2 行列式的计算方法

(1) 直接利用行列式的定义进行计算.

(2) 利用行列式的性质化为三角形行列式计算法,包括上、下三角形行列式.

(3) 降阶法:利用按行(列) 展开定理,化行列式为较低阶行列式的计算.

(4) 递推公式法:应用行列式的性质,把一个 n 阶行列式表示为具有相同结构的较低阶行列式的线性关系式,再根据此关系式递推求得所给 n 阶行列式的值.

(5) 用数学归纳法进行计算或证明.

(6) 利用已知行列式进行计算,其中最重要的已知行列式是范德蒙行列式.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

以上方法中,前三种是最基本的算法,应熟练掌握.需要指出的是,一个行列式的计算方法往往不是唯一的,有时甚至需多种方法交叉使用.

【解题提示】 由于行列式的计算方法很多,具体到一个题目用什么方法去求解往往不是一件容易决定的事情.我们不从方法的角度去进行分析,而是从所求行列式的特征去进行归纳,掌握了行列式的特征,也就自然找到了求解方法.

特征 1 非零元素特别少(一般不多于 $2n$ 个),可以直接利用行列式的定义求解.

【例 1.9】 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1997 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1998 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

【解】 (1) 此行列式刚好只有 n 个非零元素 $a_{1\,n-1}, a_{2\,n-2}, \cdots, a_{n-1\,1}, a_{n\,n}$,故非零项只有一项:$a_{1\,n-1}a_{2\,n-2}\cdots a_{n-1\,1}a_{n\,n}$,又 $\tau((n-1)(n-2)\cdots 1n) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$,因此

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1997 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1998 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1 \cdot 2 \cdots 1997 \cdot 1998 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1998!$$

(2) 由行列式的定义可知,此行列式的非零项只有两项,即 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 和 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1\,n}a_{n1}$,故

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a \cdot a \cdots a + (-1)^{\tau(23\cdots n1)} b \cdot b \cdots b$$

$$= a^n + (-1)^{n-1} b^n$$

特征 2 对于所有行(或列)对应元素相加后相等的行列式,可把第二至 n 行(或列)加到第一行(或第一列),提取公因子后再化简计算.

【例 1.10】 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

【分析】 所有行对应元素相加后都等于 $a+(n-1)b$,所有列对应元素相加后也都等于 $a+(n-1)b$,符合特征 2.

【解】 将第二列至第 n 列加到第一列,然后提出公因子 $a+(n-1)b$,则

$$D_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

再将第一行的(−1)倍加到下面各行,得

$$D_n=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\0&a-b&0&\cdots&0\\0&0&a-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

类似地，常见的计算题，如

(1) $\begin{vmatrix}2&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix}C&1&1&\cdots&1\\1&C&1&\cdots&1\\1&1&C&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&C\end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&n&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\n&1&2&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}$

等，均可用上述方法计算.

特征 3　第一行、第一列及对角线元素除外，其余元素全为零的行列式.

典型形式及计算方法见例 1.11.

【例 1.11】　计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_0&b_1&b_2&\cdots&b_{n-1}&b_n\\c_1&a_1&0&\cdots&0&0\\c_2&0&a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\c_n&0&0&\cdots&0&a_n\end{vmatrix}\quad(a_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n)$$

【解】　把所有第 $i+1(i=1,2,\cdots,n)$ 列的 $-\dfrac{c_i}{a_i}$ 倍加到第一列，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b_ic_i}{a_i}&b_1&b_2&\cdots&b_{n-1}&b_n\\0&a_1&0&\cdots&0&0\\0&0&a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right)$$

常见的计算题，如 $\begin{vmatrix}a_0&1&1&\cdots&1&1\\1&a_1&0&\cdots&0&0\\1&0&a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&0&a_n\end{vmatrix}$ 即是例 1.11 的特例.

另外 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix}$

等,通过简单变形(如第二行至第 n 行分别减去第一行),也可转化为具有上述特征的行列式.

特征 4 除对角线元素外,上三角各元素相等,下三角各元素也相等.

这类行列式一般可用拆分法或数学归纳法求解.

【例 1.12】 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \beta & x_2 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & x_3 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & x_n \end{vmatrix}.$$

【解】 把 x_n 改写为 $x_n=(x_n-\alpha)+\alpha$,利用行列式的加法性质,D_n 可拆分为

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & x_2 & \alpha & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & \beta & x_3 & \cdots & \alpha & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & x_n-\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \beta & x_2 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & x_3 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

对第二个行列式把第 i 行的 (-1) 倍加到第 $i-1$ 行 $(i=2,\cdots,n)$,则有

$$D_n = (x_n-\alpha)D_{n-1} + \begin{vmatrix} x_1-\beta & \alpha-x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2-\beta & \alpha-x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-\beta & 0 \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

$$= (x_n-\alpha)D_{n-1} + \alpha\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-\beta)$$

即
$$D_n = (x_n-\alpha)D_{n-1} + \alpha\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-\beta) \quad (*)$$

由 α,β 的对称性,可得
$$D_n = (x_n-\beta)D_{n-1} + \beta\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-\alpha) \quad (**)$$

当 $\alpha\neq\beta$ 时,由式$(*)$和式$(**)$得
$$D_n = \frac{\alpha\prod_{j=1}^{n}(x_j-\beta) - \beta\prod_{j=1}^{n}(x_j-\alpha)}{\alpha-\beta}$$

当 $\alpha=\beta$ 时,直接由式$(*)$递推得
$$D_n = \prod_{j=1}^{n}(x_j-\alpha) + \alpha\sum_{j=1}^{n}\Big[\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(x_i-\alpha)\Big]$$

类似地，形如 $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ b & b & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ -y & x & y & \cdots & y & y \\ -y & -y & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -y & -y & -y & \cdots & -y & x \end{vmatrix}$

等的行列式，均可由例 1.12 的方法导出.

特征 5　所求行列式某一行(或某一列)至多有两个非零元素.

一般按此行(或此列)展开即可求解.

【例 1.13】　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

【解】　第一行，第一列均只有两个非零元素，不妨按第一行展开，得

$$D_n = xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} = xD_{n-1} + a_n$$

由此递推得

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1} + a_n = x[xD_{n-2} + a_{n-1}] + a_n \\ &= x^2 D_{n-2} + xa_{n-1} + a_n \\ &= \quad \cdots\cdots \\ &= x^{n-1} D_1 + x^{n-2} a_2 + \cdots + xa_{n-1} + a_n \\ &= a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \end{aligned}$$

类似地，形如

(1) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 2\cos\theta & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b & & & & & a & \\ b & & & & & & & a \end{vmatrix}$

等行列式均可按此特征求解.

注:按特征5求解时,往往会得到一个一般的递推关系式

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$$

此时可用两种方法求出 D_n 的表达式:

(1)先计算 D_1, D_2, D_3 等,找出递推规律,再用数学归纳法进行证明;

(2)把关系式 $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$ 看作一差分方程,求出特征方程 $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$ 的两个根 λ_1, λ_2,则 $D_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 或 $D_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_2^n (\lambda_1 = \lambda_2)$,再由 D_1, D_2 定出常数 C_1, C_2.

【例 1.14】 计算三对角行列式 D_n 之值.

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

【解】 按第一列展开得

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \beta \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} \quad (n \geqslant 3)$$

即有递推关系式 $D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$

为了得到 D_n 的一般表达式,采用

方法一: 因为(假设 $\alpha \neq \beta$)

$$D_1 = \alpha + \beta = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha \\ \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2) = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta}$$

不妨设 $D_{n-1} = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$,则有

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} = (\alpha+\beta)\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - \alpha\beta\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

根据数学归纳法即知 $D_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$

若 $\alpha=\beta$,可直接计算得 $D_n=(n+1)\alpha^n$.

方法二：　令 $p=\alpha+\beta,q=-\alpha\beta$,由特征方程

$$\lambda^2-p\lambda-q=0$$

得两特征根为 $\lambda_1=\alpha,\lambda_2=\beta$.

若 $\alpha\neq\beta$,则　$D_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n=C_1\alpha^n+C_2\beta^n$

由 $D_1=\alpha+\beta,D_2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$,有

$$\begin{cases}\alpha+\beta=C_1\alpha+C_2\beta\\ \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=C_1\alpha^2+C_2\beta^2\end{cases}$$

解此方程组得　$C_1=\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta},\quad C_2=\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}$

故所求 D_n 的一般表达式为　$D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$

若 $\alpha=\beta$,即特征方程有相等实根,这时

$$D_n=C_1\lambda_1^n+C_2n\lambda_1^n=C_1\alpha^n+C_2n\alpha^n$$

同样,代入 D_1,D_2 可确定常数 $C_1=C_2=1$,从而

$$D_n=(n+1)\alpha^n$$

总之,有　$D_n=\begin{cases}(n+1)\alpha^n & (\alpha=\beta)\\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} & (\alpha\neq\beta)\end{cases}$

1.3.3　杂例

【例 1.15】　设　$D=\begin{vmatrix}1&5&7&8\\1&1&1&1\\2&0&3&6\\1&2&3&4\end{vmatrix}$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=?$,其中 A_{4j} 为 D 中元素 $a_{4j}(j=1,2,3,4)$的代数余子式.

【分析】　根据行列式按一行(或一列)展开公式,有

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}=\begin{vmatrix}1&5&7&8\\1&1&1&1\\2&0&3&6\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$

从而转化为一个四阶行列式的计算.此题若直接计算 4 个代数余子式,则计算较繁琐且容易出现差错.

【解】　$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}$

$$=\begin{vmatrix}1&5&7&8\\1&1&1&1\\2&0&3&6\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0\quad(\text{有两行元素对应相同})$$

【例 1.16】　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶$(n\geqslant2)$非零实矩阵,其元素 a_{ij} 与其代数余子式 A_{ij} 相等,

求 $|\boldsymbol{A}|$.

【分析】 能够把元素 a_{ij}、代数余子式 A_{ij} 及行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 三者联系起来的,只有行列式按行(或列)展开公式,即公式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

但应注意 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})=(A_{ij})^{\mathrm{T}}$. 此类题一般都是从上述公式着手求解.

【解】 因为 $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,所以

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,取行列式得 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|^n$,从而有

$$|\boldsymbol{A}|^2(|\boldsymbol{A}|^{n-2}-1)=0$$

即 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|^{n-2}=1$. 因为

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

又 $\boldsymbol{A}\neq 0$,必存在某一个元素 $a_{ij}\neq 0$,从而 $|\boldsymbol{A}|>0$.

当 $n>2$ 时,得 $|\boldsymbol{A}|^{n-2}=1$,于是 $|\boldsymbol{A}|=1$.

当 $n=2$ 时,$|\boldsymbol{A}|$ 可以是任何正实数.

【例 1.17】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$($\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵),$|\boldsymbol{A}|<0$,求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

【分析】 为了计算 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$,需要利用已知条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$. 可以这样考虑:

(1)直接把 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$ 中的 $\boldsymbol{E}$ 用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 代替;

(2)对矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 右乘以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,然后取行列式.

【解】 方法一: 因为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| &= |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| \\ &= |\boldsymbol{A}|\,|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|\end{aligned}$$

所以 $\qquad (1-|\boldsymbol{A}|)|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$

又因 $|\boldsymbol{A}|<0$,故 $1-|\boldsymbol{A}|>0$,从而 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$.

方法二: 矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 右乘 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 并取行列式得

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| &= |\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| \\ &= |(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|\end{aligned}$$

即 $\qquad |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$

从而有 $\qquad |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|,\quad (1-|\boldsymbol{A}|)|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$

又因 $1-|\boldsymbol{A}|>0$,故 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$.

【例 1.18】 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶正交矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|/|\boldsymbol{B}|=-1$,证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$

【分析】 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,为了利用这两个等式,可用例 1.17 解法类似讨论.

【证】 因为 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵,所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$$

于是

$$|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$$

$$= |BB^{\mathrm{T}} + BA^{\mathrm{T}}| = |B(B^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}})| = |B(A+B)^{\mathrm{T}}|$$

即
$$|A+B||A| = |B||A+B|$$
$$(|A|-|B|)|A+B| = 0$$

因为$|A|/|B|=-1$,所以$|A|-|B|\neq 0$,从而有$|A+B|=0$.

【例 1.19】 设整系数方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

对任意$b_1,b_2,\cdots,b_n$均有整数解,证明其系数行列式必为± 1.

【证】 令$A=(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$. $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$,则原方程组即为$Ax=b$,其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$. 取$b$分别为$n$阶单位矩阵$E$的各列:$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,$\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,$\cdots$,$\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,所得解依次为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,即$A\alpha_j=\varepsilon_j(j=1,2\cdots,n)$

$$A[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n] = [\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$$

也即
$$A[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n] = E$$

其中$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=A^{-1}$,按题设$A^{-1}$与$A$一样是整数矩阵,从而$|A^{-1}|$与$|A|$都是整数,又由　$AA^{-1}=E$,有

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = 1$$

于是只能　$|A|=\pm 1$.

习题与答案

1. 填空题

(1)四阶行列式中带负号且包含因子a_{12}和a_{21}的项为________.

(2)排列$i_1i_2\cdots i_n$可经________次对换后变为排列$i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$.

(3)在五阶行列式中,$(-1)^{\tau(15423)+\tau(23145)}a_{12}a_{53}a_{41}a_{24}a_{35}=$________$a_{12}a_{53}a_{41}a_{24}a_{35}$.

(4)在函数

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$ 中,x^3的系数是________.

(5)设a,b为实数,则当$a=$________,且$b=$________时,$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$.

(6)在n阶行列式$D=|a_{ij}|$中,当$i<j$时,$a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$,则$D=$________.

(7)设A为4×4矩阵,B为5×5矩阵,且$|A|=2$,$|B|=-2$,则$\big|-|A|B\big|=$______,$\big|-|B|A\big|=$________.

(8)设A为3×3矩阵,$|A|=-2$,把A按行分块为$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$,其中$A_j(j=1,2,3)$是$A$的

第 j 行,则行列式 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_1 \\ 3\boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_1 \end{vmatrix}=$________.

(9)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=2$,$|\boldsymbol{B}|=-3$,则 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$________.

2. 选择题

(1)设 $|\boldsymbol{A}|=|a_{ij}|$ 为 n 阶行列式,则 $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1\,n}a_{n1}$ 在行列式中的符号为[　　].

A. 正　　B. 负　　C. $(-1)^n$　　D. $(-1)^{n-1}$

(2)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $\big||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*\big|=$[　　].

A. $|\boldsymbol{A}|^2$　　B. $|\boldsymbol{A}|^n$　　C. $|\boldsymbol{A}|^{2n}$　　D. $|\boldsymbol{A}|^{2n-1}$

(3)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 经过若干次矩阵的初等变换后得到的矩阵,则有[　　].

A. $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$　　B. $|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$

C. 若 $|\boldsymbol{A}|=0$,则一定有 $|\boldsymbol{B}|=0$　　D. 若 $|\boldsymbol{A}|>0$,则一定有 $|\boldsymbol{B}|>0$

(4)设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$,则 $|\boldsymbol{C}|=$[　　].

A. $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$　　B. $-|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

C. $(-1)^{m+n}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$　　D. $(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

(5)设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ 2\boldsymbol{\gamma}_2 \\ 3\boldsymbol{\gamma}_3 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma}_2 \\ \boldsymbol{\gamma}_3 \end{bmatrix}$,其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 均为 3 维行向量,且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=18$,$|\boldsymbol{B}|=2$,则行列式 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=$[　　].

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 计算证明题

(1)设
$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

计算 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=?$,其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4)$ 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{4j} 的代数余子式.

(2)计算元素为 $a_{ij}=|i-j|$ 的 n 阶行列式.

(3)计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}$　$(n\geqslant 2)$.

(4)设 a,b,c 是互异的实数,证明:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=0$ 的充要条件是 $a+b+c=0$.

(5)证明:奇数阶反对称矩阵的行列式为零.

(6)设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^2-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$

证明:可以找出数 $\delta(0<\delta<1)$,使 $f'(\delta)=0$(提示:用洛尔定理证明).

(7)试证:如果 n 次多项式 $f(x)=C_0+C_1x+\cdots+C_nx^n$ 对 $n+1$ 个不同的 x 值都是零,则此多项式恒等于零(提示:用范德蒙行列式证明).

(8)设 $F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$,求 $F'(x)$.

参 考 答 案

1. (1)$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ (2)$\dfrac{n(n-1)}{2}$ (3)$-$ (4)-2 (5)0,0 (6)$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ (7)64,32 (8)6 (9)$-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$.

2. (1) D (2) D (3) C (4) D (5) B.

3. (1)将 $|\boldsymbol{A}|$ 中第四行元素均换为1,则

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=6.$$

(2)$(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$,从最后一行起,每行减去前一行,再在所得的行列式中每列加上第 n 列即得.

(3)用拆分法计算.当 $n>2$ 时,$D_n=0$;当 $n=2$ 时,$D_2=x_1-x_2$.

(4)计算行列式的值即可推得结论.

(5)设 $\boldsymbol{A}$ 是 $2n+1$ 阶反对称矩阵,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,故 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}|$,即 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{2n+1}|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$,得 $2|\boldsymbol{A}|=0$,从而 $|\boldsymbol{A}|=0$.

(6)略.

(7)略.

(8)$F'(x)=6x^2$.