第 1 章　事件的概率

1.1　基本概念与公式

1.1.1　加法、乘法原理，排列与组合

1. 加法原理　设完成一件事有 n 类方法（只要选择其中一类方法即可完成这件事），若第 1 类方法有 m_1 种，第 2 类方法有 m_2 种，…，第 n 类方法有 m_n 种，则完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种方法.

2. 乘法原理　设完成一件事须有 n 个步骤（仅当 n 个步骤都完成，才能完成这件事），若第 1 步有 m_1 种方法，第 2 步有 m_2 种方法，…，第 n 步有 m_n 种方法，则完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种方法.

注意：加法原理与乘法原理的区别在于前者完成一步即完成一件事；后者须 n 步均完成才算完成一件事.

3. 排列　从 n 个不同元素中任取 $m(m \leqslant n)$ 个元素按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列. 从 n 个不同元素取出 m 个元素的所有排列种数记为

$$P_n^m = n(n-1)\cdots[n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}$$

将 n 个不同元素全部取出的排列称为全排列，其排列的种数记为

$$P_n = n(n-1)\cdots 1 = n!$$

规定 $0! = 1$.

4. 允许重复的排列　从 n 个不同元素中有放回地取 m 个元素按照一定顺序排列成一列，其排列的种数为

$$N = \underbrace{n \times n \cdots \times n}_{m\text{个}} = n^m$$

5. 不全相异元素的全排列　若 n 个元素中，有 m 类（$1 < m \leqslant n$）本质不同的元素，而每类元素中分别有 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 个元素（$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, 1 < k_i < n, i = 1, 2, \cdots, m$），则 n 个元素全部取出的排列称为不全相异元素的一个全排列. 其排列的种数为

$$N = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

6. 组合　从 n 个不同元素中取出 m 个元素，不管其顺序并成一组，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合，其组合总数记为 C_n^m.

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合的性质：

(1)$C_n^m=C_n^{n-m}$

(2)$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$

注意:排列与组合的区别在于前者与次序有关,后者与次序无关.

1.1.2 随机试验和随机事件

1. 随机试验(记为 E)　若试验(观察或实验过程)满足条件:

(1)试验可在相同条件下重复进行;

(2)试验的结果具有多种可能性;

(3)试验前不能确切知道会出现何种结果,只知道所有可能出现的结果,

则该试验称为随机试验.

2. 随机事件$\triangleq$随机试验 E 的一个结果,简称事件,用大写字母 A,B,C,D 表示.

3. 基本事件(样本点)$\triangleq$随机试验 E 的每一个不可再分解的结果,用 w 表示.

4. 基本事件空间(样本空间)$\triangleq$随机试验 E 的所有基本事件组成的集合,记为

$$\Omega=\Omega(w)$$

5. 必然事件$\triangleq$在一定条件下,每次试验中一定要发生的事件,记为 U.

6. 不可能事件$\triangleq$在一定条件下,每次试验中一定不发生的事件,记为$\varnothing$.

1.1.3 事件的关系及其运算

1. 事件的包含　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含 A(或 A 包含于 B),记为 $B\supset A$.

2. 事件相等　若 $A\supset B$ 且 $B\supset A$,则称事件 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

3. 事件 A 与 B 之和(并)　$A\cup B$(或 $A+B$)$\triangleq$事件 A 与 B 至少有一个发生.

推广:

$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k\triangleq n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生.

$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\cdots=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\triangleq A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$至少有一个发生.

性质:

(1)$A\subset A\cup B$;　$B\subset A\cup B$

(2)$A\cap(A\cup B)=A$;　$B\cap(A\cup B)=B$

(3)$A\cup A=A$

4. 事件 A 与 B 的差　$A-B\triangleq$事件 A 发生而 B 不发生.

性质:

(1)$A-B\subset A$

(2)$(A-B)\cup A=A$;　$(A-B)\cup B=A\cup B$

(3)$(A-B)\cap A=A-B$;　$(A-B)\cap B=\varnothing$

5. 事件 A 与 B 的积　$A\cap B$(或 AB)$\triangleq$事件 A 与 B 同时发生.

推广:

$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k\triangleq n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \cdots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \triangleq$无穷个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$同时发生.

性质：

(1)$A \cap B \subset A$； $A \cap B \subset B$

(2)$(A \cap B) \cup A = A$； $(A \cap B) \cup B = B$

(3)$A \cap A = A$

6. 互斥事件　在试验中，若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $A \cap B = \varnothing$，则称 A, B 为互斥事件.

推广：在试验中，若事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 任意两个都是互斥的，则该事件组称为互斥事件组.

注意：

(1)在一次试验中，基本事件都是两两互斥的.

(2)若 A, B 互斥，则 $A \cap B = A + B$.

7. 对立事件　每次试验中，“事件 A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$.

特性：

(1)$A + \overline{A} = U$　(必然事件)

(2)$A\overline{A} = \varnothing$　(不可能事件)

由定义可知：对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件.

8. 事件的运算律(与集合的运算律相似)

(1)交换律　$A \cup B = B \cup A$；　$AB = BA$

(2)结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；　$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3)分配律　$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$；　$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$

(4)摩根律　$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$；　$\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k；\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k；\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k$$

(5)对减法运算满足　$A - B = A\overline{B}$(或 $A \cap \overline{B}$)

注意：

(1)事件的运算律非常重要，务必记熟，在后面的概率计算中，经常将一些事件用另一些事件的运算来表示.

(2)经常用文氏图帮助分析和理解事件的运算，尤其是两个事件的运算更是如此.

【例 1.1】　设 A, B, C 表示 3 个随机事件，试将下列事件用 A, B, C 表示出来.

(1)A 出现，B, C 都不出现　　(2)A, B 都出现，C 不出现

(3)3 个事件都出现　　(4)3 个事件中至少有 1 个出现

(5)3 个事件都不出现　　(6)不多于 1 个事件出现

(7)不多于 2 个事件出现　　(8)3 个事件至少有 2 个出现

(9)A, B 至少有 1 个出现，C 不出现　　(10)A, B, C 中恰好有 2 个出现

【解】　(1)$A\overline{BC}$　(2)$AB\overline{C}$　(3)ABC　(4)$A + B + C$　(5)$\overline{ABC}$

(6)$\overline{ABC} + A\overline{BC} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{AB}C$ 或$\overline{AB + BC + AC}$

(7)$\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$ 或$\overline{ABC}$

(8)$ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$

(9)$(A+B)\overline{C}$

(10)$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$

【例 1.2】 设一个工人生产了 4 个零件,A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品($i=1,2,3,4$),试用 A_i 表示下列各事件:

(1)没有 1 个是次品　　　　(2)至少有 1 个是次品

(3)只有 1 个是次品　　　　(4)至少有 3 个不是次品

(5)恰好有 3 个是次品　　　(6)至多有 1 个是次品

【解】 (1)$A_1A_2A_3A_4$

(2)$\overline{A_1A_2A_3A_4}$ 或 $\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1A_2A_3\overline{A}_4+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4+\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4+A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$

(3)$\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1A_2A_3\overline{A}_4$

(4)$A_1A_2A_3\overline{A}_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1A_2A_3A_4$

(5)$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$

(6)$A_1A_2A_3A_4+\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1A_2A_3\overline{A}_4$

【例 1.3】 下列各式说明什么包含关系?

(1)$AB=A$　(2)$A+B=A$　(3)$A+B+C=A$

【解】 (1)$AB=A\Leftrightarrow AB\subset A$ 且 $A\subset AB$

由 $A\subset AB\Rightarrow A\subset A$ 且 $A\subset B\Rightarrow A\subset B$

(2)$A+B=A\Leftrightarrow A+B\subset A$ 且 $A\subset A+B$

由 $A+B\subset A\Rightarrow B\subset A$

(3)$A+B+C=A\Leftrightarrow A+B+C\subset A$ 且 $A\subset A+B+C$

由 $A+B+C\subset A\Rightarrow B+C\subset A$

【例 1.4】 写出下列各随机试验的样本空间:

(1)记录一个小班数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(2)同时掷 3 颗骰子,记录 3 颗骰子点数和.

(3)10 件产品中有 3 件次品,每次从中取 1 件(不放回抽样)直到将 3 件次品都取出,记录抽取的次数.

(4)生产产品直到得到 10 件正品,记录生产产品的总件数.

(5)一个小组有 A,B,C,D,E 5 个人,要选正、副组长各一人(一个人不能兼两职),观察选举结果.

(6)甲乙二人下棋一局,观察棋赛结果.

(7)一口袋中有许多红色、白色、蓝色乒乓球,在其中任取 4 只,观察它们具有哪几种颜色.

(8)对某工厂出厂的产品进行检查,合格的盖上“正品”印记,不合格的盖上“次品”,如连续查出 2 件次品就停止检查,或检查 4 件产品就停止检查,记录检查结果.

(9)有 A,B,C 3 只盒子和 a,b,c 3 个球，将 3 个球装入 3 只盒子中，使每只盒子装一个球，观察装球情况.

(10)将一尺之棰折成 3 段，观察各段的长度.

【解】 (1)某小班的人数为 n，每个人的考分可为 $0,1,2,\cdots,100$，于是该小班的平均考分可为 $\frac{0}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{n\times 100}{n}$，故样本空间 $\Omega=\left\{\frac{0}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{n\times 100}{n}\right\}$.

(2)掷 1 颗骰子可能出现的点数为 $1,2,\cdots,6$，掷 3 颗骰子可能出现的点数之和为 $3,4,5,\cdots,18$，故样本空间 $\Omega=\{3,4,5,\cdots,18\}$.

(3)要将 3 件次品都取出，抽取的次数至少要 3 次，最多是 10 次(因为只有 10 件产品)，故 $\Omega=\{3,4,\cdots,10\}$.

(4)要得到 10 件正品，产品的总件数起码应该是 10 件，故样本空间 $\Omega=\{10,11,12,\cdots\}$.

(5)写在前表示正组长，写在后表示副组长，于是样本空间 $\Omega=\{AB,AC,AD,AE,BA,BC,BD,BE,CA,CB,CD,CE,DA,DB,DC,DE,EA,EB,EC,ED\}$.

(6)甲、乙两人下一局棋只可能有如下 3 种情况：甲胜乙负，乙胜甲负，和局. 故样本空间 $\Omega=\{$甲胜乙负，乙胜甲负，和局$\}$.

(7)设 r,w,b 分别表示红色、白色、蓝色，rw 表示红色和白色，rb 表示红色和蓝色，wb 表示白色和蓝色，rwb 表示红、白、蓝三色，样本空间 $\Omega=\{r,w,b,rw,rb,wb,rwb\}$.

(8)设 0 表示次品，1 表示正品，由题设可知样本空间 $\Omega=\{00,0100,0101,0110,0111,100,1010,1011,1100,1101,1110,1111\}$.

(9)设 A,B,C 为 3 只盒子，A_a 表示球 a 放在盒子 A 中，其余类推，于是样本空间 $\Omega=\{A_aB_bC_c,A_aB_cC_b,A_bB_aC_c,A_bB_cC_a,A_cB_aC_b,A_cB_bC_a\}$.

(10)设 x,y,z 分别为折成的第一段、第二段、第三段的长度，它们应满足的关系：$0<x<1,0<y<1,0<z<1$，于是样本空间 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\}$.

1.1.4　概率的定义和性质

1. 古典概率定义

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$，$n$ 为有限的正整数，且每个样本点 $w_i(i=1,2,\cdots,n)$ 出现的可能性相等，则事件 $A=\{w_{i1},w_{i2},\cdots,w_{im}\}$ 出现的概率

$$P(A)=\frac{m}{n}\quad(1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_m\leqslant n)$$

则
$$P(A)=\frac{\text{有利于事件 }A\text{ 的基本事件数 }m}{\text{基本事件的总数 }n}$$

2. 概率的公理化定义

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对于 E 的每一个随机事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，如果它满足下列 3 条公理：

(1)$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2)$P(\Omega)=1$；

(3)如果在事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k\cdots$ 中，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

3. 几何概率

(1)设线段 l 是线段 L 的一部分,向线段 L 上任投一点,若投中线段 l 上的点的数目与该段的长度成正比,而与该线段 l 在线段 L 上的相对位置无关,则点投中线段 l 的概率为

$$P=\frac{l\text{ 的长度}}{L\text{ 的长度}}$$

(2)设平面图形 g 是平面图形 G 的一部分,向图形 G 上任投一点,若投中图形 g 上的点的数目与该图形面积成正比,而与该图形 g 在图形 G 上的相对位置无关,则点投中图形 g 的概率为

$$P=\frac{g\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}$$

(3)设空间形体 v 是空间形体 V 的一部分,则向 V 投点投中 v 的概率为

$$P=\frac{v\text{ 的体积}}{V\text{ 的体积}}$$

4. 概率的性质

性质 1　设有限多个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

该性质也被称为概率的加法定理.

性质 2　设 A 为任一随机事件,则 $P(\overline{A})=1-P(A)$

性质 3　设 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

当 $A\subset B$ 时,有 $P(A)\leqslant P(B)$

性质 4　设 A,B 为任意两个随机事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

性质 4 习惯上称为广义加法定理.

推广:

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j=2}^{n}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k=3}^{n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

注意:

(1)性质 1 与性质 4 的区别:仅当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互斥事件组时才可用性质 1.

(2)巧妙运用对立事件的特性,即性质 2,可收到事半功倍的效果.一般来讲,求若干事件之中“至少”出现其中一件的概率,用对立事件求解较为简便.

1.1.5　概率的乘法公式、全概公式、逆概公式

1. 乘法公式

条件概率　在事件 B 已经发生的条件下,计算事件 A 的概率,称这种概率为在事件 B 已发生的条件下事件 A 的条件概率,记作 $P(A|B)$。其计算公式如下:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

乘法定理　两事件的积事件的概率等于其中一事件的概率与另一事件在前一事件出现下的条件概率的乘积,即

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

独立事件　如果两事件中任一事件的发生不影响另一事件的概率,则称这两事件是相互独立的,即

$$P(B|A)=P(B)\text{ 或 }P(A|B)=P(A)$$

则 A 与 B 独立.

也可这样定义:如果两事件 A,B 的积事件的概率等于这两事件的概率的乘积,则称两事件 A 与 B 是相互独立的,即

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

推广:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,如果对于任一组 $k_1,k_2,\cdots,k_s(2\leqslant s\leqslant n)$(每组 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 取 $1,2,\cdots,n$ 中 s 个不同的值),等式

$$P(A_{k1}A_{k2}\cdots A_{ks})=P(A_{k1})P(A_{k2})\cdots P(A_{ks})$$

总成立,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

注意:

(1)$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立$\Rightarrow A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立.

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立$\nRightarrow A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

(2)4 对事件 $A,B;\overline{A},B;A,\overline{B};\overline{A},\overline{B}$ 之中有一对相互独立,则另外 3 对也相互独立.

(3)独立与互斥(不相容)的区别:两事件 A,B 相互独立是指事件 A 出现的概率与事件 B 是否出现没有关系,并不是说事件 A,B 之间没有关系;相反,若 A,B 独立,则常有 $AB\neq\varnothing$,即 A 与 B 非互斥(相容).A,B 互斥(不相容)是指事件 A 的出现必导致 B 的不出现,并没有说事件 A 出现的概率与事件 B 是否出现有关系.事实上,若 A 与 B 互斥,则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$,又 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,于是 $P(AB)=0$,而当 $P(A)>0,P(B)>0$ 时,$P(A)P(B)>0$.可知 $P(AB)\neq P(A)P(B)$.这就是说一般情况下,两个事件互斥并不能得出这两个事件就独立的结论.

2. 全概公式(定理)

如果事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足

(1)$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 互斥,且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$

(2)$B_1+B_2+\cdots+B_n=U$

则对任一事件 A 皆有以下全概公式

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)$$

满足条件(1)、(2)的事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 称为完备事件组,也称某随机试验 E 的样本空间.用全概公式求解的概率问题关键在于寻找完备事件组(样本空间).

3. 逆概公式(贝叶斯公式)

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为一完备事件组,则对任一事件 $A(P(A)\neq0)$,有

$$P(B_j|A)=\frac{P(B_jA)}{P(A)}=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)},\quad j=1,2,\cdots,n$$

注意:公式右边可这样记忆,分母为全概公式,是 n 项之和,分子是分母中的某一项.

1.1.6　独立试验序列概型

定理(伯努利公式)　设在单次试验中,事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,则在 n 次重

复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P(\text{“}A\text{ 发生 }k\text{ 次”}) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (q = 1 - p)$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,n$.

下列各事件:在 n 次试验中

A. 事件 A 发生不到 k 次　　B. 事件 A 发生多于 k 次

C. 事件 A 发生不少于 k 次　　D. 事件 A 发生不多于 k 次

它们的概率分别为

A. $P(A\text{ 发生不到 }k\text{ 次})=P(0)+P(1)+\cdots+P(k-1)$

B. $P(A\text{ 发生多于 }k\text{ 次})=P(k+1)+P(k+2)+\cdots+P(n)$

C. $P(A\text{ 发生不少于 }k\text{ 次})=P(k)+P(k+1)+\cdots+P(n)$

D. $P(A\text{ 发生不多于 }k\text{ 次})=P(0)+P(1)+\cdots+P(k)$

1.2　事件概率的解题分析

1.2.1　计算题的类型及其特点

图 1-1 所示为事件概率的计算方法和计算公式.

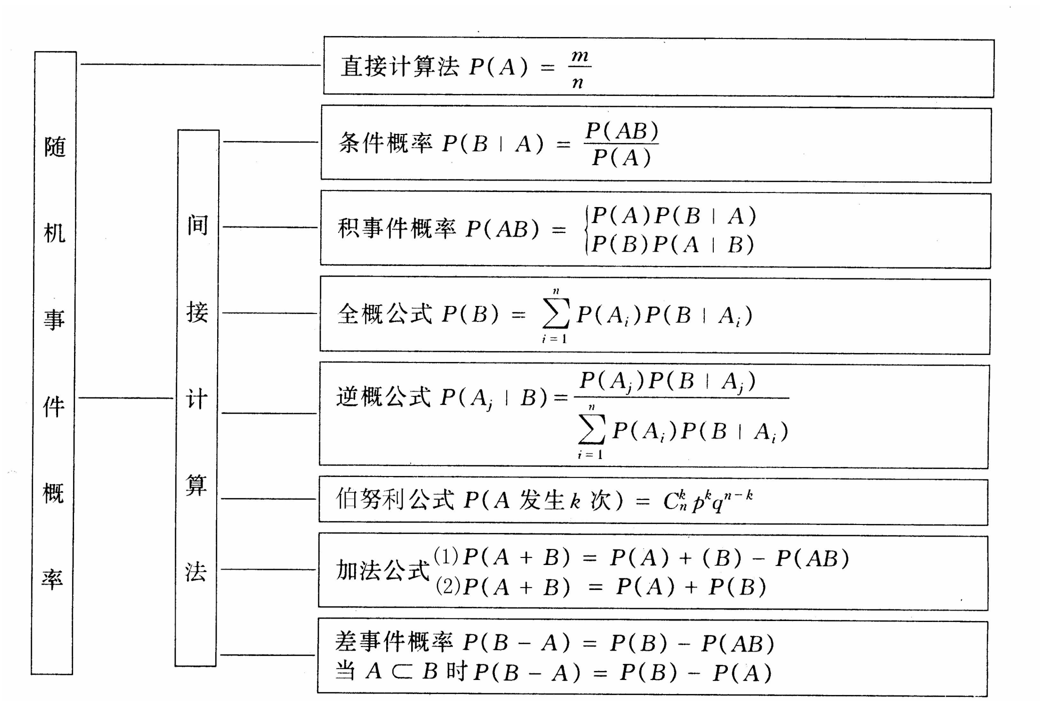

图 1-1

解题程序:

(1)判别事件概率的类型(由题设条件及所求概率,主要是后者);

(2)列出已知条件,求出应用类型公式所需要的条件;

(3)用类型公式计算出所要求的概率.

1. 直接计算法

解题程序：

(1)明确随机试验的类型，确定基本事件总数 n 并判断各事件是否为等可能事件；

(2)求出有利于事件 A 的基本事件个数 m；

(3)计算出 $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

解题时应注意的几点：

(1)所求中有“至少”的问题，通常用“对立事件”解答较为简便.

(2)“任取 k 件”与“无放回地逐件抽取 k 件”虽然考虑问题的角度不同，但二者所计算出的概率却是相同的.

(3)“任取 k 件”与“有放回地逐件抽取 k 件”，所得概率一般是不同的.

(4)有些问题也可用“加法”或“乘法”的概率公式来分析.

【例 1.5】 袋中有 9 个球(4 白，5 黑)，现从中任取两个，求：

(1)两个均为白球的概率.

(2)两个球中一个是白的，另一个是黑的概率.

(3)至少有一个黑球的概率.

【解】 (1)方法 1　随机试验为从 9 个球中任取 2 个，假设其与先后次序有关，则基本事件总数为 P_9^2，且每事件为等可能性，有利于取两个白球的事件 A 的基本事件个数 P_4^2，故

$$P(A)=\frac{P_4^2}{P_9^2}=\frac{1}{6}$$

方法 2　随机试验为从 9 个球中任取 2 个，设其与先后次序无关，则基本事件总数为 C_9^2，且每事件为等可能性，有利于取两个白球的事件 A 的基本事件数 C_4^2，故

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{1}{6}.$$

(2)方法 1　取球与先后次序有关，则基本事件总数为 P_9^2，两球中一白一黑＝{先白后黑，先黑后白}，其有利于取一白一黑事件 A 的基本事件个数 $P_4^1P_5^1+P_5^1P_4^1=2P_4^1P_5^1$，故

$$P(A)=\frac{2P_4^1P_5^1}{P_9^2}=\frac{5}{9}.$$

方法 2　取球与先后次序无关，则基本事件总数为 C_9^2，有利于取一白一黑事件 A 的基本事件个数 $C_4^1C_5^1$，故

$$P(A)=\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}=\frac{5}{9}.$$

(3)取球与先后次序有关，则基本事件总数为 P_9^2，至少有一个黑球的事件 A 的对立事件 $\overline{A}$ 是：任取的两个球均是白球，由概率的性质有

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

【例 1.6】 在电话号码簿中任取一个电话号码，求后面 4 个数全不相同的概率(设后面 4 个数中的每一个数都是等可能性地取自 0,1,2,…,9).

【解】 本题与电话号码的位数无关. 电话号码的数字是允许重复的，因此由 0,1,2,…,

9 所构成的后 4 个数字的个数为 10^4,“后 4 个数全不相同”的个数为 P_{10}^4,故

$$P(A)=\frac{P_{10}^4}{10^4}=0.504$$

【例 1.7】 把 10 本书随意放在书架上,求其中指定的 5 本书放在一起的概率.

【解】 基本事件总数 10!

有利于将指定的 5 本书放在一起的基本事件个数:6!5!(其中 6!是指 5 本书当作一个元素进行全排列的总数,5!是 5 本书相互之间进行全排列的总数),故

$$P(A)=\frac{6!5!}{10!}=\frac{1}{42}$$

【例 1.8】 随机地将 15 名新生平均分配到 3 个班级中去,这 15 名新生中有 3 名是优秀生,问:(1)每个班级各分配到一名优秀生的概率是多少?(2)3 名优秀生分在同一班级的概率是多少?

【解】 基本事件总数(15 名新生平均分配到 3 个班级中的分法总数),由不全相异元素的全排列计算公式有

$$\frac{15!}{5!5!5!}$$

(1)3 个班级各分配到一个优秀生的分法有 3! 种;对于每一种这样的分法,12 名非优秀生平均分配到 3 个班级的分法总数为 $\frac{12!}{4!4!4!}$;由乘法原理,有利于事件 A(15 名新生平均分配到 3 个班级,且各班均有一名优秀生)的分法为

$$(3!)\times\frac{12!}{4!4!4!}$$

故

$$P(A)=\frac{(3!)\times\frac{12!}{4!4!4!}}{\frac{15!}{5!5!5!}}=\frac{25}{91}.$$

(2)将 3 名优秀生分配到同一班级的分法有 3 种;对于每一种这样的分法,12 名非优秀生的分法(一个班 2 名,另两个班各 5 名)总数为 $\frac{12!}{2!\ 5!\ 5!}$;由乘法原理,有利于事件 A(15 名学生平均分配到 3 个班级,其中一个班分配到 3 名优秀生)的分法为

$$3\times\frac{12!}{2!5!5!}$$

故

$$P(A)=3\times\frac{\frac{12!}{2!5!5!}}{\frac{15!}{5!5!5!}}=\frac{6}{91}.$$

【例 1.9】 一学生宿舍有 6 名学生,问:(1)6 人生日都在星期天的概率是多少?(2)6 个人的生日都不在星期天的概率是多少?(3)6 个人的生日不都在星期天的概率有多少?

【解】 因为每个人的生日可在 7 天中的任何一天,且是等可能的,于是基本事件总数为 7^6.

(1)有利于事件 A(6 个人生日都在星期天)的基本事件个数是 1,故

$$P(A)=\frac{1}{7^6}.$$

(2)6 个人生日都不在星期天,每个人的生日就只能是星期一到星期六之中的任一天,因此有利于事件 A(6 个人生日都不在星期天)的基本事件个数是 6^6,故

$$P(A)=\frac{6^6}{7^6}=\left(\frac{6}{7}\right)^6.$$

(3)$A=\{$6 个人生日都在星期天$\}$与 $\overline{A}=\{$6 个人生日不都在星期天$\}$是对立事件,故

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\left(\frac{1}{7}\right)^6.$$

【例 1.10】 袋内放有 2 个伍分、3 个贰分和 5 个壹分的钱币,任取其中 5 个,求金额总数超过壹角的概率.

【解】 共有 10 个钱币,任取 5 个,则基本事件总数为 C_{10}^5,有利于事件 A(取 5 个钱币金额超壹角)的情形:

(1)取 2 个 5 分币,其余的 3 个可任取,其种数:

$$C_2^2C_3^3+C_2^2C_3^2C_5^1+C_2^2C_3^1C_5^2+C_2^2C_5^3$$

(2)取 1 个 5 分币,则 2 分币至少要取 2 个,其种数:

$$C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2$$

有利于事件 A 的基本事件总数:

$$C_2^2C_3^3+C_2^2C_3^2C_5^1+C_2^2C_3^1C_5^2+C_2^2C_5^3+C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2=126$$

故

$$P(A)=\frac{126}{C_{10}^5}=\frac{1}{2}.$$

【例 1.11】 在长度为 a 的线段内任取两点将其分成 3 段,求它们可以构成一个三角形的概率.

【解】 设线段被分成的 3 段长度分别为 x,y 和 $a-x-y$,则基本事件集为由 $0<x<a,0<y<a$及 $0<x+y<a$ 所构成图形的面积 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}a^2$,有利于事件 A(即 $x,y,a-x-y$ 三段构成三角形)的基本事件集:由线段 $x,y,a-x-y$ 所围成的三角形面积 $S_{\triangle DCE}$(如图 1-2 所示).

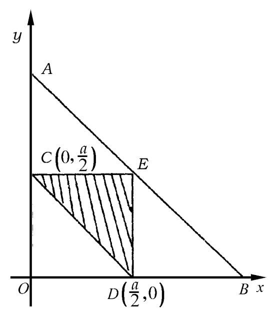

图 1-2

由三角形两边之和大于第三边的性质,有

$$0<x<\frac{a}{2},0<y<\frac{a}{2},0<a-x-y<\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow\quad 0<x<\frac{a}{2},0<y<\frac{a}{2},\frac{a}{2}<x+y<a(\text{它们构成三角形 } DCE)$$

则其面积 $$S_{\triangle DCE}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

故

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{1}{4}.$$

【例 1.12】 甲、乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头,它们在一昼夜内到达的时间是等可能的.如果甲船停泊的时间是 1 小时,乙船停泊的时间是 2 小时,求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少?

【解】 设甲乙两船到达的时刻分别为 x,y,则

$$0\leqslant x\leqslant 24,0\leqslant y\leqslant 24$$

由题意,若甲先到,则乙必须晚 1 小时到达,即 $y\geqslant 1+x$;若乙先到,则甲必须晚 2 小时到达,即 $x\geqslant y+2$,由图 1-3 可知基本事件集等于由 $x=0,x=24,y=0,y=24$ 所围图形面积 24^2,导致事件 A 发生的集 $=S_1+S_2=\frac{1}{2}(24-1)^2+\frac{1}{2}(24-2)^2$

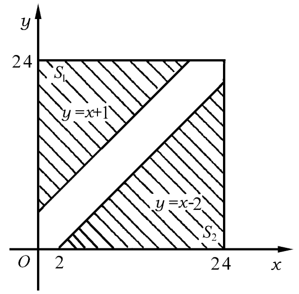

图 1-3

故所求概率为

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}(23^2+22^2)}{24^2}=\frac{1013}{1152}.$$

2. 条件概率与概率的乘法公式

$P(B|A)$与$P(AB)$从形式上不易混淆,但在分析具体问题时,究竟该用$P(B|A)$还是$P(AB)$?初学者往往把握不好.现介绍两者的区别如下:

(1)从样本空间上讲,计算$P(AB)$的样本空间为$S_{A\cdot B}$,计算$P(B|A)$的样本空间为S_A;

(2)凡涉及事件 A 与 B"同时"发生,用$P(AB)$;"有包含"关系或主从条件关系的,用$P(B|A)$.

【例 1.13】 某种动物由出生开始,活到 20 岁以上的概率为 0.8,活到 25 岁以上的概率为 0.4,问现年 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率是多少?

【解】 A——{活到 20 岁以上},B——{活到 25 岁以上},显然 $B\subset A$,故该问题属于条件概率 $P(B|A)$.

$\because P(A)=0.8,\quad P(B)=0.4$

又 $B\subset A\quad AB=B\quad P(AB)=P(B)=0.4$

$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=\frac{1}{2}.$

【例 1.14】 甲、乙两班共有 70 名同学,其中女同学 40 名,设甲班有 30 名同学,而女生 15 名,问在碰到甲班同学时,正好碰到一名女同学的概率.

【解】 A——{碰到甲班同学}, B——{碰到女同学}

这是一个有前提条件——{碰到甲班同学}的问题,因此是条件概率 $P(B|A)$.

$\because P(AB)=\frac{15}{70},\quad P(A)=\frac{30}{70}$

$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{2}.$

【例 1.15】 某厂的产品中有 4%的废品,在 100 件合格品中有 75 件一等品,试求在该厂的产品中任取一件是一等品的概率.

【解】 A——{任取的一件是合格品},B——{任取的一件是一等品}

因为所求的是在某厂的产品中任取一件,即样本空间是某厂的产品,因此这属于

$P(AB)$问题.

$\because P(A)=1-P(\overline{A})=96\%$，　$P(B|A)=75\%$

$\therefore P(AB)=P(A)P(B|A)=\dfrac{96}{100}\times\dfrac{75}{100}=0.72$.

3. 全概公式与逆概(贝叶斯)公式

有诸多原因可引发某种结果，而该结果又不能简单地被看做是这诸多事件的和，这样的概率问题属于全概类型.

试验结果已知，追查是何种原因(或情况、条件)下引发的概率，这样的概率问题属于逆概类型. 正因为如此，“逆概公式”也称为“后验概率公式”.

用全概公式解题的程序：

(1)判断求解的问题是否为全概类型；

(2)若是全概类型，正确假设事件 A 及$\{B_i\}$，$\{B_i\}$要求是互斥完备事件组；

(3)若$\{B_i\}$是互斥完备事件组，计算出$\{P(B_i)\}$，$\{P(A|B_i)\}$；

(4)把(3)所得代入全概公式.

【例 1.16】　设有 3 门火炮同时对某目标射击，命中概率分别为 0.2，0.3，0.5，目标命中 1 发被击毁的概率为 0.2，命中 2 发被击毁的概率为 0.6，3 发均命中被击毁的概率为 0.9，求 3 门火炮在一次射击中击毁目标的概率.

【解】　目标被击毁是由于 3 门火炮的射击，但它显然不能看作是 3 门火炮射击的和事件，因此这是属于全概类型.

A——{目标在一次 3 门火炮射击中被击毁}

B_i——{恰有 i 发击中目标}，$i=0,1,2,3$

$\{B_i\}$为互斥的完备事件组.

$P(B_0)=0.8\times0.7\times0.5=0.28$

$P(B_1)=0.2\times0.7\times0.5+0.8\times0.3\times0.5+0.8\times0.7\times0.5=0.47$

$P(B_2)=0.2\times0.3\times0.5+0.2\times0.7\times0.5+0.8\times0.3\times0.5=0.22$

$P(B_3)=0.2\times0.3\times0.5=0.03$

$P(A|B_0)=0$，　$P(A|B_1)=0.2$

$P(A|B_2)=0.6$，　$P(A|B_3)=0.9$

故

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A|B_i)\\&=0.47\times0.2+0.22\times0.6+0.03\times0.9=0.253.\end{aligned}$$

【例 1.17】　设一仓库中有 10 箱同种规格的产品，其中由甲、乙、丙 3 厂生产的分别有 5 箱，3 箱，2 箱，3 厂产品的废品率依次为 0.1，0.2，0.3，从这 10 箱产品中任取一箱，再从箱中任取一件产品，求取得正品的概率.

【解】　“正品”是取自甲厂、乙厂或丙厂，显然不能看作是甲、乙、丙 3 厂的正品的和事件，因此这是属于全概类型.

A——{取得的产品为正品}，B_1,B_2,B_3 分别表示“任取一件产品是甲、乙、丙生产的”

$P(B_1)=\dfrac{5}{10}$，　$P(B_2)=\dfrac{3}{10}$，　$P(B_3)=\dfrac{2}{10}$

$P(A|B_1)=0.9,\quad P(A|B_2)=0.8,\quad P(A|B_3)=0.7$

故

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{5}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{8}{10}+\frac{2}{10}\times\frac{7}{10}=0.82.$$

【例 1.18】 设某一工厂有 A,B,C3 个车间生产同一型号的螺钉,每个车间的产量分别为该厂螺钉总产量的 25%,35%,40%,每个车间成品中的次品分别为各车间产量的 5%,4%,2%,如果从全厂总产品中抽取一个螺钉为次品,问它是由 A、B、C 车间生产的概率.

【解】 现已知抽出的产品为次品,要追查是哪个车间生产的概率,显然该问题是属于逆概类型.

A,B,C——{任取一螺钉是 A,B,C 车间生产的},D——{任取一螺钉是次品}

$P(A)=25\%,\quad P(B)=35\%,\quad P(C)=40\%$

$P(D|A)=5\%,\quad P(D|B)=4\%,\quad P(D|C)=2\%$

$$P(A|D)=\frac{P(A)P(D|A)}{P(D)}=\frac{P(A)P(D|A)}{P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)}$$

$$=\frac{25\%\times5\%}{25\%\times5\%+35\%\times4\%+40\%\times2\%}=\frac{25}{69}$$

同理 $\quad P(B|D)=\frac{28}{69},\quad P(C|D)=\frac{16}{69}.$

【例 1.19】 发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号“·”和“—”,由于通信系统受到干扰,当发出信号“·”时,收报台未必收到信号“·”,而是分别以概率 0.8 和 0.2 收到信号“·”和“—”;同样,当发出信号“—”时,收报台分别以概率 0.9 和 0.1 收到信号“—”和“·”.求:

(1)收报台收到信号“·”的概率;

(2)当收报台收到信号“·”时,发报台是发出信号“·”的概率.

【解】 设 B_1,B_2——{分别为发出信号“·”和“—”},A——{收到信号“·”}

$$P(B_1)=0.6,\quad P(B_2)=0.4,\quad P(A|B_1)=0.8,\quad P(A|B_2)=0.1$$

(1)由全概公式

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=0.6\times0.8+0.4\times0.1=0.52.$$

(2)由逆概公式

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.6\times0.8}{0.52}=\frac{12}{13}.$$

【例 1.20】 设一个口袋中有 6 个球,令 A_1,A_2,A_3 依次表示这 6 个球分别为 4 红 2 白;3 红 3 白;2 红 4 白.设验前概率为 $P(A_1)=\frac{1}{2}$,$P(A_2)=\frac{1}{6}$,$P(A_3)=\frac{1}{3}$,现从口袋中任取一球,得到白球,求相应的验后概率.

【解】 B——{任取一球为白的}

由题设:$P(B|A_1)=\frac{2}{6},\quad P(B|A_2)=\frac{3}{6},\quad P(B|A_3)=\frac{4}{6}$

由逆概公式有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{6}}=\frac{6}{17}$$

同理可得　$P(A_2|B)=\frac{3}{17}$，　$P(A_3|B)=\frac{8}{17}$.

4. 相互独立事件

【例 1.21】　两射手彼此独立地向同一目标射击，设甲击中目标的概率为 0.8，乙击中目标的概率为 0.6，求目标被击中的概率.

【解】　方法 1　A——{一射手击中目标}，B——{另一射手击中目标}，C——{目标被击中}

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$
$$=0.8+0.6-0.8\times0.6=0.92.$$

方法 2　$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\,\overline{B})$
$$=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0.2\times0.4=0.92.$$

【例 1.22】　一工人看管 3 台机床，在 1 小时内甲、乙、丙 3 台机床需工人照看的概率分别是 0.9，0.8，0.85，求在 1 小时中，

(1)没有机床需要照看的概率；

(2)至少有 1 台机床不要照看的概率；

(3)至多只有 1 台机床需要照看的概率.

【解】　A_i——{第 i 台机床需要照看}，$i=1,2,3$

A——{没有 1 台机床需要照看}

B——{至少有 1 台机床不要照看}

C——{至多只有 1 台机床需要照看}

因为 3 台机床要不要照看是相互独立的，故

(1) $P(A)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)$
$$=(1-0.9)\times(1-0.8)\times(1-0.85)=0.003.$$

(2) 因为有“至少”字眼，因此用对立事件的概率性质来做比较简便.

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(A_1A_2A_3)=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$
$$=1-0.9\times0.8\times0.85=0.388.$$

(3) $P(C)=P${全不需要照看或只有一台需照看}

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$
$$=0.003+0.9\times0.2\times0.5+0.1\times0.8\times0.15+0.1\times0.2\times0.85=0.059.$$

【例 1.23】　张三欲与李四通话，李的电话为分机电话，假设张挂通总机的概率为 80%，李的分机占线的概率为 10%，求张三与李四通话的概率.

【解】　A——{挂通总机}，　B——{分机不占线}，　D——{张与李通话}

因为挂通总机与分机占不占线是相互独立的，故

$$P(D)=P(AB)=P(A)P(B)=P(A)(1-P(\overline{B}))$$

$$=80\% \times (1-10\%) = 0.72$$

【例 1.24】 某楼电灯泡使用时数在 1000 小时以上的概率为 0.2,求 3 个灯泡在使用 1000 小时以后最多只有 1 个坏的概率.

【解】 A——{1 个灯泡使用时数在 1000 小时以上},$P(A)=0.2$

考察 3 个灯泡,可看做是进行 3 次重复独立试验,于是 P{3 个灯泡中最多有 1 个坏}$=$ P(3 个全好)$+P${只有 1 个坏},故

$$P\{3\text{ 个灯泡中最多有 1 个坏}\} = C_3^3(0.2)^3 + C_3^2(0.2)^2(1-0.2)$$
$$= (0.2)^3 + 3\times(0.2)^2\times 0.8 = 0.104.$$

【例 1.25】 某型号的高炮,每门炮发射一发击中飞机的概率为 0.6,现若干门炮同时各发射一发,问欲以 99%的把握击中来犯的一架敌机至少需配置几门炮?

【解】 设需要设置 n 门高炮.因为 n 门高炮是各自独立发射的,因此该问题可以看做是 n 次重复独立试验.

A——{高炮击中飞机}, $P(A)=p=0.6$

{飞机被击中}={n 门高炮中至少有 1 门击中}

故 $P\{\text{飞机被击中}\}=1-P\{n\text{ 门高炮全不命中}\}=1-(1-p)^n=1-0.4^n\geqslant 99\%$

$$\Rightarrow \quad (0.4)^n\leqslant 0.01 \quad \Rightarrow \quad n\geqslant\frac{\lg 0.01}{\lg 0.4}=5.026$$

可知至少需配置 6 门高炮才能以 99%以上的把握击中来犯敌机.

1.2.2 填空题

填空题一般是概念题或简单的事件概率计算题.对于这类题,欲迅速、准确地写出答案,务必记住概念和各类型概率的计算方法.

【例 1.26】 一批产品中共有 10 件正品和 2 件次品,任意抽取 2 次,每次抽 1 件,抽出后不放回,则第 2 次抽出的是次品的概率为______.

【解】 方法 1 因为 P(任取 k 件,其中恰有 m 件次品)$=P$(无放回地逐件抽取 k 件,其中恰有 m 件次品)

所以
$$P=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

方法 2 A——{第 2 次抽出的是次品},基本事件总数:$C_{12}^1C_{11}^1=12\times 11$

有利于 A 的基本事件个数 $C_{10}^1C_2^1+C_2^1C_1^1=22$,故

$$P(A)=\frac{22}{12\times 11}=\frac{1}{6}.$$

【例 1.27】 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{6}$,则 A,B,C 全不发生的概率为______.

【解】
$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-\\&\quad P(BC)+P(ABC)]\\&=1-\left[\frac{3}{4}-\frac{2}{6}+0\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{7}{12}.$$

【例 1.28】 假设一批产品中一、二、三等品各占 60%，30%，10%，从中随意取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为______.

【解】 A_i——{取到的一件产品为 i 等品}，$i=1,2,3$. 显然，A_1,A_2,A_3 为互斥事件组。由题意有

$$P(\overline{A}_3)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{90}{100}$$

$$P(A_1|\overline{A}_3)=\frac{P(A_1\overline{A}_3)}{P(\overline{A}_3)}=\frac{P[A_1(A_1\cup A_2)]}{P(\overline{A}_3)}=\frac{P(A_1\cup A_1A_2)}{P(\overline{A}_2)}$$

$$=\frac{P(A_1)}{P(\overline{A}_3)}=\frac{60\%}{90\%}=\frac{2}{3}.$$

【例 1.29】 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$ 且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$________.

【解】 因为 $\quad P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

所以　$P(B)=1-P(A)=1-p$.

【例 1.30】 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$，随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$，条件概率 $P(B|A)=0.8$，则 $P(A\cup B)=$______.

【解】 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B|A)$

$$=0.5+0.6-0.5\times0.8=0.7.$$

【例 1.31】 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5，现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为______.

【解】 A——{甲命中}，　B——{乙命中}，　C——{目标被命中}

所求概率为 $P(A|C)=\dfrac{P(AC)}{P(C)}$

$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.6+0.5-0.6\times0.5=0.8$

$P(AC)=P[A(A\cup B)]=P(A\cup AB)=P(A)=0.6$

故　$P(A|C)=\dfrac{0.6}{0.8}=0.75$.

【例 1.32】 设 A,B 为两相互独立的事件，$P(A\cup B)=0.6$，$P(A)=0.4$，则 $P(B)=$______.

【解】 因 A,B 相互独立，故 $P(AB)=P(A)P(B)$

于是 $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

$0.6=0.4+P(B)-0.4P(B)\qquad P(B)=\dfrac{0.2}{0.6}=\dfrac{1}{3}$.

【例 1.33】 某射手在 3 次射击中至少命中 1 次的概率为 0.875，则该射手在 1 次射击中命中的概率为______.

【解】 A——{射击命中}，设 $P(A)=p$，

$P\{3$ 次射击中至少命中 1 次$\}=1-P\{$全不命中$\}$

显然，该问题属于重复独立试验概型.

$$P\{3\text{次射击全不命中}\} = C_3^0 p^0 (1-p)^3 = (1-p)^3$$

于是 $1-(1-p)^3=0.875 \Rightarrow (1-p)^3=0.125 \Rightarrow 1-p=0.5 \Rightarrow p=0.5$

即 $P(A)=0.5$.

【例 1.34】 设 $A\subset B$, $P(A)=0.1$, $P(B)=0.5$, 则 $P(AB)=$______, $P(A+B)=$______, $P(\overline{A}+\overline{B})=$______, $P(A|B)=$______.

【解】 因为 $A\subset B$,所以 $AB=A$, $A+B=B$, $\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}$

故 $P(AB)=P(A)=0.1$; $P(A+B)=P(B)=0.5$

$P(\overline{A}+\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.1=0.9$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.5}=\frac{1}{5}=0.2.$$

【例 1.35】 $P(A)=0.7$, $P(A-B)=0.3$, 则 $P(\overline{AB})=$______.

【解】 $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B}|A)=P(A)[1-P(B|A)]$

$$1-P(B|A)=\frac{P(A-B)}{P(A)}=\frac{0.3}{0.7}=\frac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad P(B|A)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$$

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-P(A)P(B|A)=1-\frac{7}{10}\times\frac{4}{7}=0.6.$$

1.2.3 证明题

常用的公式和性质

1. $0\leqslant P(A)\leqslant 1$
2. 若事件 A 的发生必引起事件 B 的发生,即 $A\subset B$,则 $P(B)\geqslant P(A)$
3. $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$
4. $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$, 或 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$
5. 概率的加法和乘法公式

【例 1.36】 设事件 A 与 B 互斥,且 $0<P(B)<1$,则 $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A)}{1-P(B)}$

【证】 因为 A 与 B 互斥,即 $AB=\varnothing$, 所以 $P(AB)=0$

又 $P(A)=P(A\overline{B})+P(AB)=P(A\overline{B})$

$0<P(B)<1 \Rightarrow P(\overline{B})=1-P(B)>0$

故 $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)}{1-P(B)}$.

【例 1.37】 证明 4 对事件 A,B; $A,\overline{B}$; $\overline{A},B$; $\overline{A},\overline{B}$ 之中有 1 对相互独立,则另外 3 对也相互独立.

【证】 (1)若两事件 A 与 B 的相互独立定义为

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

现证若 A,B 相互独立,则 $\overline{A},\overline{B}$ 也相互独立,其余的自证.

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}) &= P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B) = 1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\ &= 1-[P(A)+P(B)-P(A)P(B)]\\ &= [1-P(A)]-P(B)[1-P(A)] = [1-P(A)][1-P(B)] = P(\overline{A})P(\overline{B})\end{aligned}$$

故事件 $\overline{A},\overline{B}$ 相互独立.

(2)若两事件 A 与 B 的相互独立定义为

$$(A|B)=P(A) \text{或} P(B|A)=P(B)$$

现证若 A,B 相互独立,则 $\overline{A},\overline{B}$ 也相互独立.

$$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\overline{B})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}$$

$$=\frac{1-P(A)-P(B)+P(B)\times P(A|B)}{1-P(B)} \qquad (\text{因 } P(A|B)=P(A))$$

$$=\frac{1-P(A)-P(B)+P(B)P(A)}{1-P(B)}=1-P(A)=P(\overline{A})$$

故事件 $\overline{A},\overline{B}$ 相互独立.

【例 1.38】 设 $P(A)>0$,试证:$P(B|A)\geqslant 1-\dfrac{P(\overline{B})}{P(A)}$

【分析】 通常用逆推法,若不等式成立,则 $P(A)P(B|A)\geqslant P(A)-P(\overline{B})$

即 $P(AB)\geqslant P(A)-1+P(B) \quad \Rightarrow \quad P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant 1 \Rightarrow \quad P(A\cup B)\leqslant 1$

【证】 因 $P(A\cup B)\leqslant 1$,　即 $P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant 1$

$\Rightarrow \quad P(A)+P(B)-P(A)P(B|A)\leqslant 1$

$\Rightarrow \quad P(A)P(B|A)\geqslant P(A)-[1-P(B)]$

$\Rightarrow \quad P(A)P(B|A)\geqslant P(A)-P(\overline{B})$

又 $P(A)>0$

故 $P(B|A)\geqslant 1-\dfrac{P(\overline{B})}{P(A)}$.

【例 1.39】 若事件 A,B,C 同时发生必导致事件 D 发生,试证:

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(D)\leqslant 2$$

【证】 因 $P(D)\geqslant P(ABC)$,而 $P(ABC)\geqslant P(AB)+P(C)-1$

$\geqslant P(A)+P(B)-1+P(C)-1$

$=P(A)+(B)+P(C)-2$

故 $P(A)+P(B)+P(C)-P(D)\leqslant 2$.

习题与答案

一、填空题

1. 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{AB})$ 且 $P(A)=p$,则 $P(B)=$______.
2. 设 10 件产品中有 4 件不合格品,从中任取两件,已知所取两件产品中有一件是不合格品,另一件也是不合格品的概率为______.
3. 若随机变量 Y 在 $(1,6)$ 上服从均匀分布,则方程 $x^2+Yx+1=0$ 有实根的概率是______.
4. 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$(a 为正常数)内掷一点,点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比,则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率为______.
5. 设随机事件 A,B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4,0.3 和 0.6,若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件,则积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$______.

6. 某市有50%住户订日报,有65%住户订晚报,有85%住户至少订这两种报纸中的一种,则同时订这两种报纸的住户的百分比是______.
7. 3台机器相互独立运转,设第一、第二、第三台机器不发生故障的概率依次为0.9,0.8,0.7,则这3台机器中至少有1台发生故障的概率是______.
8. 电路由元件A与两个并联的元件B,C串联而成,若A,B,C损坏与否相互独立,且它们损坏的概率依次为0.3,0.2,0.1,则电路断路的概率是______.
9. 甲乙两人投篮,命中率分别为0.7,0.6,每人投3次,则甲比乙进球数多的概率是______.
10. 3人独立破译一密码,他们能单独译出的概率分别为$\frac{1}{5}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,则此密码被译出的概率是______.

二、单项选择题

1. 以A表示事件“甲种产品畅销,乙种产品滞销”,则对立事件$\overline{A}$为 [ ]
A. 甲种产品滞销,乙种产品畅销　B. 甲、乙产品均畅销
C. 甲种产品滞销　D. 甲种产品滞销或乙种产品畅销
2. 设A,B,C是3个事件,与事件A互斥的事件是 [ ]
A. $\overline{A}B+A\overline{C}$　B. $\overline{A(B+C)}$　C. $\overline{ABC}$　D. $\overline{A+B+C}$
3. 设A,B为两个互斥事件,且$P(A)>0$,$P(B)>0$,则下列正确的是 [ ]
A. $P(A|B)=P(A)$　B. $P(B|A)>0$
C. $P(AB)=P(A)P(B)$　D. $P(B|A)=0$
4. 设A_1,A_2,A_3是3个事件,则A_1,A_2,A_3中至少有两个发生的事件为 [ ]
A. $A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$
B. $A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$
C. $U-(A_1+A_2+A_3)$
D. $\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3$
5. 事件A与B相互独立的充要条件为 [ ]
A. $A+B=U$　B. $P(AB)=P(A)P(B)$
C. $AB=\varnothing$　D. $P(A+B)=P(A)+P(B)$
6. 对于任意两个事件A与B,有$P(A-B)$为 [ ]
A. $P(A)-P(B)$　B. $P(A)-P(B)+P(AB)$
C. $P(A)-P(AB)$　D. $P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$
7. 设A与B不相容,$P(A)\neq 0$,$P(B)\neq 0$,则结论肯定正确的是 [ ]
A. $\overline{A}$与$\overline{B}$不相容　B. $P(B|A)>0$
C. $P(AB)=P(A)P(B)$　D. $P(A-B)=P(A)$
8. n张奖券中含有m张有奖的,k个人购买,每人一张,其中至少有一个人中奖的概率是 [ ]
A. $\frac{m}{C_n^k}$　B. $1-\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$　C. $\frac{C_m^1C_{n-m}^{k-1}}{C_n^k}$　D. $\sum_{r=1}^{k}\frac{C_m^r}{C_n^k}$
9. 称A,B,C是相互独立的,如果有 [ ]
A. $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$　B. $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$