

现代控制技术

在经典控制理论中,用传递函数模型来设计和分析单输入单输出系统,但传递函数模型只能反映出系统的输出变量与输入变量之间的关系,而不能了解到系统内部的变化情况。在现代理论中,用状态空间模型来设计和分析多输入多输出系统,便于计算机求解,同时也为多变量系统的分析研究提供了有力的工具。

5.1 采用状态空间的输出反馈设计法

设线性定常系统被控对象的连续状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) & \mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (5.1.1)$$

式中, $\mathbf{x}(t)$ 是 n 维状态向量; $\mathbf{u}(t)$ 是 r 维控制向量; $\mathbf{y}(t)$ 是 m 维输出向量; \mathbf{A} 是 $n \times n$ 维状态矩阵; \mathbf{B} 是 $n \times r$ 维控制矩阵; \mathbf{C} 是 $n \times m$ 维输出矩阵。采用状态空间的输出反馈设计法的目的是:利用状态空间表达式,设计出数字控制器 $D(z)$,使得多变量计算机控制系统满足所需要的性能指标,即在控制器 $D(z)$ 的作用下,系统输出 $\mathbf{y}(t)$ 经过 N 次采样(N 拍)后,跟踪参考输入函数 $r(t)$ 的瞬变响应时间为最小。设系统的闭环结构形式如图 5-1 所示。

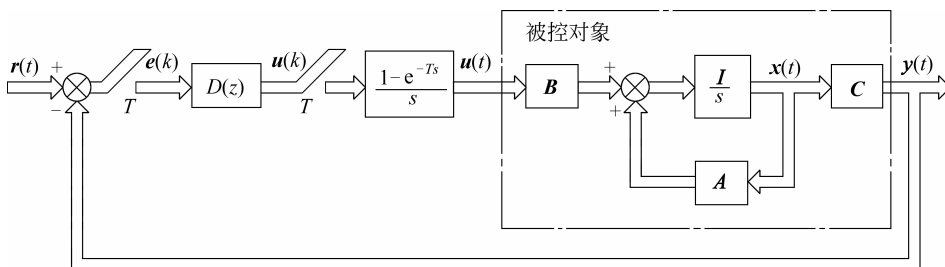


图 5-1 具有输出反馈的多变量计算机控制系统

假设参考输入函数 $r(t)$ 是 m 维阶跃函数向量,即

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 \cdot 1(t) = [r_{01} \ r_{02} \ \cdots \ r_{0m}]^T \cdot 1(t) \quad (5.1.2)$$

先找出在 $D(z)$ 的作用下,输出是最少 N 拍跟踪输入的条件。设计时,应首先把被控对象离散化,用离散状态空间方程表示被控对象。

5.1.1 连续状态方程的离散化

在 $\mathbf{u}(t)$ 的作用下,式(5.1.1)的解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5.1.3)$$

其中, $e^{A(t-t_0)}$ 是被控对象的状态转移矩阵, $\mathbf{x}(t_0)$ 是初始状态向量。若已知被控对象的前面有一零阶保持器,即

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(k), kT \leq t < (k+1)T \quad (5.1.4)$$

其中, T 为采样周期,现在要求将连续被控对象模型连同零阶保持器一起进行离散化。

在式(5.1.3)中,若令 $t_0 = kT, t = (k+1)T$,同时考虑到零阶保持器的作用,则式(5.1.3)变为

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{AT} \mathbf{x}(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)} d\tau \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \quad (5.1.5)$$

若令 $t = kT + T - \tau$,则上式可进一步化为离散状态方程

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F} \mathbf{x}(k) + \mathbf{G} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (5.1.6)$$

$$\mathbf{F} = e^{AT}, \quad \mathbf{G} = \int_0^T e^{A\tau} d\tau \mathbf{B} \quad (5.1.7)$$

式(5.1.6)便是式(5.1.1)的等效离散状态方程。可见离散化的关键,是式(5.1.7)中矩阵指数及其积分的计算。

5.1.2 最少拍无纹波系统的跟踪条件

由式(5.1.1)中的系统输出方程可知, $\mathbf{y}(t)$ 以最少的 N 拍跟踪参考输入 $\mathbf{r}(t)$, 必须满足条件

$$\mathbf{y}(N) = \mathbf{C} \mathbf{x}(N) = \mathbf{r}_0 \quad (5.1.8)$$

仅按条件式(5.1.8)设计的系统,将是有纹波系统,为设计无纹波系统,还必须满足条件

$$\dot{\mathbf{x}}(N) = 0 \quad (5.1.9)$$

这是因为,在 $NT \leq t \leq (N+1)T$ 的间隔内,控制信号 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(N)$ 为常向量,由式(5.1.1)知,当 $\dot{\mathbf{x}}(N) = 0$ 时,则在 $NT \leq t \leq (N+1)T$ 的间隔内 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(N)$, 而且不改变。就是说,若使 $t \geq NT$ 时的控制信号满足

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(N), \quad (t \geq NT) \quad (5.1.10)$$

此时, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(N)$ 且不改变,则使条件式(5.1.8)对 $t \geq NT$ 时始终满足下式

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(N) = \mathbf{r}_0, \quad (t \geq NT) \quad (5.1.11)$$

下面讨论系统的输出跟踪参考输入所用最少拍数 N 的确定方法。式(5.1.8)确定的跟踪条件为 m 个,式(5.1.9)确定的附加跟踪条件为 n 个,为满足式(5.1.8)和式(5.1.9)组成的 $(m+n)$ 个跟踪条件, $(N+1)$ 个 r 维的控制向量 $\{\mathbf{u}(0) \quad \mathbf{u}(1) \quad \cdots \quad \mathbf{u}(N-1) \quad \mathbf{u}(N)\}$

必须至少提供 $(m+n)$ 个控制参数,亦即

$$(N+1)r \geq (m+n) \quad (5.1.12)$$

最少拍数 N 应取满足式(5.1.12)的最小整数。

5.1.3 输出反馈设计法的设计步骤

1. 将连续状态方程进行离散化

对于由式(5.1.1)给出的被控对象的连续状态方程,用采样周期 T 对其进行离散化,通过计算式(5.1.7),可求得离散状态方程为式(5.1.6)。

2. 求满足跟踪条件式(5.1.8)和附加条件式(5.1.9)的 $U(z)$

被控对象的离散状态方程式(5.1.6)的解为

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{F}^{k-j-1} \mathbf{G} \mathbf{u}(j) \quad (5.1.13)$$

被控对象在 N 步控制信号 $\{\mathbf{u}(0) \quad \mathbf{u}(1) \quad \cdots \quad \mathbf{u}(N-1)\}$ 作用下的状态为

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{F}^N \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{F}^{N-j-1} \mathbf{G} \mathbf{u}(j)$$

假定系统的初始条件 $\mathbf{x}(0)=0$,则有

$$\mathbf{x}(N) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{F}^{N-j-1} \mathbf{G} \mathbf{u}(j) \quad (5.1.14)$$

根据条件式(5.1.8),有

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}(N) = \mathbf{C} \mathbf{x}(N) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{C} \mathbf{F}^{N-j-1} \mathbf{G} \mathbf{u}(j)$$

用分块矩阵形式来表示,得到

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{C} \mathbf{F}^{N-j-1} \mathbf{G} \mathbf{u}(j) \\ &= [\mathbf{C} \mathbf{F}^{N-1} \mathbf{G} \quad \mathbf{C} \mathbf{F}^{N-2} \mathbf{G} \quad \cdots \quad \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{G} \quad \mathbf{C} \mathbf{G}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(N-2) \\ \mathbf{u}(N-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

再由条件式(5.1.9)和式(5.1.1)知,有

$$\dot{\mathbf{x}}(N) = \mathbf{A} \mathbf{x}(N) + \mathbf{B} \mathbf{u}(N) = 0$$

将式(5.1.4)代入上式,得

$$\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{A} \mathbf{F}^{N-j-1} \mathbf{G} \mathbf{u}(j) + \mathbf{B} \mathbf{u}(N) = 0$$

或

$$[\mathbf{A}\mathbf{F}^{N-1}\mathbf{G} : \mathbf{A}\mathbf{F}^{N-2}\mathbf{G} : \cdots : \mathbf{A}\mathbf{G} : \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(N-1) \\ \mathbf{u}(N) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.1.16)$$

由式(5.1.15)和式(5.1.16)可以组成确定 $(N+1)$ 个控制序列 $\{\mathbf{u}(0) \quad \mathbf{u}(1) \quad \cdots \quad \mathbf{u}(N-1) \quad \mathbf{u}(N)\}$ 的统一方程组为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{F}^{N-1}\mathbf{G} & : & \mathbf{C}\mathbf{F}^{N-2}\mathbf{G} & : & & : & \mathbf{C}\mathbf{G} & : & \mathbf{0} \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ \mathbf{A}\mathbf{F}^{N-1}\mathbf{G} & : & \mathbf{A}\mathbf{F}^{N-2}\mathbf{G} & : & & : & \mathbf{A}\mathbf{G} & : & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(N-1) \\ \mathbf{u}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.17)$$

若方程(5.1.17)有解,并设解为

$$\mathbf{u}(j) = \mathbf{P}(j) \mathbf{r}_0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (5.1.18)$$

当 $k=N$ 时,控制信号 $u(k)$ 应满足

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(N) = \mathbf{P}(N) \mathbf{r}_0 \quad (k \geq N)$$

这样就由跟踪条件求得了控制序列 $\{\mathbf{y}(k)\}$,其 Z 变换为

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}(k) z^{-k} = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}(k) z^{-k} + \mathbf{P}(N) \sum_{k=N}^{\infty} z^{-k} \right] \mathbf{r}_0 \\ &= \left[\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}(k) z^{-k} + \frac{\mathbf{P}(N) z^{-N}}{1 - z^{-1}} \right] \mathbf{r}_0 \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

3. 求取误差序列 $\{e(k)\}$ 的 Z 变换 $E(z)$

误差向量为

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{r}(k) - \mathbf{y}(k) = \mathbf{r}_0 - \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

假定 $\mathbf{x}(0)=0$,将式(5.1.3)代入上式,得

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{r}_0 - \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{F}^{(k-j-1)} \mathbf{G}\mathbf{u}(j)$$

再将式(5.1.18)代入上式,则

$$\mathbf{e}(k) = \left[\mathbf{I} - \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{F}^{(k-j-1)} \mathbf{G}\mathbf{P}(j) \right] \mathbf{r}_0$$

误差序列 $\{e(k)\}$ 的 Z 变换为

$$\mathbf{E}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{e}(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{e}(k) z^{-k} + \sum_{k=N}^{\infty} \mathbf{e}(k) z^{-k}$$

式中 $\sum_{k=N}^{\infty} \mathbf{e}(k) z^{-k} = 0$,因为满足跟踪条件式(5.1.8)和附加条件式(5.1.9),即当 $k \geq N$ 时误差信号应消失,因此

$$\mathbf{E}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{e}(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\mathbf{I} - \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{F}^{(k-j-1)} \mathbf{G}\mathbf{P}(j) \right] \mathbf{r}_0 z^{-k} \quad (5.1.20)$$

4. 求控制器的脉冲传递函数 $D(z)$

根据式(5.1.19)和式(5.1.20)可求得 $D(z)$ 为

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} \quad (5.1.21)$$

【例 5-1】 设二阶单输入单输出系统,其状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = [0 \quad 1]$, 采样周期 $T = 1\text{s}$, 试设计最少拍无纹波控制器 $D(z)$ 。

【解】 $\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 1 - e^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 \\ 0.632 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}t} dt \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-1} \\ e^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.632 \\ 0.368 \end{bmatrix}$

离散状态方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}u(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

要设计无纹波系统,跟踪条件应满足

$$(N+1)r \geq (m+n)$$

而 $n=2, r=2, m=2$, 因此取 $N=2$ 即可满足上式条件。

由式(5.1.17)可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{F}\mathbf{G} & \mathbf{C}\mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{G} & \mathbf{A}\mathbf{G} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} 0.768 & 0.368 & 0 \\ -0.232 & -0.632 & 1 \\ 0.232 & 0.632 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

进一步得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0) \\ \mathbf{P}(1) \\ \mathbf{P}(2) \end{bmatrix} \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 1.58 \\ -1.58 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}_0$$

$$\mathbf{P}(0) = 1.58, \quad \mathbf{P}(1) = -1.58, \quad \mathbf{P}(2) = 0$$

由式(5.1.19)和 $N=2$ 知:

$$\begin{aligned} U(z) &= \left[\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}(k) z^{-k} + \frac{\mathbf{P}(N) z^{-N}}{1 - z^{-1}} \right] \mathbf{r}_0 = \left[\mathbf{P}(0) + \mathbf{P}(1) z^{-1} + \frac{\mathbf{P}(2) z^{-2}}{1 - z^{-1}} \right] \mathbf{r}_0 \\ &= (1.58 - 1.58 z^{-1}) \mathbf{r}_0 \end{aligned}$$

由式(5.1.20)和 $N=2$ 知:

$$\begin{aligned} E(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[I - \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{F}^{(k-j-1)} \mathbf{G}\mathbf{P}(j) \right] \mathbf{r}_0 z^{-k} = \{ I + [I - \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{P}(0)] z^{-1} \} \mathbf{r}_0 \\ &= (1 + 0.418z^{-1}) \mathbf{r}_0 \end{aligned}$$

所以数字控制器 $D(z)$ 为

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1.58 - 1.58z^{-1}}{1 + 0.418z^{-1}}$$

5.2 采用状态空间的极点配置设计法

在计算机控制系统中,除了使用输出反馈控制外,还较多地使用状态反馈控制,因为由状态输入就可以完全地确定系统的未来行为。图 5-2 给出了计算机控制系统的典型结构。在 5.1.1 节中,讨论了连续的被控对象同零阶保持器一起进行离散化的问题,同时忽略数字控制器的量化效应,则图 5-2 可以简化为如图 5-3 所示的离散系统。

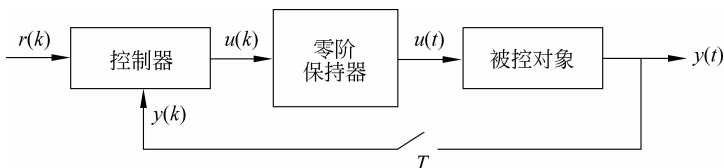


图 5-2 计算机控制系统的典型结构图

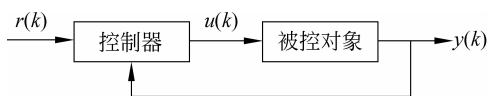


图 5-3 简化的离散系统结构图

下面按离散系统的情况来讨论控制器的设计。本节讨论利用状态反馈的极点配置方法来进行设计控制规律,首先讨论调节系统($r(k)=0$)的情况,然后讨论跟踪系统,即如何引入外界参考输入 $r(k)$ 。

按极点配置设计的控制器通常有两部分组成。一部分是状态观测器,它根据所量测到的输出量 $y(k)$ 重构出全部状态 $\hat{x}(k)$,另一部分是控制规律,它直接反馈重构的全部状态。图 5-4 给出了调节系统的情况(即 $r(k)=0$)。

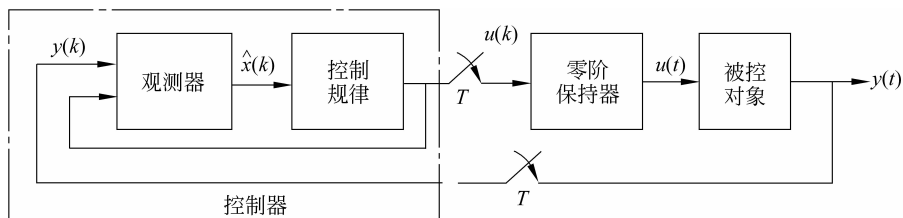


图 5-4 调节系统($r(k)=0$)中控制器的结构

5.2.1 按极点配置设计控制规律

为了按极点配置设计控制规律,暂设控制规律反馈的是实际对象的全部状态,而不是重构的状态,如图 5-5 所示。

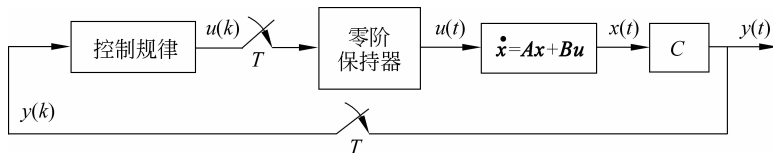


图 5-5 按极点配置设计控制规律

设连续被控对象的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (5.2.1)$$

由第 5.1.1 节知,相应的离散状态方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (5.2.2)$$

且

$$\begin{cases} \mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} \\ \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}t} dt \mathbf{B} \end{cases} \quad (5.2.3)$$

T 为采样周期。若图 5-5 中的控制规律为线性状态反馈,即

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(k) \quad (5.2.4)$$

则要设计出反馈控制规律 L , 以使闭环系统具有所需要的极点配置。

将式(5.2.4)代入式(5.2.2)得到闭环系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{L})\mathbf{x}(k) \quad (5.2.5)$$

显然,闭环系统的特征方程为

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{L}| = 0 \quad (5.2.6)$$

设给定所需要的闭环系统的极点为 $z_i (i=1, 2, \dots, n)$, 则很容易求得要求的闭环系统特征方程为

$$\begin{aligned} \beta(z) &= (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \\ &= z^n + \beta_1 z^{n-1} + \cdots + \beta_n = 0 \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

由式(5.2.6)和式(5.2.7)可知,反馈控制规律 L 应满足如下方程

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{L}| = \beta(z) \quad (5.2.8)$$

若将上式的行列式展开,并比较两边 z 的同次幂的系数,则一共可得到 n 个代数方程。对于单输入的情况, L 中未知元素的个数与方程的个数相等,因此一般情况下可获得 L 的唯一解。而对于多输入的情况,仅根据式(5.2.8)并不能完全确定 L , 设计计算比较复杂,这时需同时附加其他的限制条件才能完全确定 L 。本节只讨论单输入的情况。

可以证明,对于任意的极点配置, L 具有唯一解的充分必要条件是受控对象完全能

控,即

$$\text{rank}[\mathbf{G} \quad \mathbf{FG} \quad \cdots \quad \mathbf{F}^{m-1}\mathbf{G}] = n \quad (5.2.9)$$

这个结论的物理意义也是很明显的,只有当系统的所有状态都是能控的,才能通过适当的状态反馈控制,使得闭环系统的极点配置在任意指定的位置。

由于人们对于 s 平面中的极点分布与系统性能的关系比较熟悉,因此可首先根据相应连续系统性能指标的要求来给定 s 平面中的极点,然后再根据 $z_i = e^{s_i T}$ ($i=1,2,\dots,n$) 的关系求得 z 平面中的极点分布,其中 T 为采样周期。

【例 5-2】 被控对象的传递函数 $G(s) = \frac{1}{s^2}$, 采样周期 $T=0.1\text{s}$, 采用零阶保持器。现要求闭环系统的动态响应相当于阻尼系数为 $\xi=0.5$, 无阻尼自然振荡频率 $\omega_n=3.6$ 的二阶连续系统,用极点配置方法设计状态反馈控制规律 \mathbf{L} , 并求 $u(k)$ 。

【解】 被控对象的微分方程为 $\ddot{y}(t) = u(t)$, 定义两个状态变量分别为 $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t)$ 得到 $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = u(t)$, 故有

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

对应的离散状态方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

代入 $T=0.1\text{s}$ 得

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

且

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$$[\mathbf{G} \quad \mathbf{FG}] = \begin{bmatrix} 0.005 & 0.015 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

因为 $\begin{vmatrix} 0.005 & 0.015 \\ 0.1 & 0.1 \end{vmatrix} \neq 0$, 所以系统能控。

根据要求,求得 s 平面上两个期望的极点为

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n = -1.8 \pm j3.12$$

利用 $z = e^{sT}$ 的关系,可求得 z 平面上的两个期望的极点为

$$z_{1,2} = 0.835e^{\pm j0.312}$$

于是得到期望的闭环系统特征方程为

$$\beta(z) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - 1.6z + 0.7 \quad (5.2.10)$$

若状态反馈控制规律为

$$\mathbf{L} = [L_1 \quad L_2]$$

则闭环系统的特征方程为

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{GL}| &= \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix} [L_1 \quad L_2] \right| \\ &= z^2 + (0.1L_2 + 0.005L_1 - 2)z \\ &\quad + 0.005L_1 - 0.1L_2 + 1 \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

比较式(5.2.10)和式(5.2.11),可得

$$\begin{cases} 0.1L_2 + 0.005L_1 - 2 = -1.6 \\ 0.005L_1 - 0.1L_2 + 1 = 0.7 \end{cases}$$

求解上式,得 $L_1 = 10, L_2 = 3.5$, 即 $\mathbf{L} = [10 \quad 3.5]$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(k) = -[10 \quad 3.5]\mathbf{x}(k)$$

5.2.2 按极点配置设计状态观测器

前面讨论的按极点配置设计控制规律时,假定全部状态均可直接用于反馈,实际上,难以做到,因为有些状态无法量测。因此必须设计状态观测器,根据所量测的输出 $y(k)$ 和 $u(k)$ 重构全部状态。因而实际反馈的是重构状态 $\hat{\mathbf{x}}(k)$, 而不是真实的状态 $\mathbf{x}(k)$, 即 $\mathbf{u}(k) = -\mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}(k)$, 如图 5-2 所示。常用的状态观测器有 3 种: 预报观测器、现时观测器和降阶观测器。

1. 预报观测器

常用的观测器方程为

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}[y(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)] \quad (5.2.12)$$

其中, $\hat{\mathbf{x}}$ 是 \mathbf{x} 的状态重构, \mathbf{K} 为观测器的增益矩阵。由于 $(k+1)$ 时刻的状态重构只用到了 kT 时刻的测量 $y(k)$, 因此称式(5.2.12)为预报观测器, 其结构如图 5-6 所示。

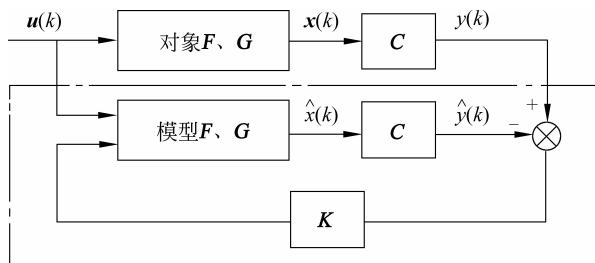


图 5-6 预报观测器

设计观测器的关键在于如何合理地选择观测器的增益矩阵 \mathbf{K} 。定义状态重构误差为

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad (5.2.13)$$

则

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) \\ &= \mathbf{F}x(k) + \mathbf{G}u(k) - \mathbf{F}\hat{x}(k) - \mathbf{G}u(k) - \mathbf{K}[\mathbf{C}x(k) - \mathbf{C}\hat{x}(k)] \\ &= [\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{C}][x(k) - \hat{x}(k)] = [\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{C}]\bar{x}(k) \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

因此,如果选择 \mathbf{K} 使系统式(5.2.14)渐近稳定,那么重构误差必定会收敛到 0,即使系统式(5.2.2)是不稳定的,在重构中引入观测量反馈,也能使误差趋于 0。式(5.2.14)称为观测器的误差动态方程,该式表明,可以通过选择 \mathbf{K} ,使状态重构误差动态方程的极点配置在期望的位置上。

如果出现观测器期望的极点 $Z_i(i=1,2,\dots,n)$,那么求得观测器期望的特征方程为

$$\alpha(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0 \quad (5.2.15)$$

由式(5.2.14)可得观测器的特征方程(即状态重构误差的特征方程)为

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{K}\mathbf{C}| = 0 \quad (5.2.16)$$

为了获得期望的状态重构性能,由式(5.2.15)和式(5.2.16)可得

$$\alpha(z) = |z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{K}\mathbf{C}| \quad (5.2.17)$$

对于单输入单输出系统,通过比较式(5.2.17)两边 Z 的同次幂的系数,可求得 \mathbf{K} 中 n 个未知数。对于任意的极点配置, \mathbf{K} 具有唯一解的充分必要条件是系统完全能观,即

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{F} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{F}^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (5.2.18)$$

2. 现时观测器

采用预报观测器时,现时的状态重构 $\hat{x}(k)$ 只用了前一时刻的输出量 $y(k-1)$,使得现时的控制信号 $u(k)$ 中也包含了前一时刻的输出量。当采样周期较长时,这种控制方式将影响系统的性能。为此,可采用如下的观测器方程

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = \mathbf{F}\hat{x}(k) + \mathbf{G}u(k) \\ \hat{x}(k+1) = \bar{x}(k+1) + \mathbf{K}[y(k+1) - \mathbf{C}\bar{x}(k+1)] \end{cases} \quad (5.2.19)$$

由于 $(k+1)T$ 时刻的状态重构 $\hat{x}(k+1)$ 用到了现时刻的量测量 $y(k+1)$,因此称式(5.2.19)为现时观测器。

由式(5.2.2)和式(5.2.19)可得状态重构误差为

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) \\ &= [\mathbf{F}x(k) + \mathbf{G}u(k)] - \{\bar{x}(k+1) + \mathbf{K}[\mathbf{C}x(k+1) - \mathbf{C}\bar{x}(k+1)]\} \\ &= [\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{F}]\bar{x}(k) \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

从而求得现时观测器状态重构误差的特征方程为

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{K}\mathbf{C}| = 0 \quad (5.2.21)$$

同样,为了获得期望的状态重构性能,可由下式确定 \mathbf{K} 的值

$$\alpha(z) = |z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{K}\mathbf{C}| \quad (5.2.22)$$