

集合与关系

3.1 内容提要

集合与元素 讨论某一类对象时,就把这一类对象的全体称为集合。这些对象称为集合中的元素。

集合的表示 枚举法、描述法和图示法(文氏图)。

集合与元素的关系 元素和集合之间的关系是隶属关系,即属于或不属于,属于记作 $\in$,不属于记作 $\notin$ 。

集合与集合的关系 设 A, B 为集合,如果 B 中的每个元素都是 A 中的元素,则称 B 是 A 的子集。这时也称 B 被 A 包含,或 A 包含 B ,记作 $B \subseteq A$ 。如果 B 不被 A 包含,则记作 $B \not\subseteq A$ 。设 A, B 为集合,如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A = B$ 。如果 A 与 B 不相等,则记作 $A \neq B$ 。相等的符号化表示为 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ 。

全集 包含讨论的所有有意义的物体的全体,记作 E 。

空集 不含任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$ 。空集是一切集合的子集。空集是唯一的。

定理 3.1 空集是一切集合的子集。

幂集 设 A 为集合,把 A 的全部子集构成的集合叫做 A 的幂集,记作 $P(A)$ 。若 A 是 n 元集,则 $P(A)$ 有 2^n 个元素。

集合的广义并 设 A 为集合, A 的元素的元素构成的集合称为 A 的广义并,记为 $\cup A$ 。符号化表示为: $\cup A = \{x \mid \exists z(z \in A \wedge x \in z)\}$ 。

集合的广义交 设 A 为非空集合, A 的所有元素的公共元素构成的集合称为 A 的广义交,记为 $\cap A$ 。符号化表示为: $\cap A = \{x \mid \forall z(z \in A \rightarrow x \in z)\}$ 。

定理 3.2 设 A, B, C 为任意集合,那么下列各式成立。

等幂律 $A \cup A = A \quad A \cap A = A$

交换律 $A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

同一律 $A \cup \emptyset = A \quad A \cap E = A$

零律 $A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup E = E$

分配律	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
吸收律	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
双重否定律	$\sim(\sim A) = A$	$\sim E = \emptyset \quad \sim \emptyset = E$
排中律	$A \cup \sim A = E$	
矛盾律	$A \cap \sim A = \emptyset$	
德·摩根律	$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$	$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$
	$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$	$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
补交转换律	$A - B = A \cap \sim B$	

有序对 由两个元素 x 和 y (允许 $x=y$) 按一定顺序排列成的二元组叫做一个有序对或序偶, 记作 $\langle x, y \rangle$, 其中 x 是它的第一元素, y 是它的第二元素。

笛卡儿积 设 A, B 为集合, 用 A 中元素为第一元素, B 中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合叫做 A 和 B 的笛卡儿积, 记作 $A \times B$ 。笛卡儿积的符号化表示为 $A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}$ 。如果 $|A|=m, |B|=n$, 则 $|A \times B|=mn$ 。

笛卡儿积的运算性质

- (1) 对任意集合 A , 根据定义有 $A \times \emptyset = \emptyset, \emptyset \times A = \emptyset$ 。
- (2) 笛卡儿积运算不满足交换律, 即 $A \times B \neq B \times A$ (当 $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge A \neq B$ 时)。
- (3) 笛卡儿积运算不满足结合律, 即 $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ (当 $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge C \neq \emptyset$ 时)。
- (4) 笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律, 即 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$ 。

- (5) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$ 。

二元关系 如果一个集合满足以下条件之一:

- (1) 集合非空, 且它的元素都是有序对。
- (2) 集合是空集。

则称该集合为一个二元关系, 记作 R 。二元关系也可简称为关系。对于二元关系 R , 如果 $\langle x, y \rangle \in R$, 可记作 xRy ; 如果 $\langle x, y \rangle \notin R$, 则记作 $x \bar{R}y$ 。设 A, B 为集合, $A \times B$ 的任何子集称为从 A 到 B 的二元关系。特别当 $A=B$ 时, 称为 A 上的二元关系。

关系的表示方法

- (1) 列举法: 列举出关系的所有有序对。
- (2) 关系矩阵: 设 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, R 是 A 上的关系, 令

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } x_i R x_j \\ 0 & \text{若 } x_i \bar{R} x_j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

则

$$M_R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

是 R 的关系矩阵, 记作 M_R 。

(3) 关系图: 设 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, R 是 A 上的关系, 令图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中顶点集合 $V = A$, 边集为 E . 对于 $\forall x_i, x_j \in V$, 满足 $\langle x_i, x_j \rangle \in E \Leftrightarrow x_i R x_j$, 称图 G 为 R 的关系图, 记作 G_R .

定义域、值域和域 设 R 是二元关系,

(1) R 中所有的有序对的第一元素构成的集合称为 R 的定义域, 记为 $\text{dom}R$. 表示为:

$$\text{dom}R = \{x \mid \exists y(\langle x, y \rangle \in R)\}$$

(2) R 中所有有序对的第二元素构成的集合称为 R 的值域, 记作 $\text{ran}R$. 表示为:

$$\text{ran}R = \{y \mid \exists x(\langle x, y \rangle \in R)\}$$

(3) R 的定义域和值域的并集称为 R 的域, 记作 $\text{fld}R$. 表示为:

$$\text{fld}R = \text{dom}R \cup \text{ran}R$$

关系的复合运算 设 A, B, C 是三个任意集合, R 是集合 A 到 B 的二元关系, S 是集合 B 到 C 的二元关系, 则定义关系 R 和 S 的合成或复合关系 $R \circ S = \{\langle a, c \rangle \mid a \in A, c \in C \wedge \exists b \in B, \text{使} \langle a, b \rangle \in R \text{ 且} \langle b, c \rangle \in S\}$.

定理 3.3 设 I_A, I_B 为集合 A, B 上的恒等关系, $R = A \times B$, 那么

$$(1) I_A \circ R = R \circ I_B = R$$

$$(2) \emptyset \circ R = R \circ \emptyset = \emptyset$$

定理 3.4 设 R 是 A 到 B 的关系, S 是 B 到 C 的关系, T 是 C 到 D 的关系, 则 $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

定理 3.5 设 F, G, H 是任意关系, 则

$$(1) F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$$

$$(2) (G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$$

$$(3) F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$$

$$(4) (G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$$

关系的逆运算 设 R 是集合 A 到 B 的二元关系, 则定义一个 B 到 A 的二元关系, $R^{-1} = \{\langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R\}$, 称为 R 的逆关系, 记作 R^{-1} .

定理 3.6 设 R 是 A 到 B 的关系, S 是 B 到 C 的关系, 则 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

定理 3.7 设 R 和 S 均是 A 到 B 的关系, 则

$$(1) (R^{-1})^{-1} = R$$

$$(2) (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

$$(3) (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

$$(4) (R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$$

定理 3.8 设 R 是任意的关系, 则

$$\text{dom}R^{-1} = \text{ran}R, \quad \text{ran}R^{-1} = \text{dom}R$$

关系的幂运算 设 R 为 A 上的关系, n 为自然数, 则 R 的 n 次幂定义为:

$$(1) R^0 = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\} = I_A$$

$$(2) R^{n+1} = R^n \circ R$$

定理 3.9 设 A 为 n 元集, R 是 A 上的关系, 则存在自然数 s 和 t , 使得 $R^s = R^t$.

定理 3.10 设 R 是 A 上的关系, $m, n \in \mathbb{N}$, 则

$$(1) R^m \circ R^n = R^{m+n}$$

$$(2) (R^m)^n = R^{mn}$$

定理 3.11 设 R 是 A 上的关系, 若存在自然数 $s, t (s < t)$ 使得 $R^s = R^t$, 则

$$(1) \text{ 对任何 } k \in N \text{ 有 } R^{s+k} = R^{t+k}.$$

$$(2) \text{ 对任何 } k, i \in N \text{ 有 } R^{s+kp+i} = R^{s+i}, \text{ 其中 } p = t - s.$$

$$(3) \text{ 令 } S = \{R^0, R^1, \dots, R^{t-1}\}, \text{ 则对于任意的 } q \in N \text{ 有 } R^q \in S.$$

关系的性质 设 R 为集合 A 上的关系,

$$(1) \text{ 若 } \forall x (x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R), \text{ 则称 } R \text{ 在 } A \text{ 上是自反的}.$$

$$(2) \text{ 若 } \forall x (x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R), \text{ 则称 } R \text{ 在 } A \text{ 上是反自反的}.$$

$$(3) \text{ 若 } \forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R), \text{ 则称 } R \text{ 为 } A \text{ 上的对称关系}.$$

$$(4) \text{ 若 } \forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y), \text{ 则称 } R \text{ 为 } A \text{ 上的反对称关系}.$$

$$(5) \text{ 若 } \forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R), \text{ 则称 } R \text{ 是 } A \text{ 上的传递关系}.$$

定理 3.12 设 R 为 A 上的关系, 则

$$(1) R \text{ 在 } A \text{ 上自反当且仅当 } I_A \subseteq R.$$

$$(2) R \text{ 在 } A \text{ 上反自反当且仅当 } R \cap I_A = \emptyset.$$

$$(3) R \text{ 在 } A \text{ 上对称当且仅当 } R = R^{-1}.$$

$$(4) R \text{ 在 } A \text{ 上反对称当且仅当 } R \cap R^{-1} \subseteq I_A.$$

$$(5) R \text{ 在 } A \text{ 上传递当且仅当 } R \circ R \subseteq R.$$

关系的闭包 设 R 是非空集合 A 上的关系, R 的自反(对称或传递)闭包是 A 上的关系 R' , 使得 R' 满足以下条件:

$$(1) R' \text{ 是自反的(对称的或传递的);}$$

$$(2) R \subseteq R';$$

$$(3) \text{ 对 } A \text{ 上任何包含 } R \text{ 的自反(对称或传递)关系 } R'', \text{ 有 } R' \subseteq R''.$$

定理 3.13 设 R 为 A 上的关系, 则有

$$(1) r(R) = R \cup I_A;$$

$$(2) s(R) = R \cup R^{-1}.$$

$$\text{定理 3.14 设 } R \text{ 为 } A \text{ 上的关系, 则有 } t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n.$$

定理 3.15 设 R 是非空集合 A 上的关系, 则

$$(1) R \text{ 是自反的当且仅当 } r(R) = R.$$

$$(2) R \text{ 是对称的当且仅当 } s(R) = R.$$

$$(3) R \text{ 是传递的当且仅当 } t(R) = R.$$

定理 3.16 设 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的关系, 且 $R_1 \subseteq R_2$, 则

$$(1) r(R_1) \subseteq r(R_2);$$

$$(2) s(R_1) \subseteq s(R_2);$$

$$(3) t(R_1) \subseteq t(R_2).$$

定理 3.17 设 R 是非空集合 A 上的关系,

$$(1) \text{ 若 } R \text{ 是自反的, 则 } s(R) \text{ 与 } t(R) \text{ 也是自反的}.$$

(2) 若 R 是对称的, 则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的。

(3) 若 R 是传递的, 则 $r(R)$ 是传递的。

集合的划分与覆盖 设 A 为非空集合, 若 A 的子集族 $\pi (\pi \subseteq P(A))$, 是 A 的子集构成的集合) 满足下面的条件:

(1) $\emptyset \notin \pi$;

(2) π 中任意两个子集都不相交, 即 $\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$;

(3) π 中所有子集的并是 A , 即 $\bigcup \pi = A$ 。

则称 π 是 A 的一个划分, 称 π 中的元素为 A 的划分块。给定非空集合 A , $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, $T_i \subseteq A$ 且 $T_i \neq \emptyset (i=1, 2, \dots, n)$, $\bigcup T_i = A$, 那么集合 T 称作 A 的一个覆盖。

等价关系 设 R 为非空集合 A 上的关系。如果 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的等价关系。设 R 是一个等价关系, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 称 x 等价于 y , 记作 $x \sim y$ 。

等价类 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 令 $\forall x \in A, [x]_R = \{y | y \in A \wedge x R y\}$, 称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类, 简称为 x 的等价类, 简记为 $[x]$ 。

定理 3.18 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A, [x]$ 是 A 的非空子集。

(2) $\forall x, y \in A$, 如果 $x R y$, 则 $[x] = [y]$ 。

(3) $\forall x, y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$ 与 $[y]$ 不相交。

(4) $\bigcup \{[x] | x \in A\} = A$ 。

商集 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集, 记作 A/R , 即 $A/R = \{[x]_R | x \in A\}$ 。

相容关系 设 R 为非空集合 A 上的关系。如果 R 是自反的, 对称的, 则称 R 为 A 上的相容关系。

相容类 设 R 为集合 A 上的相容关系, 如果 $C \subseteq A$, 如果对于 C 中任意两个元素 x_1, x_2 有 $x_1 R x_2$, 则称 C 是由相容关系 R 产生的相容类。

最大相容类 设 R 为集合 A 上的相容关系, 不能真包含在任何其他相容类中的相容类称作最大相容类。

定理 3.19 设 R 为有限集合 A 上的相容关系, C 是一个相容类, 那么必存在一个最大相容类 C_r , 使得 $C \subseteq C_r$ 。

偏序关系 设 R 为非空集合 A 上的关系, 如果 R 是自反的、反对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的偏序关系。集合 A 和 A 上的偏序关系 $\leq$ 一起叫做偏序集, 记作 $\langle A, \leq \rangle$ 。

可比与不可比 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系, 如果 $a \leq b$ 或 $b \leq a$, 则称 a 和 b 是可比的。如果既没有 $a \leq b$ 也没有 $b \leq a$, 则称 a 和 b 是不可比的。

哈斯图作图法 (1) 以“圆圈”表示元素;

(2) 若 $x < y$, 则 y 画在 x 的上层;

(3) 若 y 覆盖 x , 则连线;

(4) 不可比的元素可画在同一层。

偏序中特殊元素 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, 集合 $B \subseteq A$, 特殊元有

(1) 如存在元素 $b \in B$, 使得 $\forall a \in B$, 均有 $a \leq b$, 则称 b 为 B 的最大元。

(2) 如存在元素 $b \in B$, 使得 $\forall a \in B$, 均有 $b \leq a$, 则称 b 为 B 的最小元。

(3) 若存在元素 $b \in B, \forall a \in B$, 如 $b \leq a$, 则 $a = b$, 称 b 为 B 的极大元。

(4) 若存在元素 $b \in B, \forall a \in B$, 如 $a \leq b$, 则 $a = b$, 称 b 为 B 的极小元。

(5) a 为 B 的上界 $\Leftrightarrow a \in A \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \leq a)$ 。

(6) a 为 B 的下界 $\Leftrightarrow a \in A \wedge \forall x(x \in B \rightarrow a \leq x)$ 。

(7) 如果 C 是 B 的所有上界的集合, 即 $C = \{y | y \text{ 是 } B \text{ 的上界}\}$, 则 C 的最小元 a 称为 B 的最小上界或上确界。

(8) 如果 a 是 B 的所有下界的集合, 即 $C = \{y | y \text{ 是 } B \text{ 的上界}\}$, 则 C 的最大元 a 称为 B 的最大下界或下确界。

定理 3.20 (包含排斥原理) 对有限集合 A 和 B , 有 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 。

3.2 例题精选

例 3.1 判断下列属于和包含关系是否正确。

(1) $\emptyset \subseteq \emptyset$

(2) $\emptyset \in \emptyset$

(3) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

(4) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(5) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

(6) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}\}$

(7) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

(8) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

(9) 若 $a \subseteq A, A \subseteq P(B)$, 则 $a \subseteq P(B)$ 。

(10) 若 $a \in A, A \in P(B)$, 则 $a \in P(B)$ 。

解: (1), (3), (4), (5), (6), (7), (9) 为真, 其余为假。由空集是任何集合的子集, 可知 (1), (3) 为真。判断元素是否属于集合, 是要检查元素作为一个整体是否在集合中出现, 不难判断 (4), (6) 为真。判断集合 $A \subseteq B$, 需要依次检查 A 的每个元素是否在 B 中出现, 不难判断 (5), (7) 为真。根据包含具有传递性, 属于是不能传递的。因此判断 (9) 为真, (10) 为假。另外, 也可以用文氏图或包含的谓词定义来判断。

例 3.2 证明 $(A - B) - C = (A - C) - (B - C) = A - B \cup C$ 。

证明: 证明两个集合相等有三种方法, 利用集合相等的定义、利用集合恒等式以及利用文氏图。本题仅用前两种方法解题。

方法一: 利用集合恒等式。

$$(A - B) - C = (A \cap \sim B) \cap \sim C$$

$$= A \cap (\sim B \cap \sim C)$$

$$= A \cap \sim (B \cup C)$$

$$= A - B \cup C$$

$$(A - C) - (B - C) = (A \cap \sim C) \cap \sim (B \cap \sim C)$$

$$= (A \cap \sim C) \cap (\sim B \cup C)$$

$$= (A \cap \sim C \cap \sim B) \cup (A \cap \sim C \cap C)$$

补交转换

结合律

德·摩根律

补交转换

补交转换

德·摩根律

分配律

$$\begin{aligned}
 &= (A \cap \sim C \cap \sim B) \cup \emptyset && \text{矛盾律、零律} \\
 &= A \cap \sim (B \cup C) && \text{同一律} \\
 &= A - B \cup C && \text{补交转换}
 \end{aligned}$$

方法二：利用集合相等的定义,互为子集则相等。即要证 $A=B$,任取 x ,然后完成下述的推理过程: $x \in A \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in B$ 。

$$\begin{aligned}
 x \in (A - B) - C &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \\
 &\Leftrightarrow x \in A - C \wedge x \notin B \\
 &\Leftrightarrow x \in (A - C) - B \\
 &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \\
 &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \\
 &\Leftrightarrow x \in A - B \cup C \\
 x \in (A - B) - C &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge \\
 &\quad x \notin C \wedge x \in C) \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \notin B \vee x \in C) \\
 &\Leftrightarrow x \in (A - C) \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C) \\
 &\Leftrightarrow x \in A - C \wedge x \notin (B - C) \\
 &\Leftrightarrow x \in (A - C) - (B - C)
 \end{aligned}$$

例 3.3 列出集合 $A = \{2, 3, 4\}$ 上的恒等关系 I_A , 全域关系 E_A , 小于或等于关系 L_A , 整除关系 D_A 。若 $|A| = n$, 则 A 上有多少个不同的二元关系? I_A 中有多少个有序对? E_A 中有多少个有序对?

解: $I_A = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$

$$\begin{aligned}
 E_A = \{ &\langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \\
 &\langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \}
 \end{aligned}$$

$$L_A = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$$

$$D_A = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}$$

根据关系的定义及关系有序对个数知, A 上有 2^{n^2} 个不同的二元关系, I_A 中有 n 个有序对, E_A 中有 n^2 个有序对。

例 3.4 设 $A = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$, $B = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$, 求 $A \cup B, A \cap B, \text{dom } A, \text{dom } B, \text{dom } (A \cup B), \text{ran } A, \text{ran } B, \text{ran } (A \cap B), \text{fld } (A - B), A^{-1}, A \circ B, B^3$ 。

解: 本题涉及的知识点是关系的基本运算。

$$A \cup B = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$$

$$A \cap B = \{\langle 2, 4 \rangle\}$$

$$\text{dom } A = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{dom } B = \{1, 2, 4\}$$

$$\text{dom } (A \cup B) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{ran } A = \{2, 3, 4\}$$

$$\text{ran } B = \{2, 3, 4\}$$

$$\text{ran } (A \cap B) = \{4\}$$

$$A - B = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$$

$$\text{fld}(A - B) = \{1, 2, 3\}$$

$$A^{-1} = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$$

$$A \circ B = \{\langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$$

$$B^3 = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\} \circ B = \{\langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$$

例 3.5 证明关系的包含和相等。

(1) $(A - B) \times (C - D) \subseteq (A \times C) - (B \times D)$ 。

(2) 设 R 是 A 到 B 的关系, S 是 B 到 C 的关系, T 是 C 到 D 的关系, 则 $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ 。

(3) 设 R_1 和 R_2 是 A 上的关系, 证明 $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$ 。

证明: 关系的包含和相等的方法与证明集合的包含和相等类似。

(1) 任取 $(x, y) \in (A - B) \times (C - D) \Rightarrow x \in (A - B) \wedge y \in (C - D)$

(根据笛卡儿积的定义)

$$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (y \in C \wedge y \notin D)$$

$$\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \wedge (x, y) \notin (B \times D)$$

$$\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) - (B \times D)$$

所以 $(A - B) \times (C - D) \subseteq (A \times C) - (B \times D)$ 。

(2) 任取 $\langle x, w \rangle \in ((R \circ S) \circ T) \Leftrightarrow \exists z(\langle x, z \rangle \in R \circ S \wedge \langle z, w \rangle \in T)$ (复合运算的定义)

$$\Leftrightarrow \exists z(\exists y(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in S) \wedge \langle z, w \rangle \in T)$$

$$\Leftrightarrow \exists z \exists y((\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in S) \wedge \langle z, w \rangle \in T)$$

$$\Leftrightarrow \exists y \exists z(\langle x, y \rangle \in R \wedge (\langle y, z \rangle \in S \wedge \langle z, w \rangle \in T))$$

$$\Leftrightarrow \exists y(\langle x, y \rangle \in R \wedge \exists z(\langle y, z \rangle \in S \wedge \langle z, w \rangle \in T))$$

$$\Leftrightarrow \exists y(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, w \rangle \in S \circ T)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, w \rangle \in R \circ (S \circ T)$$

所以 $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$, 即关系的复合运算满足结合律。

(3) 由 $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2, R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$, 由定理 3.16 可知 $r(R_1) \subseteq r(R_1 \cup R_2), r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$, 从而有 $r(R_1) \cup r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$ 。反之, 由 $R_1 \subseteq r(R_1), R_2 \subseteq r(R_2)$, 得 $R_1 \cup R_2 \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$, 又知道 $r(R_1) \cup r(R_2)$ 是自反的, 即 $r(R_1) \cup r(R_2)$ 是包含 $R_1 \cup R_2$ 的自反关系, 根据闭包的最小性, 从而得到 $r(R_1 \cup R_2) \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$ 。根据集合相等的定义, 得到 $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$ 。

例 3.6 分析定义在集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的下列关系具有哪些性质。

(1) $R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$;

(2) $R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$;

(3) $R_3 = \emptyset$;

(4) $R_4 = A \times A$ 。

解: (1) R_1 具有反对称性和传递性。因为 $\langle 2, 2 \rangle \notin R_1$, 所以 R_1 不具有自反性。因为 $\langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \in R_1$, 所以 R_1 不具有反自反性。因为 $\langle 1, 2 \rangle \in R_1, \langle 2, 1 \rangle \notin R_1$, 所以 R_1 不具

有对称性。

(2) R_2 具有自反性、对称性和传递性。

(3) R_3 具有反自反性、对称性、反对称性和传递性。注意,空关系是一个特殊的关系,关于空关系有以下性质:空集上的空关系具有自反性、对称性、反对称性和传递性。非空集合上的空关系具有反自反性、对称性、反对称性和传递性。

(4) R_4 全关系具有自反性、对称性和传递性。

例 3.7 (1) 设 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, 如下定义 A 上的关系 $R: R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod{3}\}$, 其中 $x \equiv y \pmod{3}$ 表示 x 与 y 模 3 相等, 验证 R 为 A 上的等价关系。

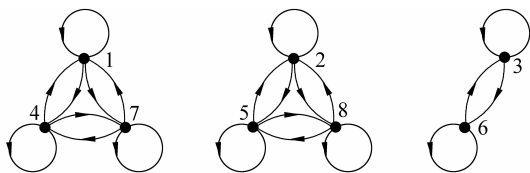
(2) 设 R 是集合 A 上的关系, 令 $S = \{\langle a, b \rangle \mid \exists c \in A, \text{使得 } aRc, cRb\}$ 。证明: 若 R 是 A 上的等价关系, 则 S 也是 A 上的等价关系。

解: (1) 因为 $\forall x \in A$, 有 $x \equiv x \pmod{3}$, 所以关系 R 具有自反性。

$\forall x, y \in A$, 若 $x \equiv y \pmod{3}$, 则有 $y \equiv x \pmod{3}$, 所以关系 R 具有对称性。

$\forall x, y, z \in A$, 若 $x \equiv y \pmod{3}, y \equiv z \pmod{3}$, 则有 $x \equiv z \pmod{3}$, 所以关系 R 具有传递性。由等价关系的定义可知 R 为 A 上的等价关系。

关系 R 的关系图如图所示。



不难看出,上述关系图被分为三个互不相连通的部分。每部分中的数两两都有关系,不同部分中的数则没有关系。每一部分中的所有顶点构成一个等价类: $[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}, [2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}, [3] = [6] = \{3, 6\}$ 。

(2) 证明: 因为 R 是 A 上的等价关系, 所以 R 是自反的、对称的和传递的。

$\forall a \in A$, 因为 R 自反, 所以 $\langle a, a \rangle \in R$ 。取 $c = a, \langle a, a \rangle \in R$, 故 S 是自反的。

$\forall \langle a, b \rangle \in S$, 存在 $c \in A$, 使得 $\langle a, c \rangle \in R, \langle c, b \rangle \in R$ 。因为 R 对称, 所以 $\langle b, c \rangle \in R, \langle c, a \rangle \in R$, 故 S 是对称的。

$\forall \langle a, b \rangle, \langle b, e \rangle \in S$, 存在 $c, d \in A$, 使得 $\langle a, c \rangle \in R, \langle c, b \rangle \in R, \langle b, d \rangle \in R, \langle d, e \rangle \in R$ 。因为 R 传递, 所以 $\langle a, b \rangle \in R, \langle b, e \rangle \in R, \langle a, e \rangle \in R$, 故 S 是传递的。

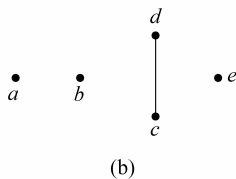
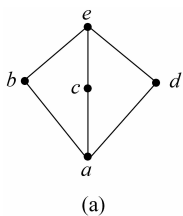
由等价关系的定义, S 也是 A 上的等价关系。

例 3.8 分别画出下列各偏序集 $\langle A, < \rangle$ 的哈斯图, 并找出 A 的极大元、极小元、最大元和最小元。

(1) $A = \{a, b, c, d, e\}, < = \{\langle a, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, e \rangle, \langle c, e \rangle, \langle d, e \rangle\} \cup I_A$

(2) $A = \{a, b, c, d, e\}, < = \{\langle c, d \rangle\} \cup I_A$

解: 偏序集哈斯图作图法: (1) 以“圆圈”表示元素; (2) 若 $x < y$, 则 y 画在 x 的上层; (3) 若 y 覆盖 x , 则连线; (4) 不可比的元素可画在同一层。由此可得哈斯图如下。



其中图(a)的极大元是 e ; 极小元是 a 。最大元是 e ; 最小元是 a 。图(b)的极大元是 a, b, d, e ; 极小元是 a, b, c, e 。没有最大元和最小元。

3.3 习题解答

3.1 判定下列断言的对错。

- (1) $a \in \{\{a\}\}$;
- (2) $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$;
- (3) $\emptyset \in \{a, b, c\}$;
- (4) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$;
- (5) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$;
- (6) $\{\{a\}, 1, 3, 4\} \subset \{\{a\}, 3, 4, 1\}$;
- (7) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$;
- (8) 如果 $A \cap B = B$, 则 $A = E$ 。

解: (1) 错; (2) 对; (3) 错; (4) 对; (5) 对; (6) 错; (7) 对; (8) 错。

3.2 (1) 将“大于 3 而小于或者等于 7 的整数集合”用集合表示出来。

(2) 将“小于 10 的素数”用集合表示出来。

解:

- (1) $\{x | x > 3 \wedge x \leq 7 \wedge x \in \mathbb{Z}\}$ 或 $\{4, 5, 6, 7\}$ 。
- (2) $\{x | x < 10 \wedge x \text{ 是素数}\}$ 或 $\{2, 3, 5, 7\}$ 。

3.3 若 A, B 都是集合, 则 A 能同时既是 B 的元素又是 B 的子集吗? 举例说明。

解: 可以。例如 $A = \{a\}, B = \{\{a\}, a, b, c\}$ 。

3.4 化简下列集合表达式

- (1) $((A \cup B) \cap B) - (A \cup B)$;
- (2) $((A \cup B \cup C) - (B \cup C)) \cup A$;
- (3) $(B - (A \cap C)) \cup (A \cap B \cap C)$;
- (4) $(A \cap B) - (C - (A \cup B))$ 。

解:

- (1) $((A \cup B) \cap B) - (A \cup B) = B - (A \cup B) = B \cap \sim(A \cup B) = B \cap \sim A \cap \sim B = \emptyset$ 。
- (2) $((A \cup B \cup C) - (B \cup C)) \cup A = ((A \cup B \cup C) \cap \sim(B \cup C)) \cup A = A$ 。
- (3) $(B - (A \cap C)) \cup (A \cap B \cap C) = (B \cap \sim(A \cap C)) \cup (B \cap (A \cap C)) = B \cap E = B$ 。
- (4) $(A \cap B) \cap \sim(C \cap \sim(A \cup B)) = (A \cap B) \cap (\sim C \cup A \cup B) = ((A \cap B) \cap \sim C) \cup ((A \cap B) \cap (A \cup B)) = ((A \cap B) \cap \sim C) \cup (A \cap B) = A \cap B$ 。