

第一章

数学模型和数学建模

第一节 数学模型

数学模型(Mathematical Model)是用数学符号、数学式子、程序、图形等对实际问题本质属性的抽象而又简洁的刻画。它或能解释某些客观现象,或能预测未来的发展规律,或能为控制某一现象的发展提供某种意义上的最优策略或较好策略。简言之,数学模型是用数学术语对部分现实世界的描述。

其实早在学习初等数学时,就已经有数学模型了,只是为了着重讲解某个知识点,往往人为地设置一些简化的问题,然后进行求解。例如,初等数学中一个简单的应用题:用铁皮做罐头盒,每张铁皮单独制盒身 25 个,单独制盒底 40 个。一个盒身与两个盒底配套,现有 36 张铁皮,这些铁皮恰好能做多少罐头盒?

根据建立数学模型的目的和问题的背景,对上述问题做出必要的简化假设(比如不考虑实际的裁剪法,仅从计算面积出发考虑问题);用字母表示待求的未知量(x 代表罐头盒数);利用相应的面积知识规律(盒身面积是一张铁皮的 $\frac{1}{25}$,盒底面积是一张铁皮的 $\frac{1}{40}$),列出数学式子(一元一次方程 $(\frac{1}{25} + \frac{1}{40} \times 2)x = 36$,也就是一个简单的数学模型);求出这个数学模型的答案($x = 400$);用这个答案解释原问题(36 张铁皮恰好能做 400 个罐头盒);最后可以用实际来验证上述结果。从这个问题中可以看到,其简化的假设对问题的解决非常有帮助,而实际问题往往要考虑更多的因素,例如具体的裁剪法对问题的影响等,真实的数学模型往往要复杂很多。

第二节 数学建模

一、什么是数学建模

数学建模(Mathematical Modeling)是指对现实世界的一特定对象,为了某一特定目的,做出一些重要的简化和假设,运用适当的数学工具得到一个数学结构,用它来解释特定现象的现实性态,预测对象的未来状况,提供处理对象的优化决策和控制,设计满足某种需要的产品等。

二、数学建模的一般步骤

数学建模面临的实际问题是多种多样的,建模的目的不同,分析的方法不同,采用的

数学工具不同,所得模型的类型也不同,我们不能指望归纳出若干条准则,适用于一切实际问题的数学建模方法。建模要经过哪些步骤并没有一定的模式,下面介绍的步骤是建模的一般过程,具有一定的普遍意义,如图 1-1 所示。

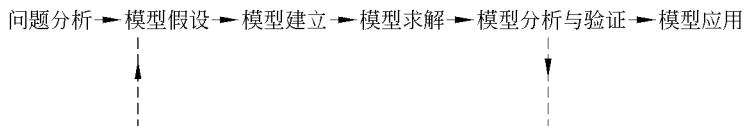


图 1-1 数学建模步骤示意图

1. 问题分析

了解问题的实际背景,明确建模目的,搜集必要的信息如现象、数据等,尽量弄清对象的主要特征,通过深入调查研究,虚心向实际工作者请教,或利用现有的网络资源等,尽量掌握第一手资料。将现实问题“翻译”成抽象的数学问题,形成一个比较清晰的“问题”。其“翻译”的过程是数学建模非常关键的一步,对于复杂的数学模型往往不能一次到位,需要对问题进行深入研究,在研究过程中不停地加深理解,明确目标,其实质是对实际问题的数学提炼。

2. 模型假设

根据前面对实际问题的研究,抓住问题的本质,忽略次要因素,作出必要的、合理的简化假设,确定模型所涉及的主要因素并抽象为变量,对于建模的成败这是非常重要和困难的一步。假设不合理或太简单,会导致模型过于粗糙,得出的结果是错误的或无用的;假设过分详细,试图把复杂对象的众多因素都考虑进去,会使模型建立者很难或无法继续下一步的工作。常常需要在合理与简化之间作出恰当的折中。这种恰当的折中需要模型建立者具有丰富的想象力、洞察力、判断力以及经验。有能力的模型建立者往往会在问题的研究过程中,不停地修正模型的假设,找到假设的平衡点,使其符合问题研究的本质。

3. 模型建立

根据所做的假设,用数学的语言、符号描述对象的内在规律,建立包含常量、变量等的数学模型,如优化模型、微分方程模型、评价模型、图论模型、概率模型等。这里除了需要一些相关学科的专门知识外,还常常需要较为广阔的应用数学方面的知识。要理解数学运算的本质,任何一种数学计算方法,例如导数、积分,都需要应用者对其运算本质的理解,绝不是仅仅学会了计算,这对于数学建模者来说尤为重要。纯粹的计算也许在做一些纯粹的数学练习题时还有一定的用处,但在建模过程中,没有实际意义的计算是没有办法使用的,只有知道数学运算的本质,才能合理地使用这些数学运算方法。数学建模是变通的、灵活的,数学思想的应用是其真正的灵魂。同时建模时还应遵循的一个原则是:尽量采用简单的数学工具,因为你的模型总是希望更多的人了解和使用,而不是只供少数专家欣赏。

4. 模型求解

模型可以采用解方程、画图形、优化方法、数值计算、统计分析等各种数学方法,特别是数学软件进行求解。近年来计算机技术高速发展,数学软件和网络的功能日益强大,



MATLAB、Mathmatic、Lingo、Lindo 等数学软件慢慢地进入了学生的课堂,学生的计算机应用能力越来越强,对数学软件的接受能力也非常好。让学生从繁琐、精细的数学计算中走出来,着重于数学的应用,也是数学学习的一个方向。

5. 模型分析与检验

对求解结果进行数学上的分析,如结果的误差分析、统计分析、模型对数据的灵敏性分析、对假设的强健性分析等,是数学建模的重要组成部分。另外,把求解和分析结果“翻译”回到实际问题,与实际的现象、数据比较,检验模型的合理性和适用性。这一步对于模型是否真的有用非常关键,要以严肃认真的态度对待。如果结果与实际不符,问题常常出在模型假设上,应该修改、补充假设,重新建模,如图 1-1 中的虚线所示,有些模型要经过几次反复,不断完善,直到检验结果满意。

6. 模型应用

数学模型是将现象加以归纳、抽象的产物,它源于现实,又高于现实。只有当数学建模的结果经受住现实对象的检验时,才可以用来指导实际。

应当指出,并不是所有问题的建模都要经过这些步骤,有时各步骤之间的界限也不那么分明,建模时不要拘泥于形式上的按部就班。另外,需要指出,本书的重点不在于介绍现实问题的数学模型(Mathematical Model)是什么样子(其数学的理论性相对比较强),而是要讨论建立数学模型(Mathematical Modeling)的全过程,也就是主要侧重于模型的应用。建立数学模型下面简称为数学建模或建模。

第三节 数学建模竞赛介绍

美国大学生数学建模竞赛(MCM/ICM),是一项国际级的竞赛项目,为现今各类数学建模竞赛之鼻祖。MCM/ICM 是 Mathematical Contest in Modeling 和 Interdisciplinary Contest in Modeling 的缩写,即“数学建模竞赛”和“交叉学科建模竞赛”。MCM 始于 1985 年,ICM 始于 2000 年,由 COMAP(the Consortium for Mathematics and Its Application,美国数学及其应用联合会)主办,竞赛以三名学生组成一个队,赛前有指导教师培训。赛题来源于实际问题,比赛时要求每个队就选定的赛题在连续三天的时间里写出论文。数学建模竞赛宗旨是鼓励大学生对范围并不固定的各种实际问题予以阐明、分析并提出解法,通过这样一种方式鼓励师生积极参与并强调实现完整的模型构造的过程。这项赛事自诞生起就引起了越来越多的关注,逐渐有其他国家的高校参加。我国自 1989 年起陆续有高校参加美国大学生数学建模竞赛。

1992 年起我国开始举办自己的大学生数学建模竞赛,是全国高校规模最大的课外科技活动之一,并成为教育部组织的全国大学生十项学科竞赛之一。中国大学生数学建模竞赛(China Undergraduate Mathematical Contest in Modeling,CUMCM)主办机构是教育部高等教育司和中国工业与应用数学学会(CSIAM)。全国大学生数学建模竞赛是全国高校规模最大的课外科技活动之一。竞赛宗旨:创新意识、团队精神、重在参与、公平竞争。竞赛时间为每年 9 月第二个星期五至第三个星期一(共 3 天,72 小时)举行,竞赛

面向全国大专院校的学生,不分专业。竞赛分甲、乙两组,甲组竞赛所有大学生均可参加,乙组竞赛只有大专生(包括高职高专生)可以参加。竞赛开始后,赛题将公布在指定的网址供参赛队下载,参赛队在规定时间内完成答卷,并准时交卷。竞赛期间参赛队员可以使用各种图书资料、计算机和软件,可在互联网上查询资料。

竞赛题目一般来源于工程技术和科学管理方面经过适当简化加工的实际问题(社会热点问题),不要求参赛者预先掌握深入的专门知识,只需要学过高等学校的数学课程。题目有较大的灵活性供参赛者发挥其创造能力。参赛者应根据题目要求,完成一篇包括模型的假设、建立和求解、计算方法的设计和计算机实现、结果的分析和检验、模型的改进等方面的论文(即答卷)。竞赛评奖以假设的合理性、建模的创造性、结果的正确性和文字表述的清晰程度为主要标准。

数学建模竞赛与普通数学竞赛有很大的区别。在竞赛的宗旨上,普通数学竞赛考查参赛者掌握数学理论的水平以及解决理论问题的技能技巧;而数学建模竞赛考查参赛者利用数学及各科知识、计算机等技术手段解决实际问题的综合能力,鼓励大学生参与解决实际问题的全过程。在竞赛的内容上,普通数学竞赛题目为数学理论题;而数学建模竞赛题目来自于实际问题,且问题涉及的领域很广泛。在竞赛的形式上,普通数学竞赛为闭卷,个人独立解题,题目一般不止1个;而数学建模竞赛为开卷,可使用任何非生命的资源和团体,题目只有1个。在答卷评阅上,普通数学竞赛的答案是唯一的;而数学建模竞赛允许有不同的答案,着重建模思想及实际眼光。

第四节 数学建模需要的能力

数学建模,对于那些初次接触的人来说,总是充满了畏惧心理,对自身的能力没有充分的认识,不知道自己应该具备什么条件,才能够学习数学建模这门“深奥”的学问,能够参加数学建模竞赛。其实在前面的介绍中,我们已经提到,简单的数学建模在初中数学中就有,数学建模并不可怕。学习数学建模者,一方面,可以补充一些相关的数学知识和一些成熟的经典数学模型,这将在我们后面的各个章节中安排;另一重要方面,在学习知识的同时,一定要注意自身各种能力的培养,这是数学建模倡导的,更是它有别于纯粹的数学研究的地方。下面我们提出几种能力的要求,希望学习者在学习过程中努力提高。

1. 应用数学进行分析、推理和计算的能力

要有应用数学的意识、数学的眼光,要有从数学的角度观察事物、阐释现象、分析问题的能力。传统数学教育的内容选择往往“理论”占多数,比较强调数学的逻辑性、严谨性、系统性和理论性,重复严谨的数学概念,讲授主要为解题服务的技巧,学习者的应用数学意识比较淡薄,在学习与社会实践中缺乏用数学的意识,当然无从谈起用数学解决问题。数学建模是应用数学的学习,其主要是培养学习者应用数学的能力,帮助学习者学会用数学知识分析问题,使复杂问题简单化、抽象内容形象化、动态内容可视化。

2. 用数学语言表达实际问题及用普通人能理解的语言表达数学结果的能力

数学语言是伴随着数学自身的发生和发展而逐渐成长起来的,是储存、传承和加工数

学思想信息的工具,具有抽象性、准确性、简约性和形式化等特点。数学中的文字语言不是自然语言文字的简单移植或组合,而是经过一定的加工、改造、限定、精确化而形成的。并且这些语言具有数学学科特指的确定的语义,常以数学概念、术语的形式出现。缺乏数学语言表达(即数学化)能力的学习者不能把自然语言形式转化为符号语言或数学表示形式,就没有办法利用数学工具去解决问题。另一方面,数学的计算结果,还需要“翻译”成普通人能够理解的语言,其应用才能为大多数人接受。作为数学建模的学习者应当具有这种“翻译”能力。

3. 应用计算机及相应数学软件的能力

数学建模是一门内容很丰富的课程,它把很多相关的学科与数学都联系在一起。数学模型的求解往往需要借助计算机来实现。数学软件可以使冗繁变为简洁高效,使得学习者敢想、敢试、敢创新,也使学习者将有限的精力从运算中解放出来,更多的时间拿来思考问题和建模。从另一个角度上说,避开了枯燥的运算,使得数学学习变得生动精彩。

4. 文献检索能力,自学能力,组织、协调、管理能力

目前网上资源非常丰富,很多数学知识可以从大量的网上精品课程中学习,学习者也可以通过百度、谷歌等搜索引擎对需要的知识进行搜索;还可以通过万方、维普、CNKI等网上数据库,进行文献的检索。合理地利用网上资源,对于数学建模者来说是非常重要的。数学建模所涉及的知识面非常广泛,对于学习者来说,掌握所有的相关知识几乎是不可能的,其自我学习的能力能够帮助学习者对检索的知识进行消化和吸收,最终为己所用。另一方面,数学建模实践,特别是数学建模竞赛不是依赖一人的力量可以完成的,团队的协作能力起着至关重要的作用。良好的组织、协调、管理能力能使团队根据工作任务,对资源进行分配,同时控制、激励和协调群体活动,使之相互融合,从而实现目标。

5. 创造力、想象力、联想力和洞察力

数学建模的过程是一个创新的过程,数学建模强调的是获取新知识的能力,是解决问题的过程,而不是知识与结果。数学建模不同于理论数学,其对实际问题的研究往往并不存在所谓的标准答案,随着对问题的深入理解,解决问题将是一个不断创新的过程。让学生去探讨一个非常实际的问题,学生会有浓厚的兴趣,其自主的创新能力将得到很好的培养。想象力指人们在原有知识的基础上,将新感知的形象与记忆中的形象相互比较、重新组合、加工处理,创造出新的形象,是一种形象思维活动。洞察力指人们在充分占有资料的基础上,经过初步分析能迅速抓住主要矛盾,舍弃次要因素,简化问题的层次,对可以用哪些方法解决面临的问题,以及不同方法的优劣作出判断的能力。除了想象、洞察这些属于形象思维、逻辑思维范畴的能力之外,直觉和灵感,也就是联想力往往也起着不可忽视的作用。

每个人的能力是有限的,从大学生数学建模竞赛的角度上说,竞赛是一个团队的合作过程,有时个人能力的不足是可以通过团队的协作来补足的。三人一组的竞赛小组,三个人是可以分工合作的,例如一个参赛者有较强的数学分析、推理、证明的能力,一个参赛者有较强的计算机软件应用能力,一个参赛者有较好的语言表达能力,往往这样的团队组合通过密切的配合可以凭借优势互补,依靠团队的力量攻克很多模型。



第五节 数学建模需要的基本知识

一、必要的数学理论知识

学习数学建模者,需要有一定的初等数学基础,同时需要掌握高等数学中的一些知识,比如极限、导数、定积分、空间解析几何、多元微积分、微分方程、级数等;还需要掌握线性代数中的一些知识,比如行列式、矩阵的计算、线性方程组的求解、特征值与特征向量等;并对图论、概率等方面的知识要有一定的了解。数学建模涉及的数学知识面比较广,这些数学知识有一部分以前是接触过的,也有些以前从未接触过。对于这部分从未接触过的知识,可以在学习某类模型需要时,采用教师简单讲解,学生自学的方式去了解、掌握。

二、简单的数学模型

本书主要针对大专类学生,特别是高等职业教育类的学生。这类学生数学基础相对比较薄弱,进入大学后,高等数学的学时比例也不高,学习的内容也非常有限。本书希望通过介绍一些常见模型,例如初等模型、数学规划模型、微分方程模型、离散模型、概率模型、统计回归模型等,通过这些模型的讲解,树立起基本的数学建模思想。

三、计算机的使用

数学建模需要各种计算机技术手段的配合,如查阅各种文献资料、数学符号的输入、文档排版、使用各种数学软件包等。这里简要介绍几种数学软件包。

1. MATLAB

MATLAB 是矩阵实验室(Matrix Laboratory)之意。除具备卓越的数值计算能力外,它还提供了专业水平的符号计算、文字处理、可视化建模仿真和实时控制等功能。MATLAB 的基本数据单位是矩阵,它的指令表达式与数学工程中常用的形式十分相似,MATLAB 拥有数百个内部函数的主包和三十几种工具包(Toolbox)。开放性使 MATLAB 广受用户欢迎,除内部函数外,所有 MATLAB 主包文件和各种工具包都是可读、可修改的文件,用户通过对源程序的修改或加入自己编写程序构造新的专用工具包。

2. Mathematica

Wolfram Research 是高科技计算机运算(Technical Computing)的先驱,由复杂理论的发明者 Stephen Wolfram 成立于 1987 年,在 1988 年推出高科技计算机运算软件 Mathematica。Mathematica 是一套整合数字以及符号运算的数学工具软件,提供了全球超过百万的研究人员、工程师、物理学家、分析师以及其他技术专业人员容易使用的顶级科学运算环境。目前已在学术界、电机、机械、化学、土木、信息工程、财务金融、医学、物理、统计、教育出版、OEM 等领域广泛使用。Mathematica 具有高阶的演算方法、丰富的数学函数库和庞大的数学知识库,同时具有非常强的运算能力。



3. LINDO 和 LINGO

LINDO(Linear, Interactive, and Discrete Optimizer)主要用于解决线性规划(Linear Programming, LP)和整数规划(Integer Programming, IP)问题。LINGO 主要用于求解非线性规划(NLP)和二次规则(QP)。其中 LINDO、LINGO 学生版可解决最多达 300 个变量和 150 个约束的规则问题,并且容易阅读、了解和修改。

第二章

初等模型

初等模型是指用较简单初等的数学方法建立起来的数学模型。对于数学建模,判断一个模型的优劣完全在于模型的正确性和应用效果,而不在于采用多少高深的数学知识。在同样的应用效果下,用初等方法建立的数学模型可能更优于用高等方法建立的数学模型。本章利用初等数学的方法,通过几个实例给出数学建模的基本过程。

第一节 椅子问题

一、问题的提出

日常生活中经常碰到这样一个事实,把椅子放在不平的地面上,通常只有三只脚着地,放不稳。然而只需稍挪动几次,就可以使四只脚同时着地,放稳了。这个看来似乎与数学无关的现象,你能用数学语言给以描述并用数学工具来证实吗?

二、问题的解决

1. 问题假设

- (1) 椅子四条腿一样长,椅脚与地面接触处可视为一个点,四脚的连线呈正方形。
- (2) 地面高度是连续变化的,沿任何方向都不会出现间断(没有像台阶那样的情况),即地面可视为数学上的连续曲面。
- (3) 对于椅脚的间距和椅腿的长度而言,地面是相对平坦的,使椅子在任何位置至少有三只脚同时着地。

2. 问题分析

模型构成的中心问题是用数学语言把椅子四只脚同时着地的条件和结论表示出来。

首先要用变量表示椅子的位置。注意到椅脚连线呈正方形,以中心为对称点,正方形绕中心的旋转正好代表了椅子位置的改变,于是可以用旋转角度这一变量表示椅子的位置。在图 2-1 中椅脚连线为正方形 $ABCD$, 对角线 AC 与 x 轴重合, 椅子绕中心点 O 旋转角度 θ 后, 正方形 $ABCD$ 转至 $A'B'C'D'$ 的位置, 所以对角线 AC 与 x 轴的夹角 θ 表示了椅子的位置。

其次要把椅脚着地用数学符号表示出来。如果用某个

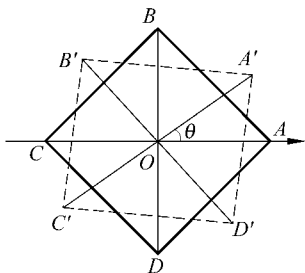


图 2-1



变量表示椅脚与地面的垂直距离,那么当这个距离为零时,就是椅脚着地了。椅子在不同位置时椅脚与地面的距离不同,所以这个距离是椅子的位置变量 θ 的函数。

虽然椅子有四只脚,因而有四个距离,但是由正方形的中心对称性,只要设两个距离函数就行了。记 $A、C$ 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$, $B、D$ 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$,则 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 皆大于等于零。由假设(2)知, $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 都是连续函数;由假设(3)知,椅子在任何位置至少有三只脚着地;所以对于任意的 θ , $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 中至少有一个为零。当 $\theta=0$ 时,不妨设 $g(\theta)=0, f(\theta)>0$ 。这样,改变椅子的位置使四脚同时着地,就归结为证明如下的数学命题:

已知 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 是 θ 的连续函数,对于任意的 $\theta, f(\theta) \cdot g(\theta)=0$, 且 $g(0)=0, f(0)>0$, 则必存在 θ_0 , 使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$ 。

可以看到,引入了变量 θ 和函数 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 后,就把模型的假设条件和椅脚同时着地的结论用简单、精确的数学语言表述出来了,从而构成了这个实际问题的数学模型。

3. 模型求解

上述命题有多种证明方法,这里只介绍其中的一种。

将椅子旋转 $90^\circ\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 对角线 AC 与 BD 的位置互换, 由 $g(0)=0, f(0)>0$ 知, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 。

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$, 则 $h(0)>0, h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ 。由 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的连续性知, $h(\theta)$ 也在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续。根据闭区间上连续函数的零点定理知, 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内必存在一点 θ_0 , 使得 $h(\theta_0)=0$, 即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$ 。又因为 $f(\theta_0) \cdot g(\theta_0)=0$, 所以 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$ 。

由于这个问题非常直观和简单,模型的分析 and 检验就略去了。这个模型的巧妙之处在于用一元变量 θ 表示了椅子的位置,用 θ 的两个函数表示了椅子的四脚与地面的距离。至于利用正方形的中心对称性以及旋转 90° 并不是本质的东西。

思考: 学习者可以考虑椅子的四脚连线呈长方形的情形。

第二节 银行借贷问题

一、问题的提出

随着人们生活水平的提高,同样也随着房价的不断上升,人们开始向银行申请个人住房贷款。其还款方式有以下两种。

- (1) 等本不等息递减还款法: 即每月还贷本金相同,利息逐月减少。
- (2) 等额本息还款法: 即每月以相等的额度平均偿还贷款本息。

请你分析这两种还贷方式的利弊。

二、问题的解决

设贷款 20 万元,分 30 年还清,年利率为 5.04%(即月利率 0.42%)。

1. 第一种还款方法

每月还本金 $\frac{200\,000}{30 \times 12} = 555.56$ 元,而第一个月需要利息为 $200\,000 \times 0.0042 = 840$ 元,

第一个月需还总额为 1395.56 元。

第二个月还本金 555.56 元,还息为 $(200\,000 - 555.56) \times 0.0042 = 837.67$ 元,总额为 1393.23 元。

每月还款额公式为:

$$\text{每月还款额} = \frac{\text{贷款本金}}{\text{还款期数}} + (\text{贷款本金} - \text{已还本金}) \times \text{月利率}$$

最后一个月还款仅为 $555.56 + 555.56 \times 0.0042 = 557.89$ 元。可以计算按此种还款方式累计还款总额 351 620 元,还款总利息为 151 620 元。

2. 第二种还款方式

为方便计算,设贷款本金为 a_0 ,月利率为 r ,第 n 个月后欠款金额为 a_n ,每月还款额度为 x ,则第一个月后欠款额为欠款总额 $a_0(1+r)$ 减去已还额度 x 。各月的欠款金额如下:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0(1+r) - x \\ a_2 &= a_1(1+r) - x \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2}(1+r) - x \\ a_n &= a_{n-1}(1+r) - x \end{aligned}$$

数列的后一项减前一项,依次可得:

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= (a_1 - a_0)(1+r)^0 \\ &\vdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= (a_1 - a_0)(1+r)^{n-2} \\ a_n - a_{n-1} &= (a_1 - a_0)(1+r)^{n-1} \end{aligned} \quad (*)$$

此(*)式表明数列 $\{a_n - a_{n-1}\}$ 是以 $a_1 - a_0$ 为首项, $1+r$ 为公比的等比数列。

将此 n 个式子相加可得

$$a_n - a_0 = (a_1 - a_0) \frac{1 - (1+r)^n}{1 - (1+r)} = (a_1 - a_0) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

故有

$$a_n = a_0 + (a_1 - a_0) \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (2-1)$$

若 n 为还贷期数, n 个月后已全部还清,欠款金额应为 0 元。为了求出每月的平均还款额度 x ,令 $a_n = 0$,将 $a_1 = a_0(1+r) - x$ 代入式(2-1),则可得

$$x = a_0 r \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$



即每月还款额公式为:

$$\text{每月还款额} = \text{贷款本金} \times \text{月利率} \times \frac{(1 + \text{月利率})^{\text{还款期数}}}{(1 + \text{月利率})^{\text{还款期数}} - 1} \quad (2-2)$$

按上述本金 $a_0 = 200\,000$, 月利率 $r = 0.0042$, 还款期数 $30 \times 12 = 360$, 代入式(2-2)得

$$x = 200\,000 \times 0.0042 \times \frac{(1 + 0.0042)^{360}}{(1 + 0.0042)^{360} - 1} = 1078.54$$

累计还款总额为 388 274.4 元, 还息总额 188 274.4 元。

第一种方法(等额本金)这种还款方式是前期还款压力比较大, 后期还款压力小, 这种还款方式最省利息。第二种方法(等额本息)这种还款方式是每月的还款额相等, 还款压力相对较小, 但是缴的利息较多。从银行的角度说, 等额本金还款法, 由于顾客一开始就多还本金, 所以越往后所占银行本金越少, 因而所产生的利息也少。而等额本息还款法则不同, 开始还的贷款本金较少, 占用银行资金相对也较多, 所以利息也会相应增加。看来贷款买房还有学问呢。

思考: 学习者还可以利用本题的模型, 假设提前还款, 两种还款方式所还的本息总额又各会是多少呢? 对买购房者选择贷款是否会有影响呢?

第三节 双层玻璃的功效

一、问题的提出

现在有很多建筑物的窗户大多采用双层玻璃, 即窗户装两层玻璃且中间留有一定空隙(如图 2-2(a)所示), 两层厚度为 d 的玻璃夹着一层厚度为 l 的空气, 这样是为了隔热和保暖, 即减少室内向室外的热量流失。我们要建立一个模型来描述热量通过窗户的传导(即流失)过程, 并将双层玻璃窗与用同样材料做成的单层玻璃窗(如图 2-2(b)所示玻璃窗厚度为 $2d$)的热量传导进行对比, 对双层玻璃能够减少多少热量损失给出定量分析结果。

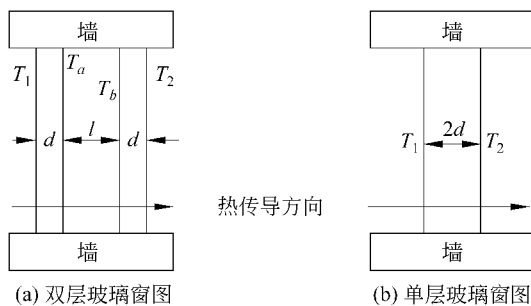


图 2-2 玻璃窗模型

二、问题的解决

1. 模型假设

(1) 热量的传播过程只有传导, 没有对流, 即假定窗户密封性能很好, 两层玻璃之间

的空气是不流动的。

(2) 室内温度 T_1 和室外温度 T_2 保持不变,热传导过程已处于稳定状态,即沿热传导方向,单位时间通过单位面积的热量是常数。

(3) 玻璃材料均匀,热传导系数是常数。

2. 模型的建立

在上述假设下热传导过程按以下物理定律:对于厚度为 d 的均匀介质,两侧温度差为 ΔT ,则单位时间由高温一侧向低温一侧通过单位面积的热量 Q 与 ΔT 成正比,与 d 成反比,即

$$Q = k \frac{\Delta T}{d} \quad (k \text{ 为热传导系数}) \quad (2-3)$$

记双层窗内层玻璃的外侧温度为 T_a ,外层玻璃的内侧温度为 T_b ,玻璃的热传导系数为 k_1 ,空气的热传导系数为 k_2 ,由式(2-3)得单位时间单位面积的热量传导(即热量流失)为

$$Q_1 = k_1 \frac{T_1 - T_a}{d} = k_2 \frac{T_a - T_b}{l} = k_1 \frac{T_b - T_2}{d} \quad (2-4)$$

由式(2-4)中消去 T_a 、 T_b ,可得

$$Q_1 = \frac{k_1(T_1 - T_2)}{d(s+2)} \quad (2-5)$$

其中, $s = h \frac{k_1}{k_2}$, $h = \frac{l}{d}$ 。

对于厚度为 $2d$ 的单层玻璃,容易写出其热量传导为

$$Q_2 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{2d} \quad (2-6)$$

两者之比为

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{2}{s+2} \quad (2-7)$$

显然 $Q_1 < Q_2$,也即双层玻璃的热量损失较少。

为了得到更具体的结果,我们查得常用玻璃的热传导系数 $k_1 = 4 \times 10^{-3} \sim 8 \times 10^{-3} (\text{J} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s} \cdot \text{K})$,而不流通干燥空气的热传导系数 $k_2 = 2.5 \times 10^{-4} (\text{J} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s} \cdot \text{K})$,于是 $\frac{k_1}{k_2} = 16 \sim 32$ 。

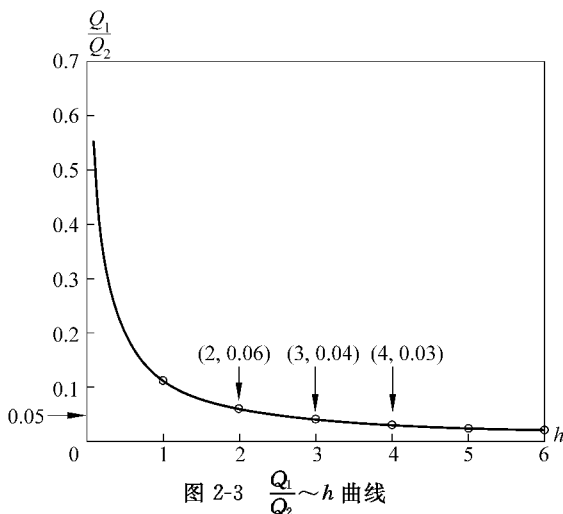
在分析双层玻璃窗比单层玻璃窗可减少多少热量损失时,我们作最保守估计,即取 $\frac{k_1}{k_2} = 16$,由式(2-5)、式(2-7)可得

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{8h+1}, \quad h = \frac{l}{d} \quad (2-8)$$

比值 $\frac{Q_1}{Q_2}$ 反映了双层玻璃窗在减少热量损失上的功效,它只与 $h = \frac{l}{d}$ 有关,图 2-3 给出了

$\frac{Q_1}{Q_2} \sim h$ 的曲线。当 h 增加时, $\frac{Q_1}{Q_2}$ 迅速下降;而当 h 超过一定值(如 $h > 4$)后 $\frac{Q_1}{Q_2}$ 下降速度变缓,可见 h 不宜选择过大。

这个模型具有一定的应用价值,制作双层玻璃窗虽然工艺复杂会增加一些费用,但它



减少的热量损失却是相当可观的,通常建筑范围要求 $h = \frac{l}{d} \approx 4$ 。按照这个模型 $\frac{Q_1}{Q_2} \approx \frac{3}{100}$, 即双层玻璃窗比同样多的玻璃材料制成的单层玻璃窗节约热量 $\frac{97}{100}$ 左右。不难发现, 所以有如此高的功效主要是由于层间空气的极低的热传导系数 k_2 , 而这要求空气是干燥、不流通的。作为模型假设的这个条件在实际环境下当然不可能完全满足, 所以事实上双层窗户的功效会比上述结果差一些, 但总体来看双层窗户的功效会比单层窗户好很多。

第四节 人造卫星测控站的优化分布模型

一、问题的提出

地面测控站的主要任务是测量和控制人造卫星的姿态和轨道运动, 测量人造卫星的各种工程参数和环境参数, 对人造卫星实施各种功能状态控制。与广播卫星的遥测遥控跟踪系统相结合, 测控人造卫星的轨道位置和姿态, 对人造卫星实施各种功能和状态的切换。

这种测控是航天系统中一个非常重要的环节。理想的状况是对人造卫星进行全程跟踪测控。地面测控站只能观测到所在点切平面以上的空域, 且在与地平面夹角 3° 的范围内测控效果不好, 实际上每个测控站的测控范围只考虑与地平面夹角 3° 以上的空域。在一个人造卫星的运行过程中, 往往需要多个测控站联合完成测控任务。

在所有测控站都与人造卫星的运行轨道共面的情况下, 至少应该建立多少个测控站才能对其进行全程跟踪测控?

二、问题的解决

所有人造卫星的运行轨道平面都通过地心。为使问题简单化, 不妨假设地球是球形的, 人造卫星的运行轨道是圆形的。根据题意, 地面监控站与人造卫星运行轨

道共面,如图 2-4 所示,其中内圆表示的是地球表面,外圆为人造卫星或飞船的运行轨道, O 为地球的球心, A 为地面一测控站。

此题要求全程测控且测控站的数量最少,即要使每个测控站所测控到的范围都尽可能大。我们以其运行轨道上的任意一点 P 入手分析,当分散在两侧的两个测控站的监测交点恰好与此点重合时,恰好能保证这两个测控站都发挥了它们的最大测控范围。如果测控交点的高度低于此点所在的运行轨道时,两个测控站监控的范围就产生重叠效应;相反,当交点高于此点所在的运行轨道时,会造成测控盲区,致使有一段轨道因为落于两测控交点的下方而未被测控到。显然此问题与人造卫星轨道至地表的高度有关(不妨设为 h),可以通过求出每个测控站测控范围的夹角 β ,从而利用一周 2π 与 β 之比求解出需要建立多少个测控站。

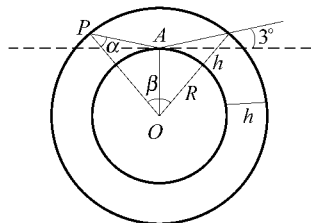


图 2-4

由图 2-3 可知,利用正弦定理可得

$$\frac{h+R}{\sin(\angle PAO)} = \frac{R}{\sin \alpha}$$

已知地球半径 $R=6400$ km, $\angle PAO=90^\circ+3^\circ=93^\circ$, 可解得

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{6391}{h+6400}\right)$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2} &= \frac{87^\circ}{180^\circ}\pi - \arcsin\left(\frac{6391}{h+6400}\right) \\ \Rightarrow \beta &= \frac{174^\circ}{180^\circ}\pi - 2\arcsin\left(\frac{6391}{h+6400}\right) \end{aligned}$$

利用 β 求解 N 值

$$N = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\frac{174^\circ}{180^\circ}\pi - 2\arcsin\left(\frac{6391}{h+6400}\right)}$$

测控站建立的数目是与轨道距地表的高度 h 有关的一个函数。若以“神州”七号飞船为研究对象,此时 $h=343$ km,可以得到 $N=11.54$,即在讨论“神州”七号飞船时需要建立 12 个测控站。

此题是在地面测控站与人造卫星的运行轨道共面的前提下,就问题进行研究的。实际共面的假设仅适用于一种情况,即当人造卫星运行轨道与赤道的倾角等于 0° 时(此时人造卫星的运行轨道称为赤道轨道)。当人造卫星的运行轨道与赤道的倾角大于 0° 时,由于地球的自转,人造卫星在运行过程中相继两圈的经度有一些差异,这就使地面测控站与人造卫星的运行轨道不再共面,问题也就变得复杂了很多,学习者可以自行思考。

第五节 公平的席位分配问题

一、问题的提出

席位分配在社会活动中经常遇到,如:人大代表、职工代表、学生代表的名额分配,其他物质资料的分配等。某学院有甲、乙、丙三个系,设 20 个学生代表席位,而甲、乙、丙系现有的学生人数见表 2-1。

表 2-1

系名	甲	乙	丙	总数
学生数	100	60	40	200

问:应如何合理分配各系的学生代表席位?

二、问题的解决

通常分配结果的公平与否以每个代表席位所代表的人数相等或接近来衡量。目前沿用的惯例分配方法为按比例分配方法,即

$$\text{某单位席位分配数} = \text{某单位人数占总人数比例} \times \text{总席位}$$

因此最初学生人数及学生代表席位分配见表 2-2。

表 2-2

系名	甲	乙	丙	总数
学生数	100	60	40	200
学生人数比例	100/200	60/200	40/200	
席位分配	10	6	4	20

三、问题的拓展

如果按上述公式参与分配的一些单位席位分配数出现小数,假设先按席位分配数的整数分配席位,余下席位按所有参与席位分配单位中小数的大小依次分配。这种分配方法公平吗?下面来看一个学院在分配学生代表席位中遇到的问题。

若由于一些原因,出现学生转系情况,各系学生人数及学生代表席位变为表 2-3。

表 2-3

系名	甲	乙	丙	总数
学生数	103	63	34	200
学生人数比例	103/200	63/200	34/200	
按比例分配席位	10.3	6.3	3.4	20
按惯例席位分配	10	6	4	20



由于总代表席位为偶数,使得在解决问题的表决中有时出现表决平局现象而达不成一致意见。为改变这一情况,学院决定再增加一个代表席位,总代表席位变为 21 个。重新按惯例分配席位,见表 2-4。

表 2-4

系名	甲	乙	丙	总数
学生数	103	63	34	200
学生人数比例	103/200	63/200	34/200	
按比例分配席位	10.815	6.615	3.57	21
按惯例席位分配	11	7	3	21

这个分配结果出现增加一席后,丙系比增加席位前少一席的情况,这使人觉得席位分配明显不公平。这个结果也说明按惯例分配席位的方法有缺陷。因此需要尝试建立更合理的分配席位方法,解决上面代表席位分配中出现的 unfair 问题。

先讨论由两个单位公平分配席位的情况,假设两个单位的情况如表 2-5 所示。

表 2-5

单位	人数	席位数	每席代表人数	单位	人数	席位数	每席代表人数
A	p_1	n_1	p_1/n_1	B	p_2	n_2	p_2/n_2

要公平,应该有 $\frac{p_1}{n_1} = \frac{p_2}{n_2}$,但这一般不成立。注意到等式不成立时有:

① 若 $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}$,则说明单位 A 吃亏(即对单位 A 不公平);

② 若 $\frac{p_1}{n_1} < \frac{p_2}{n_2}$,则说明单位 B 吃亏(即对单位 B 不公平)。

因此可以考虑用算式 $p = \left| \frac{p_1}{n_1} - \frac{p_2}{n_2} \right|$ 来作为衡量分配不公平程度,不过此公式有不足之处(绝对数的特点),如:

某两个单位的人数和席位为 $n_1 = n_2 = 10$, $p_1 = 120$, $p_2 = 100$,算得 $p = 2$ 。

另两个单位的人数和席位为 $n_1 = n_2 = 10$, $p_1 = 1020$, $p_2 = 1000$,算得 $p = 2$ 。

虽然在两种情况下都有 $p = 2$,但显然第二种情况比第一种公平。

下面采用相对标准,对公式给予改进。定义席位分配的相对不公平标准公式:

若 $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}$,记 $r_A(n_1, n_2)$ 为对 A 的相对不公平值,则

$$r_A(n_1, n_2) = \frac{\frac{p_1}{n_1} - \frac{p_2}{n_2}}{\frac{p_2}{n_2}} = \frac{p_1 n_2}{p_2 n_1} - 1$$

若 $\frac{p_1}{n_1} < \frac{p_2}{n_2}$,记 $r_B(n_1, n_2)$ 为对 B 的相对不公平值,则



$$r_B(n_1, n_2) = \frac{\frac{p_2}{n_2} - \frac{p_1}{n_1}}{\frac{p_1}{n_1}} = \frac{p_2 n_1}{p_1 n_2} - 1$$

对某方的相对不公平值越小,某方在席位分配中越有利,因此可以用使相对不公平值尽量小的分配方案来减少分配中的不公平。

确定分配方案:使用不公平值的大小来确定分配方案,不妨设 $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}$,即对单位 A 不公平,再分配一个席位时,A 与 B 的关系可能有:

- ① $\frac{p_1}{n_1+1} > \frac{p_2}{n_2}$,说明此一席给 A 后,对 A 还不公平;
- ② $\frac{p_1}{n_1+1} < \frac{p_2}{n_2}$,说明此一席给 A 后,对 B 不公平;
- ③ $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2+1}$,说明此一席给 B 后,对 A 不公平;
- ④ $\frac{p_1}{n_1} < \frac{p_2}{n_2+1}$,不可能。

上面的分配方法在第①和第③种情况下可以确定新席位应分配给 A,但在第②种情况时不好确定新席位的分配。用相对不公平值的公式来决定席位的分配,对于新的席位分配,若有

$$r_B(n_1+1, n_2) < r_A(n_1, n_2+1) \quad (2-9)$$

则表示对 A 的相对不公平,所以增加的一席应给 A,反之应给 B。对不等式(2-9)进行简单处理,可以得出对应不等式

$$\frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)} < \frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)}$$

引入公式

$$Q_k = \frac{p_k^2}{(n_k+1)n_k}$$

于是知道增加的席位分配可以由 Q_k 的最大值决定,且它可以推广到多个组的一般情况。这里把这种用 Q_k 的最大值决定席位分配的方法称为 **Q 值法**。

对多个组(m 个组)的席位分配 Q 值法可以描述为:

- ① 先计算每个组的 Q 值: $Q_k (k=1, 2, \dots, m)$ 。
- ② 求出其中最大的 Q 值 Q_i (若有多个最大值任选其中一个即可)。
- ③ 将席位分配给最大 Q 值 Q_i 对应的第 i 组。

表 2-4 问题中先按应分配的整数部分分配,余下的部分按 Q 值分配。整数名额共分配了 19 席,具体为:

甲	10.815	$n_1=10$
乙	6.615	$n_2=6$
丙	3.570	$n_3=3$

对第 20 席的分配,计算 Q 值

$$Q_1 = \frac{103^2}{10 \times 11} = 96.45; \quad Q_2 = \frac{63^2}{6 \times 7} = 94.5;$$

$$Q_3 = \frac{34^2}{3 \times 4} = 96.33$$

因为 Q_1 最大, 因此第 20 席应该给甲系。

对第 21 席的分配, 计算 Q 值

$$Q_1 = \frac{103^2}{11 \times 12} = 80.37; \quad Q_2 = \frac{63^2}{6 \times 7} = 94.5;$$

$$Q_3 = \frac{34^2}{3 \times 4} = 96.33$$

因为 Q_3 最大, 因此第 21 席应该给丙系。

最后的席位分配为:

甲: 11 席 乙: 6 席 丙: 4 席

Q 值法解决了利用分配单位中小数的大小依次分配而产生的明显不公平问题。另外, 此题若一开始就用 Q 值分配, 以 $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ 逐次增加一席, 也可以得到同样的结果。

习 题

1. 某公司有 50 套公寓出租, 当租金定为每月 180 元时会全部租出; 当租金每月增加 10 元时, 就有一套公寓租不出去, 而租出去的房子每月需花费 20 元整修维护费。

(1) 建立总收入与租金之间的数学模型。

(2) 当租金多少时可获得最大利润?

2. 某不动产商以 5% 的年利率借得贷款, 然后又将此款贷给顾客, 并假设他能贷出的款额与贷出的利率的平方成反比(若利率太高无人借贷)。

(1) 建立年利率与利润间的数学模型。

(2) 当以多大的年利率贷出时, 能获得最大利润?

3. (订货存货问题) 企业为了获得最大利润, 希望降低订货与库存的费用, 为了使订货与库存费用之和最小, 应何时订货? 订多少最合适?

4. (生产计划问题) 某工厂生产甲、乙两种产品, 甲产品每生产一件需消耗黄铜 2 kg (3 天)、两个外协件, 每件可获利润 60 元。乙产品每生产一件需消耗黄铜 4 kg (1 天), 不需外协件, 每件可获利润 30 元。该厂每月可供生产的黄铜 320 kg, 总共 180 天, 外协件 100 个, 问怎样安排生产才能使工厂的利润最高?

5. 两个加油站坐落在同一条公路的两旁, 彼此竞争非常激烈。于是甲加油站突然贴出“降价销售”广告, 以吸引更多的顾客, 获得更多的利润。这样造成乙加油站的顾客明显减少。乙加油站为了挽回损失而采取对策, 决定马上降价。问如何确定合适的价格, 既可同甲站竞争, 又可获得尽可能高的利润?

6. 为了及时有序地疏散一座大楼内人员, 以避免造成不必要的损失, 现将进行一次紧急疏散人员演习。请对人员、撤离线路、需多长时间能疏散完毕等问题进行分析(考虑一座教学楼 4 间教室的学生们全部疏散到室外所需的时间)。