第1章

体系的几何组成分析

用各种结点将杆件连接起来所组成的体系称为**杆件体系**。不发生几何形状与位置变化的体系才能作为常规的工程**结构**使用。结构的几何组成方式不同还将影响其力学性能和分析方法。因此，在分析结构的受力、变形等之前，必须首先了解常规结构的几何组成方式，即对结构进行几何组成分析。

实际结构中的构件在外界因素作用下都是要变形的，但是因为变形都很微小，做体系的几何组成分析时可以忽略其变形，因而所有构件在本章将均视为**刚体**(rigid body)。

1.1 基本概念

1.1.1 几何不变体系与几何可变体系

在忽略杆件微小变形的前提下，几何形状及位置都不能发生变化的杆件体系称为**几何不变体系**(geometrically stable system)，如图 1-1(a)所示。而几何形状或位置都有可能发生变化的体系则称为**几何可变体系**(geometrically unstable system)，如图 1-1(b)、(c)、(d)所示。

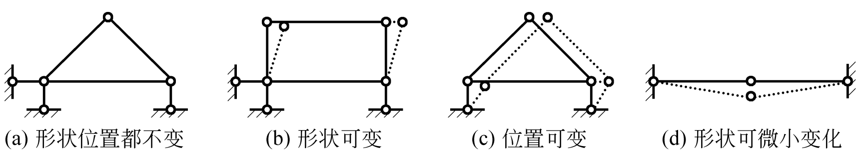


图 1-1 杆件体系

几何可变体系又可分为**常变体系**(frequentation unstable system)和**瞬变体系**(instantaneous unstable system)。如图 1-1(b)、(c)所示体系从机械运动角度看，均属“四连杆机构”，可以发生有限的位移，称为常变体系；图 1-1(d)所示体系，杆件处在水平位置时有运动趋势，但在发生微小位移后又不能继续

运动,称为**瞬变体系**。

只有几何不变体系才能作为常规的工程结构。几何可变体系只能在特定荷载下保持平衡,在一般荷载作用下均将发生运动,因此几何可变体系不能作为常规的工程结构。

1.1.2 自由度

自由度(degree of freedom)是指确定体系位置所需的独立坐标数,通常记作 n。

根据上述定义,图 1-2 所示的平面上一个自由点 A,其独立的坐标数为 2,因此,其自由度为 $n=2$;一个平面自由刚体 AB 的独立坐标数为 3(A 点的两个坐标和一个转角),因此,其自由度为 $n=3$。

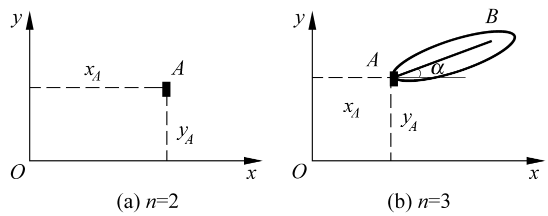


图 1-2 自由点与自由刚体的自由度

1.1.3 刚片和约束

刚片(plane rigid body) 几何形状不变的平面物体称为**刚片**。刚片可以是杆、由杆组成的结构或支撑结构的基础,如图 1-3(a)所示。需要指出的是:图 1-3(b)所示的刚片Ⅱ与图 1-3(a)中的刚片Ⅱ比较,二者的可变性及与其他部分的连接方式相同,但形状和组成不同。作体系几何组成分析时,二者可以等价替换而不影响分析结果。

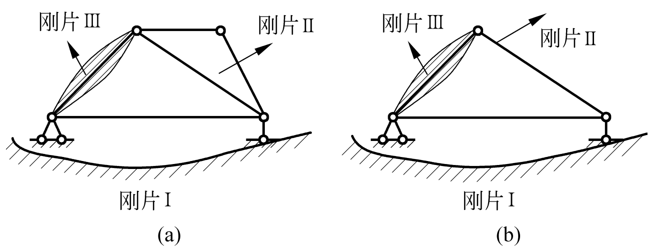


图 1-3 刚片

约束　凡能减少体系自由度的装置称为**约束**(constraint)(也称为**联系**)。能减少 s 个自由度的装置就称为有 s 个约束或 s 个联系。

体系的各杆件之间、体系与基础之间都需要通过结点、支座相互联系起来,这些都是约束。

常见的约束有:

(1) **单铰**(simple hinge)　仅连接两个刚片(或杆件,因为杆件也是刚片)的铰链称为单铰,如图 1-4(a)所示。若图中的单铰 A 不存在,两个刚片有 6 个自由度;加铰后,确定体系位置只需 4 个坐标,如:x_A、y_A、φ_1、φ_2,即这个单铰能减少两个自由度。因此一个单铰相当于两个约束。

(2) **链杆**(connection link)　两端用铰与其他体系相连的杆件。实际中,常把在两点用铰与其他体系相连的无多余约束刚片简化成连接两个铰的链杆。

图 1-4(b)中的 12 杆即为链杆。如图 1-4(b)所示分析,它只能减少一个自由度,故一根链杆为一个约束。

(3) **单刚结点**(simple rigid joint)　仅连接两个刚片的刚结点。图 1-4(c)所示的 B 处即为单刚结点,它能减少三个自由度,所以单刚结点有三个约束。任一杆段均可视为由两段杆刚结而成,因而杆中任意截面处均可视为有三个约束。

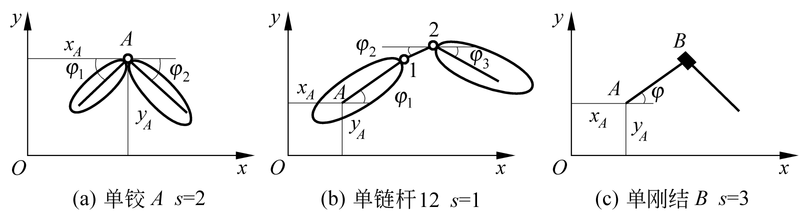


图 1-4　约束

单铰、链杆和单刚结点从运动的可能性或从所提供的约束方面考虑,可以如图 1-5 和图 1-6 所示互相代替,也即双向箭头(⇔)所表示的是相互可以替换的。例如图 1-5(a)相交两链杆等价于一个单铰;图 1-6 所示的单刚结点等价于不全平行、不交于一点的三根链杆或一个单铰和一根链杆等。图 1-5(c)所示的延长线相交的两根链杆使得他们所连接的刚片在当前位置只能发生绕 O 点的转动,其作用相当于在 O 点的一个单铰,称其为**虚铰**(virtual hinge)。相对于虚铰,图 1-5(a)所示单铰称为**实铰**(real hinge)。但是虚铰和实铰也是有区别的,实铰的转动中心是固定的,虚铰的转动中心不一定是固定的,因此虚铰也称为瞬铰,只是瞬间相当于在此处有铰的作用。

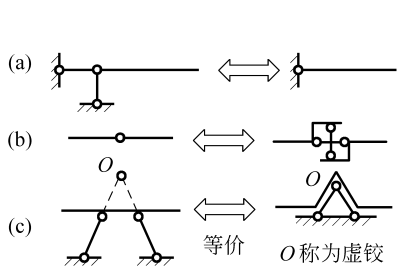


图 1-5 铰与链杆的关系

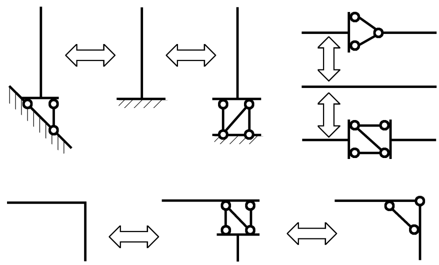


图 1-6 刚结与链杆的关系

1.1.4 必要约束和多余约束

根据对自由度的影响,体系中的约束可分为两类:

(1) 除去该约束后,体系的自由度将增加,这类约束称为**必要约束**(necessary constraint)。图 1-7(a)中体系除去 A 支座水平链杆后,原来的体系变为图 1-7(b)所示的可变体系,因此支座水平链杆 A 是必要约束。

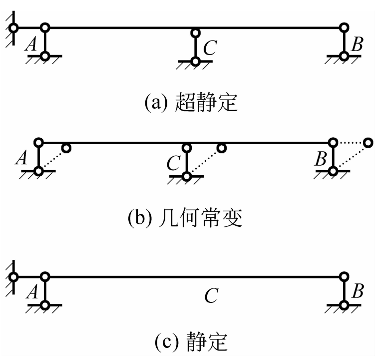


图 1-7 多余约束和必要约束

(2) 除去该约束后,体系的自由度不变,这类约束称为**多余约束**(superfluous constraint)。图 1-7(a)中的体系,除去竖向链杆 C 后,变成图 1-7(c)所示体系,自由度不变,因此链杆 C 是多余约束。

在有多余约束的体系中,哪些约束是多余约束并不唯一。例如在图 1-7(a)所示之体系中,若将 B、C 链杆看作必要的,则 A 支座竖向链杆是多余的;若将 A 处竖向链杆与 B 链杆看成必要的,则 C 链杆就是多余的。

若一个几何不变体系中无多余约束,则称其为**无多余约束几何不变体系**。反之称为**有多余约束几何不变体系**。

1.1.5 静定结构和超静定结构

几何不变体系在荷载作用下可维持平衡,从而可作常规结构用。当仅由静力平衡方程即**可确定全部**约束力和内力时,称为静定结构(statically determinate structure)。反之,**不能全部确定**的称为超静定结构(statically indeterminate structure)。

结构是静定的还是超静定的与其是否有多余约束有关。第 4 章中将介绍解超静定结构的力法，此时必须准确地判断结构多余约束的数量和位置。

一个无多余约束的平面几何不变体系在任意荷载作用下，若取体系中的每个刚片作为隔离体，则可建立的独立的平衡方程个数为 $3\times N$（N 为刚片数）；体系中的约束总数也为 $3\times N$，约束力数与独立的平衡方程数相等，约束力可全部确定。然后，利用截面法由平衡条件即可确定内力。因此，**无多余约束的几何不变体系是静定结构**，如图 1-8(b)所示。

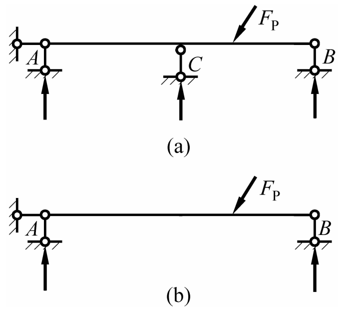


图 1-8　静定结构与超静定结构

有多余约束的几何不变体系中的约束数多于可建立的独立平衡方程的个数，仅由平衡方程不可能确定所有约束力。因此，**有多余约束的几何不变体系是超静定结构**，如图 1-8(a)所示。

静定结构与超静定结构的受力分析方法是不同的，因此对结构进行受力、变形分析时，首先应该确定它属于哪种结构。而这个问题要由本章知识来解决。

1.2　静定结构的组成规则

静定结构是构成超静定结构的基础，在静定结构上增加约束即可构成超静定结构。熟练掌握静定结构，即几何不变体系的组成规则，不仅可以确定一个结构是静定结构还是超静定结构，而且也可以确定超静定结构中哪些约束是多余的。后一点是第 4 章介绍的力法分析过程中的关键一步。

1.2.1　静定结构组成规则

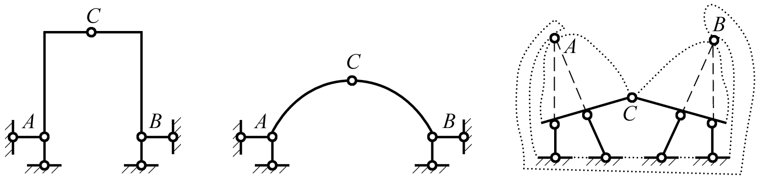
众所周知，当三条边能组成三角形时，其形状是唯一的，这是静定结构组成规则的基本出发点。由此基本点出发，可得如下静定结构的组成规则：

规则 1　三刚片规则

三个本身无多余约束的刚片用**三个不共线的单铰**两两相连，则组成的体系为静定结构，即无多余约束的几何不变体系。根据这一规则可构造出如图 1-9(a)、(b)、(c)所示的静定结构。它们统称为**三铰结构**。

需要注意的是：

(1) 刚片的形状是可以任意转换的(与其他部分连接的位置和形式不能



(a) 三铰刚架　(b) 三铰拱　(c) 有虚铰情况

图 1-9　三铰结构

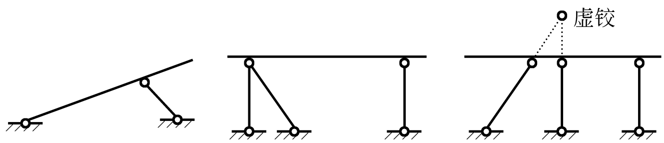
变),将地基变形,如图 1-9(c)所示体系,则该体系可看成由 A、B 处两虚铰及 C 处实铰连接的三刚片。

(2) 若三个单铰共线,为瞬变体系,如图 1-1(d)所示。

规则 2　两刚片规则

将三刚片规则中的任意一个刚片替换成链杆,即可变成两刚片规则。规则的叙述改为:两个本身无多余约束的刚片用**一个单铰和一个不通过该铰的链杆**相连,则组成的体系为静定结构,即无多余约束的几何不变体系。

根据这一规则构造出的静定结构如图 1-10(a)、(b)、(c)所示,称为单体或联合结构。当刚片为一直杆时称为梁式结构。



(a) 一铰一杆　(b) 三杆情况　(c) 一虚铰一杆

图 1-10　单体结构

需要注意的是:

(1) 当进一步将单铰用两链杆代替时,规则叙述改为:两个本身无多余约束的刚片用**三个既不平行也不交于一点的链杆**相连,则组成的体系为静定结构,即无多余约束的几何不变体系。如图 1-10(b)、(c)所示。

若链杆的延长线通过铰,则所组成的体系为瞬变体系。图 1-11 所示体系即为瞬变体系。

(2) 对两刚片三杆的情况,请读者自行分析**不满足既不平行也不交于一点**时的结论。

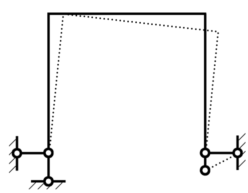


图 1-11　瞬变体系

规则 3　二元体规则

定义:彼此用**单铰**相连的两无多余约束刚片,各自**只**在另一个位置以铰与其他物体相连,且这三

个铰不共线，这样的装置称为二元体。

图 1-12(a)所示的刚片Ⅰ、刚片Ⅱ与单铰 A 构成一个二元体。图 1-12(b)中因为铰 A 不是单铰，刚片Ⅰ、刚片Ⅱ与铰 A 就不是二元体；图 1-12(c)中刚片Ⅰ虽然在远端与另一物体用铰相连，但在中间还与其他物体相连，这时刚片Ⅰ、刚片Ⅱ与铰 A 也不是二元体。

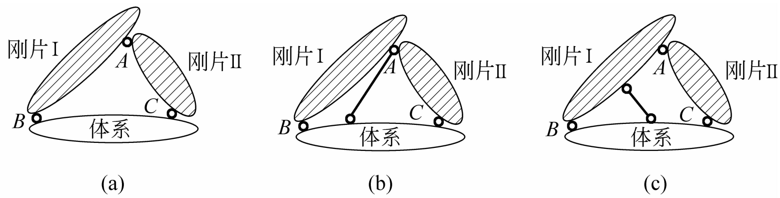


图 1-12　二元体和非二元体

基于二元体的定义，二元体规则可叙述为：**在任意一个体系上加二元体或减二元体都不会改变体系的几何组成**。这可以这样理解：如果体系是不变的，则将二元体的两杆视为刚体，在体系上加二元体后，由三刚片规则可知，新体系一定是不变的。而如果体系原来就是可变的，原体系的自由度大于零，因为在其上加二元体增加了一个铰结点和两根链杆，一个点有两个自由度，而两根链杆又剥夺两个自由度，可见加二元体并不能减少体系的自由度，所以新体系自由度仍然大于零，仍然是可变的。减去二元体情况与此类似。

利用二元体规则，可在一个按上述规则构成的静定结构基础上，通过增加二元体组成新的静定结构，如此组成的结构称为**主从结构**(principal and subordinate structure)或基附型结构。最先构建的基础静定部分称为主结构或**基本部分**(essential portion)，后增加的二元体部分称为从结构或**附属部分**(subsidiary portion)。图 1-13 所示结构均为主从结构。需要指出的是，此类结构的组成有先后次序，如图 1-13(a)所示结构，先构造 ABC，然后加上 DEF，前者是基本部分，后者则为附属部分。

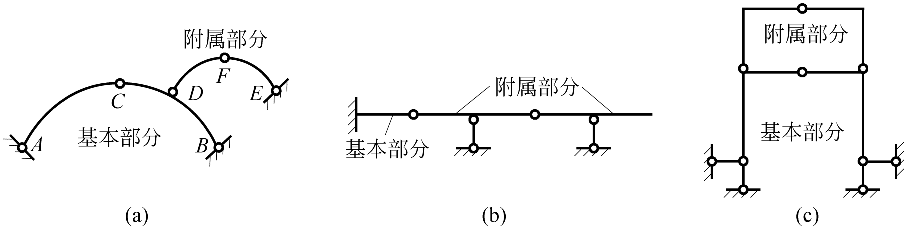


图 1-13　主从结构

1.2.2 几何组成分析举例

例题 1-1 分析图1-14(a)所示体系的几何组成。

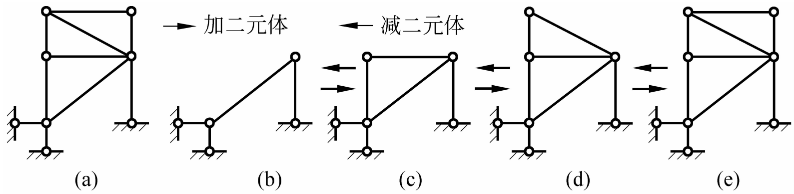


图1-14 例题1-1图

解:图1-14(a)所示体系可视为在图1-14(b)所示几何不变体系的基础上,如图所示逐次增加两个杆(二元体)构成。当然也可按在原体系上依次撤除二元体,得图1-14(b)所示几何不变体系。按规则3可知其为无多余约束的几何不变体系,是静定结构。

结论:分析时若能找出二元体,应首先将其去掉,这样会减少杆件数量,从而降低分析的难度。

例题 1-2 分析图1-15(a)所示体系的几何组成。

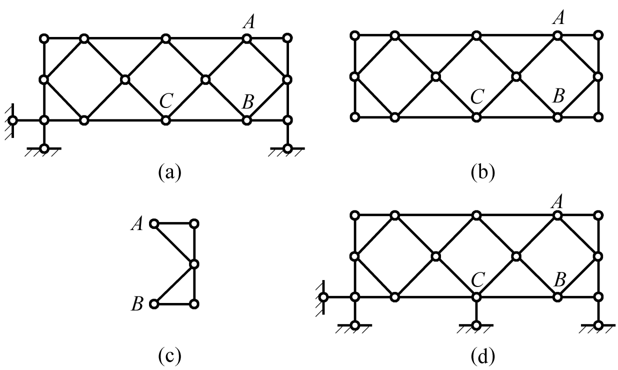


图1-15 例题1-2图

解法一:将原体系的支座去掉可得图1-15(b)所示体系,显然,若该体系几何不变,则由两刚片规则可确定原体系不变;若该体系几何可变,原体系也为几何可变。图1-15(b)所示体系用二元体规则逐次去除二元体后可得图1-15(c)所示体系,很明显,该体系是具有一个自由度的几何可变体系。所以原体系是具有一个自由度的常变体系。

解法二：体系左上角和右上角是二元体，去除后剩余体系无法用已有规则分析。但是，如果在 A、B 两点间设想增加一杆件，则支座上部体系可看成在一三角形基础上，逐渐增加二元体所得。在增加 AB 杆的前提下，由两刚片规则可知是无多余联系的不变体系。而现在待分析体系实际没有 AB 杆，因此体系有一个自由度，是常变体系。

结论：当体系与基础间仅用一个铰和一根不通过铰的链杆，或三根不交于一点、不全部平行的链杆相连时，只需分析去掉基础后的部分。习惯上称为分析体系的**内部可变性**。

例题 1-3　分析图 1-16(a)所示体系的几何组成。

解：利用例题 1-2 的结论，本例题可以只分析体系的内部可变性。若折杆只用两个铰与其他物体相连，可以将折杆看成是连接两个铰的直杆(图 1-16(b))。去掉图 1-16(b)两侧的二元体。剩下部分为两个刚片用两个铰连接，很明显是几何不变体系，且有一个多余约束。故，整个体系也为几何不变体系，且有一个多余约束。

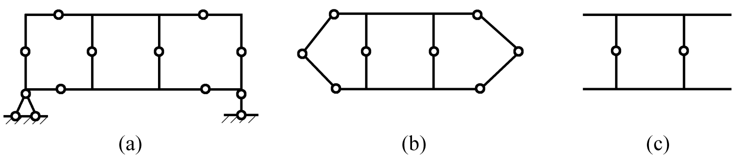


图 1-16　例题 1-3 图

例题 1-4　分析图 1-17(a)所示体系的几何组成。

解法一：与例题 1-3 相同，只分析体系的内部可变性，如图 1-17(b)。这一体系可视为刚片 AB、CD 用四根链杆(相当于两个单铰)相连。因此，原来的体系为几何不变体系，且有一个多余约束，为超静定结构。

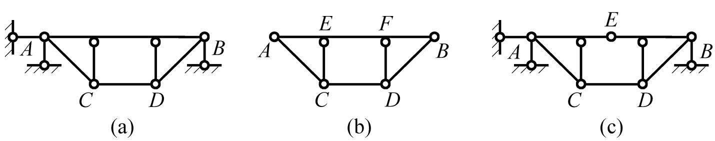


图 1-17　例题 1-4 图

解法二：将图 1-17(b)的 AEC 看成基本三角形，再增加二元体 CDF，则 BD 杆是多余约束，结论与前面一样。

对于本例，改造成静定结构时需要除去一个多余约束。在 1.1.4 中已指明，将哪一个约束看成多余约束并不唯一，例如除支座链杆以外的任意一根链

杆均可看成多余约束;去掉一个链杆后,即可得到一个静定结构。若在 AB 杆中 E 截面加一个铰如图 1-17(c)所示,即将刚结点变成铰结点,相当于解除一个约束(见图 1-17(c),解除铰 E 两侧截面发生相对转动的约束)。由于 E 点可在 AB 杆中任取,原结构通过解除多余约束化成静定结构的方案也就有无穷多种。

例题 1-5 分析图 1-18(a)所示体系的几何组成。

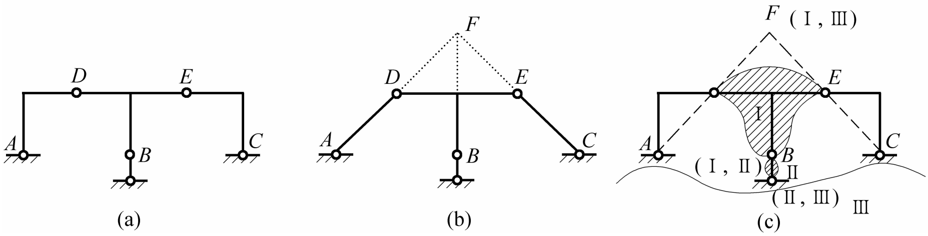


图 1-18 例题 1-5 图

解法一:折杆 AD 的约束作用与连接 A、D 两点的直链杆相同,用直链杆代替后如图 1-18(b)所示。用二刚片规则,因三杆延长线交于一点 F 故原体系为瞬变体系。

解法二:将 BDE 和 B 处链杆视为刚片,再将大地当刚片,如图 1-18(c)所示。BDE 和链杆间 B 铰相连,链杆和大地间支座铰相连,BDE 和大地间由 AD 和 EC 两折杆相连,相当于 F 点处有一虚铰相连。因为三刚片三铰共线,体系瞬变。

若将 B 点链杆换成水平链杆,则可使原体系变为静定结构,当然还有其他多种选择可使原来的可变体系变为静定结构。

结论:在分析中有时需要把与其他部分仅用两个铰相连的刚片(或一几何不变部分)以一根链杆代替,从而可使分析过程简化。

例题 1-6 分析图 1-19(a)所示体系的几何组成。

解法一:此题中上部结构与基础之间用 4 个约束连接,这种情况可以试着将地基看成 1 个刚片,再在上部体系中找 2 个刚片,然后应用三刚片规则进行分析。如图 1-19(b)所示,三个刚片用三个铰相连,铰的位置分别为 A、D 和 E 点(E 为虚铰),可见三铰不共线,该体系为几何不变体系,且没有多余约束。

解法二:此题还可以将折杆 AD 看成两个铰之间的链杆(图 1-19(c)),用二刚片规则进行分析结论是相同的。

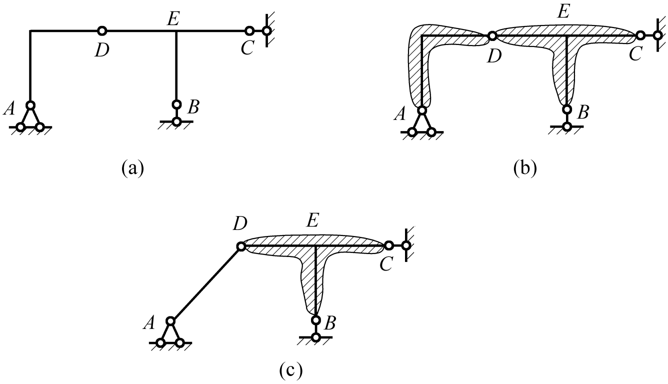


图 1-19　例题 1-6 图

例题 1-7　分析图 1-20(a)所示体系的几何组成。

解：该体系共有 9 根杆件，可以考虑把其中 3 根杆件看成刚片，另外 6 根杆件(相当于三个铰)看成约束，用三刚片规则来分析。若选 AB 杆为一个刚片，则与 AB 杆相连的 4 根杆件就都是约束。再将这 4 根杆件分成两组，每一组另一端连接的杆一定是另外两个刚片。如图 1-20(b)所示，连接三个刚片的虚铰不在一条直线上，因此，体系为几何不变体系，且没有多余约束。

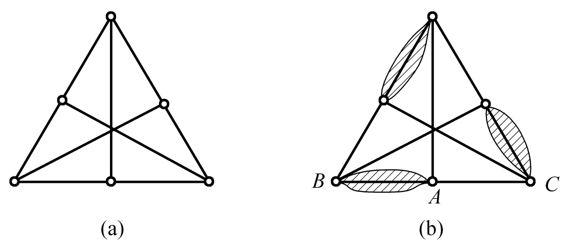


图 1-20　例题 1-7 图

读者可以试着选择其他杆件作为刚片进行分析。

例题 1-8　分析图 1-21(a)所示体系的几何组成。

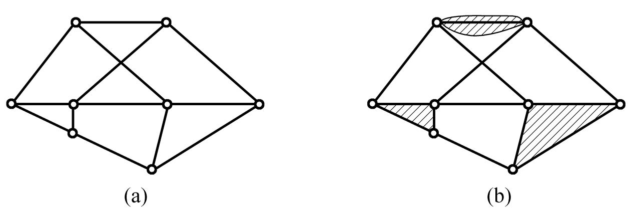


图 1-21　例题 1-8 图

解：上部结构共有13根杆件，需要找到两个三角形刚片(需要6根杆件)，再将一根杆件看作一个刚片，这样，体系就变成3个刚片+6根杆件，可以按照三刚片规则进行分析了(图1-21(b))。很明显，体系为几何不变体系，且没有多余约束。

例题1-9　分析图1-22(a)所示体系的几何组成。

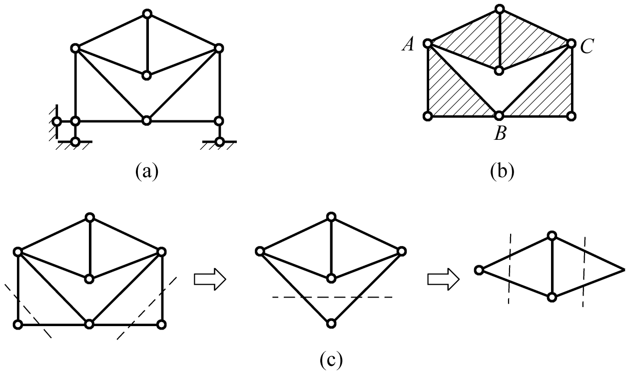


图1-22　例题1-9图

解法一：本题可以只分析内部可变性。题中三角形较多，可将三角形选做刚片，如图1-22(b)所示。很明显，三个刚片用三个不在一条直线上的三个铰A、B、C相连。因此，原体系为几何不变体系，没有多余约束。

解法二：分析上部时，也可以采用依次去掉二元体的方法，最后只剩下一根杆件(图1-22(c))，是一个本身无多余约束的刚片。结论同上。

例题1-10　分析图1-23(a)所示体系的几何组成。

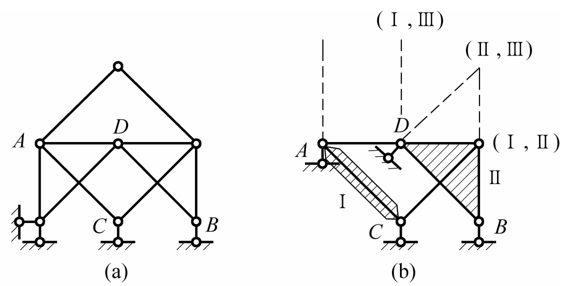


图1-23　例题1-10图

解：该体系去掉二元体后如图1-23(b)。由于左右两边都是三角形，首先想到的是可否将它们均视为刚片呢？答案是否定的。因为在这样选择下无

法确定每两刚片间有两个联系的第三个刚片，也即无法按上述规则进行分析。为了找到三个刚片可选择图 1-23(b)所示的刚片Ⅰ、Ⅱ，以大地为第三个刚片，A、D 两点与基础的连接与图 1-23(a)等效。连接三刚片的三个虚铰如图 1-23(b)所示，三铰共线，体系瞬变。

例题 1-11　试分析图 1-24(a)所示结构的几何组成。

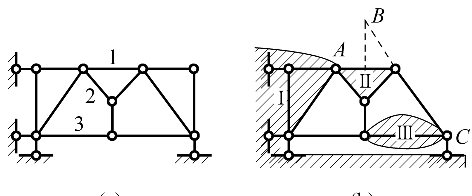


图 1-24　例题 1-11 图

解法一：去掉右上角的二元体；因为上部体系与基础之间有 4 个约束，可仿照例题 1-10 的方法进行分析。原体系内部杆件较多，考虑先将左边的三角形和基础组成一个大刚片，再选图示的另外两个刚片，用三刚片规则分析（三个铰的位置为 A、B、C），结论为无多余约束几何不变体系。

解法二：本题中因为左边的三角形与基础连成了大刚片，则杆件 1、2、3 就可以看成与基础相连的链杆，如图 1-24(c)所示。这时，再选择刚片就容易得多了。

例题 1-12　试分析图 1-25(a)所示结构的几何组成。

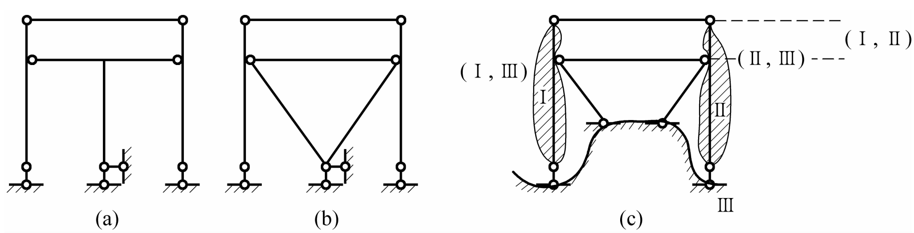


图 1-25　例题 1-12 图

解：该题直接分析有困难，可以采用**刚片转换**的方法分析。原体系中间的 T 形折杆本身是一个无多余约束的几何不变体系，且用三个铰与其他部分相连。这时，可以用另外一个本身也是一个无多余约束，且在同样的位置以同样的约束形式与其他部分相连的刚片来代替，而不影响体系组成分析结论。

选择一个最简单的铰接三角形刚片来代替 T 形折杆，如图 1-25(b)。将

两根斜杆看成是与基础相连的链杆。选择图1-25(c)所示两根杆件和基础作为刚片进行分析,结果为三铰共线(两水平杆交于水平无穷远处),体系为瞬变体系。

1.3 结论与讨论

1.3.1 结论

(1) 灵活运用三角形规则可构造各种静定结构。

(2) 超静定结构可通过减少多余约束使其变成静定结构。这时要注意不要把必要约束去掉。

(3) 静定结构和超静定结构的受力分析方法是不同的,正确区分静定结构和超静定结构,正确判定超静定结构多余约束的个数对以后的分析十分重要。

(4) 应用三角形规则分析一个体系可变性时,应注意刚体形状可任意改换。**按照找大刚体(或刚片)、减二元体、去支座分析内部可变性等方法,使体系得到最大限度简化后,再应用三角形规则分析**。

(5) 对于复杂体系,当用三角形规则难以分析时,可采用其他分析方法,如刚片转换法等。

1.3.2 讨论

(1) 三刚片三铰体系中,有无穷远虚铰的体系是否几何不变应视不同情形区别对待。例如图1-26(a)所示为有一个虚铰在无穷远处的体系,若将刚片Ⅰ用链杆AB代替则得图1-26(b)所示两刚片体系。若三根链杆平行且等长则为常变体系;三根链杆平行但不等长则为瞬变体系;三根链杆不全平行且不交于一点则为不变体系。对于有两个或三个虚铰在无穷远处的情形,留给读者自行分析研究。

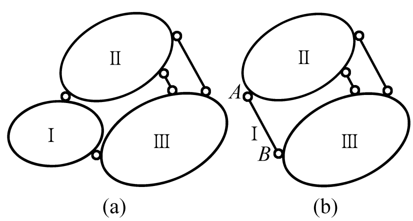


图1-26 三刚片三铰体系中有无穷远虚铰的情形

(2) 杆件体系可变性分析,实质上是刚体体系的运动可能性分析问题。因此可从任一不动点(内部可变性时设某部件不动)开始,根据连接情况和理论力学中运动学知识,逐杆分析,最终看能否产生运动。由此思路出发,曾经

有人提出通过作速度图分析体系可变性，对此有兴趣的读者可参考《结构力学》（上册）（华东水利学院（即河海大学）结构力学教研室编写，水利水电出版社，1983 年）。

（3）随着计算机在结构力学应用中的发展，复杂杆件体系的可变性分析，可用计算机来解决。有兴趣的读者可参考清华大学袁驷教授编著的，高等教育出版社出版的《程序结构力学》。

（4）传统意义下的“结构”必须几何不变，可变体系不能作传统结构使用。但是实际生活中也有许多“可变结构”的例子，人造卫星的太阳能电池板，卫星发射时它是折叠的，进入轨道后，伸展成板状接受太阳能。又如一些单位的可折叠大门、商场和市政修理路灯的可升降平台、体育建筑的可开合结构等，从几何组成分析角度，它们都是可变体系。可见，只要合理地设计和进行相应的控制，从更广泛的意义上说，可变体系也是可以作“结构”使用的。

思考题

1. 无多余约束几何不变体系（静定结构）三个组成规则之间有何关系？

2. 实铰与虚铰有何差别？

3. 试举例说明瞬变体系不能作为结构的原因。接近瞬变的体系是否可作为结构？

4. 平面体系几何组成特征与其静力特征间关系如何？

5. 作平面体系组成分析的基本思路、步骤如何？

6. 连接 n 根杆复铰相当于多少单铰？

7. 连接 n 根杆的复刚结点相当于多少个单刚结点？

8. 连接 n 根杆的复链杆相当于多少根单链杆？

9. 若三刚片三铰体系中的一个虚铰在无穷远处，何种情况下体系几何不变？何种情况下体系常变？何种情况下体系瞬变？

10. 若三刚片三铰体系中的两个虚铰在无穷远处，何种情况下体系是几何不变的？何种情况下体系是常变的？何种情况下体系是瞬变的？

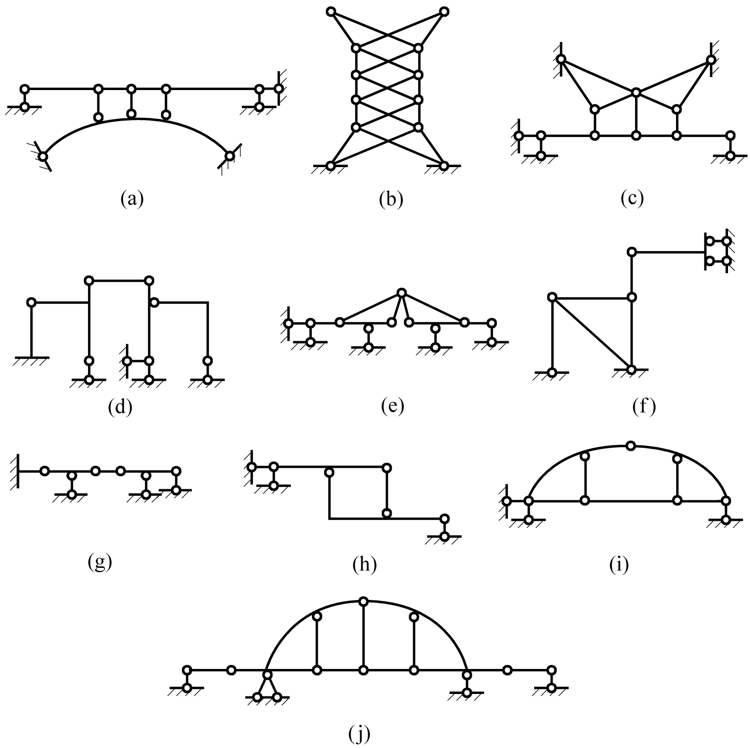
11. 瞬变体系产生瞬变的原因是因为约束的数量不够吗？

12. 若三刚片三铰体系中的三个虚铰均在无穷远处，体系一定是几何可变吗？

13. 超静定结构中的多余约束是从何角度被看成是“多余”的？

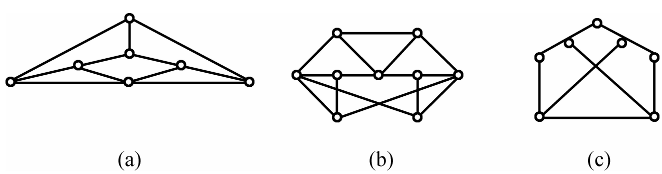
习题

1-1　分析图示体系的几何组成。

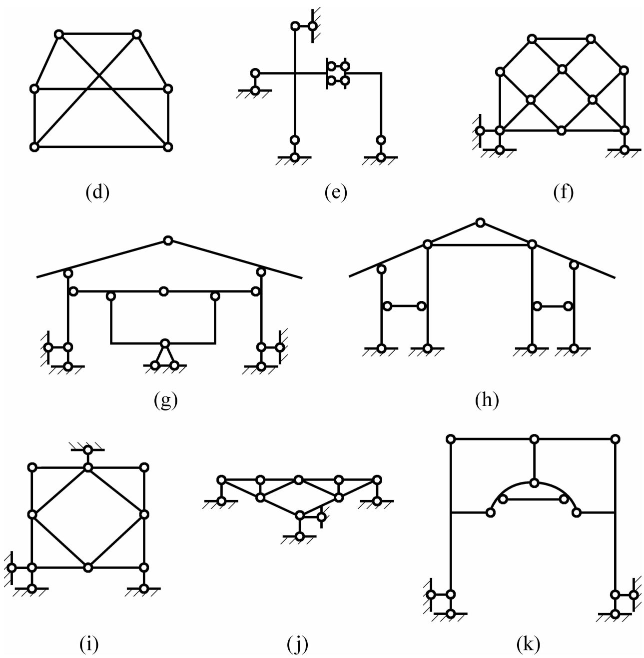


习题 1-1 图

1-2　分析图示体系的几何组成。

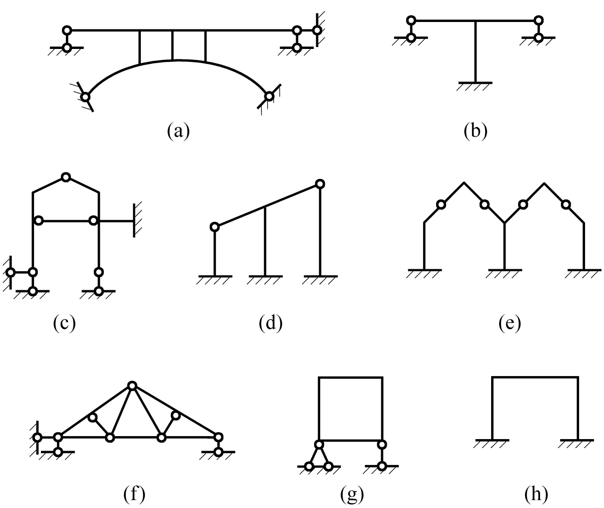


习题 1-2 图



习题 1-2 图（续）

1-3　将图示超静定结构通过解除约束改造成静定结构(不少于三种选择)。



习题 1-3 图

第2章

静定结构受力分析

本章将在理论力学的隔离体受力分析和材料力学建立杆件内力方程作受力分析的基础上，确定各类平面杆系结构由荷载所引起的弯矩、剪力和轴力的变化规律——内力图。主要是应用截面法取隔离体(包括取结点为隔离体)和利用内力与荷载间的平衡微分关系等知识。这些知识在理论力学、材料力学中已经学过，如果有所遗忘或还不够熟练，必须及时复习、巩固。否则，将会给今后的学习带来困难。

2.1 杆件内力分析回顾

2.1.1 材料力学内容回顾

材料力学中关于杆件内力分析的要点有：

(1) **内力符号规定**：轴力 F_{N}，拉为正，压为负；剪力 F_{Q}，使截开部分产生顺时针旋转者为正，反之为负；弯矩 M，使杆件产生上凹者为正(也即下侧纤维受拉为正)，反之为负。

(2) **求内力的方法——截面法**：用假想截面将杆件截开，以截开后受力简单部分为平衡对象(也称为**隔离体**，isolation bodies)并分析其受力，最后列平衡方程求得内力。

(3) **直杆平衡方程(也称为微分关系)**：取微段 $\mathrm{d}x$ 为隔离体，如图 2-1 所示。假设其上受有轴向分布荷载 $p(x)$、横向分布荷载 $q(x)$。在给定坐标系中，它们的指向与坐标正向相同者为正。考虑微段的平衡，通过建立 $\sum F_x=0$、$\sum F_y=0$ 和 $\sum M=0$，可得

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}x}=-p(x),\quad \frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{Q}}}{\mathrm{d}x}=-q(x),\quad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=F_{\mathrm{Q}}$$

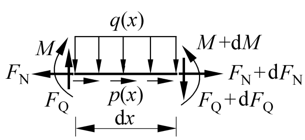


图 2-1 微段直杆受力示意图

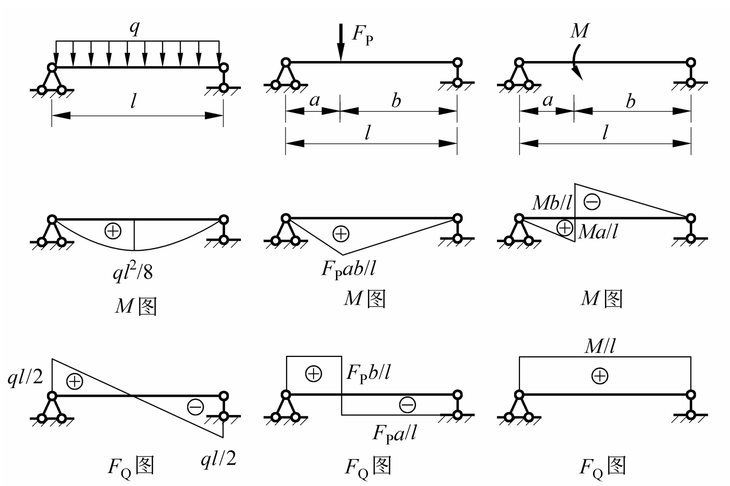
这就是直杆段的平衡微分关系。

(4) **内力图绘制方法**:利用截面法确定杆件控制截面上的内力,应用微分关系确定控制截面之间内力图形的正确形状。常用的微分关系结论如下表:

	荷载情况	剪力情况	弯矩情况
1	直杆段无横向外荷载作用	剪力等于常数	弯矩图为直线
		剪力等于零	弯矩为常数
2	横向集中力作用点处	剪力产生突变	弯矩图斜率发生改变
3	集中力偶作用点处	剪力不变	弯矩图产生突变
4	铰结点附近(或自由端处)有外力偶作用	剪力不变	铰附近截面(或自由端处)弯矩等于外力偶矩值
5	弯矩图与荷载方向关系		弯矩图凸向与荷载(集中力或均布荷载)方向一致。

(5) **叠加法的应用**:小变形情况下,复杂荷载引起的内力,可由简单荷载引起的内力叠加得到。

2.1.2 一些应熟记的单跨梁内力图



(a) 简支梁均布荷载　(b) 简支梁集中荷载　(c) 简支梁集中力偶

图 2-2　应熟记的单跨梁内力图