

# 第 1 章

## 微弱信号检测与随机噪声

### 1.1 微弱信号检测概述

“微弱信号”不仅意味着信号的幅度很小,而且主要指的是被噪声淹没的信号,“微弱”是相对于噪声而言的。为了检测被背景噪声覆盖着的微弱信号,人们进行了长期的研究工作,分析噪声产生的原因和规律,研究被测信号的特点、相关性以及噪声的统计特性,以寻找出从背景噪声中检测出有用信号的方法。

微弱信号检测技术的首要任务是提高信噪比,这就需要采用电子学、信息论、计算机和物理学的方法,以便从强噪声中检测出有用的微弱信号,从而满足现代科学研究和技术开发的需要。微弱信号检测技术不同于一般的检测技术,它注重的不是传感器的物理模型和传感原理,也不是相应的信号转换电路和仪表实现方法,而是如何抑制噪声和提高信噪比,因此可以说,微弱信号检测是一门专门抑制噪声的技术。

对于各种微弱的被测量,例如弱光、弱磁、弱声、小位移、小电容、微流量、微压力、微振动、微温差等,一般都是通过相应的传感器将其转换为微电流或低电压,再经放大器放大其幅度,以期指示被测量的大小。但是,由于被测量的信号微弱,传感器的本底噪声、放大电路及测量仪器的固有噪声以及外界的干扰噪声往往要比有用信号的幅度大得多,放大被测信号的过程同时也放大了噪声,而且必然还会附加一些额外的噪声,例如放大器的内部固有噪声和各种外部干扰噪声,因此只靠放大是不能把微弱信号检测出来的。只有在有效地抑制噪声的条件下增大微弱信号的幅度,才能提取出有用信号。为了达到这样的目的,必须研究微弱信号检测的理论、方法和设备。

为了表征噪声对信号的覆盖程度,人们引入了信噪比(signal-noise ratio,简记为 SNR)的概念,信噪比指的是信号  $S$  与噪声  $N$  之比,即

$$SNR = S/N \quad (1-1)$$

信噪比可以是电压或电流的有效值比值,一般表示为  $SNR_V$  或  $SNR_I$ ; 也可以是功率

比值,一般表示为  $SNR_p$ 。微弱信号检测的关键是提高信噪比。评价一种微弱信号检测方法的优劣,经常采用两种指标:一种是信噪改善比  $SNIR$ (signal noise improvement ratio),另一种是有效的检测分辨率。 $SNIR$  定义为

$$SNIR = \frac{SNR_o}{SNR_i} \quad (1-2)$$

式中, $SNR_o$  是系统输出端的信噪比, $SNR_i$  是系统输入端的信噪比。 $SNIR$  越大,表明系统抑制噪声的能力越强。因为  $SNR_v$  和  $SNR_p$  之间为平方关系,相应的  $SNIR$  之间也是平方关系。所以,在谈及信噪比或信噪改善比时,必须说明是哪一种。

微弱信号检测的另一种指标是检测分辨率,它的定义是检测仪器示值可以响应与分辨的输入量的最小变化值。检测分辨率不同于检测灵敏度,后者定义为输出变化量  $\Delta y$  与引起  $\Delta y$  的输入变化量  $\Delta x$  之比,即灵敏度等于  $\Delta y/\Delta x$ 。也就是说,灵敏度表示的是检测系统标定曲线的斜率。一般情况下,灵敏度越高,分辨率越好。但是,提高系统的放大倍数可以提高灵敏度,但却不一定能提高分辨率,因为分辨率要受噪声和检测误差的制约。

表 1-1 对比了常规检测方法与微弱信号检测方法所能达到的最高分辨率和  $SNIR$ (有效值),表中最后一行是专门从事微弱信号检测仪器生产的吉时利(Keithley)公司的产品近年能够达到的指标。从这些指标中可以看出微弱信号检测技术发展的大致水平。

表 1-1 检测的最高分辨率

| 检 测 量    | 电压/nV     | 电流/nA     | 温度/K               | 电容/pF     | 微量分析/克分子  | $SNIR_v$ |
|----------|-----------|-----------|--------------------|-----------|-----------|----------|
| 常规检测方法   | $10^3$    | 0.1       | $10^{-4}$          | 0.1       | $10^{-5}$ | 10       |
| 微弱信号检测方法 | 0.1       | $10^{-5}$ | $5 \times 10^{-7}$ | $10^{-5}$ | $10^{-8}$ | $10^5$   |
| 吉时利公司    | $10^{-3}$ | $10^{-8}$ | $10^{-6}$          |           |           |          |

抑制噪声以提高信噪比的研究工作由来已久,可以说从电子器件和电子学诞生的年代开始,人们一直在探索抑制噪声的技术。自从 1962 年第一台锁相放大器问世的四十多年来,经过很多科学工作者的不懈努力,微弱信号检测技术得到了长足的发展,信噪改善比  $SNIR$  得到不断提高。到 20 世纪 80 年代末,微弱信号检测的  $SNIR_v$  可达  $10^5$ ,近年在一些专门检测领域(例如微弱电流) $SNIR_v$  已能达到  $10^7$ ,从而推动了物理、化学、电化学、天文、生物、医学等学科的发展。目前,微弱信号检测的原理、方法和设备已经成为很多领域中进行现代科学研究不可缺少的理论和手段,而未来科技的发展也必将对微弱信号检测技术提出更高的要求。

## 1.2 常规小信号检测方法

与微弱信号相比,小信号的信噪比要高得多,其检测技术也要成熟得多。但是,就提高信噪比,从而检测出被噪声污染的有用信号这一点来看,小信号检测与微弱信号检测具有一定的共同之处。经过多年的研究和实践,人们已经掌握了一些行之有效的小信号检测方法,其中的一些方法还被成功地应用到检测仪器仪表产品之中。了解这些小信号检测的成熟手段和方法,对于微弱信号检测具有一定的参考价值。

## 1.2.1 滤波

在大部分检测仪器中都要对模拟信号进行滤波处理,有的滤波是为了隔离直流分量,有的滤波是为了改善信号波形,有的滤波是为了防止离散化时的频率混叠,更多的滤波是为了抑制噪声,提高信号的信噪比。通常,有用信号的频率范围有限,而噪声则散布在很宽的频带上。为了消除或部分消除噪声,经常对信号进行滤波处理。

### 1. 滤波器的功能

滤波器的功能就是允许某一部分频率的信号顺利通过,而另外一部分频率的信号则受到较大的抑制,它实质上是一个选频电路。

滤波器中,信号能够通过的频率范围称之为通频带或通带,而信号受到很大衰减或完全被抑制的频率范围称之为阻带,通带和阻带之间的分界频率称为截止频率。理想滤波器在通带内的增益为常数,在阻带内的增益为零;实际滤波器的通带和阻带之间存在一定频率范围的过渡带。

滤波器是抑制噪声、提高信噪比的有效手段。此外,在使用 A/D 转换器对模拟信号进行量化处理时,为了防止混叠效应(aliasing effect)导致量化误差,需要用低通滤波器滤除信号中高于采样频率  $1/2$  以上的频率成分。

### 2. 滤波器的分类

#### (1) 模拟滤波器和数字滤波器(按所处理的信号划分)

模拟滤波器用硬件电路实现,数字滤波器需要用到 A/D、D/A 转换器,滤波算法大都用计算机或单片机的软件实现,也可以用 FPGA(现场可编程门阵列)实现。A/D 转换器要求输入信号必须达到一定的幅度,所以,要实现提高微弱信号信噪比的目的,模拟滤波器更为适用。

#### (2) 低通、高通、带通和带阻滤波器(按所通过信号的频段划分)

低通滤波器允许信号中的低频和直流分量通过,抑制信号的高频分量和高频噪声;高通滤波器允许信号中的高频分量通过,抑制低频和直流分量以及低频噪声;带通滤波器允许一定频段的信号通过,抑制低于或高于该频段的信号和噪声;带阻滤波器抑制一定频段内的信号或噪声,允许该频段以外的信号通过。

#### (3) 无源滤波器、有源滤波器和开关电容滤波器(按所采用的元器件划分)

无源滤波器是仅由无源元件( $R$ 、 $L$  和  $C$ )组成的滤波器,它是利用电容和电感元件的阻抗随频率的变化而变化的原理构成的。这类滤波器的优点是:电路比较简单,不需要直流电源供电,可靠性高;缺点是通带内的信号有能量损耗,负载效应比较明显。使用电感元件的滤波器容易引起电磁感应,当电感  $L$  较大时滤波器的体积和重量都比较大,在低频领域不适用。

有源滤波器由无源元件(一般用  $R$  和  $C$ )和有源器件(如集成运算放大器)组成。这类滤波器的优点是:通带内的信号不仅没有能量损耗,而且还可以放大,负载效应不明显,多级相联时相互影响很小,利用级联的方法很容易构成高阶滤波器,并且滤波器的体积小、重量

轻、可以不使用磁屏蔽(由于不使用电感元件);缺点是:通带范围受有源器件(如集成运算放大器)的带宽限制,需要直流电源供电,可靠性不如无源滤波器高,在高压、高频、大功率的场合不适用。

开关电容滤波器:20世纪70年代,开关电容滤波器(switched capacitor filter)问世并逐渐形成了成熟的集成电路产品系列,这是一种由MOS模拟开关、电容器和运算放大器组成的离散时间模拟滤波器,易于用MOS工艺实现,而且便于实现高阶滤波器。开关电容滤波器可直接处理模拟信号,而不必像数字滤波器那样需要A/D、D/A转换,简化了电路设计,提高了系统的可靠性。此外,MOS器件在速度、集成度、相对精度控制和微功耗等方面都有独特的优势,促进了开关电容滤波器的发展和应用。

### 3. 滤波器的主要参数

(1) 通带增益  $A_0$ : 滤波器通带内的电压放大倍数。

(2) 特征角频率  $\omega_0$  和特征频率  $f_0$ : 它们只与滤波器的元件参数有关,对于一阶RC滤波器,特征角频率为  $\omega_0 = 1/(RC)$ ,特征频率为  $f_0 = 1/(2\pi RC)$ 。

带通(带阻)滤波器的特征频率为其中心角频率  $\omega_0$  或中心频率  $f_0$ ,是通带(阻带)内电压增益最大(最小)点的频率。

(3) 截止角频率  $\omega_c$  和截止频率  $f_c$ : 它们是电压增益下降到  $|A_0/\sqrt{2}|$  (即-3dB)时所对应的角频率和频率。注意  $\omega_c$  不一定等于  $\omega_0$ 。带通和带阻滤波器有两个  $\omega_c$ ,即  $\omega_L$  和  $\omega_H$ 。

(4) 通带(阻带)宽度  $B$ : 它是带通(带阻)滤波器的两个  $\omega_c$  值之差,即

$$B = \omega_H - \omega_L$$

(5) 等效品质因数  $Q$ : 对带通(带阻)滤波器而言, $Q$ 值等于中心角频率与通带(阻带)宽度  $B$  之比,即

$$Q = \omega_0 / B$$

### 4. 滤波器的阶数

滤波器传递函数分母中拉普拉斯算子“ $s$ ”的最高方次称为滤波器的“阶数”。阶数越高,滤波器幅频特性的过渡带越陡,越接近理想特性。一般情况下,一阶滤波器过渡带按-20dB/十倍频的速率衰减,二阶滤波器按-40dB/十倍频的速率衰减。高阶滤波器可由低阶滤波器串接组成。

### 5. 低通和高通滤波器之间的对偶关系

(1) 幅频特性的对偶关系

当低通滤波器和高通滤波器的通带增益  $A_0$ 、截止频率  $f_c$  分别相等时,两者的幅频特性曲线相对于垂直线  $f = f_c$  对称。

(2) 传递函数的对偶关系

将低通滤波器传递函数中的  $s$  换成  $1/s$ ,则变成对应的高通滤波器的传递函数。

(3) 电路结构上的对偶关系

将低通滤波器中起滤波作用的电容  $C$  换成电阻  $R$ ,并将起滤波作用的电阻  $R$  换成电容  $C$ ,则低通滤波器转化为对应的高通滤波器。

## 6. 滤波器在噪声抑制中的应用

利用滤波器的频率选择特性,可把滤波器的通带设置得能够覆盖有用信号的频谱,所以滤波器不会使有用信号衰减或使其衰减很少。而噪声的频带一般较宽,当通过滤波器时,通带之外的噪声功率受到大幅度衰减,从而使信噪比得以提高。

根据信号和噪声的不同特性,常用的抑制噪声滤波器为低通滤波器(LPF)和带通滤波器(BPF)。低通滤波器能有效地抑制高频噪声,常用于有用信号缓慢变化的场合,但是对于低频段的噪声(例如  $1/f$  噪声和缓慢漂移,包括时间漂移和温度漂移),低通滤波器却是无能为力的。如果信号为固定频率  $f_0$  的正弦信号,则利用带通滤波器能有效地抑制通带之外各种频率的噪声。带通滤波器的带宽  $\Delta f$  越小,  $Q$  值越高,滤波效果越好。但是,  $Q$  值 too 高的带通滤波器往往不稳定,所以  $\Delta f$  很难做得很小,这使滤波效果受到限制。而且,带通滤波器对于与  $f_0$  同频率的干扰噪声是无能为力的。此外,为了抑制某一特定频率的干扰噪声(例如 50Hz 工频干扰),有时还使用带阻滤波器(即陷波器)。

用于抑制噪声的滤波器可以置于放大器之前,也可以置于放大器之后,功能各有特点。对于信噪比较低的输入信号,噪声的幅度(尤其是尖峰脉冲噪声的幅度)往往要比有用信号的幅度高得多,如果不进行滤波就直接放大,噪声幅度很可能超出放大器的线性输入范围,导致放大器进入非线性区而不能正常工作。置于放大器之前的滤波器可以有效抑制噪声幅度,防止发生这种情况。放大器在放大输入信号的同时,也放大了输入噪声,此外放大器本身的电子元器件还会产生附加噪声,置于放大器之后的滤波器不但能够滤除放大器输入噪声,还能滤除放大器自身产生的附加噪声。两种滤波器各有其特殊功能,需要根据噪声情况选择使用。对于信噪比较低或噪声情况不明的场合,最好在放大器之前和之后都设置滤波器。

### 1.2.2 调制放大与解调

对于变化缓慢的信号或直流信号,如果不经过变换处理而直接利用直流放大器进行放大,则传感器和前级放大器的低频噪声及缓慢漂移(包括温度漂移和时间漂移)经放大后会以很大的幅度出现在后级放大器的输出端,当有用信号幅度很小时,有可能根本检测不出来。简单的电容隔直方法能有效地抑制漂移和低频噪声,但是对有用信号的低频分量也具有衰减作用。在这种情况下,利用调制放大器能有效地解决上述问题。这样的调制放大器多数采用幅度调制的方法,其构成框图见图 1-1。幅度调制在无线广播和接收中应用得很广泛。

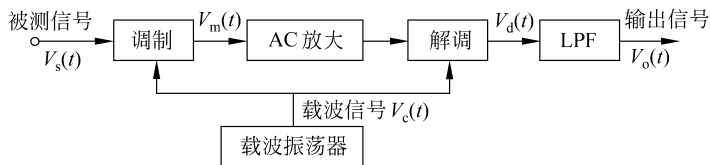


图 1-1 调制放大与解调过程

在图 1-1 中,振荡器是调制载波源,其输出通常是一个高频载波信号

$$V_c(t) = \cos\omega_c t$$

为简单起见,设被测低频信号为单一频率的余弦信号

$$V_s(t) = \cos\omega_s t$$

在实际应用中,  $(\omega_c/\omega_s)$  至少要在 20 以上,以使被测信号的一个周期包含许多载波信号周期。调制过程一般用变增益放大器或非线性放大器实现两个信号的相乘过程,其输出为频率与调制载波相同,但幅度随被测低频信号  $V_s(t)$  瞬时值变化的调制信号  $V_m(t)$

$$V_m(t) = V_s(t) \cdot V_c(t) = \cos\omega_s t \cdot \cos\omega_c t \quad (1-3)$$

利用三角函数公式,式(1-3)可变为

$$V_m(t) = 0.5\cos(\omega_c + \omega_s)t + 0.5\cos(\omega_c - \omega_s)t \quad (1-4)$$

式(1-4)说明,调制过程得到的是两个信号的和频分量和差频分量。实际上,被测信号  $V_s(t)$  可能包括很多频率成分,如图 1-2(a)中的频谱所示。调制过程中,被测信号  $V_s(t)$  的每一频率成分都形成其和频分量和差频分量,它们组合而成调制输出信号的频谱,形成载波频率  $\omega_c$  两边的两个边带,如图 1-2(c)所示。

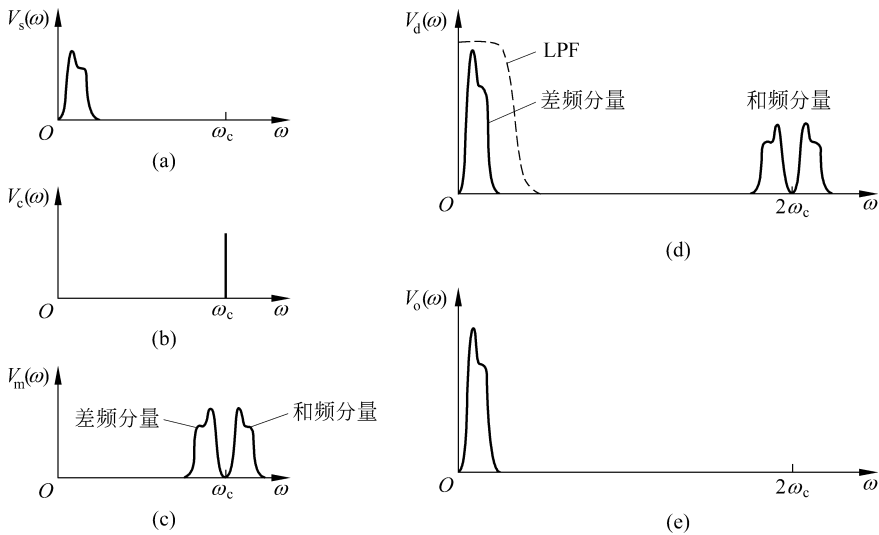


图 1-2 调制解调器各信号频谱

(a) 被测信号  $V_s(\omega)$ ; (b) 载波信号  $V_c(\omega)$ ; (c) 调制信号  $V_m(\omega)$ ;

(d) 解调信号  $V_d(\omega)$ ; (e) 滤波输出  $V_o(\omega)$

可见,调制输出信号  $V_m(t)$  的频谱集中在载波频率  $\omega_c$  的两边,可以对其进行交流(AC)放大。因为载波频率较高,各级放大器之间可以用隔直电容耦合,所以前级放大器的漂移和低频噪声不会传输到后级放大器。

解调过程可以用检波器或相敏检测器实现,该过程是把放大后的调制信号再和载波信号相乘一次。设交流放大倍数为  $A$ ,则对于单一频率的被测信号  $V_s(t) = \cos\omega_s t$ ,解调器的输出  $V_d(t)$  为

$$\begin{aligned}
 V_d(t) &= AV_m(t) \cdot \cos\omega_c t \\
 &= A[0.5\cos(\omega_c + \omega_s)t + 0.5\cos(\omega_c - \omega_s)t]\cos\omega_c t \\
 &= 0.25A[\cos(2\omega_c + \omega_s)t + \cos(2\omega_c - \omega_s)t + 2\cos\omega_s t] \quad (1-5)
 \end{aligned}$$

式(1-5)说明,解调过程实现了第二次频谱迁移,解调器的输出  $V_d(t)$  的频谱分量中的一部分包含了原被测信号的频率  $\omega_s$ ,另一部分频谱集中于  $2\omega_c \pm \omega_s$ 。利用低通滤波器(LPF)滤除  $V_d(t)$  中的高频分量和附加噪声,可得到放大的被测信号  $V_o(t)$

$$V_o(t) = 0.5A\cos\omega_s t = 0.5AV_s(t) \quad (1-6)$$

对于由多种频率成分组成的被测信号,解调器输出信号  $V_d(t)$  和滤波器输出信号  $V_o(t)$  的频谱分别见图 1-2(d)和图 1-2(e)。

调制放大与解调广泛应用于通信领域,例如无线广播和接收机,在这种情况下调制和解调分别由不同的设备完成,因此要求接收设备自己产生解调用的载波信号,例如收音机中是由本机振荡器产生载波信号。为了解调方便,多数广播系统在发送包含有用信号边带的同时,还发送频率为  $\omega_c$  的载波信号。

对于小信号检测,还可以利用斩波器代替图 1-1 中的调制器,利用电子开关实现斩波和斩波信号的解调过程。有的传感器的输出信号本身就是调制信号或斩波信号,目的也是为了减小漂移的不利影响。

### 1.2.3 零位法

直接指示测量仪表的一般方法,是将被测信号放大到一定幅度,以驱动表头指针的偏转角度指示被测量的大小;或者将放大后的信号经模数转换和数据处理后由数码管显示被测量的数值。而零位法(null method)是调整对比量的大小使其尽量接近被测量,由对比量指示被测量的大小,如图 1-3 所示。图中的零位表指针只用来指示被测量和对比量的差异值,当零位表指示近似为零时,对比量的大小就表征了被测量的大小。对比量的调整可以手动实现,也可闭环自动调整,如图 1-3 中虚线所示。用这种方法测量的分辨率取决于对比量调整和指示的分辨率。可以想象,弹簧秤是一种直接指示仪表,而天平则是一种零位法仪表。

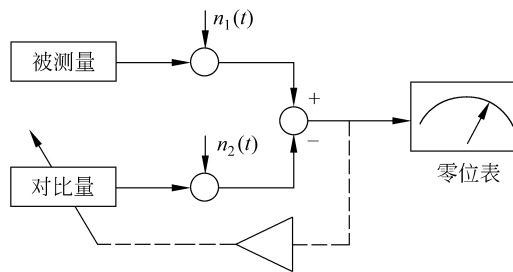


图 1-3 零位法测量原理

由图 1-3 可以看出,虽然被测量和对比量在传输过程中分别附加了干扰噪声  $n_1(t)$  和  $n_2(t)$ ,但是在对比相减的过程中, $n_1(t)$  和  $n_2(t)$  会相互抵消。两路信号传输过程越相似, $n_1(t)$  和  $n_2(t)$  也会越近似,抵消作用越好。因此,与直接指示测量方法相比,零位法测量结果的信噪比要高,测量精度也更高。

零位法测量的典型应用例子是平衡电桥和电位差计。图 1-4 所示为平衡电桥用于测量未知电阻,图中  $R_x$  为被测电阻, $R_m$  为对比电阻,指示表头用作电桥平衡状态指示。当调节  $R_m$  使表头指示为零时,电桥处于平衡状态, $R_m = R_x$ ,由  $R_m$  的值可指示出  $R_x$  的大小。图中的放大器、调整机构和虚线所示的反馈过程用于根据表头两端的差值自动调节  $R_m$ ,以使电桥达到平衡状态,从而构成自动平衡电桥。

图 1-5 所示为电位差计用于测量未知电压  $E_x$ ,图中的指示表头和放大器的作用与平衡电桥相类似。调节  $P_m$  的调整端位置,可以从电位器获得不同电压。当表头指示为零时,说明电位器输出电压等于被测电压  $E_x$ ,电位差计达到了平衡状态,由电位器  $P_m$  调整端的位置可指示出被测量  $E_x$  的数值。放大器、调整机构和虚线表示的反馈过程用于自动调整  $P_m$ ,以使电位差计达到平衡状态,从而构成自动电位差计。

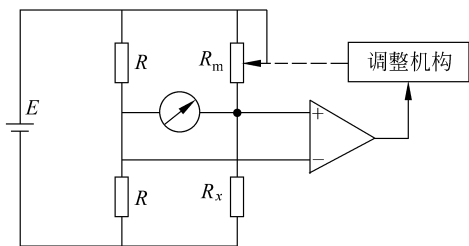


图 1-4 平衡电桥原理示意图

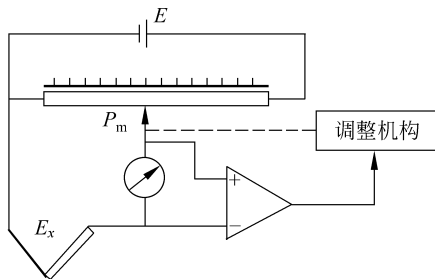


图 1-5 电位差计原理示意图

### 1.2.4 反馈补偿法

为了把某种幅度较小的被测量(例如物理量或化学量)检测出来,一般都要对其进行变换和放大,使其以人们能够感知的方式呈现出来。而变换和放大的过程不可避免地会引入一些干扰噪声,影响输出指示的信噪比和精确度。反馈补偿法能有效地减小这些干扰噪声的不利影响。

图 1-6(a)所示为开环检测系统的方框图, $H_1$  和  $H_2$  分别表示两个变换环节的传递函数, $n_1$  和  $n_2$  分别表示两个变换环节引入的干扰噪声折合到其输入端的噪声值, $x$  为被测有用信号。系统输出  $y$  可以表示为

$$y = H_1 H_2 x + H_1 H_2 n_1 + H_2 n_2 \quad (1-7)$$

在开环检测系统的基础上增加放大  $A$  和反馈环节  $K_F$ ,从而构成闭环检测系统,其方框图示于图 1-6(b),这时系统输出  $y$  可以表示为

$$y = \frac{AH_1 H_2}{1 + AH_1 H_2 K_F} x + \frac{H_1 H_2}{1 + AH_1 H_2 K_F} n_1 + \frac{H_2}{1 + AH_1 H_2 K_F} n_2 \quad (1-8)$$

当  $A$  足够大时,有  $AH_1 H_2 K_F \gg 1$ ,式(1-8)可简化为

$$y = \frac{1}{K_F} x + \frac{1}{AK_F} n_1 + \frac{1}{AH_1 K_F} n_2 \quad (1-9)$$

式(1-9)右边的第二项和第三项表示输出信号中的噪声,可见,只要闭环检测系统中放大器的放大倍数  $A$  足够大,从而使  $AK_F \gg 1$  且  $AH_1 K_F \gg 1$ ,则式(1-9)右边的第二项和第三

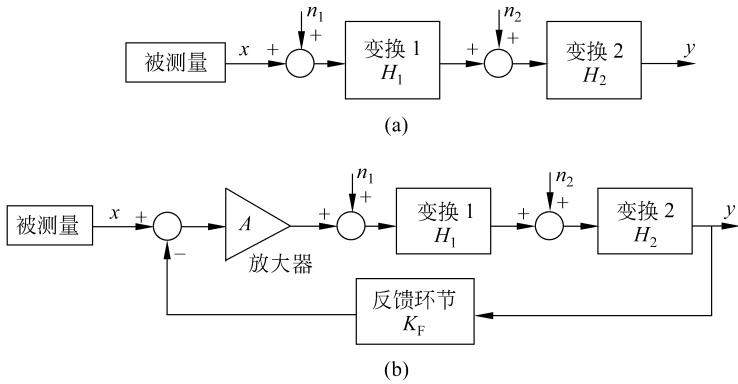


图 1-6 开环检测系统与闭环检测系统

(a) 开环检测系统; (b) 闭环检测系统

项趋于零, 干扰噪声  $n_1$  和  $n_2$  的不利影响就可以得到有效抑制, 式(1-9)则可简化为

$$y = \frac{1}{K_F} x$$

由上式可知, 闭环检测系统中的输出  $y$  和输入  $x$  之间的关系主要取决于反馈环节的传递函数  $K_F$ , 只要  $K_F$  稳定可靠, 则变换环节的漂移和非线性对检测系统的性能就不会产生太大的影响。一般情况下, 设计制作稳定可靠的反馈环节要比设计制作稳定可靠的变换环节容易得多。

在检测仪表领域, 力平衡式压力变送器和很多其他检测设备都是基于这种反馈补偿原理, 以消除或减弱干扰噪声的不利影响并提高检测设备的性能。

### 1.3 随机噪声及其统计特征

由于电路中电子及其他载流子的随机扰动, 电路内部的噪声无处不在。电路外部的各种干扰也会在电路中感应出不同频率分布的噪声。无论是内部噪声或外部干扰, 在这里统称为噪声。很多种噪声是随机变量随时间变化的过程, 其瞬时值是不确定的, 无论对它的过去值观测多长时间, 仍然不能确切预测其未来的瞬时值。

对于随机噪声, 因为其取值不可预测, 更不能用一个解析函数来定义, 只能用概率和统计的方法来描述。统计方法侧重的是样本总体的定量性质, 而不是个体元素的性质。就随机噪声而言, 样本可由其波形的大量的连续取值组成。常用的概率和统计描述方法有概率密度函数以及数学期望值、方差、均方值、相关函数等特征值。

概率密度函数及统计特征不随时间变化的随机过程称为平稳随机过程, 电路中的噪声一般都是平稳随机过程。电路中的噪声还具有各态遍历性质, 其统计平均可以用时间平均来计算。各态遍历的随机过程一定是平稳随机过程。

本章对随机过程的描述比较简略, 只涉及那些在噪声分析中需要的内容。本章所援引的某些公式只对实函数有效。

### 1.3.1 随机噪声的概率密度函数

对于连续取值的随机噪声, 概率密度函数(PDF)  $p(x)$  表示的是噪声电压  $x(t)$  在  $t$  时刻取值为  $x$  的概率。对于所有  $x$  都有  $p(x) \geq 0$ 。  $t$  时刻噪声电压取值在  $a$  与  $b$  之间的概率为

$$P(a < x \leq b) = \int_a^b p(x) dx \quad (1-10)$$

而且

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (1-11)$$

式(1-11)说明, 概率密度函数曲线下方覆盖的面积为 1。随机噪声波形  $x(t)$  与概率密度函数  $p(x)$  之间的关系示于图 1-7, 图中的右边部分表示  $x(t)$  随时间  $t$  变化的波形, 左边部分是概率密度函数  $p(x)$  随  $x$  变化的曲线。

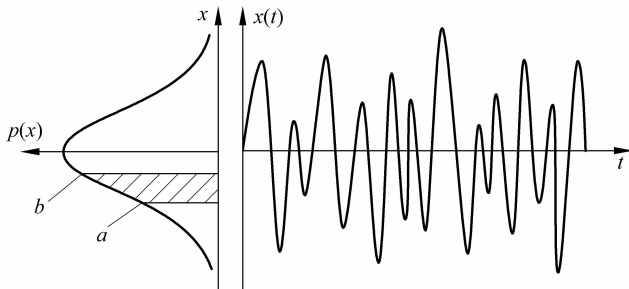


图 1-7 随机噪声波形  $x(t)$  与概率密度函数  $p(x)$  之间的关系

一种重要的概率密度函数是正态分布概率密度函数, 又称为高斯分布, 自然发生的许多随机量属于高斯分布。如果噪声是由很多相互独立的噪声源产生的综合结果, 则根据中心极限定理, 该噪声服从高斯分布。一种典型的信号处理问题是消除信号中的噪声, 或者把噪声从信号中分离开来, 这时经常假设干扰噪声为高斯分布, 这种假设具有一定的合理性。高斯分布的概率密度函数可以表示为

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \quad (1-12)$$

式中,  $\mu_x$  为  $x$  的均值;  $\sigma_x^2$  为  $x$  的方差, 在检测数据处理中有时把  $\sigma_x$  称为标准差。

当  $x = \mu_x$  时,  $p(x)$  取得最大值

$$p(\mu_x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \quad (1-13)$$

需要注意的是, 高斯分布的噪声不一定是白噪声, 白噪声的幅度分布也不一定是高斯分布。概率密度函数和功率谱密度函数是相互独立的不同概念。此外还要注意, 不要把高斯分布的概率密度函数与高斯滤波器的输出混为一谈, 后者的冲激响应函数形状为  $\exp(-t^2)$ , 而且频率响应函数形状为  $\exp(-\omega^2)$ 。高斯滤波器的输出可能具有高斯分布的概率密度函数, 但是对于具有高斯分布的概率密度函数的多种噪声, 其功率谱密度函数可能与高斯形状相去甚远。

式(1-12)说明, 高斯分布的噪声电压  $x$  瞬时值的幅度可以取任何值(实际上要受到放大器的限幅), 但幅度越大则概率越低。当  $x$  偏离  $\mu_x$  较大时,  $p(x)$  迅速减少。满足  $|x - \mu_x| > x_0$  的概率为

$$P(|x - \mu_x| > x_0) = 1 - \frac{1}{\sigma_x} \int_{\mu_x - x_0}^{\mu_x + x_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] dx \quad (1-14)$$

考虑零均值噪声, 在不同  $x_0/\sigma_x$  情况下,  $|x|$  的取值超过  $x_0$  的概率列于表 1-2。

表 1-2 零均值高斯噪声幅值超过  $x_0$  的概率

|                |       |       |       |        |         |
|----------------|-------|-------|-------|--------|---------|
| $x_0/\sigma_x$ | 1.645 | 2.576 | 3.291 | 3.890  | 4.417   |
| $P( x  > x_0)$ | 0.1   | 0.01  | 0.001 | 0.0001 | 0.00001 |

由表 1-2 可以看出, 高斯分布的电路噪声瞬时取值超过  $\mu_x \pm 3.3\sigma_x$  的概率小于 0.1%, 因此在处理一些实际问题时, 可以假设  $p(x)$  的取值限制在  $\mu_x \pm 3.3\sigma_x$  之内。对于高斯分布的随机噪声, 在普通示波器上观测到的将是杂乱无章的一个亮带, 可以用这个亮带的峰-峰值  $V_{P-P}$  除以 6.6 来粗略估算  $\sigma_x$ , 对于零均值噪声,  $\sigma_x$  可以看作其有效值。表 1-2 也说明, 测量随机噪声的放大器的动态范围应该大于被测噪声有效值的 6.6 倍, 否则噪声峰值可能被限幅, 加大测量误差。

另一种重要的概率密度函数是均匀分布概率密度函数, 均匀分布的噪声电压  $x(t)$  在其取值范围内各点的概率相同。在数字信号处理中, A/D 转换过程中的信号量化误差可以认为是均匀分布噪声, 计算机内部运算过程中, 由运算精度有限导致的舍入误差也可以看作均匀分布噪声。

## 1.3.2 随机噪声的均值、方差和均方值

### 1. 均值 $\mu_x$

对于连续的随机噪声  $x(t)$ , 其均值  $\mu_x$  可以用数学期望值来表示

$$\mu_x = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)p(x)dx \quad (1-15)$$

式中的“ $E$ ”为数学期望运算符。电路中的噪声普遍具有各态遍历性质, 其统计平均可以用时间平均来计算, 即

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)dt \quad (1-16)$$

如果用模数(A/D)转换器获得随机噪声  $x(t)$  的大量采样值  $x(i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 则可运用下式来估算其均值

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(i)$$

式中的  $\hat{\mu}_x$  表示均值  $\mu_x$  的估计值。

对于电压或电流型的随机噪声, 均值  $\mu_x$  表示的是其直流分量。

## 2. 方差 $\sigma_x^2$

方差  $\sigma_x^2$  表示的是随机噪声瞬时取值与其均值之差的平方的数学期望值,即

$$\sigma_x^2 = E[x(t) - \mu_x]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - \mu_x]^2 p(x) dx \quad (1-17)$$

在有些文献中,随机噪声  $x(t)$  的方差还常表示为  $\text{Var}[x(t)]$ 。

同样,对于各态遍历的平稳随机噪声,其统计平均可以用时间平均来计算,即

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - \mu_x]^2 dt \quad (1-18)$$

如果用 A/D 转换器获得随机噪声  $x(t)$  的大量采样值  $x(i), i=1, 2, \dots, n$ , 则可运用下式来估算其方差

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x(i) - \mu_x]^2$$

式中的  $\hat{\sigma}_x^2$  表示方差  $\sigma_x^2$  的估计值。

方差反映的是随机噪声的起伏程度。

## 3. 均方值 $\overline{x^2}$ 与有效值

均方值  $\overline{x^2}$  表示的是随机噪声瞬时取值的平方的数学期望值,即

$$\overline{x^2} = E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) p(x) dx \quad (1-19)$$

$\overline{x^2}$  同样可以用时间平均来计算,即

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \quad (1-20)$$

均方值反映的是随机噪声的归一化功率,它表示的是随机电压或电流在  $1\Omega$  电阻上消耗的功率,其单位为  $V^2$  或  $A^2$ 。将噪声电压的归一化功率除以负载电阻值,或将噪声电流的归一化功率乘以负载电阻值,就能得到实际的消耗功率。归一化功率常简称为功率。

$\overline{x^2}$  的平方根是随机噪声的有效值(root mean square, RMS)。如果用 A/D 转换器获得随机噪声  $x(t)$  的大量采样值  $x(i) (i=1, 2, \dots, n)$ , 则可运用下式来估算其有效值

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^2(i)}$$

对式(1-17)进行变换运算,可以得到均值、方差和均方值之间的关系

$$\overline{x^2} = \mu_x^2 + \sigma_x^2 \quad (1-21)$$

式中的  $\mu_x^2$  为直流分量的功率,  $\sigma_x^2$  为交流分量的功率,  $\sigma_x$  为交流分量的有效值。对零均值噪声, 因为  $\mu_x = 0$ , 可得  $\overline{x^2} = \sigma_x^2$ 。

### 1.3.3 随机噪声的相关函数与协方差函数

#### 1. 自相关函数与自协方差函数

随机噪声  $x(t)$  的自相关函数  $R_x(t_1, t_2)$  是其时域特性的平均度量,它反映同一个随机噪

声  $x(t)$  在不同时刻  $t_1$  和  $t_2$  取值的相关程度, 其定义为

$$R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] \quad (1-22)$$

对于各态遍历的平稳随机噪声, 其统计特征量与时间起点无关。令  $t_1 = t - \tau, t_2 = t$ , 则  $R_x(t_1, t_2) = R_x(t - \tau, t)$ , 简记为  $R_x(\tau)$ , 即

$$R_x(\tau) = E[x(t - \tau)x(t)] \quad (1-23)$$

用时间平均来计算式(1-23)的统计平均, 自相关函数可以表示为

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t - \tau)x(t)] dt \quad (1-24)$$

自相关函数具有以下重要特点:

(1) 对实信号, 自相关函数是  $\tau$  的偶函数, 即

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau) \quad (1-25)$$

证明: 对于平稳的随机噪声, 其统计量不随时间起点而变化, 故有

$$R_x(\tau) = E[x(t - \tau)x(t)] = E[x(t)x(t + \tau)] = R_x(-\tau)$$

因此, 自相关函数又可以表示为

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E[x(t)x(t + \tau)] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t)x(t + \tau)] dt \end{aligned}$$

(2) 当  $\tau=0$  时,  $R_x(\tau)$  具有最大值, 即

$$R_x(0) \geq R_x(\tau) \quad (1-26)$$

证明:

$$[x(t) \pm x(t - \tau)]^2 \geq 0$$

所以

$$x^2(t) + x^2(t - \tau) \geq 2x(t)x(t - \tau)$$

取两边的数学期望值, 得

$$R_x(0) \geq R_x(\tau)$$

因此,  $R_x(\tau)$  的一般形状如图 1-8 所示。可见, 从  $\tau=0$  具有最大值开始, 随着  $|\tau|$  的增大,  $|R_x(\tau)|$  呈衰减趋势, 衰减的快慢取决于随机噪声  $x(t)$  不同时刻取值的相关程度。后面的分析将说明,  $x(t)$  的频带越宽,  $|R_x(\tau)|$  衰减得越快。

(3)  $R_x(0)$  反映随机噪声的平均功率, 即

$$R_x(0) = E[x^2(t)] = \overline{x^2} \quad (1-27)$$

(4) 如果  $x(t)$  包含某种周期性分量, 则  $R_x(\tau)$  包含同样周期的周期性分量。若  $x(t)$  是周期为  $T$  的随机信号, 即  $x(t) = x(t + T)$ , 则  $R_x(\tau) = R_x(\tau + T)$  也是周期为  $T$  的函数。

对于平稳的随机噪声, 如果它所包含的周期性分量是正弦信号, 那么  $R_x(\tau)$  将不再包含此正弦分量的相位信息。不管其初相位如何, 谐波分量在自相关函数中总是以余弦函数的形式出现。

(5) 互不相关的两个随机噪声之和的自相关函数等于两个随机噪声自相关函数之和, 即如果  $z(t) = x(t) + y(t)$ , 则  $R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau)$ 。

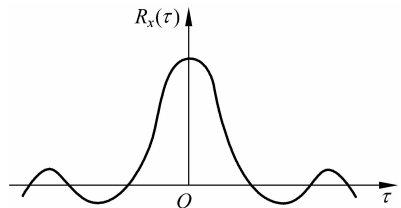


图 1-8 自相关函数一般形状

(6) 对于平稳的随机噪声,  $R_x(\tau)$  仅与时间差  $\tau$  有关, 而与计算时间的起点无关。

(7) 当  $\tau \rightarrow \infty$  时, 自相关函数反映随机噪声直流分量的功率, 即  $R_x(\infty) = \mu_x^2$ 。由式(1-21)和式(1-27)可得

$$R_x(0) - R_x(\infty) = \sigma_x^2$$

自相关函数可以应用于随机噪声, 也可以应用于确定性信号。

**自协方差函数**反映同一个随机噪声  $x(t)$  的交流分量在不同时刻  $t_1$  和  $t_2$  取值的相关程度, 其定义为

$$C_x(t_1, t_2) = E\{[x(t_1) - \mu_x][x(t_2) - \mu_x]\} = R_x(t_1, t_2) - \mu_x^2$$

对于各态遍历的平稳随机噪声, 其统计特征量与时间起点无关, 上式可简化为

$$C_x(\tau) = R_x(\tau) - \mu_x^2$$

式中,  $\tau = t_2 - t_1$ 。对于零均值的平稳随机噪声  $x(t)$ , 有  $\mu_x = 0$ , 则  $C_x(\tau) = R_x(\tau)$ 。

**例 1-1** 利用采样保持器对零均值连续随机电压波形进行不断的采样保持, 保持的时间间隔为 1s。设各采样之间互不相关, 采样值在  $-1 \sim +1$  之间均匀分布。 $t=0$  之后第一次采样时刻  $t_1$  在  $0 \sim 1$ s 之间均匀分布。采样保持器的输出波形  $x(t)$  示于图 1-9, 试求  $x(t)$  的功率  $P_x$  和自相关函数  $R_x(\tau)$  的图形。

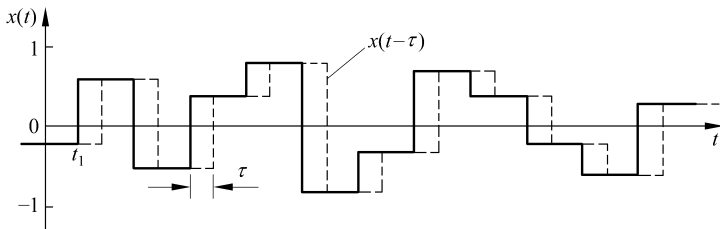


图 1-9 采样保持器的输出波形

**解:** 因为采样值  $x(t)$  在  $-1 \sim +1$  之间均匀分布, 其概率密度函数  $p(x)$  的形状如图 1-10 所示。

由式(1-19)可得,  $x(t)$  的功率为

$$\begin{aligned} P_x &= \overline{x^2} = E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) p(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 0.5x^2(t) dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$x(t)$  延时  $\tau$  的波形如图 1-9 中的虚线所示。当  $\tau = 0$  时, 由式(1-27)可知,  $R_x(0)$  就等于  $x(t)$  的功率  $1/3$ 。当  $\tau \geq 1$ s 时,  $x(t)$  和  $x(t-\tau)$  互不相关,  $R_x(\tau) = 0$ 。当  $|\tau|$  从 0 增加到 1s 时,  $x(t)$  和  $x(t-\tau)$  的重叠部分线性减少, 因此由式(1-24)计算出的它们乘积的均值也线性减少。根据以上分析, 可得  $R_x(\tau)$  的图形如图 1-11 所示。

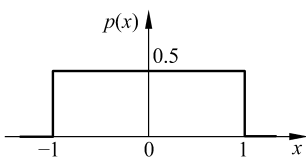


图 1-10 采样保持器输出波形的概率密度函数形状

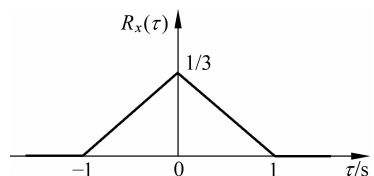


图 1-11 采样保持器输出波形的自相关函数

## 2. 互相关函数与互协方差函数

互相关函数反映两个不同的随机噪声  $x(t)$  和  $y(t)$  在不同时刻  $t_1$  和  $t_2$  取值的相关程度,其定义为

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)y(t_2)]$$

对于平稳的随机噪声,其统计特征量与时间起点无关。令  $t_1 = t - \tau, t_2 = t$ , 则  $R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t - \tau, t)$ , 简记为  $R_{xy}(\tau)$ , 即

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t - \tau)y(t)] \quad (1-28)$$

用时间平均来计算式(1-28)的统计平均,互相关函数可以表示为

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [y(t)x(t - \tau)] dt \quad (1-29)$$

互相关函数具有以下重要特点:

(1) 互相关函数不再是偶函数,即

$$R_{xy}(\tau) \neq R_{xy}(-\tau)$$

但

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$$

(2) 互相关函数的上界由下式确定

$$R_{xy}(\tau) \leq \sqrt{R_x(0)R_y(0)} \quad (1-30)$$

(3)  $\tau$  值很大时的互相关函数反映  $x(t)$  和  $y(t)$  均值的乘积,即

$$R_{xy}(\infty) = \mu_x \mu_y$$

(4) 对于平稳的随机噪声,  $R_{xy}(\tau)$  仅与时间差  $\tau$  有关,而与计算时间的起点无关。

与互相关函数紧密相关的另一个统计量是互协方差函数  $C_{xy}(t_1, t_2)$ , 其定义为

$$\begin{aligned} C_{xy}(t_1, t_2) &= E\{[x(t_1) - \mu_x][y(t_2) - \mu_y]\} \\ &= R_{xy}(t_1, t_2) - \mu_x \mu_y \end{aligned} \quad (1-31)$$

如果对于任意  $t_1$  和  $t_2$  都能满足  $C_{xy}(t_1, t_2) = 0$ , 则称  $x(t)$  与  $y(t)$  互不相关。

对于各态遍历的平稳随机噪声,其统计特征量与时间起点无关,式(1-31)可简化为

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y \quad (1-32)$$

式中,  $\tau = t_2 - t_1$ 。对于零均值的平稳随机噪声  $x(t)$  与  $y(t)$ , 有

$$\begin{aligned} \mu_x &= \mu_y = 0 \\ C_{xy}(\tau) &= R_{xy}(\tau) \end{aligned}$$

在这种情况下,如果对于所有的  $\tau$  都满足  $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0$ , 则称  $x(t)$  与  $y(t)$  互不相关。

相关函数的上述特性对于从噪声中检测微弱信号非常有用。一般情况下,被检测的有用信号与淹没信号的噪声之间不存在相关性,因此采用相关方法有可能把有用信号从噪声中提取出来。这些方法将在“相关检测”一章中详细论述。

描述两路随机噪声相互关系的另一个术语是相互独立。当随机噪声  $x$  与  $y$  相互独立时,其联合概率密度  $p(x, y)$  可以分解为

$$p(x, y) = p(x) \cdot p(y) \quad (1-33)$$

而当式(1-33)成立时,  $x$  与  $y$  必定相互独立,而且  $E[xy] = E[x] \cdot E[y]$ 。

相互独立的两路随机噪声一定互不相关,但互不相关的两路随机噪声不一定相互独立。

**例 1-2** 随机相位正弦波  $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ ,  $\varphi$  在  $0 \sim 2\pi$  之间均匀分布, 幅度  $A$  为常数; 随机幅度正弦波  $y(t) = B\sin(\omega_0 t)$ ,  $B$  是与  $\varphi$  相互独立的随机量,  $B$  的概率密度函数为

$$p(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-B^2/2] \quad (1-33a)$$

试求  $x(t)$  和  $y(t)$  的统计特征量  $\mu_x$ 、 $\sigma_x^2$ 、 $R_x(\tau)$ 、 $\mu_y$ 、 $R_{xy}(\tau)$  和  $C_{xy}(\tau)$ 。

**解:** (1)  $x(t)$  的均值  $\mu_x$

$$\begin{aligned} \mu_x &= E[x(t)] = \int x(t) p(x) dx = \int_0^{2\pi} A\sin(\omega_0 t + \varphi) p(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = 0 \end{aligned}$$

(2)  $x(t)$  的方差  $\sigma_x^2$

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= E[x(t) - \mu_x]^2 = E[A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)] \\ &= \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi) d\varphi = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

(3)  $x(t)$  的自相关函数  $R_x(\tau)$

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E[x(t) x(t - \tau)] \\ &= E[A\sin(\omega_0 t + \varphi) A\sin(\omega_0(t - \tau) + \varphi)] \\ &= A^2 E[\sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0(t - \tau) + \varphi)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(\omega_0 \tau) - \cos(\omega_0(2t - \tau) + 2\varphi)] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) - \frac{A^2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0(2t - \tau) + 2\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

上式右边的第二项积分结果为零, 所以

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

这也就证明了自相关函数的特点(4): 对于正弦信号, 不管其初相位如何, 其自相关函数总是以余弦函数的形式出现。

(4)  $y(t)$  的均值  $\mu_y$

对比式(1-12)与式(1-33a)可知,  $y(t)$  的幅值  $B$  是高斯分布, 其均值为零, 方差为 1, 得

$$\mu_y = E[y(t)] = E[B\cos(\omega_0 t)] = E[B]E[\cos(\omega_0 t)] = 0$$

(5) 互相关函数  $R_{xy}(\tau)$  和互协方差函数  $C_{xy}(\tau)$

因为  $B$  和  $\varphi$  相互独立, 所以可得

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E[x(t - \tau)y(t)] \\ &= E[A\sin(\omega_0(t - \tau) + \varphi) B\sin(\omega_0 t)] \\ &= E[A\sin(\omega_0(t - \tau) + \varphi)] E[B\sin(\omega_0 t)] \\ &= \mu_x \mu_y = 0 \\ C_{xy}(\tau) &= R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y = 0 \end{aligned}$$

### 3. 归一化相关函数与归一化协方差函数

自相关函数  $R_x(\tau)$  和互相关函数  $R_{xy}(\tau)$  不但反映随机噪声在不同时刻取值的相关程度,而且反映随机噪声的幅度和功率,而幅度和功率要受系统增益的影响。为了准确表现随机噪声在不同时刻取值的相关程度,人们引入了归一化(normalized)相关函数的概念。

#### (1) 归一化自相关函数

归一化自相关函数  $\rho_x(\tau)$  定义为

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \quad (1-34)$$

根据式(1-26),  $R_x(0) \geq R_x(\tau)$ , 可知  $\rho_x(\tau)$  的取值范围是  $-1 \leq \rho_x(\tau) \leq +1$ 。

#### (2) 归一化互相关函数

归一化互相关函数  $\rho_{xy}(\tau)$  定义为

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_x(0)R_y(0)}} \quad (1-35)$$

由式(1-30),  $R_{xy}(\tau) \leq \sqrt{R_x(0)R_y(0)}$ , 可知  $\rho_{xy}(\tau)$  的取值范围是

$$-1 \leq \rho_{xy}(\tau) \leq +1$$

归一化互相关函数反映两路随机噪声的相关程度,不受系统增益的影响。

图 1-12 示出 4 种不同归一化互相关函数  $\rho_{xy}$  情况下  $x$  和  $y$  的采样值情况。

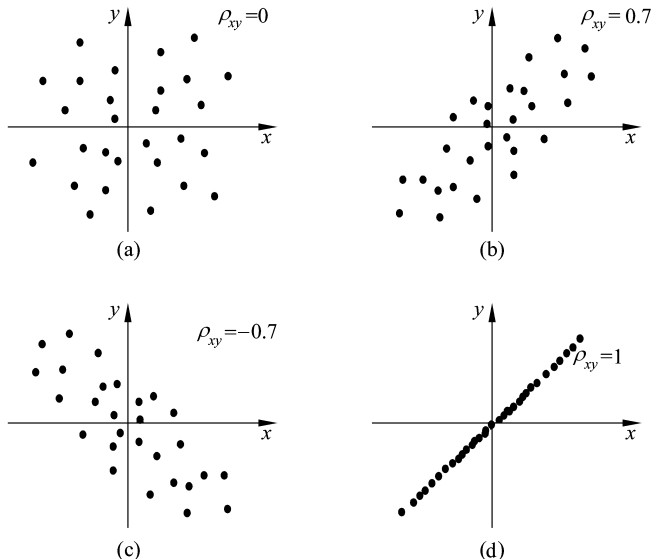


图 1-12 不同归一化互相关函数情况下  $x$  和  $y$  的采样值情况

(a)  $\rho_{xy}=0$ ; (b)  $\rho_{xy}=0.7$ ; (c)  $\rho_{xy}=-0.7$ ; (d)  $\rho_{xy}=1$

归一化相关函数消除了随机噪声的幅度和功率的影响,能够更准确地反映随机噪声的相关程度。但是在微弱信号检测中,不但要利用相关函数的性质从随机噪声中提取出有用信号,而且信号的幅度是至关重要的,所以相比之下一般的相关函数比归一化相关函数使用得更为普遍一些。

### (3) 归一化协方差函数

归一化自协方差函数定义为

$$c_x(\tau) = \frac{E\{[x(t) - \mu_x][x(t - \tau) - \mu_x]\}}{\sigma_x^2} = \frac{C_x(\tau)}{\sigma_x^2}$$

归一化互协方差函数定义为

$$c_{xy}(\tau) = \frac{E\{[y(t) - \mu_y][x(t - \tau) - \mu_x]\}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}$$

归一化协方差函数又称为相关系数。

考虑两路平稳随机噪声之和  $z(t) = x(t) + y(t)$ , 则有  $\mu_z = \mu_x + \mu_y$ ,  $z(t)$  的方差为

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= E[z(t) - \mu_z]^2 = E[x(t) - \mu_x]^2 + E[y(t) - \mu_y]^2 + 2E[(x(t) - \mu_x)(y(t) - \mu_y)] \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2c_{xy}(0)\sigma_x\sigma_y \end{aligned}$$

如果  $x(t)$  与  $y(t)$  互不相关, 则  $c_{xy}(0) = 0$ , 得

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

上式说明, 对于叠加在一起的两个互不相关的零均值噪声, 如果其中一个的有效值小于另一个的  $1/3$ , 则可将前者忽略。

## 1.3.4 随机噪声的功率谱密度函数

### 1. 功率谱密度函数

设噪声电压  $x(t)$  的功率为  $P_x$ , 在角频率  $\omega$  与  $\omega + \Delta\omega$  之间的功率为  $\Delta P_x$ , 噪声的功率谱密度函数定义为

$$S_x(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta\omega}$$

它反映的是噪声功率在不同频率点上的分布情况。

根据著名的维纳-辛钦(Wiener-Khinchin)定理<sup>[2,3]</sup>, 对于有限能量的平稳随机过程, 自相关函数  $R_x(\tau)$  和功率谱密度函数  $S_x(\omega)$  之间满足傅里叶变换关系, 其复数表示法为

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1-36)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1-37)$$

也就是说,  $R_x(\tau)$  和  $S_x(\omega)$  构成一对傅里叶变换对, 它们与确定性信号  $f(t)$  及其频谱  $G(j\omega)$  之间的傅里叶变换对很相似, 只不过  $\tau$  表示的是延时变量, 而  $t$  表示的是时间变量。

功率谱密度函数  $S_x(\omega)$  具有下列特点:

(1) 因为  $R_x(\tau)$  是  $\tau$  的实偶函数, 所以  $S_x(\omega)$  为  $\omega$  的实偶函数, 即

$$S_x(\omega) = S_x(-\omega)$$

而且

$$S_x(\omega) \geq 0$$

由于  $S_x(\omega)$  与  $R_x(\tau)$  均为实偶函数,  $e^{-j\omega\tau}$  和  $e^{j\omega\tau}$  的虚部对积分无贡献, 式(1-36)和式(1-37)

又可以分别表示为

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (1-38)$$

$$R_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_x(f) \cos(\omega\tau) df \quad (1-39)$$

因为自相关函数  $R_x(\tau)$  不包含  $x(t)$  的相位信息, 所以功率谱密度函数  $S_x(\omega)$  也不带有信号的各个频率分量的相位信息。

(2) 功率谱密度函数  $S_x(\omega)$  曲线下覆盖的面积表示噪声的功率  $P_x$ 。

将  $\tau=0$  代入式(1-37)和式(1-27), 得

$$P_x = \overline{x^2} = E[x^2(t)] = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (1-40)$$

这也从功率谱密度函数的角度印证了自相关函数  $R_x(0)$  反映随机噪声的功率这一性质。

自相关函数  $R_x(\tau)$  的形状、功率谱密度函数  $S_x(\omega)$  的形状都与随机噪声  $x(t)$  随时间变化的速度有关。 $x(t)$  变化越快, 说明它占据的频带越宽,  $S_x(\omega)$  也就越宽; 同时, 对于变化较快的时域噪声, 其不同时刻取值的相关性就要较差,  $R_x(\tau)$  的峰区就较窄。对于宽带噪声和窄带噪声, 三者之间的关系示于图 1-13。

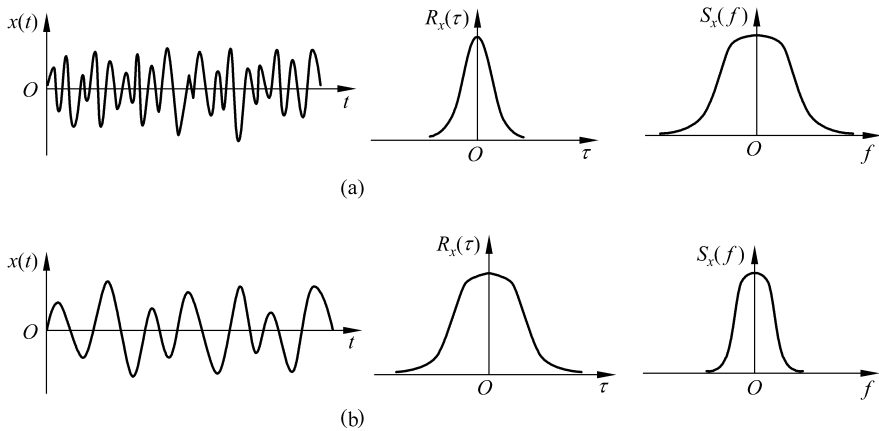


图 1-13 时间函数、自相关函数和功率谱密度函数

(a) 宽带噪声; (b) 窄带噪声

前文所述的功率谱密度函数都是以  $f=0$  为对称轴的偶函数, 称之为双边功率谱密度函数, 其负频率部分没有明确的物理意义。在实际应用中, 还常使用单边功率谱密度函数  $S'_x(f)$ , 其定义为

$$S'_x(f) = \begin{cases} 2S_x(f), & f \geq 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (1-40a)$$

$S'_x(f)$  与  $S_x(f)$  之间的关系示于图 1-14。

由单边功率谱密度函数  $S'_x(f)$  计算噪声的功率  $P_x$  时, 注意积分限为  $0 \sim \infty$ , 即

$$P_x = \int_0^{\infty} S'_x(f) df \quad (1-40b)$$

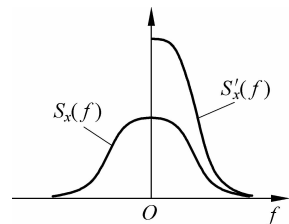


图 1-14 单边功率谱密度函数  $S'_x(f)$  与双边功率谱密度函数  $S_x(f)$  之间的关系

例 1-3 随机噪声  $x(t)$  的自相关函数为

$$R_x(\tau) = \sigma^2 \exp(-\beta |\tau|)$$

其形状示于图 1-15(a), 求其功率谱密度函数和功率。

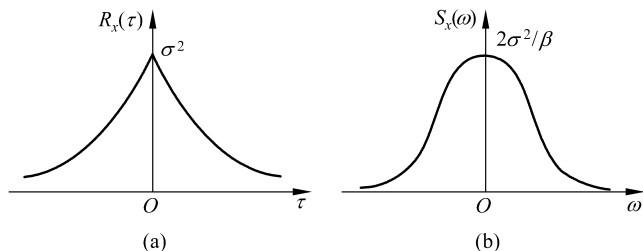


图 1-15 例 1-3 的自相关函数和功率谱密度函数

(a) 自相关函数; (b) 功率谱密度函数

解: 将  $R_x(\tau)$  代入式(1-36), 得

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \exp(-\beta |\tau|) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2\sigma^2\beta}{\omega^2 + \beta^2}$$

$S_x(\omega)$  的形状示于图 1-15(b)。

将  $S_x(\omega)$  代入式(1-40)可得,  $x(t)$  的功率  $P_x$  为

$$\begin{aligned} P_x &= E[x^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sigma^2\beta}{\omega^2 + \beta^2} d\omega \\ &= \frac{\sigma^2\beta}{\pi} \left[ \frac{1}{\beta} \arctan \frac{\omega}{\beta} \right]_{-\infty}^{\infty} = \sigma^2 \end{aligned}$$

也可以利用  $P_x = R_x(0)$  直接由自相关函数  $R_x(\tau)$  求得  $P_x = \sigma^2$ 。

## 2. 互谱密度函数

平稳随机噪声  $x(t)$  和  $y(t)$  的互相关函数  $R_{xy}(\tau)$  的傅里叶变换称为互谱密度函数。即

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1-41)$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1-42)$$

互谱密度函数的物理意义不是太明确。互相关函数  $R_{xy}(\tau)$  一般不是偶函数, 所以互谱密度函数  $S_{xy}(\omega)$  通常是  $\omega$  的复函数, 它不具有功率意义。  $S_{xy}(\omega)$  具有以下性质:

(1) 对称性

实信号的互相关函数也是实函数, 所以它的傅里叶变换是共轭对称的, 即

$$S_{xy}(\omega) = S_{xy}^*(-\omega)$$

这说明  $S_{xy}(\omega)$  的实部为偶函数, 虚部为奇函数。又因为  $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$ , 所以

$$S_{xy}(\omega) = S_{yx}(-\omega)$$

(2) 互谱不等式

对于任何频率  $\omega$  下列不等式都成立

$$|S_{xy}(\omega)|^2 \leq S_x(\omega) S_y(\omega)$$

考虑两路平稳随机噪声之和