第 3 章

正弦交流电路

在电力系统中，当所有电源都是同一频率的正弦交流电源，且电路中各处的电压、电流也都是同一频率的正弦量时，人们就称这类电路为正弦电流电路，俗称交流电路。

在正弦电流电路中，除要考虑电阻的作用外，还要考虑电感和电容的作用。由于电路中的电压和电流是随时间变动的，电路周围的电场和磁场也就随着时间而变动着，因此在研究正弦电流电路时，还必须引入电感元件和电容元件来建立电路模型。

数学工具中，复数及相量分析方法的采用，可以大大简化正弦电流电路的分析计算，因为它可以把非常繁杂的三角函数运算转化为简单的代数运算，并且可以在相量图上清晰地表明有关量之间的大小和相位关系，这种方法称为相量法。它是电路理论中的重要方法，对它的介绍和应用也将贯穿本章的始终。

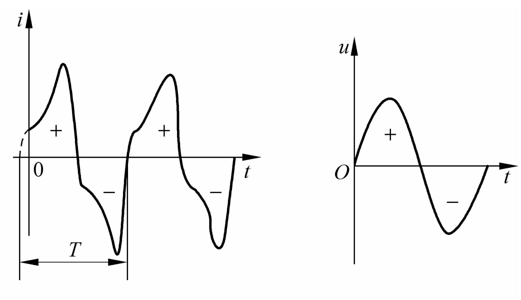
3.1 正弦量的三要素

3.1.1 正弦交流电概述

在前面两章所学习的直流电路中，电流、电压和电动势等量的大小和方向都是不随时间变化的，但实际上在大多数情况下，电路中电流、电压、电动势等量都是随时间而变化的；而且不仅大小随时间变化，方向也常常是不断反复交替地变化着。当这些物理量的大小和方向都随时间作周期性变化，就称它们为周期变量，而当它们在每一周期里的正负半周又恰好能相互抵消时，人们就把这样的电流、电压、电动势统称为交流电，如图 3-1(a)、(b)所示。

交流电的应用非常广泛。由于交流电器的构造比直流电器简单，成本低，维护方便，工作可靠，此外，利用变压器能把某一数值的交流电压变换成同率的另一数值的交流电压，这样又可以解决高压输电和低压配电之间的矛盾，因此发电厂发出的电能几乎都是交流电，所以实际生活和生产实践中的绝大多数设备都是采用交流电。即便是某些需要直流电的地方，也常常利用整流设备把交流电转换成直流电。

最常用的交流电是随时间作正弦规律变化的，所以称为正弦交流电，如图 3-1(b)所示。



(a) 正负半周正好抵消的周期电流　　(b) 正弦交流电压

图 3-1　交流电流、交流电压

3.1.2　正弦量的三要素

以电流为例，正弦电流的瞬时值解析式为

$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi) \tag{3-1}$$

波形如图 3-2 所示(设 $\psi>0$)，此正弦电流的解析式和波形都是对应于已选定的参考方向而言的。瞬时值为正，表示其方向与所选参考方向相同；瞬时值为负，表示其方向与所选参考方向相反。

下面分别解释式(3-1)中 I_{m}、ω、ψ 的意义。

1. 振幅

I_{m} 是正弦量各瞬时值中最大的，称作正弦量的最大值、又称振幅。正弦量在一个周期内，两次达到同样的最大值，只是方向不同(即有正最大和负最大)。

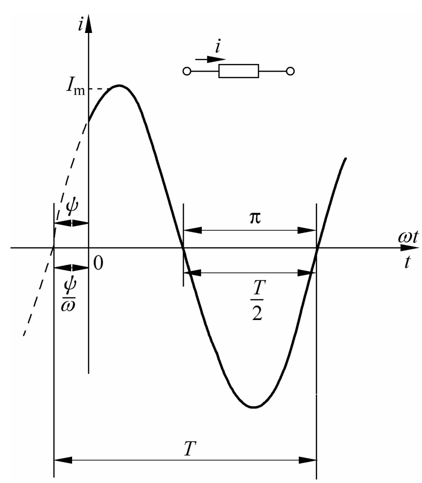


图 3-2　正弦量的波形

2. 角频率

正弦量解析式中的角度($\omega t+\psi$)称作正弦量的相位角，简称相位。而正弦量相位增加的速率可以用 ω 表示，称为正弦量的角频率，角频率的单位为 rad/s(弧度/秒)，rad 可以略去不写，其单位便为 1/s。

随着时间的推移，相位逐渐加大。相位每增加 2πrad(弧度)，正弦量就经历了一个周期，然后又重复原先的变化规律，所以正弦量的角频率 ω、周期 T 和频率 f 三者之间的关系为

$$\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T} \tag{3-2}$$

它们反映的都是正弦量变化的快慢，直流量因为大小、方向都不变，可以看成 $\omega=0$(即 $f=0$、$T=\infty$)的正弦量。

每个国家的电力工业，都会采用一个标准的工业频率，人们称之为“工频”。我国和世界上许多国家的工频是 50Hz(对应的周期就是 0.02s)，此时的角频率为

$$\omega=100\pi=314\text{rad/s}$$

而美国、加拿大等一些国家的工频为60Hz。

人们能听到的声音信号的频率范围为20～20000Hz。广播用的中波段载波频率为535～1605kHz,电视信号的载波频率则更高,通常要以MHz计。

3. 初相位

正弦量在不同的瞬间t,有着不同的相位。在不同的瞬间,正弦量的值(包括大小和正负)不同,而且变化趋势(增加或是减少;变化得快或是慢)也不同。相位反映了正弦量每一瞬间的状态。将$t=0$时(即计时起点时)正弦量的相位角ψ,称为正弦量的初相位,简称初相,初相反映了正弦量在计时起点时的状态。

综上所述,I_{m}反映了正弦量的幅度,ω反映了正弦量变化的快慢,ψ反映了正弦量在计时起点时的状态。确定了这3个量,正弦量也就被完全确定下来了,因此人们将一个正弦量的振幅I_{m}(或将要介绍的有效值)、角频率ω(或频率、周期)与初相位ψ这3个量,统称为正弦量的三要素。

正弦量的相位和初相都与计时起点的选择有关,计时起点选择不同,相位和初相也就跟着改变,计时起点是任意选定的,但在同一问题中只能有一个计时起点。现以一个最大值为I_{m}、角频率为ω的正弦电流为例,说明同一个正弦量在不同计时起点时波形的区别。

(1) 如选正弦量到达零点的瞬间(此处设为由负向正的上升过程中取值为零的点,下同)为计时起点,则其初相为零,波形及解析式如图3-3(a)所示。

(2) 如选瞬时值为I_{m}的瞬间为计时起点,则其初相为$\frac{\pi}{2}$,波形及解析式如图3-3(b)所示。

(3) 如选瞬时值为$\frac{I_{\mathrm{m}}}{2}$的瞬间为计时起点,则其初相为$\frac{\pi}{6}$,波形及解析式如图3-3(c)所示。

(4) 如选瞬时值为$-\frac{I_{\mathrm{m}}}{2}$的瞬间为计时起点,则其初相为$-\frac{\pi}{6}$,波形及解析式如图3-3(d)所示。

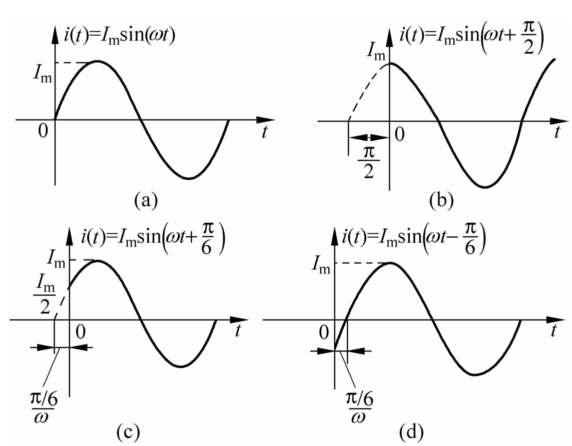


图3-3 正弦量的波形与计时起点

对于正弦电压、正弦电动势或其他所有正弦量，都可以用完全相同的方法进行讨论并作出波形图。

3.1.3　正弦量的有效值

电路的一个主要作用是转换能量。周期量的瞬时值、最大值都不能确切反映它们在转换能量方面的效果，这里所说的效果是指在一段较长时间内，从电功率、电能及热效应等方面来衡量一个周期量（如周期电流、周期电压等）的平均效果，为此引进有效值的概念。

周期量有效值的定义如下。一个周期量和一个直流量，分别作用于同一电阻，如果经过一个周期的时间产生相等的热量，则这个周期量的有效值就等于这个直流量的大小。

依照上述定义，通过数学推导可得到：一个周期量的有效值，等于其瞬时值的平方在一个周期内的平均值再开方，所以周期量的有效值，又称为它的方均根值。通过进一步的分析计算，又可以得出：正弦量的有效值，等于它的最大值除以 $\sqrt{2}$（即等于它的最大值乘以 0.707），这对于正弦电流、正弦电压、正弦电动势和正弦磁通等都是适用的。浅显点说，就是最大值为 1A 的正弦交流电流（或最大值为 1V 的正弦交流电压、最大值为 1V 的正弦交流电动势等），在电路中转换能量方面的实际效果，和 0.707A 的直流电流（或 0.707V 的直流电压、0.707V 的直流电动势等）相当。

有效值均用大写字母表示，而最大值则是在相应大写字母的右边加上脚标 m，对应的数学表达式为

$$I=\frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}},\quad U=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}},\quad E=\frac{E_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}},\quad \Phi=\frac{\Phi_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \tag{3-3}$$

通常人们所说公用及民用电（交流电网）中电流、电压的数值（如家用电器额定电压为 220V 等），都是指的有效值。

例 3-1　已知某正弦交流电压的幅值为 $U_{\mathrm{m}}=311\mathrm{V}$，频率为工频（即 $f=50\mathrm{Hz}$），初相 $\varphi=-60°$。(1)求出其周期和角频率。(2)求出它的有效值。(3)写出此正弦电压的解析表达式，并画出其波形图。

解：(1) 因为 $f=50\mathrm{Hz}$

所以它的周期为　$T=1/f=0.02\mathrm{s}$

角频率为　$\omega=2\pi f=314\mathrm{rad/s}$

(2) 根据公式，此正弦电压的有效值为

$$U=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}=\frac{311}{\sqrt{2}}\approx 220\mathrm{V}$$

(3) 三要素都已经确定了，所以可直接写出它的解析表达式。

$$u=311\sin(314t-60°)\mathrm{V}$$

其波形图也可举一反三由已经确定的三要素画出。

思考与练习

3.1.1　正弦量的三要素是什么？有效值与最大值的区别是什么？相位与初相位有什么区别？

3.1.2 在某电路中 $u(t)=141\sin(314t-20^\circ)$ V。(1)指出它的频率、周期、角频率、幅值、有效值及初相角各是多少。(2)画出波形图。(3)如果 $u(t)$ 的参考方向选相反方向,写出 $u(t)$ 的表达式,画出波形图,并确定(1)中各项是否改变。

3.2 正弦量的相量表示法

3.2.1 复数的几种表示方法和基本运算

1. 代数形式表示法

复数 A 的代数形式为

$$A = a + \mathrm{j}b \tag{3-4}$$

其中:a 和 b 都是实数,a 称为复数的实部;b 称为复数的虚部;$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$,称为虚数单位。由 j 与实数相乘而得的数称为虚数,复数是由实数和虚数组合而成的数,而实数和虚数都是复数的特例。

在平面直角坐标系中,如果用横轴表示复数的实部(称为实轴),以 $+1$ 为单位;用纵轴表示复数的虚部(称为虚轴),以 $+\mathrm{j}$ 为单位。这样由实轴和虚轴构成的平面称为复平面。

很显然,在复数 $A=a+\mathrm{j}b$ 中,实数 a 的点在实轴上,虚数 $\mathrm{j}b$ 的点在虚轴上,于是,复数 A 便在复平面上有一个确定的点,如图 3-4(a)所示。

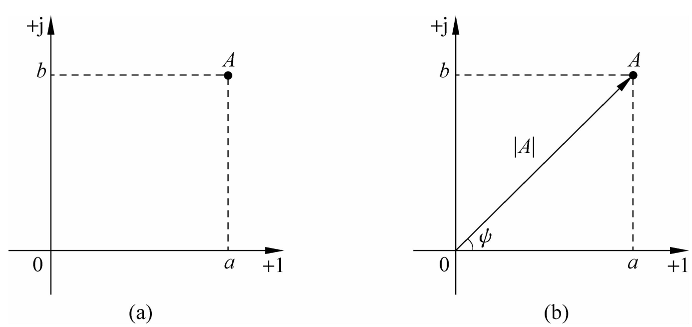


图 3-4 复平面上的点

2. 三角形式表示法

复数的三角形式为

$$A=|A|\cos\psi+\mathrm{j}|A|\sin\psi \tag{3-5}$$

与代数式比较,显然有

$$a=|A|\cos\psi,\quad b=|A|\sin\psi,\quad |A|=\sqrt{a^2+b^2},\quad \tan\psi=\frac{b}{a}$$

其中:$|A|$ 称为复数 A 的模,恒为正值;ψ 称为复数 A 的辐角,如图 3-4(b)所示。

3. 指数形式表示法

复数的指数形式为

$$A=|A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \tag{3-6}$$

上式可从其三角形式再由欧拉公式推导得到。

4．极坐标形式表示法

复数的极坐标形式为

$$A=|A|\angle\psi \tag{3-7}$$

复数的极坐标形式与指数形式，只是写法不同而已，其实它们的含义是完全等价的。

今后为了运算方便，常需要在复数的这几种表示式之间进行相互转换。

5．复数的加减运算

复数进行加减运算，要先把各复数都化为代数形式。

设有两个复数

$$A_1=a_1+\mathrm{j}b_1=|A_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_1}$$

$$A_2=a_2+\mathrm{j}b_2=|A_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_2}$$

则有

$$A_1\pm A_2=(a_1+\mathrm{j}b_1)\pm(a_2+\mathrm{j}b_2)=(a_1\pm a_2)+\mathrm{j}(b_1\pm b_2)$$

即复数相加（或相减）时，将实部与实部相加（或相减），虚部与虚部相加（或相减）。

6．复数的乘除运算

复数在代数形式和指数形式（或极坐标形式）下，都可以进行乘除运算，但通常情况下，将它们都化为指数形式（或极坐标形式）来进行乘除运算（或乘方开方运算），将更加方便。下面以复数的指数形式为例进行说明。

复数的乘法　$A_1A_2=|A_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_1}\cdot|A_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_2}=|A_1|\cdot|A_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_1+\psi_2)}$

同理除法的结果为　$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{|A_1|}{|A_2|}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_1-\psi_2)}$

7．共轭复数

如果两个复数的实部相等，虚部互为相反数（此时一定也有它们的模相等，辐角互为相反数），则称这两个复数互为共轭复数。常以字母上加“＊”号作为标记。

$$\left.\begin{aligned}A&=a+\mathrm{j}b=|A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\\A^*&=a-\mathrm{j}b=|A|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi}\end{aligned}\right\} \tag{3-8}$$

式（3-8）中，复数 A 与 A^* 就是一对共轭复数。

3.2.2　正弦量的相量表示法

相量其实就是用来表示正弦量的一种特殊复数。因为正弦交流电用三角函数及其波形来表示，是很直观的，但不便于计算；所以在解算正弦交流电路时，通常采用相量法，将复杂的三角函数运算，转化为简单的代数运算，并可以通过相量图，清晰地表明有关各量之间的大小及相位关系。此内容是本节乃至全章的重点，需要牢固掌握。

求解一个正弦量必须求得它的三要素，但在正弦交流电路中，由于所有的电流、电压都是同一频率的正弦量，而且它们的频率与正弦电源的频率相同，往往是已知的，因此只要分析另外两个要素——幅值（或有效值）及初相位就可以了。用复数表示正弦量时，也就是根据这一原理写出它们的相量。

例如对于一个正弦电压 $u=U_\mathrm{m}\sin(\omega t+\psi_u)$，用这样一个复数表示：它的模为 U_m，辐角为 ψ_u，记作$\dot{U}_\mathrm{m}=U_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_u}$。

这就是用来表示这个正弦电压的振幅相量，上面所加的小圆点是用来与一般复数相

区别的记号(这也是相量的专用标记),强调这种复数是与一个正弦量相联系的。

由于在实际工程应用中,广泛使用的是有效值,而且对于正弦量,其幅值与有效值之间有着固定的$\sqrt{2}$倍的关系,所以今后更多采用的是有效值相量,它等于振幅相量除以$\sqrt{2}$,即

$$\dot{U}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \tag{3-9}$$

以上仅以一个正弦电压作为例子,对于其他正弦量(如正弦电流、正弦电动势等),它们相量的构成、含义以及书写原则等,当然也都是一模一样的。并且这里约定:以后若无特殊说明,本书所说某个正弦量的相量,都是指它的有效值相量。

3.2.3 相量的运算

由于相量本身就是一种复数,因此上述所有关于复数的运算规则,在相量运算中都是适用的。解题的关键环节,还是在于有关正弦量和它的相量之间的转换及相互关系上。一个正弦量与它的相量是一一对应的,这种对应关系也非常简单。需要特别注意的是,正弦量与它的相量之间只是表示与被表示的关系,但它们是完全不相等的两个量(一个是三角函数,一个是复数)。

下面通过例题来说明相量的一般应用和运算。

例 3-2 已知有两个同频率的正弦交流电流 $i_1=6\sqrt{2}\sin(\omega t+60^\circ)$ A,$i_2=8\sqrt{2}\sin(\omega t-30^\circ)$ A,试求它们相加后的总电流。

解法 1:此题用相量法来解非常方便。

先写出这两个正弦电流的相量,分别为

$$\dot{I}_1=6\mathrm{e}^{\mathrm{j}60^\circ}\,\mathrm{A},\quad \dot{I}_2=8\mathrm{e}^{-\mathrm{j}30^\circ}\,\mathrm{A}$$

所以

$$\begin{aligned}\dot{I}&=\dot{I}_1+\dot{I}_2=6\mathrm{e}^{\mathrm{j}60^\circ}+8\mathrm{e}^{-\mathrm{j}30^\circ}\\&=3+\mathrm{j}5.2+6.93-\mathrm{j}4\\&=9.93+\mathrm{j}1.2\\&=10\mathrm{e}^{\mathrm{j}6.9^\circ}\,\mathrm{A}\end{aligned}$$

所以总电流为

$$i=i_1+i_2=10\sqrt{2}\sin(\omega t+6.9^\circ)\ \mathrm{A}$$

3.2.4 相量图

相量既然是一种复数,就可以在复平面上将它表示出来;比如对于相量$\dot{U}=U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_u}$它在复平面上可以用长度为$U$、方向与实轴正向夹角为$\psi_u$的矢量来表示,这样作出用来表示相量的图称为相量图。通常为简便起见,实轴和虚轴也可省去不画。

利用相量图分析正弦电流电路,不仅可以非常直观、清晰地表明有关量之间大小及相位的关系,而且有时还能使一些计算变得十分方便。仍以上面的例 3-2 为例,利用相量图法重解此题。

解法 2:先写出这两个正弦电流的相量,分别为

$$\dot{I}_1 = 6e^{j60^\circ}\,A,\quad \dot{I}_2 = 8e^{-j30^\circ}\,A$$

在复平面上作出这两个相量的相量图，如图 3-5 所示。

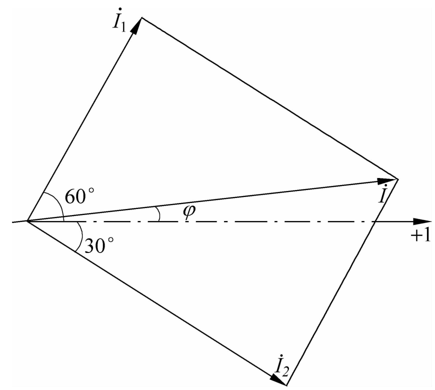


图 3-5　相量图解题法

显然此题中两个电流的相位差正好等于 90°，即相量图上两个矢量是相互垂直的，可利用平行四边形法则直接求得

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10A$$

$$\tan(\psi + 30^\circ) = 6/8 = 0.75$$

所以 $\psi = 36.9^\circ - 30^\circ = 6.9^\circ$

即 $\dot{I} = 10e^{j6.9^\circ}\,A$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 6.9^\circ)\ A$$

上例说明，将同频率的正弦量相加或相减时，只需将相应的相量相加或相减。所以用相量法解题比直接通过三角函数公式运算要方便得多，但参加讨论的量必须都是同频率的正弦量(否则上述的相量法就不成立，也更不存在相量图解题法)。而本章讨论的是正弦交流电路，它们都是在正弦激励作用下，经过一段时间(电路已进入稳定状态)以后的情况，正好符合各电压、电流都是同频率正弦量的前提(并且连计算结果都是同频率的正弦量)。所以这时可以放心地应用相量法。

思考与练习

3.2.1　已知复数 $F_1 = -5 + j2$ 和 $F_2 = 3 + j4$，试求 $F_1 + F_2$，$F_1 - F_2$，F_1F_2，F_1/F_2。

3.2.2　已知 $\dot{I}_1 = 3 + j4A$，$\dot{I}_2 = 3 - j4A$，$\dot{I}_3 = -3 + j4A$ 和 $\dot{I}_4 = -3 - j4A$，试把它们转化为极坐标形式，并写出对应的正弦量。

3.2.3　当 $i = i_1 + i_2$ 时，一定有 $I = I_1 + I_2$ 吗？另外，$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ 成立吗？

3.3　正弦电路中的电路元件

前两章所讨论的是电阻电路，只引入了电阻元件，而到了交流电路(以及今后要讨论的各种电路中)，除电阻元件外，还有电感和电容也都是必须讨论的重要元件。

这里所说的电阻元件、电感元件和电容元件都是指组成电路模型的理想元件。电阻元件具有消耗电能的性质(电阻性)，其他电磁性质均可忽略不计。同样，对电感元件，突出其中通过电流要产生磁场而储存磁场能量的性质(电感性)；对电容元件，突出其上加了电压要产生电场而储存电场能量的性质(电容性)。电阻元件是耗能元件，后两者是储能元件。

电路元件都由相应的参数来表征。当参数不同时，其性质就不同，这种不同也反映在电压与电流的关系上。因此，在分析各种具有不同参数元件的正弦交流电路之前，需要先讨论一下在不同参数的元件中，电压与电流的一般关系。这里首先必须掌握的是：单一参数(电阻、电感、电容)元件电路中电压与电流之间的关系，因为其他电路无非是一些单

一参数元件的组合而已。

以下逐一分析各单一参数元件的正弦交流电路。

3.3.1 电阻元件

图 3-6(a)是一个线性电阻元件的交流电路。电压和电流的参考方向如图 3-6(a)所示。两者的关系由欧姆定律确定,即

$$u = Ri \tag{3-10}$$

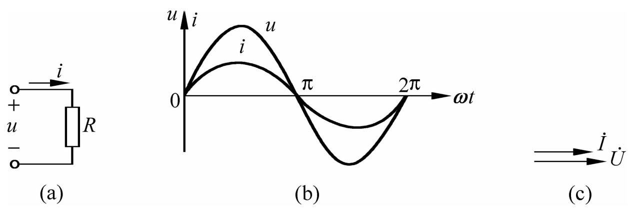


图 3-6 电阻元件的正弦交流电路

为了分析方便,选择电流经过零值并将向正值增加的瞬间作为计时起点($t=0$),即设正弦电流

$$i = I_m \sin\omega t \tag{3-11}$$

为参考正弦量,则

$$u = Ri = RI_m \sin\omega t = U_m \sin\omega t \tag{3-12}$$

显然,它们都是同频率的正弦量。表示电压和电流的正弦波形如图 3-6(b)所示。比较上列两式即可看出,在电阻元件的交流电路中,电流和电压是同相位的(相位差 $\varphi=0°$),并且电压和电流的量值关系为

$$U_m = RI_m \quad 或 \quad U = RI \tag{3-13}$$

由上面分析可以进一步导出电压和电流的相量关系式

$$\dot{U} = R\dot{I} \tag{3-14}$$

电压和电流的相量图如图 3-6(c)所示。

3.3.2 电感元件

下面接着来分析非铁心线圈与正弦电源连接时的电路(假定这个线圈只具有电感 L,而电阻 R 极小,可忽略不计,即这是个理想的线性电感元件)。图 3-7 是这个线性电感元件交流电路的示意图,先来分析这个元件在电路中电压与电流之间的瞬时关系。

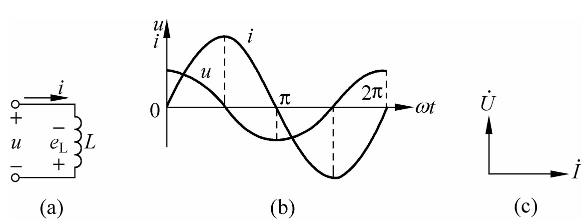


图 3-7 电感元件的正弦交流电路

当电感线圈中通过交流 i 时，其中产生自感电动势 e_L。设电流 i、电动势 e_L 和电压 u 的参考方向如图 3-7(a)所示。

由法拉第电磁感应定律和基尔霍夫电压定律得出式(3-15)，即

$$u = -e_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{3-15}$$

此处仍设正弦电流为参考正弦量

$$i = I_m \sin\omega t$$

则

$$\begin{aligned} u &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}(I_m \sin\omega t)}{\mathrm{d}t} \\ &= \omega L I_m \sin(\omega t + 90°) \\ &= U_m \sin(\omega t + 90°) \end{aligned} \tag{3-16}$$

比较后可看出，它们虽然都是同频率的正弦量，但二者的相位不同，即在电感元件的交流电路中，电压超前于电流 90°(相位差 $\varphi = 90°$)，表示电压和电流的正弦波形如图 3-7(b)所示。并且电压和电流的量值关系为

$$U_m = \omega L I_m \quad 或 \quad U = \omega L I \tag{3-17}$$

在电感元件的电路中，电压的幅值(或有效值)与电流的幅值(或有效值)之比为 ωL，可见 ωL 的单位也为欧姆，与频率成正比，由于它具有对电流起阻碍作用的物理性质，所以人们把它称为感抗，用 X_L 表示，即

$$X_L = \omega L \tag{3-18}$$

由上面分析可以导出电压和电流的相量关系式

$$\dot{U} = \mathrm{j}\omega L \dot{I} \tag{3-19}$$

电压和电流的相量图如图 3-7(c)所示。

3.3.3　电容元件

再来看一下线性电容元件与正弦电源连接时的电路。电路中的电流和电容器两端电压的参考方向如图 3-8(a)所示，先分析其中电压与电流之间的瞬时关系。当电压发生变化时，电容器极板上的电荷量也要随着发生变化，在电路中就会引起电流。

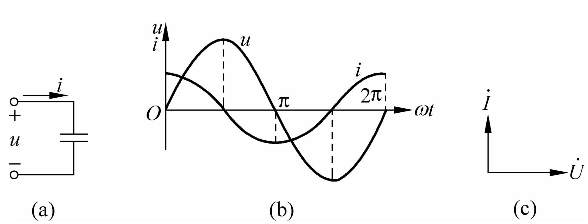


图 3-8　电容元件的正弦交流电路

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{3-20}$$

此处设正弦电压为参考正弦量

$$u = U_{\mathrm{m}}\sin\omega t \tag{3-21}$$

则

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}(U_{\mathrm{m}}\sin\omega t)}{\mathrm{d}t} = \omega C U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + 90^\circ) = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + 90^\circ) \tag{3-22}$$

类似对电感元件的讨论,可看出这里电压和电流也是同频率的正弦量,但在电容元件的交流电路中,电压滞后于电流 90°(相位差 $\varphi=-90^\circ$),表示电压和电流的正弦波形如图 3-8(b)所示。并且电压和电流的量值关系为

$$\frac{U_{\mathrm{m}}}{I_{\mathrm{m}}} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C} \tag{3-23}$$

在电容元件的电路中,电压的幅值(或有效值)与电流的幅值(或有效值)之比为$\frac{1}{\omega C}$,显然$\frac{1}{\omega C}$的单位也是欧[姆],且其大小与频率成反比,它也具有对电流起阻碍作用的物理性质,所以人们把它称为容抗,用 X_{C} 表示,即

$$X_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\omega C} \tag{3-24}$$

同样可以导出电压与电流的相量关系式

$$\dot{U} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I} = \frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega C} \tag{3-25}$$

电压和电流的相量图如图 3-8(c)所示。

思考与练习

3.3.1 电流相量 30－j10mA 流过 40Ω 电阻,求:(1)电阻两端的电压有效值;(2)此电阻两端的电压瞬时表达式(设电压、电流参考方向一致)。

3.3.2 有一 R、L、C 串联的交流电路,已知 $R=X_{\mathrm{L}}=X_{\mathrm{C}}=3\Omega$,且电流有效值 $I=2\mathrm{A}$,求电路两端的电压有效值 U。

3.4 正弦交流电路的相量法分析

3.4.1 电阻、电感与电容元件串联的交流电路

先来看个典型电路:R、L、C 串联的正弦交流电路。各元件上电流与电压的参考方向如图 3-9(a)所示。由于电路中各元件流过同一电流,所以设此正弦电流为参考正弦量

$$i = I_{\mathrm{m}}\sin\omega t$$

其相量表示式为

$$\dot{I} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ = I\angle 0^\circ \tag{3-26}$$

以下的分析将应用 3.3 节有关内容,即式(3-14)、式(3-19)和式(3-25)所示的结论。