第3章 函数

3.1 内容提要

3.1.1 函数的基本概念

1. 函数

设 f 是集合 A 到 B 的关系，如果对每个 $x\in A$，都存在唯一 $y\in B$，使得 $(x,y)\in f$，则称关系 f 为 A 到 B 的函数（或映射、变换），记作 $f:A\to B$。当 $(x,y)\in f$ 时，通常记作 $y=f(x)$，这时称 x 为函数的自变量，称 y 为 x 在 f 下的函数值（或象）。

2. 偏函数

设 A,B,C 是3个非空集合，函数 $f:A\to B$，$A\subseteq C$，f 在 $C-A$ 上无定义，则称 f 是 C 到 B 的偏函数。

3. 函数的表示方法

（1）列表法：将函数中的元素一一列出，并用一对花括号括起来。
（2）图表法：用笛卡儿平面上点的集合表示。
（3）解析法：用等式 $y=f(x)$ 表示。

3.1.2 特殊函数

1. 单射函数、满射函数、双射函数

设 $f:A\to B$ 是一个函数：

（1）如果对任意的 $x_1,x_2\in A$，当 $x_1\neq x_2$ 时，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 A 到 B 的单射函数或单射，或称一对一的函数。

（2）如果对任意的 $y\in B$，均有 $x\in A$，使 $y=f(x)$，即 $ran(f)=B$，则称 f 为 A 到 B 的满射函数或满射，或称 A 到 B 映上的函数。

(3) 如果 f 既是 A 到 B 的单射，又是 A 到 B 的满射，则称 f 为 A 到 B 的双射函数或双射，或称一一对应的函数。

2. 常值函数、恒等函数

设函数 $f:A\to B$，给出几个特殊函数的定义如下：

(1) 若存在 $b\in B$，使得对任意的 $a\in A$ 都有 $f(a)=b$，则称 f 是从 A 到 B 的常值函数；

(2) 集合 A 上的恒等关系 I_A 称为集合 A 上的恒等函数。即对任意的 $a\in A$，都有 $I_A(a)=a$。

3. 特征函数

设 U 是全集，且 $A\subseteq U$，函数 $\psi_A:U\to\{0,1\}$ 定义为

$$\psi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

称 ψ_A 是集合 A 的特征函数。

3.1.3 复合函数与逆函数

1. 复合函数

设 A,B,C 是集合，有函数 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$，则 f 与 g 的复合函数是一个由 A 到 C 的函数，记作 $g\circ f$，符号化表示为

$$g\circ f=\{(a,c)\mid a\in A,c\in C,\text{且存在 } b\in B,\text{使得}(a,b)\in f,(b,c)\in g\}$$

对于 $\forall a\in A$，有 $(g\circ f)(a)=g(f(a))$。

2. 逆函数

设函数 $f:A\to B$ 是双射，函数 $g:B\to A$ 使得对于每一个元素 $b\in B$，有 $g(b)=a$，其中 $a\in A$ 且使得 $f(a)=b$，则称 g 是 f 的逆函数，记作 f^{-1}。若 f 存在逆函数，则称 f 是可逆的。逆函数也称为反函数。

3.2 典型例题

1. 已知集合 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$，判断下列关系是不是函数。

(1) $f_1=\{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}$；

(2) $f_2=\{(a,1),(a,2),(b,3),(c,4),(d,5)\}$；

(3) $f_3=\{(a,1),(b,1),(c,3),(d,5)\}$。

解答与分析：

(1) 是函数。因为可以找到这样的对应 $a-1,b-2,c-3,d-4$，满足函数的定义。

(2) 不是函数。因为集合 A 中的元素 a 同时对应着 B 中的 2 个元素 1 和 2，不满足函数的定义。

(3) 是函数。因为可以找到这样的对应 $a-1,b-1,c-3,d-5$,满足函数的定义。

2. 集合 $A=\{a,b\}$,$B=\{1,2\}$,$C=\{a,b,c\}$,关系 $f=\{(a,1),(b,2)\}$是一个 C 到 B 的偏函数。

3. 已知集合 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{1,2,3\}$,则从 A 到 B 可以定义多少个函数?

解答与分析:结合函数的定义,对 A 中的任意一个元素,都要找到 B 中的唯一一个元素与之对应,这样,对 A 中的元素 a,可以对应 B 中任意一个元素,即有对应 $a-1,a-2,a-3$ 成立,同理,对于 A 中的元素 b 与 c,亦有这样的对应存在,因此,从 A 到 B,一共可以定义 $3^3=27$ 个函数。

4. 判断下列函数是否是单射或满射,其中,定义域与值域均为实数。

$$f_1(x)=2x+3$$
$$f_2(x)=x^2+1$$
$$f_3(x)=\ln(x+3)$$
$$f_4(x)=x^3-x+1$$

解答与分析:

$f_1(x)=2x+3$ 是单射也是满射。

$f_2(x)=x^2+1$ 不是单射也不是满射,因为 $f_2(1)=f_2(-1)=2$。

$f_3(x)=\ln(x+3)$ 在定义域$(-3,\infty)$上是单射也是满射。

$f_4(x)=x^3-x+1$ 不是单射是满射,因为 $f_4(1)=f_4(-1)=1$。

5. 设 $A=\{a,b\}$,$B=\{1,2\}$,求:

(1) $P(A)$与 B^A;

(2) 构造一个从 $P(A)$到 B^A 的双射函数。

解答与分析:

(1) $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$B^A=\{\{(a,1),(b,1)\},\{(a,1),(b,2)\},\{(a,2),(b,1)\},\{(a,2),(b,2)\}\}$

(2) 令 f: $P(A)\to B^A$

$$f(\varnothing)=f_1,f(\{a\})=f_2,f(\{b\})=f_3,f(\{a,b\})=f_4$$

任取 A 的子集 $B\in P(A)$,B 的特征函数 $\chi_B:A\to\{0,1\}$定义如下:

$$\chi_B(x)=\begin{cases}1,x\in B\\0,x\in A-B\end{cases}$$

不同的子集的特征函数也不同,因此,令

$$\varphi:P(A)\to\{0,1\}^A$$
$$\varphi(B)=\chi_B$$

φ 是 $P(A)$到$\{0,1\}^A$ 的双射,其中 φ 是 $\varphi(\varnothing)=f_1$,$\varphi(\{a\})=f_2$,$\varphi(\{b\})=f_3$,$\varphi(\{a,b\})=f_4$。

6. 对下述函数 f,g 及集合 A,B,计算 $f\circ g$,$f\circ g(A)$和 $f\circ g(B)$,并说明 $f\circ g$ 是否为单射或满射。

$$f: R\to R, f(x)=x^4-x^2,$$
$$g: N\to R, g(x)=\sqrt{x},$$
$$A=\{2,4,6,8,10\},B=\{0,1\}$$

解答与分析：$f\circ g$：$N\rightarrow R$，$f\circ g(x)=x^2-x$，

$f\circ g$ 既不是单射也不是满射。

$$f\circ g(A)=\{2,12,30,56,90\},f\circ g(B)=\{0\}$$

7. 求下列函数的逆函数。

(1) $f(x)=2x+3$；

(2) $g(x)=x/2-1$。

解答与分析：

(1) $f^{-1}=(f(x)-3)/2$
$\quad=(x-3)/2$

(2) $g^{-1}=(g(x)+1)*2$
$\quad=2*(x+1)$
$\quad=2x+2$

8. 设定义在实数集 R 上的函数 f 与 g，分别为：

$$f(x)=ax+b$$
$$g(x)=cx+d$$

其中 a,b,c,d 为常数，请找出使得 $g\circ f=f\circ g$ 成立的 a 与 b、c 与 d 之间的关系。

解答与分析：

$$\begin{aligned}g\circ f&=g(f(x))\\&=c(ax+b)+d\\&=acx+bc+d\\f\circ g&=f(g(x))\\&=a(cx+d)+b\\&=acx+ad+b\end{aligned}$$

要使得 $g\circ f=f\circ g$ 成立，只需 $acx+bc+d=acx+ad+b$ 成立即可，即 a 与 b、c 与 d 满足$bc+d=ad+b$。

3.3　习题解答

1. 下面的关系哪些能构成函数？其中$(x,y)\in R$ 定义为：$x^2+y^2=1$，x,y 均为实数。

(1) $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$；

(2) $-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1$；

(3) $-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$；

(4) x 任意，$0\leqslant y\leqslant 1$。

解答：

(1) 能；(2) 不能；(3) 能；(4) 不能。

2. 设 $A=\{a,b,c\}$，问：

(1) A 到 A 可以定义多少种函数？

(2) $A\times A$ 到 A 可以定义多少种函数？

(3) $A\times A$ 到 $A\times A$ 可以定义多少种函数？

(4) A 到 $A\times A$ 可以定义多少种函数？

解答：(1) 3^3；(2) 3^9；(3) 9^9；(4) 9^3。

3. 设 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{a,b\}$，问下列关系哪些是 A 到 B 的函数。

(1) $f_1=\{(0,a),(0,b),(1,a),(2,b)\}$；

(2) $f_2=\{(0,a),(1,b),(2,a)\}$；

(3) $f_3=\{(0,a),(1,b)\}$；

(4) $f_4=\{(0,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$。

解答：(1) 不是；(2) 是；(3) 不是；(4) 是。

4. 设 f 与 g 是函数，证明 $f\cap g$ 也是函数。

证明：根据函数的定义显然成立。

5. 设 f 与 g 是函数，且 $f\subseteq g$，$\mathrm{dom}(g)\subseteq\mathrm{dom}(f)$，则 $f=g$。

证明：由已知条件知，只需证明 $g\subseteq f$。

对任意的 $(x,y)\in g\Rightarrow(g(x)=y\Rightarrow x\in\mathrm{dom}(g)$。

因为 $\mathrm{dom}(g)\Rightarrow\mathrm{dom}(f)$，所以 $x\in\mathrm{dom}(f)$，即 $f(x)=y'$。

又因为 $f\subseteq g$，若 $g(x)=y$，则 $f(x)=y$，所以 $(x,y)\subseteq f$，即 $g=f$。因此 $f=g$。

6. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{a,b,c,d,e\}$，问下列函数哪些是单射？哪些是满射？哪些是双射？

(1) $f_1=\{(1,a),(3,b),(2,d),(4,c),(5,e)\}$；

(2) $f_1=\{(1,a),(3,a),(2,d),(4,c),(5,d)\}$；

(3) $f_1=\{(1,a),(2,b),(3,d),(4,c),(5,e)\}$。

解答：

(1) 是单射、满射、双射；

(2) 不是满射、单射、双射；

(3) 是单射、双射、满射。

7. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{a,b,c,d,e\}$，试给出满足下列条件的函数的例子：

(1) 是单射，不是满射；

(2) 是满射，不是单射；

(3) 不是单射，也不是满射；

(4) 既是单射，又是满射。

解答：

(1) 无；

(2) 无；

(3) $\{(1,a),\ (2,a),\ (3,b),\ (4,c),\ (5,d)\}$；

(4) $\{(1,a),\ (2,b),\ (3,c),\ (4,d),\ (5,e)\}$。

8. 设 f,g,h 都是实数集上的函数，且 $f(x)=2x+1$，$g(x)=x^2+2$，$h(x)=x^2-2$，求 $f\circ g$，$g\circ h$，$f\circ(g\circ h)$，$g\circ(h\circ f)$。

解答：

$f\circ g=2x^2+5$

$g\circ h=x^4-4x^2+8$

$f\circ(g\circ h)=2x^4-8x^2+17$

$g\circ(h\circ f)=16x^4+32x^3+8x^2-8x+3$

9. 设 $f:A\to B$，$g:B\to\rho(A)$，对于 $b\in B$，$g(b)=\{x\in A\mid f(x)=b\}$，证明：若 f 是 A 到 B 的满射函数，则 g 是单射函数。

证明：设 $b_1,b_2\in B$，且 $b_1\neq b_2$，由函数 g 的定义，有 $g(b_1)=\{x\in A\mid f(x)=b_1\}$，$g(b_2)=\{y\in A\mid f(y)=b_2\}$，因为 $b_1\neq b_2$，所以 $f(x)\neq f(y)$。又因为 f 是函数，因此 $x\neq y$。由集合的定义可知，$g(b_1)\neq g(b_2)$。所以 g 是单射。

10. 设 f 与 g 是函数，且 $f(x)=2x+1$，$g(x)=3x+2$，$x\in I$（整数集），求 $(f\circ g)^{-1}$，$(g\circ f)^{-1}$。

解答：

$(f\circ g)^{-1}=1/6*(x-5)$

$(g\circ f)^{-1}=1/6*(x-5)$

11. 证明：若 $(g\circ f)^{-1}$ 是一个函数，则 f 与 g 是单射不一定成立。

证明：举一反例即可，略。

12. 设函数 $f:R\times R\to R\times R$，f 定义为

$$f(x,y)=(x+y,x-y)$$

(1) 证明 f 是单射；

(2) 证明 f 是满射；

(3) 求逆函数 f^{-1}；

(4) 求复合函数 $f^{-1}\circ f$ 与 $f\circ f^{-1}$。

解答：

(1) 对任意的 (x_1,y_1)，$(x_2,y_2)\in R\times R$，如果 $f((x_1,y_1))=f((x_2,y_2))$，则 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$，因为由 f 的定义，有 $f((x_1,y_1))=(x_1+y_1,x_1-y_1)$，$f((x_2,y_2))=(x_2+y_2,x_2-y_2)$，因为 $f((x_1,y_1))=f((x_2,y_2))$，所以 $(x_1+y_1,x_1-y_1)=(x_2+y_2,x_2-y_2)$，根据序偶相等的定义，有 $x_1+y_1=x_2+y_2$，$x_1-y_1=x_2-y_2$，解得：$x_1=x_2$，$y_1=y_2$，即 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$。所以 f 是单射函数。

(2) 对于任意的 $(x,y)\in R\times R$ 在 $R\times R$ 中都存在原象，根据定义，(x,y) 的原象为：$(0.5x+0.5y,0.5x-0.5y)\in R\times R$ 满足 $f((0.5x+0.5y,0.5x-0.5y))=(x,y)$，所以 f 是满射函数。

(3) 因为 f 是双射，所以 f^{-1} 存在，且 $f^{-1}=(0.5x+0.5y,0.5x-0.5y)$。

(4) $f^{-1}\circ f=f^{-1}(f(x,y))=f^{-1}((x+y,x-y))=(0.5(x+y)+0.5(x-y),0.5(x+y)-0.5(x-y))=(x,y)$；

$f\circ f^{-1}=f(f(x,y))=f((x+y,x-y))=(x+y+x-y,x+y-(x-y))=(2x,2y)$。

第 4 章

代数系统及其性质

4.1 内容提要

4.1.1 二元运算及其性质

1. 二元运算的概念

设 A 是一个非空集合且函数 $f:A^n \to A$，则称 f 为 A 上的一个 n 元运算。其中 n 是自然数，称为运算的元数或阶。当 $n=1$ 时，称 f 为一元运算；当 $n=2$ 时，称 f 为二元运算；等等。

2. 特殊元素

设 $*$ 是集合 A 上的二元运算，有如下定义。

左单位元：若 $\exists e_l \in A$，使得 $\forall a \in A$，有 $e_l * a = a$，则称 e_l 为关于 $*$ 的左单位元，也称为左幺元。

右单位元：若 $\exists e_r \in A$，使得 $\forall a \in A$，有 $a * e_r = a$，则称 e_r 为关于 $*$ 的右单位元，也称为右幺元。

单位元：若 $\exists e \in A$，使得 $\forall a \in A$，有 $e * a = a * e = a$，则称 e 为关于 $*$ 的单位元，也称为幺元。

左零元：若 $\exists 0_l \in A$，使得 $\forall a \in A$，有 $0_l * a = 0_l$，则称 0_l 为关于 $*$ 的左零元。

右零元：若 $\exists 0_r \in A$，使得 $\forall a \in A$，有 $a * 0_r = 0_r$，则称 0_r 为关于 $*$ 的右零元。

零元：若 $\exists 0 \in A$，使得 $\forall a \in A$，有 $0 * a = a * 0 = 0$，则称 0 为关于 $*$ 的零元。

左逆元：若 $\exists a_l \in A$，使得 $a_l * a = e$，则称 a 关于 $*$ 是左可逆的，并称 a_l 是 a 的关于 $*$ 的左逆元。

右逆元：若 $\exists a_r \in A$，使得 $a * a_r = e$，则称 a 关于 $*$ 是右可逆的，并称 a_r 是 a 的关于 $*$ 的右逆元。

逆元：若 $\exists a' \in A$，使得 $a' * a = a * a' = e$，则称 a 关于 $*$ 是可逆的，并称 a' 为 a 的关于 $*$ 的逆元。

幂等元：设 $*$ 是集合 A 上的二元运算，$a \in A$，若 $a * a = a$，则称 a 是关于 $*$ 的幂等元。

4.1.2　代数系统

代数系统：设 S 为非空集合，$*_1, *_2, \cdots, *_n$ 为 S 上的代数运算，则称$(S, *_1, *_2, \cdots, *_n)$为一个代数系统或代数结构，简称代数，并称 S 为该代数系统的定义域。若 S 为有限集，则称$(S, *_1, *_2, \cdots, *_n)$为有限代数系统，并称$|S|$为代数系统的阶。

子代数系统：设$(S, *_1, *_2, \cdots, *_n)$为代数系统，$T$ 为 S 的非空子集，若 T 关于每个 $*_i(i=1,2,\cdots,n)$都封闭，则称代数系统为$(S, *_1, *_2, \cdots, *_n)$的子代数系统，其中 $*'_i$为 $*_i$ 在 T 上的限制。为简便起见，也常记作$(T, *_1, *_2, \cdots, *_n)$。又若 $T \subset S$，则称$(T, *_1, *_2, \cdots, *_n)$是$(S, *_1, *_2, \cdots, *_n)$的真子代数系统。

4.1.3　同态与同构

同态：设 $V_1=(S_1, \circ_1, *_1, \Delta_1)$，$V_2=(S_2, \circ_2, *_2, \Delta_2)$是两个同类型的代数系统，其中$\circ_i$与 $*_i$，$(i=1,2)$是二元运算，Δ_1 与 Δ_2 是一元运算，如果存在函数 $f: S_1 \to S_2$，对任意的 $x_1 \in S_1, x_2 \in S_1$ 有

$$f(x_1 \circ_1 x_2) = f(x_1) \circ_2 f(x_2)$$
$$f(x_1 *_1 x_2) = f(x_1) *_2 f(x_2)$$
$$f(\Delta_1(x_1)) = \Delta_2(f(x_1))$$

则称 $f: S_1 \to S_2$ 是从代数系统 V_1 到 V_2 的同态映射(Homomorphism Mapping)，也称两个代数系统同态(Homomorphism)。

同构：设 f 是 V_1 到 V_2 的同态映射，若 f 是满射，则称 f 是 V_1 到 V_2 的满同态映射，并称两个代数系统 V_1 与 V_2 满同态。若 f 既是同态映射又是双射，则称 f 是同构映射，简称同构，并称两个代数系统 V_1 与 V_2 同构。若存在从代数系统 V_1 到代数系统 V_2 的满同态，则称 V_2 是 V_1 的同态像。若存在从代数系统 V_1 到代数系统 V_2 的同构，则称 V_1 与 V_2 同构，并记作 $V_1 \cong V_2$。从一个代数系统 V 到自己的同态称为自同态。从一个代数系统 V 到自己的同构称为自同构。

4.2　典型例题

1. 设 $A=\{x \mid x=3n, n \in N\}$，问乘法运算$(*)$是否封闭，对加法运算$(+)$是否也封闭。

解答与分析：根据封闭的定义，对于任意的 $3^r, 3^s \in A, r, s \in N$，从因为 $3^r * 3^s = 3^{r+s} \in A$，所以乘法运算是封闭的。

因为 $3^2+3^3=36 \notin A$，因此对于加法运算是不封闭的。

2. 如下定义$\langle A, \Delta \rangle$，判断运算是否可交换。

(1) $A=R, a\Delta b=|a-b|$；

(2) $A=Q, a\Delta b=a+b-a*b$。

解答与分析：

（1）因为

$$a\Delta b=|a-b|=|b-a|=b\Delta a$$

所以运算Δ是可交换的。

（2）因为

$$a\Delta b=a+b-a\cdot b=b+a-b\cdot a=b\Delta a$$

所以运算Δ是可交换的。

3．如下定义＜A，Δ＞，判断运算是否可结合。

（1）$A=R, a\Delta b=b$；

（2）$A=Q, a\Delta b=a+b-a*b$。

证明：

（1）因为对于任意的 $a,b,c\in A$

$$(a\Delta b)\Delta c=b\Delta c=c$$

而

$$a\Delta(b\Delta c)=a\Delta c=c$$

所以

$$(a\Delta b)\Delta c=a\Delta(b\Delta c)$$

因此运算Δ是可结合的。

（2）因为对于任意的 $a,b,c\in A$，有

$$\begin{aligned}(a\Delta b)\Delta c&=(a+b-a*b)\Delta c\\&=a+b-a*b+c-(a+b-a*b)*c\\&=a+b-a*b+c-a*c-b*c+a*b*c\\&=a+b+c-a*b-a*c-b*c+a*b*c\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}a\Delta(b\Delta c)&=a\Delta(b+c-b*c)\\&=a+b+c-b*c-a*(b+c-b*c)\\&=a+b+c-b*c-a*b-a*c+a*b*c\end{aligned}$$

所以

$$(a\Delta b)\Delta c\neq a\Delta(b\Delta c)$$

因此运算Δ是不可结合的。

4．在下面的二元运算中，哪些满足交换律？哪些满足结合律？

（1）在整数集 Z 中，$a*b=a-b$；

（2）在有理数集 Q 中，$a*b=ab+1$；

（3）在有理数集 Q 中，$a*b=ab/2$。

解答与分析：

（1）对 $\forall a,b,c\in Z$，有

$$a*b=a-b$$

$$b*a=b-a$$

当 $a\neq b$ 时，$a-b\neq b-a$，因此不满足交换律。

$$(a*b)*c=(a-b)*c=a-b-c$$
$$a*(b*c)=a*(b-c)=a-(b-c)=a-b+c$$

当 $c\neq 0$ 时，$a-b-c\neq a-b+c$，因此不满足结合律。

(2) 对 $\forall a,b,c\in Q$，有

$$a*b=ab+1=ba+1=b*a$$

因此满足交换律。

$$(a*b)*c=(ab+1)*c=(ab+1)c+1=abc+c+1$$
$$a*(b*c)=a*(bc+1)=a(bc+1)+1=abc+a+1$$

当 $a\neq c$ 时，$abc+c+1\neq abc+a+1$，因此不满足结合律。

(3) 对 $\forall a,b,c\in Q$，有

$$a*b=ab/2=ba/2=b*a$$

因此满足交换律。

$$(a*b)*c=(ab/2)*c=(ab/2)c/2=abc/4$$
$$a*(b*c)=a*(bc/2)=a(bc/2)/2=abc/4=(a*b)*c$$

因此满足结合律。

5. 设集合 $A=\{a,b\}$，在 A 上定义两个二元运算 $*$ 和 Δ 如表 4.1 和表 4.2 所示。判断运算 Δ 对于运算 $*$ 可分配以及运算 $*$ 对于运算 Δ 是否可分配。

表　4.1

$*$	a	b
a	a	b
b	b	a

表　4.2

Δ	a	b
a	a	b
b	a	b

解答与分析：

$$a\Delta(a*b)=a\Delta b=a$$
$$(a*a)\Delta(a*b)=a\Delta b=a$$
$$a\Delta(a*b)=(a*a)\Delta(a*b)$$
$$b\Delta(a*b)=b\Delta b=a$$
$$(b*a)\Delta(b*b)=b\Delta a=a$$
$$b\Delta(a*b)=(b*a)\Delta(b*b)$$

因此，运算 Δ 对于运算 $*$ 是可分配的。

但是，运算 $*$ 对于运算 Δ 是不可分配的，因为

$$a*(a\Delta b)=a*a=a$$
$$(a*a)\Delta(a*b)=a\Delta b=a$$
$$a*(a\Delta b)=(a*a)\Delta(a*b)$$

但是