

第 5 章 时变电磁场和平面电磁波

我们所遇到的电磁场问题,大多数是时变电磁场的问题。而其中最常见的又是随时间按正弦(或余弦)规律作简谐变化的电磁场,称为时谐电磁场或正弦电磁场。在空间,时谐电磁场的能量以电磁波的形式进行传播。

本章首先介绍时谐电磁场的复数表示和复数形式的场方程及能量关系,然后通过平面电磁波在不同媒质中传播特性的分析,掌握电磁波传播的基本规律。

5.1 时谐电磁场的复数表示

5.1.1 复数

时谐电磁场的场矢量(如 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$)的每一坐标分量,都随时间以相同的频率作简谐变化。例如,上海电台“990 新闻”,就是用频率为 990kHz 的电磁波传送的,而“动感 101”的歌曲,则是由中心频率为 101.7MHz 的电磁波进行传播的。我们日常生活中的照明和家用电器的用电,又都是以 50Hz 的频率作简谐变化的交流电。为了便于计算这些随时间作简谐变化的交流电压和电流,在交流电路分析中引入了复数表示。同样地,为分析时谐电磁场也要引入复数表示。为此先来简要地回顾一下数学中的复数知识。

复数(complex number) a 定义为

$$a = a' + ja'' = |a| e^{j\phi_a} = |a| (\cos\phi_a + j\sin\phi_a) \quad (5.1-1)$$

式中 $j = \sqrt{-1}$ 是虚数; a' 是 a 的实部(real part); a'' 是 a 的虚部(imaginary part),即

$$a' = \operatorname{Re}[a] = |a| \cos\phi_a$$

$$a'' = \operatorname{Im}[a] = |a| \sin\phi_a$$

$|a|$ 称为 a 的模或绝对值; ϕ_a 称为 a 的辐角(argument),并有

$$|a| = \sqrt{a'^2 + a''^2} \geq 0 \quad (5.1-2)$$

$$\phi_a = \operatorname{Arg}[a] = \arctan \frac{a''}{a'} \quad (5.1-3)$$

设复数 b 为

$$\begin{aligned} b &= b' + jb'' = |b| e^{j\phi_b} \\ a \pm b &= (a' \pm b') + j(a'' \pm b'') \end{aligned} \quad (5.1-4)$$

则

$$ab = |a| |b| e^{j(\phi_a + \phi_b)} \quad (5.1-5)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} e^{j(\phi_a - \phi_b)} \quad (5.1-6)$$

a 的共轭复数定义为

$$a^* = a' - ja'' = |a| e^{-j\phi_a} = |a| (\cos\phi_a - j\sin\phi_a) \quad (5.1-7)$$

将上式与式(5.1-1)相加或相减,得

$$a' = \frac{a + a^*}{2}, \quad a'' = \frac{a - a^*}{2j} \quad (5.1-8)$$

容易证明,

$$|a|^2 = aa^*, \quad (a^*)^* = a \quad (5.1-9)$$

$$(a \pm b)^* = a^* \pm b^* \quad (5.1-10)$$

$$(ab)^* = a^* b^* \quad (5.1-11)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^* = \frac{a^*}{b^*} \quad (5.1-12)$$

5.1.2 复矢量

在时谐电磁场中,场矢量的任一坐标分量(如 E_x),不再只是其场点 (x, y, z) 的函数,而且是时间 t 的函数,它的一般表达式为

$$E_x(x, y, z, t) = E_{xm}(x, y, z) \cos[\omega t + \phi_x(x, y, z)] \quad (5.1-13)$$

式中振幅 E_{xm} 和初始相位中 ϕ_x 是空间坐标的函数,而与时间变量 t 无关。 E_x 是时间的周期函数,如图 5.1-1 所示。设 $\omega T = 2\pi$, 则经过时间 T , E_x 值与 $t=0$ 时相同。 T 称为周期, $f = 1/T$ 为频率, $\omega = 2\pi f$ 为角频率。

与交流电路中的处理相似,可将 E_x 写作

$$E_x(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[\dot{E}_x(x, y, z) e^{j\omega t}] \quad (5.1-14a)$$

$$\dot{E}_x(x, y, z) = E_{xm}(x, y, z) e^{j\phi_x(x, y, z)} \quad (5.1-14b)$$

式中 $\dot{E}_x$ 称为复振幅,是一复数,又称为相量。

它不是 t 的函数而只是空间坐标 (x, y, z) 的

函数。但是只要乘以 $e^{j\omega t}$ 后,取其实部便可得

出作为时间 t 的函数的 $E_x(x, y, z, t)$ 。这样,对这种随时间 t 作简谐变化的量,只要已知其复振幅,便可方便地得出其随时间变化的瞬时值,即

$$E_x(t) \xleftrightarrow{\text{(对应于)}} \dot{E}_x = E_{xm} e^{j\phi_x} \quad (5.1-15)$$

为了简化书写,这里已略去了空间坐标 (x, y, z) , 这正与前几章一致(场量后大多未标空间坐标),但其含义应按式(5.1-14)来理解,即 $E_x(t)$ 是 $E_x(x, y, z, t)$, 而 $\dot{E}_x$ 是 $\dot{E}_x(x, y, z)$, 下同。并有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_x(t) &= \operatorname{Re} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\dot{E}_x e^{j\omega t}) \right] = \operatorname{Re} [j\omega \dot{E}_x e^{j\omega t}] \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(t) &= \operatorname{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\dot{E}_x e^{j\omega t}) \right] = \operatorname{Re} [-\omega^2 \dot{E}_x e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

可见

$$\frac{\partial}{\partial t} E_x(t) \longleftrightarrow j\omega \dot{E}_x \quad (5.1-16)$$

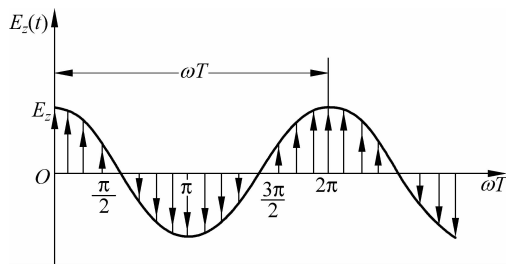


图 5.1-1 时谐函数 $E_x(t)$

这就是说, $E_x(t)$ 对时间 t 的微分运算可化为对复振幅 $\dot{E}_x$ 乘以 $j\omega$ 的代数运算。这是采用复数表示的又一方便之处。

设时谐电场强度矢量 $\bar{E}(t)$ 除了分量 $E_x(t)$ 外, 还有分量 $E_y(t)$ 和 $E_z(t)$ 。将这三个分量都用复数表示, 则有

$$\begin{aligned}\bar{E}(t) &= \hat{x}E_{xm}\cos(\omega t + \phi_x) + \hat{y}E_{ym}\cos(\omega t + \phi_y) + \hat{z}E_{zm}\cos(\omega t + \phi_z) \\ &= \operatorname{Re}[(\hat{x}E_{xm}e^{j\phi_x} + \hat{y}E_{ym}e^{j\phi_y} + \hat{z}E_{zm}e^{j\phi_z})e^{j\omega t}]\end{aligned}$$

于是

$$\bar{E}(t) \longleftrightarrow \dot{\bar{E}} = \hat{x}E_{xm}e^{j\phi_x} + \hat{y}E_{ym}e^{j\phi_y} + \hat{z}E_{zm}e^{j\phi_z} = \hat{x}\dot{E}_x + \hat{y}\dot{E}_y + \hat{z}\dot{E}_z \quad (5.1-17)$$

$\dot{\bar{E}}$ 称为电场强度复矢量, 它的三个分量分别是复振幅 $\dot{E}_x$ 、 $\dot{E}_y$ 和 $\dot{E}_z$ 。此式中, $\dot{\bar{E}}$ 不是时间 t 的函数而只是空间坐标 (x, y, z) 的函数。这样我们就把四维 (x, y, z, t) 问题简化成了三维 (x, y, z) 的问题。若要得出瞬时关系式, 只要记住下列变换关系即可:

$$\bar{E}(t) = \operatorname{Re}[\dot{\bar{E}}e^{j\omega t}] \quad (5.1-18)$$

注意, 只有当 $\phi_x = \phi_y = \phi_z$ 时, 复矢量 $\dot{\bar{E}}$ 才能用单一的模和单一的相角表示, 其他情形下都不能这样表示。这意味着, 随着时间变化, 瞬时矢量 $\bar{E}(t)$ 的方向也可能改变。

5.2 复数形式的麦克斯韦方程组

5.2.1 复数形式的麦氏方程组

正如前面所述, 时谐电磁场在实际中获得最广泛的应用。同时, 根据傅里叶变换理论, 任何周期性的或非周期性的时变电磁场, 都可看成是许多具有不同频率的时谐电磁场的叠加或积分。因此, 研究时谐电磁场正是研究一切时变电磁场的基础。20 世纪 70 年代以来发展了对非简谐变化的瞬变电磁场(又称脉冲电磁场)的研究。一种基本方法就是先求得对不同频率简谐场的响应特性(求频域解), 再由傅里叶反变换或拉普拉斯反变换求得瞬变场的时间特性(时域解), 称为频域分析法(自然, 同时也发展了直接求时域解的时域分析法等其他方法)。

利用复数表示来分析时谐电磁场时, 需导出复数形式的麦氏方程组。为此我们将场矢量都写成式(5.1-18)的形式。对表 2.3-1 中麦氏方程组的式(a), 今有

$$\nabla \times \operatorname{Re}[\dot{\bar{E}}e^{j\omega t}] = -\operatorname{Re}[j\omega \dot{\bar{B}}e^{j\omega t}]$$

式中 ∇ 是对空间坐标的微分算子, 它和取实部符号 Re 可以调换次序, 从而得

$$\nabla \times \dot{\bar{E}} = -j\omega \dot{\bar{B}} \quad (5.2-1a)$$

同理, 由表 2.3-1 中式(b)~(d)分别得

$$\nabla \times \dot{\bar{H}} = \dot{\bar{J}} + j\omega \dot{\bar{D}} \quad (5.2-1b)$$

$$\nabla \cdot \dot{\bar{D}} = \dot{\rho}_v \quad (5.2-1c)$$

$$\nabla \cdot \dot{\bar{B}} = 0 \quad (5.2-1d)$$

这就是复数形式的麦氏方程组。式中 $\dot{\bar{E}}$ 、 $\dot{\bar{H}}$ 、 $\dot{\bar{D}}$ 、 $\dot{\bar{B}}$ 和 $\dot{\bar{J}}$ 都是复矢量, $\dot{\rho}_v$ 是复数。同时, 由表 2.3-1 中式(e)得复数形式电流连续性方程为

$$\nabla \cdot \dot{\vec{J}} = -j\omega \dot{\rho}_v \quad (5.2-1e)$$

这些式子表明,采用复数形式后,各场量都换成了复矢量,而对时间变量的求导($\partial/\partial t$)则换成为简单的因子 $j\omega$ 。

5.2.2 复数形式的波动方程和边界条件

在简单媒质中,电磁场复矢量的本构关系为

$$\dot{\vec{D}} = \epsilon \dot{\vec{E}} \quad (5.2-1f)$$

$$\dot{\vec{B}} = \mu \dot{\vec{H}} \quad (5.2-1g)$$

$$\dot{\vec{J}} = \sigma \dot{\vec{E}} \quad (5.2-1h)$$

利用这些关系后,复麦氏方程组(5.2-1a)~(5.2-1d)化为

$$\nabla \times \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu \dot{\vec{H}} \quad (5.2-2a)$$

$$\nabla \times \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}} + j\omega\epsilon \dot{\vec{E}} \quad (5.2-2b)$$

$$\nabla \cdot \dot{\vec{E}} = \frac{\dot{\rho}_v}{\epsilon} \quad (5.2-2c)$$

$$\nabla \cdot \dot{\vec{H}} = 0 \quad (5.2-2d)$$

从两个旋度方程中消去 $\dot{\vec{E}}$ 或 $\dot{\vec{H}}$, 就得到 $\dot{\vec{E}}$ 和 $\dot{\vec{H}}$ 的非齐次二阶偏微分方程, 即非齐次复矢量波动方程:

$$\nabla \times \nabla \times \dot{\vec{E}} - k^2 \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu \dot{\vec{J}} \quad (5.2-3)$$

$$\nabla \times \nabla \times \dot{\vec{H}} - k^2 \dot{\vec{H}} = \nabla \times \dot{\vec{J}} \quad (5.2-4)$$

式中

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

在无源区, $\dot{\vec{J}}=0, \dot{\rho}_v=0$, 上述方程化为齐次复矢量波动方程:

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + k^2 \dot{\vec{E}} = 0 \quad (5.2-5)$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} + k^2 \dot{\vec{H}} = 0 \quad (5.2-6)$$

对有限区域求解波动方程时,需要利用边界条件。复数形式边界条件与瞬时形式相同,只是各场量不是瞬时值而是复矢量或复数值:

$$\hat{n} \times (\dot{\vec{E}}_1 - \dot{\vec{E}}_2) = 0 \quad (5.2-7a)$$

$$\hat{n} \times (\dot{\vec{H}}_1 - \dot{\vec{H}}_2) = \dot{\vec{J}}_s \quad (5.2-7b)$$

$$\hat{n} \cdot (\dot{\vec{D}}_1 - \dot{\vec{D}}_2) = \dot{\rho}_s \quad (5.2-7c)$$

$$\hat{n} \cdot (\dot{\vec{B}}_1 - \dot{\vec{B}}_2) = 0 \quad (5.2-7d)$$

例 5.2-1 某卫星广播的电视射频信号在空中某点形成频率为 4GHz 的时谐电磁场,其磁场强度复矢量为

$$\dot{\vec{H}} = \hat{y} 0.01 e^{-j(80\pi/3)z} \quad (\mu\text{A/m})$$

求: (a) 磁场强度瞬时值 $\vec{H}(t)$; (b) 电场强度瞬时值 $\vec{E}(t)$ 。

【解】(a)

$$\bar{H}(t) = \operatorname{Re}[\hat{y}0.01e^{-j(80\pi/3)z}e^{j2\pi \times 4 \times 10^9 t}] = \hat{y}0.01\cos[8\pi \times 10^9 t - (80\pi/3)z](\mu\text{A/m})$$

(b) 由 $\nabla \times \dot{\vec{H}} = j\omega\epsilon_0 \dot{\vec{E}}$ 知,

$$\dot{\vec{E}} = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \nabla \times \dot{\vec{H}} = \frac{-j}{8\pi \times 10^9 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0.01e^{-j(80\pi/3)z} & 0 \end{vmatrix} = \hat{x}1.2\pi e^{-j(80\pi/3)z}$$

$$\dot{\vec{E}}(t) = \operatorname{Re}[\hat{x}1.2\pi e^{-j(80\pi/3)z}e^{j8\pi \times 10^9 t}] = \hat{x}1.2\pi\cos[8\pi \times 10^9 t - (80\pi/3)z](\mu\text{V/m})$$

5.3 复坡印廷矢量和复坡印廷定理

5.3.1 复坡印廷矢量

任意场点处的坡印廷矢量 $\bar{S}(t) = \bar{E}(t) \times \bar{H}(t)$ (W/m^2) 代表该点瞬时的电磁场功率流密度。对于时谐电磁场, $\bar{E}(t)$ 和 $\bar{H}(t)$ 都随时间作周期性的变化。这时我们更关心的是一个周期的平均功率密度。为此我们来求坡印廷矢量的平均值 $\bar{S}^{\text{av}}$ 。

由复数公式(5.1-8)知

$$\begin{aligned}\bar{E}(t) &= \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}}e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}[\dot{\vec{E}}e^{j\omega t} + \dot{\vec{E}}^*e^{-j\omega t}] \\ \bar{H}(t) &= \operatorname{Re}[\dot{\vec{H}}e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}[\dot{\vec{H}}e^{j\omega t} + \dot{\vec{H}}^*e^{-j\omega t}]\end{aligned}$$

从而得坡印廷矢量瞬时值为

$$\begin{aligned}\bar{S}(t) &= \bar{E}(t) \times \bar{H}(t) = \frac{1}{4}[\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* + \dot{\vec{E}}^* \times \dot{\vec{H}} + \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}e^{j2\omega t} + \dot{\vec{E}}^* \times \dot{\vec{H}}^*e^{-j2\omega t}] \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}[\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}} + \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}e^{j2\omega t}]\end{aligned}\quad (5.3-1)$$

它在一个周期 $T=2\pi/\omega$ 内的平均值为

$$\bar{S}^{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{S}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*] dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}e^{j2\omega t}] dt$$

此式中 $\dot{\vec{E}}$ 、 $\dot{\vec{H}}$ 、 $\dot{\vec{H}}^*$ 均为与时间 t 无关的复矢量, 而 $\operatorname{Re}[e^{j2\omega t}] = \cos(2\omega t)$ 在一个周期 T 内的积分等于零, 因而得

$$\bar{S}^{\text{av}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*]$$

令

$$\dot{\vec{S}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* \quad (5.3-2)$$

则

$$\bar{S}^{\text{av}} = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*\right] = \operatorname{Re}[\dot{\vec{S}}] \quad (5.3-3)$$

式(5.3-2)所定义的 $\dot{\vec{S}}$ 称为复坡印廷矢量, 式(5.3-3)说明其物理意义, 即复坡印廷矢

量 $\dot{S}$ 的实部等于(一个周期内的)平均功率流密度,即实功率密度。对复坡印廷矢量定义式(5.3-2),要注意两点:

(1) 这里 $\dot{H}^*$ 是 $\dot{H}$ 的共轭矢量,它不是 $\dot{\bar{H}}$,这是为得出实功率密度所必须的。为理解这一点,我们来考察坡印廷矢量瞬时值的交变分量。由式(5.3-1)和式(5.3-3)知,

$$\bar{S}(t) - \bar{S}^{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re}[\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}} e^{j2\omega t}] \quad (5.3-4)$$

这个结果表明,如直接将 $\dot{\vec{E}} e^{j\omega t}$ 与 $\dot{\vec{H}} e^{j\omega t}$ 相乘,其实部代表的是电磁场功率流密度瞬时值与其平均值之差,它在一个周期内的平均值是零,无实功率。

(2) 与坡印廷矢量瞬时值形式不同,这里多一个因子“ $\frac{1}{2}$ ”。这是因为,平均功率密度在数值上等于 $\text{Re}[\frac{1}{2} E H^*]$,这里的 E, H 都代表振幅最大值。如果采用有效值 $E_e = E/\sqrt{2}$ 、 $H_e = H/\sqrt{2}$,如参考文献[15]中那样,则

$$\bar{S}^{\text{av}} = \text{Re}[\dot{\vec{E}}_e \times \dot{\vec{H}}_e^*] = \text{Re}[\dot{\vec{S}}_e] \quad (5.3-5)$$

式中

$$\dot{\vec{S}}_e = \dot{\vec{E}}_e \times \dot{\vec{H}}_e^*, \quad \dot{\vec{E}}_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\vec{E}}, \quad \dot{\vec{H}}_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\vec{H}} \quad (5.3-6)$$

显然,采用式(5.3-6)定义的 $\dot{\vec{S}}_e$ 与采用式(5.3-2)定义的 $\dot{\vec{S}}$,取其实部都得出同一平均功率密度。

我们看到,上述公式与交流电路中的复功率计算是类似的。设电压和电流的复振幅分别为

$$\dot{U} = U e^{j\phi_u}, \quad \dot{I} = I e^{j\phi_i}$$

则

$$\frac{1}{2} \dot{U} \dot{I}^* = \frac{1}{2} UI e^{j(\phi_u - \phi_i)} = \frac{1}{2} UI \cos(\phi_u - \phi_i) + j \frac{1}{2} UI \sin(\phi_u - \phi_i)$$

因而其实功率为

$$P_r = \frac{1}{2} UI \cos(\phi_u - \phi_i) = \text{Re}\left[\frac{1}{2} \dot{U} \dot{I}^*\right] \quad (5.3-7)$$

5.3.2 复坡印廷定理

我们来研究复坡印廷矢量的散度。由矢量恒等式(1.3-9),有

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* \right) = \frac{1}{2} \dot{\vec{H}}^* \cdot \nabla \times \dot{\vec{E}} - \frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \cdot \nabla \times \dot{\vec{H}}^*$$

将式(5.2-1a)和式(5.2-1b)代入上式,得

$$-\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* \right) = j2\omega \left(\frac{1}{4} \mu H^2 - \frac{1}{4} \epsilon E^2 \right) + \frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{J}}^* \quad (5.3-8)$$

这个公式表示了任意场点处的功率密度关系。对其两边取积分,便得到相应的积分形式:

$$-\oint_s \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* \right) \cdot \overline{ds} = j2\omega \int_v \left(\frac{1}{4} \mu H^2 - \frac{1}{4} \epsilon E^2 \right) dv + \int_v \frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{J}}^* dv \quad (5.3-9)$$

这就是用复矢量表示的复坡印廷定理。分别取其实部和虚部,得

$$-\oint_s \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* \right] \cdot \overline{\mathrm{d}\vec{s}} = \int_v \frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{J}}^* \mathrm{d}v = \int_v \frac{1}{2} \sigma E^2 \mathrm{d}v \quad (5.3-10a)$$

$$-\oint_s \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* \right] \cdot \overline{\mathrm{d}\vec{s}} = 2\omega \int_v \left(\frac{1}{4} \mu H^2 - \frac{1}{4} \epsilon E^2 \right) \mathrm{d}v \quad (5.3-10b)$$

式(5.3-10a)表示实功率的平衡,即流入封闭面的实电磁功率等于体积中热损耗功率的平均值。式(5.3-10b)表示虚功率的平衡。它说明,流入封闭面的虚电磁功率等于体积中电磁场储能最大时间变化率。这里 $2\omega \left(\frac{1}{4} \mu H^2 - \frac{1}{4} \epsilon E^2 \right)$ 代表单位体积中电磁场储能的最大时间变化率,说明如下。设

$$E(t) = E \cos(\omega t + \phi_e)$$

$$H(t) = H \cos(\omega t + \phi_h)$$

则单位体积电磁储能瞬时值为

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \cos^2(\omega t + \phi_e) = \frac{1}{4} \epsilon E^2 [1 + \cos(2\omega t + 2\phi_e)]$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 \cos^2(\omega t + \phi_h) = \frac{1}{4} \epsilon H^2 [1 + \cos(2\omega t + 2\phi_h)]$$

其一个周期的平均值为

$$w_e^{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^T w_e \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \epsilon E^2 \quad (5.3-11)$$

$$w_m^{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^T w_m \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \mu H^2 \quad (5.3-12)$$

单位体积中总电磁储能的时间变化率为

$$\frac{\partial}{\partial t} (w_m + w_e) = -2\omega \left[\frac{1}{4} \mu H^2 \sin(2\omega t + 2\phi_h) + \frac{1}{4} \epsilon E^2 \sin(2\omega t + 2\phi_e) \right]$$

由于储能是电磁场的虚功率部分,其磁场与电场的相位将是正交的,即 $\phi_h = \phi_e + \frac{\pi}{2}$ 。于是

$$\frac{\partial}{\partial t} (w_m + w_e) = 2\omega \left[\frac{1}{4} \mu H^2 \sin(2\omega t + 2\phi_e) - \frac{1}{4} \epsilon E^2 \sin(2\omega t + 2\phi_e) \right]$$

因此该时间变化率的最大值为

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} (w_m + w_e) \right|_{\max} = 2\omega \left(\frac{1}{4} \mu H^2 - \frac{1}{4} \epsilon E^2 \right) = 2\omega (w_m^{\text{av}} - w_e^{\text{av}}) \quad (5.3-13)$$

式(5.3-10b)也表明,复坡印廷矢量的虚部代表与它垂直的截面上所通过的虚电磁功率密度。

如果将式(5.3-8)应用于有外加的场源电流密度 $\dot{\vec{J}}_e$ 处,则正如 2.3.1 小节中最后一段所指出的,这里的 $\dot{\vec{J}}$ 应为二者之和: $\dot{\vec{J}} = \dot{\vec{J}}_e + \dot{\vec{J}}_c$, 其中 $\dot{\vec{J}}_c = \sigma \dot{\vec{E}}$ 。于是该式可表示为

$$-\frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{J}}_e^* = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* \right) + \frac{1}{2} \sigma E^2 + j2\omega \left(\frac{1}{4} \mu H^2 - \frac{1}{4} \epsilon E^2 \right) \quad (5.3-14)$$

对此式两边取体积分,并利用散度定理,得

$$-\int_v \frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{J}}_e^* \mathrm{d}v = \oint_s \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* \right) \cdot \overline{\mathrm{d}\vec{s}} + \int_v \frac{1}{2} \sigma E^2 \mathrm{d}v + j2\omega \int_v \left(\frac{1}{4} \mu H^2 - \frac{1}{4} \epsilon E^2 \right) \mathrm{d}v \quad (5.3-15)$$

这样,我们导出了适用于有源区的复坡印廷定理。也可以把式(5.3-15)简写为

$$\dot{P}_s = \oint_s \dot{\vec{S}} \cdot \overline{d\vec{s}} + \int_v \frac{1}{2} \sigma E^2 dv + j2\omega \int_v (\omega_m^{av} - \omega_e^{av}) dv \quad (5.3-16)$$

这就是说,在一个区域内,源所供给的总复功率等于流出该区域的复电磁功率和区域内部的热损耗功率及体积中电磁场储能的最大时间变化率之和。

例 5.3-1 两无限大理想导体平行板相距 d , 坐标如图 5.3-1 所示。在平行板间存在时谐电磁场, 其电场强度为

$$\vec{E}(t) = \hat{x}E_0 \sin \frac{\pi y}{d} \cos(\omega t - kz) \quad (\text{V/m})$$

求: (a) 磁场强度 $\vec{H}(t)$;

(b) 复坡印廷矢量 $\dot{\vec{S}}$ 及平均功率流密度;

(c) $y=0$ 导体板内表面的面电流分布 $\vec{J}_s(t)$ 。

【解】 (a) $\vec{E} = \hat{x}E_0 \sin \frac{\pi y}{d} e^{-jkz}$

由 $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$ 知,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}} &= \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E} = \frac{j}{\omega\mu} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega\mu} \left[\hat{y} \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \hat{z} \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} \right] \\ &= \hat{y} \frac{k}{\omega\mu} E_0 \sin \frac{\pi y}{d} e^{-jkz} - \hat{z} \frac{j\pi}{\omega\mu d} E_0 \cos \frac{\pi y}{d} e^{-jkz} \end{aligned}$$

$$\vec{H}(t) = \text{Re}[\dot{\vec{H}} e^{j\omega t}] = \hat{y} \frac{k}{\omega\mu} E_0 \sin \frac{\pi y}{d} \cos(\omega t - kz) + \hat{z} \frac{\pi}{\omega\mu d} E_0 \cos \frac{\pi y}{d} \sin(\omega t - kz) \quad (\text{A/m})$$

$$(b) \dot{\vec{S}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* = \hat{z} \frac{k}{2\omega\mu} E_0^2 \sin^2 \left(\frac{\pi y}{d} \right) - \hat{y} \frac{j\pi}{4\omega\mu d} E_0^2 \sin \left(\frac{2\pi y}{d} \right)$$

$$\bar{S}^{av} = \text{Re}[\dot{\vec{S}}] = \hat{z} \frac{k}{2\omega\mu} E_0^2 \sin^2 \left(\frac{\pi y}{d} \right) \quad (\text{W/m}^2)$$

$$(c) \dot{\vec{J}}_s = \hat{y} \times \dot{\vec{H}}|_{y=0} = -\hat{x} \frac{j\pi}{\omega\mu d} E_0 e^{-jkz}$$

$$\vec{J}_s(t) = \text{Re}[\dot{\vec{J}}_s e^{j\omega t}] = \hat{x} \frac{\pi}{\omega\mu d} E_0 \sin(\omega t - kz) \quad (\text{A/m})$$

我们注意到, $\bar{S}^{av}$ 表明, 此平行板间电磁场有实功率沿 z 向传输。同时, 导体平行板上有面电荷沿 z 向流动。平行板起了引导电磁波功率的作用, 故称为平行板波导。

为了书写简便, 今后不再在复矢量上面打点, 即直接用 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 等表示复矢量。由于复数公式中会出现 j 而不会有 t , 因此并不难辨认它是复数公式还是瞬时值公式。并且, 我们一般都将瞬时值写作 $\vec{E}(t)$ 、 $\vec{H}(t)$ 等, 以示区别。

5.4 理想介质中的平面波

5.4.1 平面波的电磁场

现在来研究理想介质 ($\sigma=0$) 中无源区时谐电磁场波动方程的解。其电场复矢量 $\vec{E}$ 的波动方程为(5.2-5)。为简单起见, 选择坐标使 $\vec{E}$ 沿 x 轴方向, 即 $\vec{E} = \hat{x}E_x$, 这里对复数不再打点。于是式(5.2-5)化为下述标量波动方程:

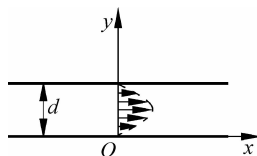


图 5.3-1 平行板波导

$$\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0, \quad k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (5.4-1)$$

注意,式中 E_x 是指复振幅 $\dot{E}_x$ 。设 E_x 仅与坐标 z 有关而与 x, y 无关,则

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

故式(5.4-1)化为

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0$$

这是二阶常数微分方程,其解为

$$E_x = C_1 e^{-jkz} + C_2 e^{jkz}$$

对应的瞬时值为

$$E_x(t) = \text{Re}[E_x e^{j\omega t}] = C_1 \cos(\omega t - kz) + C_2 \cos(\omega t + kz) \quad (5.4-2)$$

上式第一项的相位随 z 增加而逐渐落后,代表向 $+z$ 方向传播的波。因为,当 t 增加,只要 $\omega t - kz = \text{常数}$,其值是相同的。如图 5.4-1 所示,当 $t_0 \rightarrow t_1$,则相应地 $z_0 \rightarrow z_1$,在这两点处场的总相位 $\omega t - kz$ 保持不变,从而使场值不变。这表明, z_0 处的状态沿 $+z$ 方向移动到了 z_1 处。同理,第二项的相位随 z 增加而逐渐引前,代表向 $-z$ 方向的行波。因此,我们称第一项为正向行波,称第二项为反向行波。

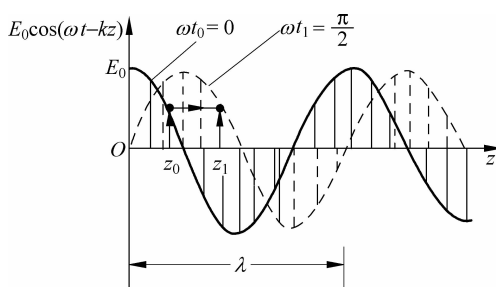


图 5.4-1 电磁波的瞬时波形

现在来研究正向行波的传播参数。其电场复振幅和瞬时值可表示为

$$E_x = E_0 e^{-jkz}, \quad E_x(t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \quad (5.4-3)$$

式中, E_0 是 $z=0$ 处电场强度的振幅; ωt 称为时间相位; kz 称为空间相位。空间相位相同的场场所组成的曲面称为等相面、波前或波面。可见, $z = \text{const.}$ 的平面为波面。因此称这种电磁波为平面电磁波。又因 E_x 与 x, y 无关,在 $z = \text{const.}$ 的波面上各点场强相等。这种在波面上场强均匀分布的平面波称为均匀平面波。它是最基本的电磁波形式。此外较常见的波面(等相面)形式有圆柱面、球面,分别称为柱面波和球面波。

空间相位 kz 变化 2π 所经过的距离称为波长或相位波长,以 λ 表示。由 $k\lambda = 2\pi$ 得

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.4-4)$$

k 称为波数,因为,空间相位变化 2π 相当于一个全波, k 表示单位长度内所具有的全波数目。

时间相位 ωt 变化 2π 所经历的时间称为周期,以 T 表示;而一秒内相位变化 2π 的次数称为频率,用 f 表示。因 $\omega T = 2\pi$,得

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (5.4-5)$$

等相面(波前)传播的速度称为相速。我们来考察波前上的一个特定点,这样的点对应于 $\cos(\omega t - kz) = \text{const.}$, 即 $\omega t - kz = \text{const.}$, 由此得 $\omega dt - k dz = 0$, 故相速为

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (5.4-6)$$

对于真空,

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}} = 3 \times 10^8 (\text{m/s}) = c$$

可见,电磁波在真空中的相速等于真空中的光速,其更精确的值是 $2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。在一般介质中 $\epsilon > \epsilon_0$, $\mu \approx \mu_0$, 故 $v_p < c$, 称为慢波。相应地,介质中的(相位)波长也比真空中的波长短,因为

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v_p}{\omega} = \frac{v_p}{f} < \frac{c}{f}$$

电磁波的磁场强度可由复麦氏方程组式(5.2-2a)得出:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \bar{E} = \frac{j}{\omega\mu} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{y} \frac{j}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ &= \hat{y} \frac{j}{\omega\mu} (-jk) E_0 e^{-jkz} = \hat{y} \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz} = \hat{y} H_0 e^{-jkz} \end{aligned} \quad (5.4-7)$$

式中

$$\eta = \frac{E_0}{H_0} = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\Omega) \quad (5.4-8)$$

η 具有阻抗的量纲,单位为欧姆(Ω),它的值与媒质的参数有关,因此它被称为媒质的波阻抗。在真空中它是 $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377 \approx 120\pi (\Omega)$,更精确的值是 $376.730\,35\Omega$ 。

5.4.2 平面波的传播特性

由上,均匀平面波的电场和磁场复矢量具有下列形式:

$$\begin{cases} \bar{E} = \hat{x} E_0 e^{-jkz} \\ \bar{H} = \hat{y} H_0 e^{-jkz} \end{cases} \quad (5.4-9)$$

因此,对此特定的场有

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} = -jk \hat{z} \quad (5.4-10)$$

于是在无源区,复麦氏方程组(5.2-2)化为

$$-jk \hat{z} \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H} \quad (5.4-11a)$$

$$-jk \hat{z} \times \bar{H} = j\omega\epsilon \bar{E} \quad (5.4-11b)$$

$$-jk \hat{z} \cdot \bar{E} = 0 \quad (5.4-11c)$$

$$-jk \hat{z} \cdot \bar{H} = 0 \quad (5.4-11d)$$

即

$$\bar{H} = \frac{1}{\eta} \hat{z} \times \bar{E} \quad (5.4-12a)$$

$$\bar{E} = -\eta \hat{z} \times \bar{H} \quad (5.4-12b)$$

$$\hat{z} \cdot \bar{E} = 0 \quad (5.4-12c)$$

$$\hat{z} \cdot \bar{H} = 0 \quad (5.4-12d)$$

这些关系简单地给出了均匀平面波的电场 $\bar{E}$ 和磁场 $\bar{H}$ 的互换关系及重要特性。这些关系的导出利用了式(5.4-10)的处理,称为对均匀平面波的简化算法,它的条件是式(5.4-9),即电磁场为均匀平面波。

基于 5.4.1 节的分析和上述关系,我们知道在理想介质中传播的均匀平面波有以下基本性质。其空间分布如图 5.4-2 所示。

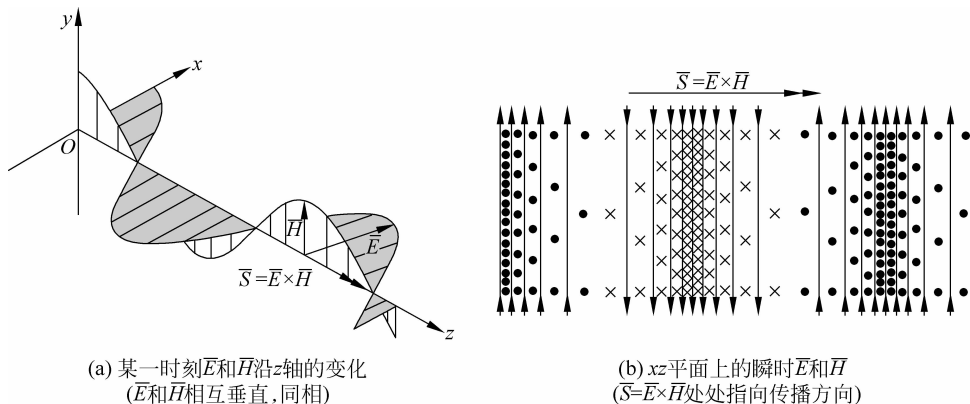


图 5.4-2 均匀平面波的电磁场分布

(1) 由式(5.4-12a)和式(5.4-12b)知, $\bar{E}$ 、 $\bar{H}$ 互相垂直,并由式(5.4-12c)和式(5.4-12d)知, $\bar{E}$ 、 $\bar{H}$ 都与传播方向 $\hat{z}$ 相垂直,即都无纵向分量,因此它是横波,称为横电磁波,或 TEM (Transverse Electro-Magnetic) 波。

(2) 式(5.4-12a)和式(5.4-12b)表明, $\bar{E}$ 、 $\bar{H}$ 处处同相,两者振幅之比为媒质的波阻抗 η (实数)。

(3) 复坡印廷矢量为

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* = \frac{1}{2} \hat{x} E_0 e^{-jkz} \times \hat{y} \frac{E_0}{\eta} e^{+jkz} = \hat{z} \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} = \bar{S}_{av} \quad (5.4-13)$$

均匀平面波沿传播方向传输实功率,且沿途无衰减(无损耗);无虚功率。

(4) 瞬时电、磁能密度分别为

$$w_e(t) = \frac{1}{2} \epsilon E^2(t) = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

$$w_m(t) = \frac{1}{2} \mu H^2(t) = \frac{1}{2} \mu H_0^2 \cos^2(\omega t - kz) = \frac{1}{2} \mu \frac{E_0^2}{\mu/\epsilon} \cos^2(\omega t - kz) = w_e(t)$$

可见,任一时刻电能密度与磁能密度相等,各为总电磁能密度的一半。

总电磁能密度的平均值为 $\frac{1}{2} \epsilon E_0^2 = \frac{1}{2} \mu H_0^2$, 因

$$w^{av} = \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) dt = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 \quad (5.4-14)$$

均匀平面波的能量传播速度等于其相速:

$$v_e = \frac{S^{\text{av}}}{w^{\text{av}}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta}}{\frac{1}{2} \epsilon E_0^2} = \frac{1}{\epsilon \eta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = v_p$$

这也说明,电磁波是电磁能量的携带者。

值得指出的是,“均匀平面波”是一个理想化的简化模型。例如电视塔发射天线的辐射场,一般来说它近于球面波而不是平面波。但是若从远离该塔的一个小区域来观察,则总可以把这种来波近似看成是均匀平面波(图 5.4-3)。这正如我们日常都把射入房间的太阳光看成是平行光一样。因此,在多数情形下,日常所用的电视或通信接收天线都可以把到达的来波看成是均匀平面波。

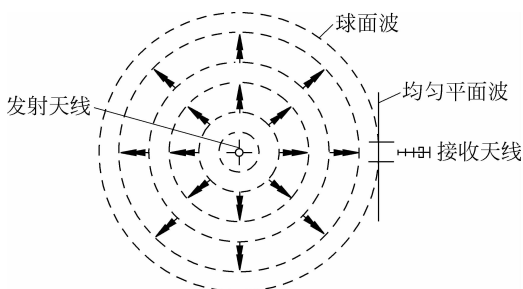


图 5.4-3 在远处小区域观察球面波

例 5.4-1 亚洲卫星 I 号 (Asiasat I) 转播中央电视台第一套节目,中心频率为 4.12GHz,它在我国上海的等效全向辐射功率(EIRP)为 $P=36\text{dBW}$ 。

- 求上海地面站接收的功率流密度,设它离卫星的距离 $r=37\,100\text{km}$ ^①;
- 求地面站处电场强度和磁场强度振幅,并以自选的坐标写出其复矢量的瞬时值表示式;
- 若中央台北京发射站离卫星 $r'=37\,590\text{km}$ ^①,则接收信号比中央台至少延迟了多久?(参见图 5.4-4)

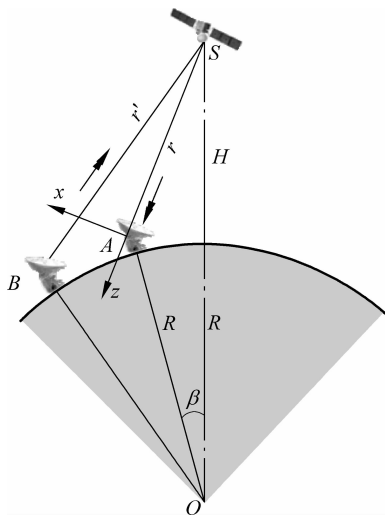


图 5.4-4 卫星电视广播线路

【解】 (a) 功率 P 以 dBW 为单位计的定义是

$$P(\text{dBW}) = 10 \lg \frac{P(\text{W})}{1(\text{W})} \quad (5.4-15)$$

故以 W(瓦)为单位计的功率为

$$P(\text{W}) = 10^{\frac{P(\text{dBW})}{10}} = 10^{3.6} \approx 3981(\text{W})$$

卫星功率按要求只向亚洲地区辐射,而尽量不向其他方向辐射,因此到达我国各地的功率流密度相当强。为了便于计算,该功率密度由卫星对接收点方向的等效全向辐射功率 P 来计算,它规定为设想 P 向四周均匀辐射时接收点处的功率密度。从而得

$$S^{\text{av}} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{3981}{4\pi \times 37\,100^2 \times 10^6} = 2.30 \times 10^{-13}(\text{W}/\text{m}^2)$$

(b) 由式(5.4-13)知:

$$S^{\text{av}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta_0}$$

① 同步地球卫星位于赤道上空约 35 800km 处。纬度为 θ ,经度为 ϕ 的接收点至卫星的距离为

$$r = \sqrt{35\,786^2 + 35\,786^2 (1 - \cos \Delta\phi \cos \theta)} \quad (\text{km})$$

式中 $\Delta\phi$ 为接收点与卫星经度之差。1990 年 4 月发射的亚卫 I 号定点于东经 105.5°。上海位于东经 121.43°、北纬 31.17°,由上式求得 $r=37\,100\text{km}$;北京位于东经 116.47°、北纬 39.80°,得 $r'=37\,590\text{km}$ 。

故

$$E_0 = \sqrt{2S_{av}\eta_0} = \sqrt{2 \times 2.30 \times 10^{-13} \times 377} = 1.32 \times 10^{-5} (\text{V/m})$$

$$H_0 = \frac{E_0}{\eta_0} = \frac{1.32 \times 10^{-5}}{377} = 3.50 \times 10^{-8} (\text{A/m})$$

可见卫星电视信号到达地面的电场强度约 $13\mu\text{V/m}$ 。它比本地电视台播发的场强值(VHF和UHF频段规定值分别为 $500\mu\text{V/m}$ 和 3mV/m)弱得多。

设到达地面站处电磁波沿 z 轴方向传播,则其电场强度复矢量可表示为

$$\vec{E} = \hat{x}E_0 e^{j\phi_0} e^{-jkz}$$

式中 ϕ_0 为 z 坐标原点处电场初始相位。其磁场强度复矢量为

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta_0} \hat{z} \times \vec{E} = \hat{y} \frac{E_0}{\eta_0} e^{j\phi_0} e^{-jkz}$$

由此,利用式(5.1-18),电磁场强度的瞬时值可表示为

$$\vec{E}(t) = \hat{x}E_0 \cos(\omega t - kz + \phi_0)$$

$$\vec{H}(t) = \hat{y} \frac{E_0}{\eta_0} \cos(\omega t - kz + \phi_0)$$

式中

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 4.12 \times 10^9 = 2.59 \times 10^{10} (\text{rad/s})$$

$$k = \frac{\omega}{t} = \frac{2.59 \times 10^{10}}{3 \times 10^8} = 86.3 (\text{rad/m})$$

$$(c) \quad t \geq \frac{r' + r}{c} = \frac{37590 + 37100}{3 \times 10^8} = 0.25 (\text{s})$$

这个结果表明,当我们在上海电视屏幕上见到中央电视台的时钟秒针跳到新年零点的时候,实际上上海人已步入新年约 $\frac{1}{4}$ 秒了。

5.4.3 电磁波谱

麦克斯韦方程组对电磁波的频率并没有限制。已知的电磁波频谱从特长无线电波的几百赫[兹]延续到宇宙辐射的极高能 γ 射线 10^{24}Hz 量级,如图 5.4-5 所示。无线电波又分成 VLF(甚低频)、LF(低频)、MF(中频)、HF(高频)、VHF(甚高频)、UHF(特高频)、SHF(超高频)和 EHF(极高频)等频段,它们依其波长也分别称为超长波、长波、中波、短波、米波、分米波、厘米波和毫米波等波段(参看附录 D)。当代无线电技术还发展到亚毫米波段(频率高于 $3 \times 10^{11}\text{Hz}$,波长短于 1mm),这已属于红外线的频率范围。红外线、可见光、紫外线、X 射线、 γ 射线等全都是电磁波。例如,X 射线就是波长在 $(0.01 \sim 100) \times 10^{-10}\text{m}$ 范围内的电磁波。电磁波谱是一项有限的资源。在短短的最近一百年的时间里,人们已对各无线电波频段开发了成功的应用,参看附录 D 中表 D-1。

许多实验已表明,所有这些波仍有其基本的共同点,如都是横波,它们在自由空间都以光速传播。人们曾同时用无线电波和光波来观察星球,两者频率相差 10^6 倍以上,却已证实,它们的传播速度是相同的,其差异在实验误差范围之内。自然,也有不同点,如无线电波呈现明显的波动性,而光波及波长更短的 γ 射线等则较强地呈现粒子性。

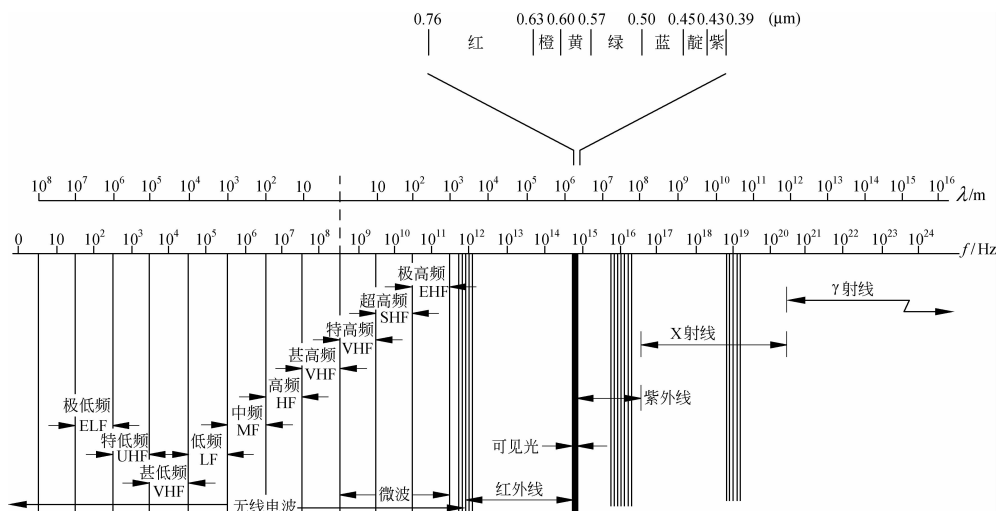


图 5.4-5 电磁波谱

产生各电磁波的基本原理都是相同的,即实现电荷扰动。电荷只要不是作匀速直线运动(惯性运动),其他各种电荷运动都将辐射电磁波。但可以分为两类:①所有无线电波都是利用振荡回路使电荷在回路中来回振动而产生的,其波长可从 30km 至 0.2mm;②对于更短波长的电磁波,则不是利用电的方法产生,而是通过热骚动激发原子或分子中的电子能级跃迁来产生。

实际波源既有人工的又有天然的。电视广播、通信和雷达的发射天线、医用辐射计、微波炉、激光器、核爆炸等是电磁波的人工源;太阳、星球和雷电等则是电磁波的天然源。

5.5 导电媒质中的平面波

5.5.1 导电媒质的分类

导电媒质又称为有(损)耗媒质,是指 $\sigma \neq 0$ 的媒质。电磁波在导电媒质中传播时,根据欧姆定律,将出现传导电流 $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$,也称为欧姆电流。此时麦氏方程(5.2-2b)中 $\vec{J} = \vec{J}_c + \vec{J}_s$, $\vec{J}_s$ 是外加的源电流。在无源区 $\vec{J}_s = 0$,于是有

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon \vec{E} = j\omega \left(\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} = j\omega \epsilon_x \vec{E} \quad (5.5-1)$$

式中

$$\epsilon_x = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right) \quad (5.5-2)$$

称为等效复介电常数,下标 x 代表复数(complex number)。引入等效复介电常数 ϵ_x 后导电媒质可看成一种等效的介质,只是 ϵ 换以等效复介电常数 ϵ_x 。 ϵ_x 与 ϵ 的不同在于多一项虚部。该虚部的大小取决于比值 $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$,该比值其实就是导电媒质中传导电流密度振幅($|\sigma \vec{E}|$)与位移电流密度振幅($|j\omega \epsilon \vec{E}|$)之比。

按 $\sigma/\omega\epsilon$ 比值的量级,可把导电媒质分为以下三类。

(电) 介质: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ (如 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 0.01$)

不良导体: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \approx 1$ (如 $0.01 < \frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 100$)

良导体: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ (如 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} > 100$)

值得注意的是,媒质属于介质还是良导体,与频率有关。图 5.5-1 给出了几种常见媒质的 $\sigma/\omega\epsilon$ 与频率的关系。所用的媒质参数列在表 5.5-1 中,这是各媒质在低频时的参数值。值得说明,媒质参数也是随频率而变的,尤其在 10^9 Hz 或更高频率上更为显著。因此该图曲线对这些很高频率范围并不准确。

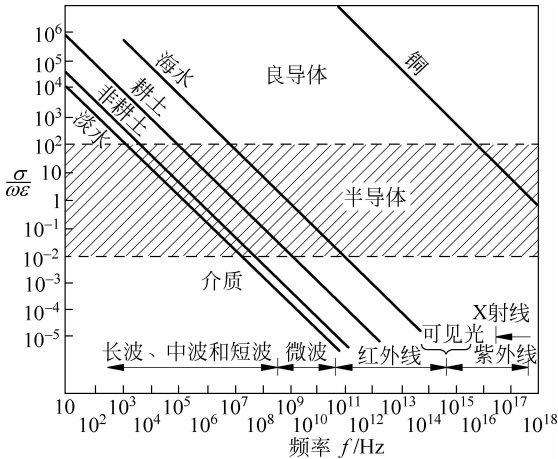


表 5.5-1 几种媒质的电参数

媒质	$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$	$\sigma/(\text{S/m})$
铜	1	5.8×10^7
海水	80	4
耕土	14	10^{-2}
非耕土	3	10^{-4}
淡水	80	10^{-3}

图 5.5-1 几种媒质的 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ 与频率的关系(对数坐标)

由图 5.5-1 可见,在 1MHz 时海水性质像导体,而在微波频率上它的性质像不良导体。铜平常认为是一种良导体,在普通无线电波频率范围内,其 $\sigma/\omega\epsilon$ 很大,甚至当频率高至 30GHz,仍达 3.5×10^7 ,即仍属于优良导电体。但是当频率是 10^{20} Hz 时,即对于短 X 射线,其 $\sigma/\omega\epsilon$ 约为 10^{-2} 。这就是说,铜对 X 射线而言犹如一介质。因此 X 射线可以透入金属(如铜)一定的深度。从微观来看,这时的波长已短到可与金属原子间的距离相比拟或更小,因而能透入。

5.5.2 平面波在导电媒质中的传播特性

采用等效复介电常数 ϵ_x 后,平面波在导电媒质中的场表达式和传播参数可仿照理想介质情况来得出。在无源区,设其时谐电磁场的电场复矢量为 $\bar{E} = \hat{x}E_x$,则由式(5.4-1)知, E_x 的波动方程为

$$\nabla^2 E_x + k_x^2 E_x = 0, \quad k_x = \omega \sqrt{\mu \epsilon_x} = \omega \sqrt{\mu \left(\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right)} \tag{5.5-3}$$

对于沿 +z 方向传播的波,其解的形式为 $E_0 e^{-jk_x z}$,故

$$\bar{E} = \hat{x}E_0 e^{-jk_x z} \tag{5.5-4}$$

磁场复矢量为

$$\bar{H} = \frac{1}{\epsilon_x} \hat{z} \times \bar{E} = \hat{y} \frac{E_0}{\epsilon_x} e^{-jk_x z} \quad (5.5-5)$$

式中

$$\epsilon_x = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_x}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega}}} \quad (5.5-6)$$

复数 k_x 称为传播常数,它可以写成如下形式:

$$k_x = \beta - j\alpha \quad (5.5-7)$$

β 称为相位常数; α 称为衰减常数。将上式代入式(5.5-3)的 k_x , 两边平方后有

$$k_x^2 = \beta^2 - \alpha^2 - j2\beta\alpha = \omega^2 \mu \left(\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right)$$

上式两边的实部和虚部应分别相等,即

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu \epsilon \\ 2\beta\alpha = \omega \mu \sigma \end{cases}$$

由以上两方程解得

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.5-8a)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.5-8b)$$

将式(5.5-7)代入式(5.5-4)知,

$$\bar{E} = \hat{x} E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (5.5-9a)$$

其瞬时表示式为(设 E_0 为实数)

$$\bar{E}(t) = \hat{x} E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (5.5-9b)$$

可见,场强振幅随 z 的增加按指数律不断衰减。衰减的产生是由于传播过程中一部分电磁能转变成热能(热损耗)。衰减量可用场量衰减值的自然对数来计量,记为奈比(Np)。若电磁波传播 l 距离后振幅由 E_0 衰减为 E_1 , 则

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 e^{-\alpha l} \\ \alpha l &= \ln \frac{E_0}{E_1} \text{ (Np)} \end{aligned} \quad (5.5-10)$$

工程上又常用分贝(dB)来计算这类量,其定义为

$$A_{dB} = 10 \lg \frac{P_0}{P_1} = 20 \lg \frac{E_0}{E_1} \text{ (dB)} \quad (5.5-11)$$

当 $E_0/E_1 = e = 2.7183$, 衰减量为 1Np, 或 $20 \lg 2.718 = 8.686 \text{ dB}$, 故

$$1 \text{ Np} = 8.686 \text{ dB} \quad (5.5-12)$$

衰减常数 α 的单位为 Np/m 或 dB/m。按式(5.5-11)定义的分贝值与其功率比和场强比的对比关系如表 5.5-2 所示。

表 5.5-2 分贝值与功率比和场强比的对比关系

dB	P_0/P_1	E_0/E_1	dB	P_0/P_1	E_0/E_1
10n	10^n	$10^{n/2}$	-3	0.5	0.707
20	100	10	-6	0.25	0.5
10	10	3.162	-10	0.1	0.316
6	4	2	-20	0.01	0.1
3	2	1.414	-10n	10^{-n}	$10^{-n/2}$
0	1	1			

场强的空间相位随 z 的增加按 βz 滞后,即波沿 z 方向传播。波的相速为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1} \right]^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (5.5-13)$$

可见,在导电媒质中传播时,波的相速比在 μ, ϵ 相同的理想介质中慢,且 α 越大, v_p 越慢。该相速还随频率而变化,频率低,则相速越慢。这样,携带信号的电磁波其不同的频率分量将以不同的相速传播。经过一段距离后,它们的相位关系将发生变化,从而导致信号失真。这种波的相速随频率而变的现象称为色散。

色散的名称来源于光学。当一束阳光射在三棱镜上时,在三棱镜的另一边就可看到红、橙、黄、绿、蓝、靛、紫七色光散开的图像。这就是光谱段电磁波的色散现象。这是由于不同频率的光在同一媒质中具有不同的折射率,亦即具有不同的相速所致。因此导电媒质是色散媒质。

导电媒质的波阻抗为复数:

$$\epsilon_x = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} = |\epsilon_x| e^{j\zeta} \quad (5.5-14)$$

则

$$|\epsilon_x|^2 e^{j2\zeta} = \frac{\mu}{\epsilon} \frac{1 + j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}$$

得

$$|\epsilon_x| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{-\frac{1}{4}} < \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (5.5-15)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) = 0 \sim \frac{\pi}{4} \quad (5.5-16)$$

可见,波阻抗具有感性相角。这意味着电场引前于磁场,二者不再同相。此时磁场强度复矢量为

$$\bar{H} = \hat{y} \frac{E_0}{\epsilon_x} e^{-jk_x z} = \hat{y} \frac{E_0}{|\epsilon_x|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\zeta} \quad (5.5-17)$$

其瞬时值为

$$\bar{H}(t) = \hat{y} \frac{E_0}{|\epsilon_x|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \zeta) \quad (5.5-18)$$

磁场强度的相位比电场强度滞后 ξ, σ 越大则滞后越多。其振幅也随 z 的增加按指数衰减, 如图 5.5-2 所示。

磁场强度的方向与电场强度相垂直, 并都垂直于传播方向 $\hat{z}$, 因此导电媒质中的平面波是横电磁波。这个性质与理想介质中的平面电磁波是相同的。导电媒质中的复坡印廷矢量为

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* \\ &= \hat{z} \frac{E_0^2}{2|\epsilon_x|} e^{-2az} e^{j\xi} \quad (5.5-19)\end{aligned}$$

由于电场与磁场不同相, 复功率密度不但有实部, 还有虚部, 即既有单向流动功率, 又有来回流动的交换功率(虚功率)。利用式(5.5-9b)和式(5.5-18)可知, 其瞬时坡印廷矢量为

$$\begin{aligned}\bar{S}(t) &= \bar{E}(t) \times \bar{H}(t) = \hat{z} \frac{E_0^2}{|\epsilon_x|} e^{-2az} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \xi) \\ &= \hat{z} \frac{E_0^2}{2|\epsilon_x|} e^{-2az} [\cos \xi + \cos(2\omega t - 2\beta z - \xi)] \quad (5.5-20)\end{aligned}$$

上式第二项是时间的周期函数, 周期为 $2\pi/(2\omega) = T/2$ 。对一固定的观察点($z=z_1$)而言, 在这个周期内该瞬时功率项在正负间来回变换, 意味着一会儿向 $+z$ 方向流动, 一会儿又向 $-z$ 方向流动, 而一周内沿 $+z$ 方向的总功率流密度为零, 因此这部分功率为虚功率。因 $\xi=0 \sim \pi/4$, 第一项为正值, 代表向 $+z$ 方向流动的实功率。它也正是一周内沿 $+z$ 方向的平均功率流密度 $\bar{S}^{av}$ 。对式(5.5-19)取实部可得到相同的结果:

$$\bar{S}^{av} = \text{Re}[\bar{S}] = \hat{z} \frac{E_0^2}{2|\epsilon_x|} e^{-2az} \cos \xi \quad (5.5-21)$$

式中 $\cos \xi$ 与 σ 的关系可利用式(5.5-16)导出, 得

$$\cos \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.5-22)$$

若 $\sigma \neq 0$, 即 $\xi \neq 0$, 将使平均功率流密度减小。该平均功率流密度随 z 的增大按 e^{-2az} 关系迅速衰减。

电、磁场储能在一个周期内的平均值分别如下:

$$w_e^{av} = \frac{1}{4} \epsilon |E|^2 = \frac{1}{4} \epsilon E_0^2 e^{-2az} \quad (5.5-23)$$

$$w_m^{av} = \frac{1}{4} \mu |H|^2 = \frac{1}{4} \mu \frac{E_0^2}{|\epsilon_x|^2} e^{-2az} = \frac{1}{4} \epsilon E_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} e^{-2az} \quad (5.5-24)$$

我们看到, 在导电媒质中, 平均磁能密度比平均电能密度大。这正是由于 $\sigma \neq 0$ 所引起的传导电流所致, 因为它激发了附加的磁场。总平均储能密度为

$$w^{av} = w_e^{av} + w_m^{av} = \frac{1}{4} \epsilon E_0^2 e^{-2az} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} \right] \quad (5.5-25)$$

能量传播速度为

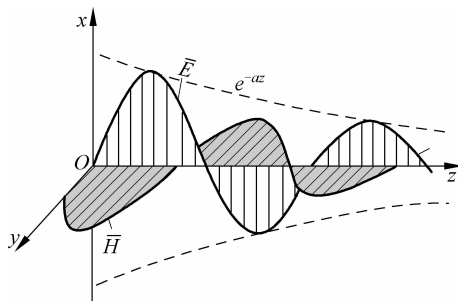


图 5.5-2 导电媒质中平面电磁波瞬时图形

$$v_e = \frac{S^{\text{av}}}{w^{\text{av}}} = \frac{\frac{\cos \zeta}{|\epsilon_x|}}{\frac{1}{2}\epsilon \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} \right]} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \left[\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2}} \right]^{\frac{1}{2}} = v_p \quad (5.5-26)$$

可见,导电媒质中均匀平面波的能速与相速相同。

根据上面的分析,现将理想介质和导电媒质中的平面波传播参数和场表示式列在表 5.5-3 中,以便比较。

表 5.5-3 理想介质和导电媒质传播特性比较

理想介质	导电媒质
ϵ	$\epsilon_x = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega}$
$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$	$k_x = \omega \sqrt{\mu \epsilon_x} = \beta - j\alpha$
$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\epsilon_x = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_x}} = \epsilon_x e^{j\zeta}$
$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$	$v_p = \frac{\omega}{\beta} < \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$
$\vec{E} = \hat{x} E_0 e^{-jkz}$	$\vec{E} = \hat{x} E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$
$\vec{H} = \hat{y} \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz}$	$\vec{H} = \hat{y} \frac{E_0}{ \epsilon_x } e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\zeta}$
$\vec{S}^{\text{av}} = \hat{z} \frac{E_0^2}{2\eta}$	$\vec{S}^{\text{av}} = \hat{z} \frac{E_0^2}{2 \epsilon_x } e^{-2\alpha z} \cos \zeta$

对于介质(低耗介质), $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$ 。例如,聚四氟乙烯、聚苯乙烯、聚乙烯及有机玻璃等材料,在高频和超高频范围内均有 $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} < 10^{-2}$ 。则其平面波传播常数为^①

$$k_x = \omega \sqrt{\mu \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)} \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left(1 - j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right) \quad (5.5-27)$$

即

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (5.5-28a)$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (5.5-28b)$$

波阻抗为^②

① 更准确的近似式是:

$$k_x = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 - j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 + \dots \right]$$

得

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right]$$

② 更准确的近似式是: $\epsilon_x = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right)$

$$\epsilon_x \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (5.5-29)$$

可见,平面波在低损耗介质中的传播特性,除了由微弱的损耗引起的衰减外,与理想介质中几乎相同。该衰减常数式(5.5-28a)也可基于其热损耗功率来导出,这留作读者的思考题。

例 5.5-1 人体肌肉组织 $\epsilon_r = 58.5, \sigma = 1.21 \text{ S/m}$, 当接收 900MHz 的手机电磁波信号时, 它的传播参数 α, β 及 ϵ_x 多大?

【解】 先来计算在接收频率上的 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{1.21}{2\pi \times 900 \times 10^6 \times 58.5 \times 8.854 \times 10^{-12}} = 0.413$$

由式(5.5-8),

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 2\pi \times 900 \times 10^6 \times \frac{1}{3 \times 10^8} \sqrt{\frac{5.85}{2}} \left[\sqrt{1 + (0.413)^2} \mp 1 \right]^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} 29.2 \text{ (Np/m)} \\ 147 \text{ (rad/m)} \end{cases}$$

由式(5.5-14),

$$\epsilon_x = \frac{377}{\sqrt{58.5}} \left[1 + (0.413)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} e^{j\frac{1}{2}\arctan 0.413} = 47.4 e^{j11.2^\circ} (\Omega)$$

对于不同类型的媒质, 现将其传播参数 $\alpha, \beta, \epsilon_x$ 及相速 v_p 的表示式列在表 5.5-4 中。

表 5.5-4 不同类型媒质的传播参数表示式

媒质类型	α /(Np/m)	β /(rad/m)	ϵ_x/Ω	v_p /(m/s)
一般导电媒质	$\omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$	$\omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{j\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)}$	$\frac{\omega}{\beta}$
理想介质 ($\sigma=0$)	0	$\omega \sqrt{\mu\epsilon}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$
低耗介质 ($\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$)	$\frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\omega \sqrt{\mu\epsilon}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$
良导体 ($\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$)	$\sqrt{\pi f \mu \sigma}$	$\sqrt{\pi f \mu \sigma}$	$(1+j) \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$	$\sqrt{\frac{4\pi f}{\mu \sigma}}$

5.5.3 平面波在良导体中的传播特性及集肤深度和表面电阻

对于良导体, $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$, 传导电流密度远大于位移电流密度: $|\sigma E| \gg |j\omega\epsilon E|$ 。例如银、金、铜、铝等金属, 在整个无线电频率范围上都有 $\sigma/\omega\epsilon > 10^2$ 。其中平面波的传播常数为

$$k_x \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left(-j \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right) = \sqrt{\omega\mu\sigma} e^{-j\frac{\pi}{4}} = (1-j) \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = (1-j) \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

即

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad (5.5-30)$$

波阻抗为

$$\epsilon_x \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon(-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon})}} = \sqrt{\frac{2\pi f \mu}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}} = (1+j)\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = (1+j)\frac{\alpha}{\sigma} \quad (5.5-31)$$

由式(5.5-30)得平面波在良导体中传播的相速为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{4\pi f}{\mu \sigma}} \quad (5.5-32)$$

良导体中的相速与频率的开方值成正比。当 $f=900\text{MHz}$, 对铜($\sigma=5.8 \times 10^7 \text{S/m}$)有

$$v_p = \sqrt{\frac{4\pi \times 900 \times 10^6}{4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = 1.25 \times 10^4 (\text{m/s})$$

这远比真空中的光速慢。相应的波长也比真空中波长(0.33m)短得多:

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{1.25 \times 10^4}{9 \times 10^8} = 1.39 \times 10^{-5} (\text{m})$$

该频率上铜的波阻抗是

$$\epsilon_x = (1+j)\sqrt{\frac{9\pi \times 10^8 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5.8 \times 10^7}} = 7.83 \times 10^{-3} (1+j) (\Omega)$$

可见 $|\epsilon_x| \ll 1$, 因此良导体中 $|E_x| \ll |H_y|$ 。

良导体中平面波的电磁场分量和电流密度为

$$E_x = E_0 e^{-(1+j)az} \quad (5.5-33)$$

$$H_y = \frac{E_x}{\eta} = H_0 e^{-(1+j)az}, \quad H_0 = \frac{E_0}{\epsilon_x} = E_0 \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi f \mu}} e^{-j\pi/4} = E_0 \frac{\sigma}{\sqrt{2}\alpha} e^{-j\pi/4} \quad (5.5-34)$$

$$J_x = \sigma E_x = J_0 e^{-(1+j)az}, \quad J_0 = \sigma E_0 \quad (5.5-35)$$

H_0 和 J_0 分别是导体表面($z=0$)处的磁场强度复振幅和电流密度复振幅。 H_y 的相位比 E_x 滞后 45° , 因此其复功率流密度将有虚功率:

$$S = \frac{1}{2} E_x H_y^* = \frac{1}{2} E_0 H_0^* e^{-2az} = \frac{1}{2} E_0^2 e^{-2az} \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi f \mu}} (1+j) \quad (5.5-36)$$

$z=0$ 处平均功率流密度为

$$S^{\text{av}}(z=0) = \text{Re}[S(z=0)] = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi f \mu}} (\text{W/m}^2) \quad (5.5-37a)$$

这代表导体表面每单位面积所吸收的平均功率, 也就是单位面积导体内传导电流的热损耗功率:

$$p_\sigma = \frac{1}{2} \int_v \sigma |E|^2 dv = \frac{1}{2} \int_0^\infty \sigma E_0^2 e^{-2az} dz = \frac{\sigma}{4\alpha} E_0^2 = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi f \mu}} (\text{W/m}^2) \quad (5.5-37b)$$

因此, 传入导体的电磁波实功率全部化为热损耗功率。

值得注意的是, 电磁波在良导体中衰减极快。由于良导体的 σ 一般在 $10^7 (\text{S/m})$ 量级, 使高频电磁波传入良导体后, 往往在微米量级的距离内就衰减得近于零了。所以高频电磁场只能存在于导体表面的一个薄层内。这个现象称为集肤效应。电磁波场强振幅衰减到

表面处的 $1/e$ 即 36.8% 的深度,称为集肤深度(或穿透深度) δ 。即

$$E_0 e^{-\alpha \delta} = \frac{1}{e} E_0$$

得

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}} \text{ (m)} \quad (5.5-38)$$

导电性能越好(σ 越大),工作频率越高,则集肤深度越小。例如,银的电导率为 $6.15 \times 10^7 \text{ (S/m)}$,磁导率为 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ (H/m)}$,由式(5.5-38)得

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \times 4\pi \times 6.15}} = \frac{0.0642}{\sqrt{f}} \text{ (m)}$$

当频率 $f = 3\text{GHz}$ (对应的自由空间波长为 $\lambda_0 = 10\text{cm}$)时,得 $\delta = 1.17 \times 10^{-6} \text{ m} = 1.17 \mu\text{m}$ 。因此,虽然微波器件通常用黄铜制成,但只在其导电层的表面涂上若干微米(如 $7\mu\text{m}$)银,就能保证表面电流主要在银层通过。一些导体的 δ 值已列在表 5.5-5 中。

表 5.5-5 导体的集肤效应特性

材料	$\sigma/(\text{S/m})$	μ_r	δ/m	δ			R_s/Ω
				50Hz, mm	10MHz, mm	3GHz, μm	
银	6.15×10^7	1	$0.0642/\sqrt{f}$	9.08	0.0203	1.17	$2.53 \times 10^{-7} \sqrt{f}$
铜	5.80×10^7	1	$0.0661/\sqrt{f}$	9.35	0.0209	1.21	$2.61 \times 10^{-7} \sqrt{f}$
金	4.50×10^7	1	$0.0750/\sqrt{f}$	10.6	0.0237	1.37	$2.96 \times 10^{-7} \sqrt{f}$
铬	3.80×10^7	1	$0.0816/\sqrt{f}$	11.5	0.0258	1.49	$3.22 \times 10^{-7} \sqrt{f}$
铝	3.54×10^7	1	$0.0846/\sqrt{f}$	11.0	0.0267	1.54	$3.26 \times 10^{-7} \sqrt{f}$
锌	1.86×10^7	1	$0.117/\sqrt{f}$	16.5	0.0369	2.13	$4.60 \times 10^{-7} \sqrt{f}$
黄铜	1.57×10^7	1	$0.127/\sqrt{f}$	18.0	0.0402	2.32	$5.01 \times 10^{-7} \sqrt{f}$
镍	1.3×10^7	100*	$0.014/\sqrt{f}$	2.0	0.0044	0.25	$5.5 \times 10^{-6} \sqrt{f}$
软铁	1.0×10^7	200*	$0.011/\sqrt{f}$	1.6	0.0036	0.21	$8.9 \times 10^{-6} \sqrt{f}$
焊锡	7.06×10^6	1	$0.0189/\sqrt{f}$	26.8	0.0598	3.45	$7.48 \times 10^{-7} \sqrt{f}$
石墨	1.0×10^5	1	$1.59/\sqrt{f}$	225	0.503	29	$6.3 \times 10^{-6} \sqrt{f}$

* 当 $B = 0.002\text{T}$ 时。

场强或电流密度振幅随 z 的变化曲线如图 5.5-3 所示。如果要求经 $z=l$ 距离后,场强振幅衰减至 $E = 10^{-6} E_0$,则由 $E = E_0 e^{-\alpha l}$ 知,

$$l = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{E_0}{E} = \delta \ln \frac{E_0}{E} = \delta \ln 10^6 = 13.8 \delta \quad (5.5-39)$$

可见只要经过 13.8 个集肤深度,场强振幅就衰减到只有表面值的百万分之一。因此很薄的金属片对无线电波都有很好的屏蔽作用,如中频变压器的铝罩,晶体管的金属外壳,都

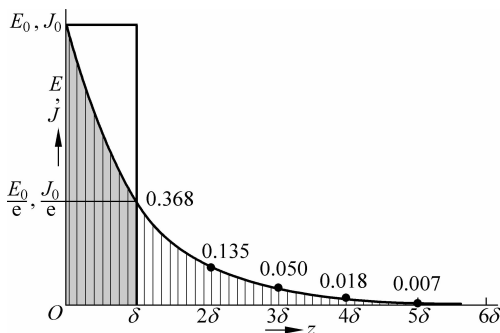


图 5.5-3 场强或电流密度振幅在导体内的分布

很好地起了隔离外部电磁场对其内部影响的作用。

导体表面处切向电场强度 E_x 与切向磁场强度 H_y 之比定义为导体的表面阻抗,即

$$Z_s = \left. \frac{E_x}{H_y} \right|_{z=0} = \frac{E_0}{H_0} = \epsilon_x = (1+j) \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = R_s + jX_s \quad (5.5-40)$$

可见,导体的表面阻抗等于其波阻抗。 R_s 与 X_s 分别称为表面电阻和表面电抗,并有

$$R_s = X_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = \frac{1}{\sigma \delta} = \frac{1}{\sigma(\delta w)} \Big|_{l=w=1} \quad (5.5-41)$$

这意味着,表面电阻相当于单位长度和单位宽度而厚度为 δ 的导体块的直流电阻。如图 5.5-4 所示,流过单位宽度平面导体的总电流(z 由 0 至 ∞)为

$$J_s = \int_0^\infty J_x dz = \int_0^\infty \sigma E_0 e^{-(1+j)\alpha z} dz = \frac{\sigma E_0}{(1+j)\alpha} = \frac{\sigma \delta}{1+j} E_0 = H_0 \quad (5.5-42)$$

从电路观点,该电流通过表面电阻所损耗的功率为

$$p_\sigma = \frac{1}{2} |J_s|^2 R_s = \frac{1}{2} H_0^2 R_s \quad (5.5-43)$$

并有

$$p_\sigma = \frac{1}{2} |J_s|^2 R_s = \frac{1}{2} \frac{\sigma \delta}{2} E_0^2 = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi f \mu}} \quad (\text{W/m}^2) \quad (5.5-44)$$

此结果与式(5.5-37a)和式(5.5-37b)相同。这就是说,设想面电流 J_s 均匀地集中在导体表面 δ 厚度内,此时导体的直流电阻所吸收的功率就等于电磁波垂直传入导体所耗散的热损耗功率。这样,我们可方便地应用式(5.5-43)由

$|J_s|$ 或 H_0 通过 R_s 求得导体的损耗功率。 R_s 是平面导体单位长度单位宽度上的电阻,因而也称为表面电阻率。对于有限面积的导体,用 R_s 乘以长度 l 再除以宽度 w 就得出其总电阻。 R_s 和 δ 一样,往往被当作导体导电性的参数来对待,已列在表 5.5-5 中。我们看到 $R_s \propto \sqrt{f}$, 可见高频时导体的电阻远比低频或直流电阻大。这是由于集肤效应,使高频时电流在导体上所流过的截面积减小了,从而使电阻增大。

例 5.5-2 海水 $\epsilon_r = 80, \mu_r = 1, \sigma = 4\text{S/m}$, 频率为 3kHz 和 30MHz 的电磁波在海平面处(刚好在海平面下侧的海水中)电场强度为 1V/m。求:

- 电场强度衰减为 $1\mu\text{V/m}$ 处的水深。应选用哪个频率作潜水艇的水下通信?
- 采用图 5.5-4 所示坐标, $z=0$ 处为海平面, 设 3kHz 电磁波在该处电场强度瞬时值为

$$\bar{E}_0(t) = \hat{x} \cos(6\pi \times 10^3 t) \quad (\text{V/m})$$

请写出海水中的 $\bar{E}(t)$ 和 $\bar{H}(t)$ 。

- 3kHz 的电磁波从海平面下侧向海水中传播的平均功率流密度, 及传播了 3δ 距离处的平均功率流密度。

【解】 (a) $f = 3\text{kHz}$;

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} = \frac{4 \times 36\pi \times 10^9}{2\pi \times 3 \times 10^3 \times 80} = 3 \times 10^5 \gg 1$$

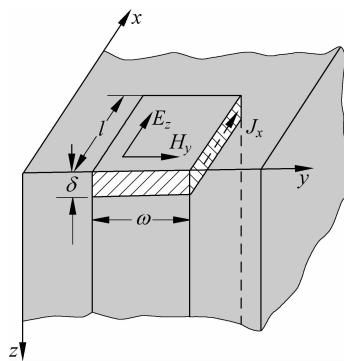


图 5.5-4 平面导体

此时海水为良导体,由式(5.5-30)得

$$\alpha = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \sqrt{\pi \times 3 \times 10^3 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4} = 0.218$$

$$l = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{E_0}{E} = \frac{1}{\alpha} \ln 10^6 = \frac{13.8}{\alpha} = 63.3(\text{m})$$

$f=30\text{MHz}$:

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} = \frac{4 \times 36\pi \times 10^9}{2\pi \times 3 \times 10^7 \times 80} = 30$$

此时海水为不良导体,由式(5.5-8a)得

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} = 2\pi \times 3.0 \times 10^6 \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 80}{2 \times 36\pi \times 10^9} \times 29.0} = 21.4$$

$$l = \frac{13.8}{\alpha} = 0.645(\text{m})$$

可见,选高频 30MHz 衰减太大,应采用特低频 3kHz 左右。但具体频率的选取还应作更全面的论证。例如, f 取低一些,如 2kHz,衰减将更小些;但天线尺寸会大一些(见第 8 章),且传输给定信号所需的时间也长些。受这些因素制约,看来 f 也不宜取得过低。

(b) $\bar{E} = \hat{x}E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$

$$\bar{H} = \hat{y} \frac{E_0}{\eta_c} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \quad \eta_c = (1+j) \frac{\alpha}{\sigma} = \sqrt{2} e^{j\pi/4} \frac{0.218}{4} = 0.0771 e^{j\pi/4}$$

故

$$\bar{E}(t) = \text{Re}[\hat{x}E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] = \hat{x}e^{-0.218z} \cos(6\pi \times 10^3 t - 0.218z) (\text{V/m})$$

$$\bar{H}(t) = \text{Re}\left[\hat{y} \frac{E_0}{0.0771} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} e^{-j\pi/4}\right] = \hat{y}13.0 e^{-0.218z} \cos(6\pi \times 10^3 t - 0.218z - 45^\circ) (\text{A/m})$$

(c) 由式(5.5-37b),有

$$S_0^{\text{av}} = p_\sigma = \frac{\sigma}{4\alpha} E_0^2 = \frac{4}{4 \times 0.218} = 4.6 (\text{W/m}^2)$$

或

$$S_0^{\text{av}} = \text{Re}\left[\frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta_c}\right]$$

$$= \text{Re}\left[\frac{1}{2} \frac{1}{0.0771} e^{-j\pi/4}\right] = 4.6 (\text{W/m}^2)$$

$$S_0^{\text{av}} = S_0^{\text{av}} e^{-2\alpha z}$$

$$= S_0^{\text{av}} e^{-2\alpha \cdot 3\delta} = 4.6 e^{-6} = 0.011 (\text{W/m}^2)$$

例 5.5-3 微波炉(图 5.5-5)利用磁控管输出的 2.45GHz 微波来加热食品。在该频率上,牛排的等效复介电常数^①为

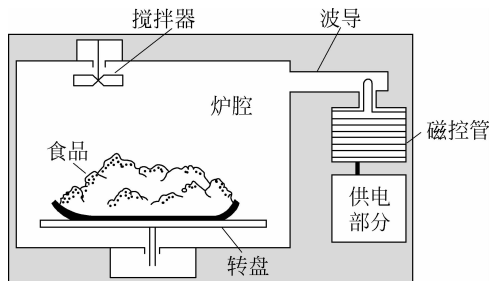


图 5.5-5 简易型微波炉

① 等效复介电常数更一般的定义是(与式(5.5-2)相比)

$$\epsilon_r = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon'(1 - j\tan\delta_e), \quad \tan\delta_e = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \quad (5.5-2a)$$

$\tan\delta_e$ 称为损耗角正切, ϵ'' 称为损耗因子。 ϵ'' 包括传导电流引起的损耗项 $\sigma/(\omega\epsilon')$, 还包括由极化损耗引起的“德拜(Debye)”项。本书只记入导电损耗项 $\sigma/(\omega\epsilon')$, 一般食品都属于这类情形(其“德拜项”可略)。

$$\epsilon' = 40\epsilon_0, \quad \tan\delta_e = 0.3$$

(a) 求微波传入牛排的集肤深度 δ 。在牛排内 8mm 处的微波场强是表面处的百分之几?

(b) 微波炉中盛牛排的盘子用发泡聚苯乙烯制成, 其 $\epsilon' = 1.03\epsilon_0$, $\tan\delta_e = 0.3 \times 10^{-4}$, 说明为何用微波加热时牛排被烧熟而该盘子并不会烧掉。

【解】 (a) 牛排为不良导体, 利用式(5.5-8a)得

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} = 0.0208\text{m} = 20.8\text{mm}$$

$$\frac{E}{E_0} = e^{-z/\delta} = e^{-8/20.8} = 68\%$$

可见, 微波加热相比于其他加热方法的一个优点是, 功率能直接传入食品中, 即能对食品的内部进行加热。同时, 微波场分布在三维空间中, 加热均匀且快。

(b) 发泡聚苯乙烯是低耗介质, 利用式(5.5-28a)得其集肤深度为

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{2}{\omega \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)} \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}}$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 10^8}{2\pi \times 2.45 \times 10^9 \times (0.3 \times 10^{-4}) \times \sqrt{1.03}} = 1.28 \times 10^3 (\text{m})$$

可见其集肤深度很大, 意味着微波在其中传播的热损耗极小, 因此称这种材料对微波是“透明”的。它所消耗的热极小, 所以不会被烧掉。

* 5.5.4 电磁波对人体的热效应^①

随着移动手机的日益普及, 人们普遍关心电磁波对人体的影响。表 5.5-6 列出了 900MHz 时人手和头部组织的相对介电常数、电导率和密度。可见这类组织都是有耗导电媒质, 它们吸收电磁波的结果便发生热效应。单位体积的吸收功率为

$$p_a = \frac{1}{2} \sigma E^2 (\text{W/m}^3) \quad (5.5-45)$$

表 5.5-6 人手和头部组织的有关参数(900MHz)

组 织	ϵ_r	$\sigma/(\text{S/m})$	密度/ (g/cm^3)
骨头	8.0	0.105	1.85
皮肤/脂肪	34.5	0.60	1.10
肌肉	58.5	1.21	1.04
脑髓	55.0	1.23	1.03
体液(血)	73.0	1.97	1.01
眼球水晶体	44.5	0.80	1.05
角膜	52.0	1.85	1.02

① M. C. Huynh and W. Stutzman. A review of radiation effects on human operators of hand-held radios, Microwave Journal, Vol. 47, No. 6, June 2004: 22~42.

人体实际吸收的射频功率用比吸收率 SAR(Specific Absorption Rate)来定量表示。它定义为每单位质量的吸收功率:

$$\text{SAR} = \frac{p_a}{\rho_d} = \frac{\sigma}{2\rho_d} E^2 \text{ (W/kg)} \quad (5.5-46)$$

式中 ρ_d 是材料的密度(kg/m^3)。SAR 是研究电磁功率由人体吸收所引起的健康危险的一个主要指标。

生物组织吸收射频功率将使组织的运动能量随其照射时间而增加。若照射的功率密度足够高,吸收的射频功率将引起温度升高。温度升高快慢与 SAR 成正比,有下述关系:

$$\text{SAR} = C_h \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad (5.5-47)$$

式中 C_h 为组织的比热容, $\text{J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$; ΔT 为短暂的温升, $^\circ\text{C}$; Δt 为线性温升期功率照射的时间(在照射初期,温度随时间呈线性升高)。

表 5.5-7 列出了对一般公众的电磁照射限量的普通标准。手机及其他无线产品都要很好地达到这些标准。例如,若体重 50kg,吸收照射的电磁功率不应超过 $0.08 \times 50 = 4\text{W}$ 。

表 5.5-7 一般公众电磁照射限量的普通标准

应用地区	国 际	欧 洲	美 国
频率范围	100kHz~10GHz	100kHz~6GHz	
平均 SAR(全身)	0.08W/kg	0.08W/kg	0.08W/kg
局部 SAR 及平均质量	2W/kg 100g(连续组织)	2W/kg 10g(立方体)	6W/kg 1g(立方体)

* 5.6 等离子体中的平面波

等离子体(Plasma)是被电离的气体,含有正离子和带负电的自由电子。其正、负电荷总量相等,因此整体上是呈中性的。地球上空 80~400km 处的电离层,就是等离子体,是由于太阳紫外线和宇宙射线电离那里稀薄空气中的氮、氧分子而形成的。此外,火箭喷射的废气,流星遗迹等也都是等离子体。为分析电磁波在其中的传播特性,我们先来讨论其等效介电常数。

5.6.1 等离子体的等效介电常数

电磁波通过等离子体时,将产生位移电流 $\overline{J}_d$ 和运流电流 $\overline{J}_v$ 。由于离子的质量远大于电子,例如氮原子的质量就比电子大 25 800 倍,因此运流电流主要是由电子运动引起的,离子的缓慢移动可以忽略。设每单位体积中的电子数为 N ,电子运动的平均速度为 $\overline{v}$,电子带电量为 $e=1.602 \times 10^{-19}\text{C}$,则运流电流密度为

$$\overline{J}_v = -Ne\overline{v} \quad (5.6-1)$$

在高频电磁场作用下,带电粒子的运动速度可利用牛顿定律得出。设高频电场为 $\overline{E} = \hat{x}E e^{j\omega t}$,则单个电子受力为

$$\overline{F} = -e\overline{E}$$

由牛顿第二定律知

$$\overline{F}(t) = m \frac{d\overline{v}}{dt}, \overline{F} = mj\omega \overline{v}$$

式中 m 为电子质量, $m=9.11 \times 10^{-31}\text{kg}$ 。忽略高频磁场的作用力 $-e\overline{v} \times \overline{B}$ (比 $-e\overline{E}$ 小得多),并且不计电子运动时的碰撞,以上两式应相等,从而得

$$\overline{v} = j \frac{e}{\omega m} \overline{E} \quad (5.6-2)$$

等离子体中的全电流为

$$\bar{J} = \bar{J}_d + \bar{J}_v = j\omega\epsilon_0\bar{E} - j\frac{Ne^2}{\omega m}\bar{E} = j\omega\epsilon_0\left(1 - \frac{Ne^2}{\omega^2 m\epsilon_0}\right)\bar{E} \quad (5.6-3)$$

于是,等离子体可看作是一种导电媒质,其相对介电常数为

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= 1 - \frac{Ne^2}{\omega^2 m\epsilon_0} = 1 - \frac{N(1.602 \times 10^{-19})^2}{(2\pi f)^2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 8.854 \times 10^{-12}} \\ &= 1 - 80.6 \frac{N}{f^2}\end{aligned} \quad (5.6-4a)$$

或

$$\epsilon_r = 1 - \frac{f_p^2}{f^2}, \quad f_p = \sqrt{80.6N} \quad (5.6-4b)$$

f_p 称为等离子体频率。例如,白天电离层最大电子密度典型值为 $N=10^{12}$ (个/ m^3),得 $f_p=9.0\text{MHz}$ 。

5.6.2 平面波在等离子体中的传播特性

引入等效介电常数后,平面电磁波在等离子体中的传播可利用 5.4 节的结果。忽略等离子体中电子的碰撞效应,也即忽略等离子体中的热损耗,此时等效介电常数是实数。传播常数为

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \left(1 - \frac{f_p^2}{f^2}\right)} = k_0 \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}} \quad (5.6-5)$$

根据工作频率 f 的高低,可有三种情形。

(1) $f > f_p$: k 为实数, $k = k_0 \sqrt{1 - f_p^2/f^2} = \beta$, 故电场强度可表示为

$$E = E_0 e^{-j\beta z} \quad (5.6-6)$$

这意味着电磁波将无衰减地传播(已忽略了损耗)。

值得注意的是,该波传播的相速大于光速:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k_0 \sqrt{1 - f_p^2/f^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - f_p^2/f^2}} > c \quad (5.6-7)$$

但是,其实际能量的传播速度 v_e 仍小于光速^①:

$$v_e = c \sqrt{1 - f_p^2/f^2} < c \quad (5.6-8)$$

$$v_e v_p = c^2 \quad (5.6-9)$$

从而有

① 证明如下: 此时电磁能还应包括形成运流电流的电子动能(kinetic energy)。由式(5.6-2)知,单位体积中电子的动能为

$$w_k(t) = \frac{1}{2} N m v^2 = \frac{1}{2} N m \left[\frac{e}{\epsilon m} E_0 \cos(\omega t - kz) \right]^2$$

它在一个周期内的平均值是

$$w_k^{av} = \frac{1}{4} \frac{Ne^2}{\omega^2 m} E_0^2 = \frac{1}{4} \frac{f_p^2}{f^2} \epsilon_0 E_0^2$$

单位体积中电、磁场的储能平均值分别为

$$w_e^{av} = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2, \quad w_m^{av} = \frac{1}{4} \mu_0 H_0^2 = \frac{1}{4} \mu_0 \frac{E_0^2}{\mu_0 / (\epsilon_0 \epsilon_r)} = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2 \left(1 - \frac{f_p^2}{f^2}\right)$$

从而得

$$w^{av} = w_k^{av} + w_e^{av} + w_m^{av} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

又因

$$S^{av} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\sqrt{\mu_0 / (\epsilon_0 \epsilon_r)}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}} \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}}$$

所以

$$v_e = \frac{S^{av}}{w^{av}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{1 - f_p^2/f^2} = c \sqrt{1 - f_p^2/f^2}$$

图 5.6-1 示出 v_p 和 v_e 随 f/f_p 的变化。我们看到,能量速度永远不会超过光速,这符合相对论中“物质运动速度以光速为极限”的结论。

(2) $f = f_p$: $k = 0$, 则 $E = E_0$, 电场强度瞬时值为

$$E = E_0 \cos \omega t \quad (5.6-10)$$

它不是空间的函数,因此不发生传播。

(3) $f < f_p$: k 为虚数, $k = -j\alpha$, $\alpha = k_0 \sqrt{\frac{f_p^2}{f^2} - 1}$, 故电场强度为

$$E = E_0 e^{-\alpha z} \quad (5.6-11)$$

此时也没有波的传播,场沿 z 向按指数衰减。下面我们用坡印廷矢量来证明,这时沿 z 向的平均传输功率为零。设

电场强度为 $\hat{x}$ 向, $E_x = E$, 磁场强度为

$$H_y = \frac{j}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{-j\alpha}{\omega \mu_0} E_0 e^{-\alpha z} \quad (5.6-12)$$

故平均功率流密度为

$$S_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}[E_x H_y^*] = \frac{1}{2} \text{Re}\left[\frac{j\alpha}{\omega \mu_0} E_0^2 e^{-2\alpha z}\right] = 0$$

由上可知,频率高($f > f_p$)的电磁波将无衰减地在等离子体中传播;而频率低($f < f_p$)的电磁波不能在等离子体中传播。因此,为了与地球电离层外的高空通信卫星和宇宙飞船通信,必须采用高于至少 9MHz 的频率(参见例 6.3-1)。

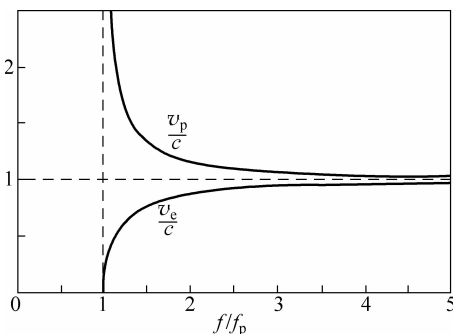


图 5.6-1 等离子体中电磁波的相速 v_p 和能速 v_e

5.7 电磁波的极化

上面讨论平面波的传播特性时,认为电磁波场强的方向与时间无关。实际上,平面波场强的方向可能随时间按一定的规律变化。电场强度 $\vec{E}$ 的方向随时间变化的方式称为电磁波的极化(polarization),在物理学中称为偏振。根据 $\vec{E}$ 矢量的端点轨迹形状,电磁波的极化可分为 3 种:线极化、圆极化和椭圆极化。

5.7.1 线极化

考察沿 z 向传播的平面波,其电场矢量位于 xy 平面(横电磁波)。作为一般情形,可同时有沿 x 向和沿 y 向的电场分量,则电场矢量瞬时值可表示为

$$\vec{E}(t) = \hat{x}E_x(t) + \hat{y}E_y(t)$$

式中

$$\begin{cases} E_x(t) = E_1 \cos(\omega t - kz) \\ E_y(t) = E_2 \cos(\omega t - kz + \phi) \end{cases} \quad (5.7-1)$$

其中 ϕ 是两分量间的相位差。为确定 $\vec{E}(t)$ 的端点轨迹,可从式(5.7-1)中消去 $(\omega t - kz)$ 而得到 $E_x(t)$ 和 $E_y(t)$ 间的方程。当 $\phi = 0$ 或 π 时,得到 $E_x(t)$ 和 $E_y(t)$ 间的关系如下:

$$E_y(t) = \pm \left(\frac{E_2}{E_1}\right) E_x(t) \quad (5.7-2)$$

这是斜率为 $\pm(E_2/E_1)$ 的直线,“+”对应于 $\phi=0$,”-”对应于 $\phi=\pi$ 。 $\bar{E}(t)$ 方向与 x 轴的夹角为

$$\varphi_t = \arctan \frac{E_y(t)}{E_x(t)} = \pm \arctan \frac{E_2}{E_1} \quad (5.7-3)$$

这种情形下 $\bar{E}(t)$ 的轨迹是一直线,故称为线极化,记为LP(Linear Polarization),如图5.7-1(a)所示(“+”号情况)。

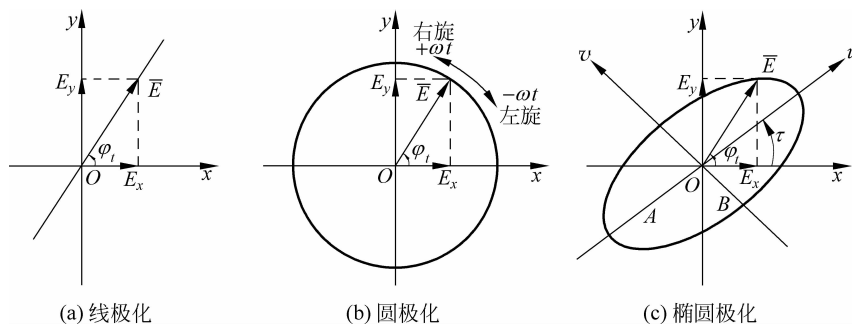


图 5.7-1 三种极化波的电场矢量端点轨迹

5.7.2 圆极化

当 $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$, $E_1 = E_2 = E_0$, 由式(5.7-1)得

$$E_x^2(t) + E_y^2(t) = E_0^2 \quad (5.7-4)$$

这是半径为 E_0 的圆,如图5.7-1(b)所示。 $\bar{E}(t)$ 的大小不随 t 而变化,而 $\bar{E}(t)$ 的方向与 x 轴夹角为

$$\varphi_t = \arctan \frac{E_0 \cos(\omega t - kz \pm \pi/2)}{E_0 \cos(\omega t - kz)} = \arctan[\mp \tan(\omega t - kz)] = \mp(\omega t - kz) \quad (5.7-5)$$

这表明,对于给定 z 值的某点,随时间 t 的增加, $\bar{E}(t)$ 的方向以角频率 ω 作等速旋转。 $\bar{E}(t)$ 矢量端点轨迹为圆,故称为圆极化,记为CP(Circular Polarization)。当 E_y 相位引前 $E_x 90^\circ$ ($\phi = \pi/2$), $\bar{E}(t)$ 旋向与波的传播方向 $\hat{z}$ 成左手螺旋关系,称为左旋圆极化(LHCP);而当 E_y 相位落后 $E_x 90^\circ$ ($\phi = -\pi/2$), $\bar{E}(t)$ 旋向与传播方向 $\hat{z}$ 成右手螺旋关系,称为右旋圆极化(RHCP)。这样 y 向和 x 向电场分量的复振幅有如下关系:

$$\begin{cases} \text{LHCP: } E_y = jE_x \\ \text{RHCP: } E_y = -jE_x \end{cases} \quad (5.7-6)$$

此时电场复矢量为

$$\begin{cases} \text{LHCP: } \bar{E} = \hat{x}E_0 e^{-jkz} + \hat{y}jE_0 e^{-jkz} = (\hat{x} + j\hat{y})E_0 e^{-jkz} \\ \text{RHCP: } \bar{E} = \hat{x}E_0 e^{-jkz} - \hat{y}jE_0 e^{-jkz} = (\hat{x} - j\hat{y})E_0 e^{-jkz} \end{cases} \quad (5.7-7)$$

或表示为

$$\begin{cases} \text{LHCP: } \bar{E} = \hat{L} \sqrt{2} E_0 e^{-jkz}, & \hat{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + j\hat{y}) \\ \text{RHCP: } \bar{E} = \hat{R} \sqrt{2} E_0 e^{-jkz}, & \hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - j\hat{y}) \end{cases} \quad (5.7-8)$$

$\hat{L}$ 、 $\hat{R}$ 分别为左、右旋圆极化波电场的单位矢量。

由上,两个相位相差 $\pi/2$ 、振幅相等的空间上正交的线极化波,可合成一个圆极化波;反之,一个圆极化波可分解为两个相位相差 $\pi/2$ 、振幅相等的空间上正交的线极化波。

容易证明,两个旋向相反、振幅相等的圆极化波可合成一个线极化波;反之亦成立。例如,

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \hat{L} E_0 e^{-jkz} + \hat{R} E_0 e^{-jkz} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + j\hat{y}) E_0 e^{-jkz} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - j\hat{y}) E_0 e^{-jkz} \\ &= \hat{x} \sqrt{2} E_0 e^{-jkz} \end{aligned} \quad (5.7-9)$$

5.7.3 椭圆极化

最一般的情形是式(5.7-1)中的相位差 ϕ 为任意值且两个分量的振幅不相等($E_1 \neq E_2$)。此时消去该式中的 $\cos(\omega t - kz)$,有

$$\begin{aligned} \frac{E_y(t)}{E_2} &= \cos(\omega t - kz) \cos\phi - \sin(\omega t - kz) \sin\phi = \frac{E_x(t)}{E_1} \cos\phi - \sqrt{1 - \frac{E_x^2(t)}{E_1^2}} \sin\phi \\ \left[\frac{E_y(t)}{E_2} - \frac{E_x(t)}{E_1} \cos\phi \right]^2 &= \left[1 - \frac{E_x^2(t)}{E_1^2} \right] \sin^2\phi \end{aligned}$$

得

$$\frac{E_x^2(t)}{E_1^2} - \frac{2E_x(t)E_y(t)}{E_1E_2} \cos\phi + \frac{E_y^2(t)}{E_2^2} = \sin^2\phi \quad (5.7-10)$$

这是一般形式的椭圆方程,因此合成的电场矢量的端点轨迹是一个椭圆,如图5.7-1(c)所示,称为椭圆极化,记为EP(Elliptical Polarization)。若将原坐标系旋转 τ 角,采用新坐标系(u, v),可将椭圆方程(5.7-10)化为标准形式:

$$\frac{E_u^2}{A^2} + \frac{E_v^2}{B^2} = 1 \quad (5.7-11)$$

A 、 B 分别为椭圆半长轴和半短轴,二者之比称为极化椭圆的轴比 r_A (axial ratio),即

$$r_A = \frac{A}{B} = 1 \sim \infty \quad (5.7-12)$$

极化椭圆长轴对 x 轴的夹角 τ ,称为极化椭圆的倾角(tilt angle)。

极化椭圆的轴比、倾角及旋向是描述极化特性的3个特征量。为得出它们与直角坐标分量 $E_x(t)$ 、 $E_y(t)$ 的关系,可通过比较式(5.7-10)和式(5.7-11)来导出。坐标旋转公式为

$$\begin{cases} E_u = E_x \cos\tau + E_y \sin\tau \\ E_v = -E_x \sin\tau + E_y \cos\tau \end{cases} \quad (5.7-13)$$

把此关系代入式(5.7-11),然后将其各项系数与式(5.7-10)对应项系数相比较,联立

所得方程可求得^①

$$r_A^2 = t + \sqrt{t^2 - 1}, \quad t = \frac{\left(a^2 + 2\cos^2\phi + \frac{1}{a^2}\right)}{(2\sin^2\phi)} \quad (5.7-14a)$$

$$\tan 2\tau = \frac{2a}{1-a^2} \cos\phi \quad (5.7-15b)$$

式中 $\alpha = E_2/E_1$, 即把复振幅 E_y, E_x 之比表为

$$\frac{E_y}{E_x} = ae^{j\phi} \quad (5.7-16)$$

电场复矢量为

$$\bar{E} = (\hat{x}E_x + \hat{y}E_y)e^{-jkz} \quad (5.7-17)$$

可见,这是最一般的情形,线极化($r_A = \infty$)和圆极化($r_A = 1$)都是其特例。在 E_y/E_x 的复平面上,不同的 (a, ϕ) 都有一个对应点,各点的极化特性如图 5.7-2 所示。线极化波对应于

① 式(5.7-14a)、式(5.7-14b)的推导简介如下:

将式(5.7-13)代入式(5.7-11),得

$$\left(\frac{\cos^2\tau}{A^2} + \frac{\sin^2\tau}{B^2}\right)E_x^2 + \left(\frac{\sin^2\tau}{A^2} + \frac{\cos^2\tau}{B^2}\right)E_y^2 + \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2}\right)E_xE_y\sin 2\tau = 1$$

比较上式与式(5.7-10)的对应项系数知

$$B^2\cos^2\tau + A^2\sin^2\tau = \frac{A^2B^2}{E_1^2\sin^2\phi} \quad (1)$$

$$B^2\sin^2\tau + A^2\cos^2\tau = \frac{A^2B^2}{E_2^2\sin^2\phi} \quad (2)$$

$$(B^2 - A^2)\sin 2\tau = \frac{-2A^2B^2\cos\phi}{E_1E_2\sin^2\phi} \quad (3)$$

将式(1)与式(2)相减、相加,有

$$(B^2 - A^2)\cos 2\tau = \left(\frac{E_2^2 - E_1^2}{E_1^2E_2^2}\right)\frac{A^2B^2}{\sin^2\phi} \quad (4)$$

$$B^2 + A^2 = \left(\frac{E_2^2 + E_1^2}{E_1^2E_2^2}\right)\frac{A^2B^2}{\sin^2\phi} \quad (5)$$

令 $a = \frac{E_2}{E_1}, r_A = \frac{A}{B}$, 由式(3)除以式(4)得

$$\tan 2\tau = \frac{2a}{1-a^2} \cos\phi \quad (5.7-14b)$$

由式(4)除以式(5)得

$$\frac{1-r_A^2}{1+r_A^2} = \left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)\sec 2\tau, \quad \text{即} \quad \left(\frac{1-r_A^2}{1+r_A^2}\right)^2 = \left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2 (\tan^2 2\tau + 1)$$

将式(5.7-14b)代入上式,有

$$\left(\frac{1-r_A^2}{1+r_A^2}\right)^2 = \frac{(2a\cos\phi)^2 + (1-a^2)^2}{a^2+1} \equiv b$$

$$1-2r_A^2+r_A^4 = b(1+2r_A^2+r_A^4), \quad \text{即} \quad (1-b)r_A^4 - (1+b)r_A^2 + 1-b = 0$$

或写作

$$r_A^4 - 2tr_A^2 + 1 = 0, \quad t \equiv \frac{1+b}{1-b}$$

最后得其解为

$$r_A^2 = t + \sqrt{t^2 - 1}, \quad t = \frac{(a^2+1)^2 + (2a\cos\phi)^2 + (1-a^2)^2}{(a^2+1)^2 - (2a\cos\phi)^2 - (1-a^2)^2} = \frac{a^2 + 2\cos^2\phi + 1}{2\sin^2\phi} \quad (5.7-15a)$$

E_y/E_x 位于实轴上, $\phi=0$ 或 π ; 圆极化波对应于 $a=1, \phi=\pm\pi/2$ 两点。上半平面上的其他点都对应于左旋椭圆极化波; 而下半平面上的点对应于右旋椭圆极化波。例如, 若 $a=1, \phi=\pi/4$, 由式(5.7-14)得 $r_A=2.414, \phi=\pi/4$ 。这是左旋椭圆极化波, 如图 5.7-2 所示。注意, 旋向以传播方向 $\hat{z}$ 为参考, 它直接由 ϕ 决定。若 ϕ 在第一、二象限, 即 E_y 引前 E_x , 则为左旋波; 若 ϕ 在第三、四象限, 即 E_y 落后于 E_x , 则为右旋波。

前面的推导已表明, 两个空间上正交的线极化波可合成一个椭圆极化波; 反之亦然。同样可以证明, 两个旋向相反的圆极化波可合成一个椭圆极化波; 反之, 一个椭圆极化波可分解为两个旋向相反的圆极化波。椭圆极化波的轴比取决于两圆极化波电场的振幅比, 而极化椭圆的倾角正好是这两圆极化波电场的相位差的 $1/2$ (这些关系的导出请见参考文献[19])。

极化波的分类是按瞬时电场矢量 $\vec{E}$ 的端点轨迹来分类的(沿传播方向观察)。图 5.7-3 给出了实际电场沿传播方向变化的典型轨迹, 上图为右旋圆极化波, 下图为线极化波。

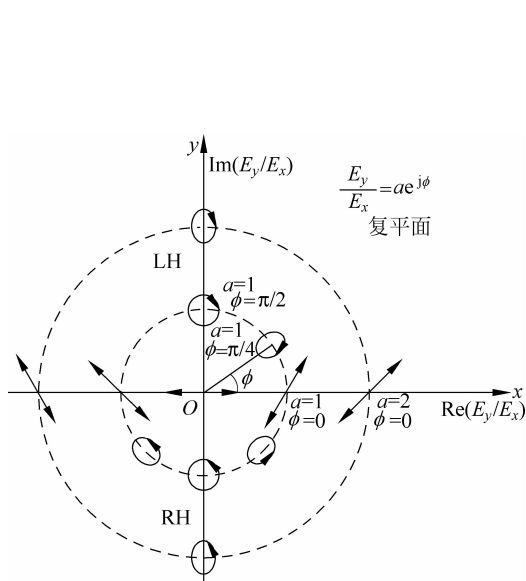


图 5.7-2 E_y/E_x 复平面上的极化图

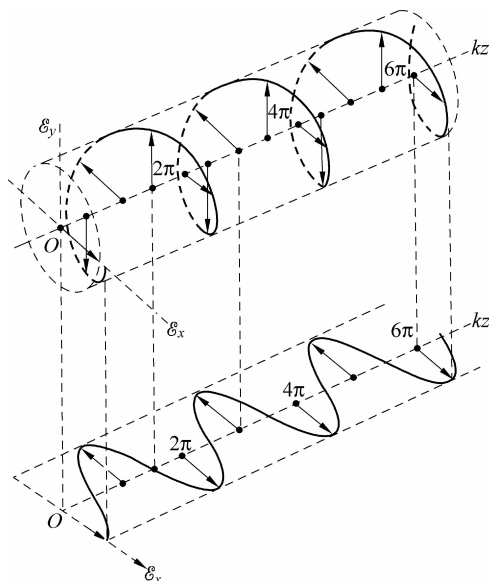


图 5.7-3 瞬时电场矢量 $\vec{E}$ 沿传播方向的变化

5.7.4 圆极化波的应用

圆极化波具有两个与应用有关的重要特性:

(1) 当圆极化波入射到对称目标(如平面、球面等)上时, 反射波变成反旋向的波, 即左旋波变成右旋波, 右旋波变成左旋波。

(2) 天线若辐射左旋圆极化波, 则只接收左旋圆极化波而不能接收右旋圆极化波; 反之, 若天线辐射右旋圆极化波, 则只接收右旋圆极化波。这称为圆极化天线的旋向正交性。

根据这些性质, 在雨雾天气里, 雷达采用圆极化波工作将具有抑制雨雾干扰的能力。因为, 水点近似呈球形, 对圆极化波的反射是反旋的, 不会为雷达天线所接收; 而雷达目标(如飞机、船舰、坦克等)一般是非简单对称体, 其反射波是椭圆极化波, 必有同旋向的圆极化成分, 因而仍能收到。同样, 若电视台播发的电视信号是由圆极化波载送的(由卫星转发的电

视信号正是这样),则它在建筑物墙壁上的反射波是反旋向的,这些反射波便不会由接收原旋向波的电视天线所接收,从而可避免城市建筑物的多次散射所引起的电视图像的重影效应。

由于一个线极化波可分解为两个旋向相反的圆极化波,这样,不同取向的线极化波都可由圆极化天线收到。因此,现代战争中都采用圆极化天线进行电子侦察和实施电子干扰。同样,圆极化天线也有许多民用方面的应用。例如,大多数的 FM 调频广播都是用圆极化波载送的,因此,立体声音乐的爱好者可以用任意取向的线极化天线收到 FM 信号。

例 5.7-1 在空气中传播的一款均匀平面波,其电场强度复矢量为

$$\bar{E} = (\hat{x} + j\hat{y})E_0 e^{-jkz}$$

请问它是什么极化波? 写出磁场强度瞬时值,并求其端点轨迹。

【解】 这是左旋圆极化波,因 $E_y/E_x = j$ 。由式(5.4-12)知

$$\bar{H} = \frac{1}{\eta_0} \hat{z} \times \bar{E} = \frac{1}{\eta_0} (\hat{y} - j\hat{x})E_0 e^{-jkz}, \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

磁场强度瞬时值为

$$\bar{H}(t) = \hat{y} \frac{E_0}{\eta_0} \cos(\omega t - kz) + \hat{x} \frac{E_0}{\eta_0} \sin(\omega t - kz) = \hat{y} H_y(t) + \hat{x} H_x(t)$$

因而有

$$H_x^2(t) + H_y^2(t) = \left(\frac{E_0}{\eta_0}\right)^2$$

$H(t)$ 端点的轨迹是圆。当 $t=0$, 在 $z=0$ 处 $\bar{H}(t)$ 在 $\hat{y}$ 方向, 而 $\bar{E}(t)$ 在 $\hat{x}$ 方向。随着时间 t 的推延, 二者都按相同旋向旋转, 而在所有时刻它们总保持相垂直, 如图 5.7-4 所示。

例 5.7-2 在空气中传播的一款平面波有下述两个分量:

$$\begin{cases} E_x(t) = 5\cos(\omega t - kz) \text{ (V/m)} \\ E_y(t) = 6\cos(\omega t - kz - 60^\circ) \text{ (V/m)} \end{cases}$$

这是什么极化波? 试求该波的平均功率密度。

【解】 电场强度二分量的复振幅为

$$\begin{cases} E_x = 5 = E_1 \\ E_y = 6e^{-j60^\circ} = E_2 e^{j\phi} \end{cases}$$

因 $E_1 \neq E_2$, $\phi = -60^\circ$, 这是左旋椭圆极化波。电场强度复矢量为

$$\bar{E} = (\hat{x}E_1 + \hat{y}E_2 e^{j\phi})e^{-jkz} = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y$$

磁场强度复矢量为

$$\bar{H} = \frac{1}{\eta_0} \hat{z} \times \bar{E} = \frac{1}{\eta_0} (\hat{y}E_1 - \hat{x}E_2 e^{j\phi})e^{-jkz} = (\hat{y}H_1 - \hat{x}H_2 e^{j\phi})e^{-jkz} = \hat{y}H_y - \hat{x}H_x$$

其共轭复矢量为

$$\bar{H}^* = (\hat{y}H_1 - \hat{x}H_2 e^{-j\phi})e^{jkz}$$

平均功率密度为

$$\begin{aligned} \bar{S}^{\text{av}} &= \frac{1}{2} \text{Re}[\bar{E} \times \bar{H}^*] = \frac{1}{2} \text{Re}[(\hat{x} \times \hat{y})E_1 H_1^* - (\hat{y} \times \hat{x})E_2 H_2^*] \\ &= \frac{1}{2} \hat{z}(E_1 H_1^* + E_2 H_2^*) = \hat{z} \frac{E_1^2 + E_2^2}{2\eta_0} \end{aligned}$$

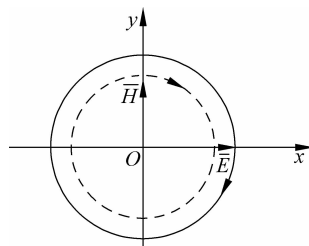


图 5.7-4 圆极化波的 $\bar{E}$ 和 $\bar{H}$ 场

并有

$$S^{\text{av}} = \frac{1}{2} \frac{E_1^2 + E_2^2}{\eta_0} = 80.9 (\text{mW/m}^2)$$

它是两款空间上正交的线极化波的平均功率密度之和,它与二者的相位差 ϕ 无关。

习 题

5.1-1 已知 $z^2 = 1 + j$, 求复数 z 的两个解。

5.1-2 已知 a 是正实数, 试证:

(a) 若 $a \ll 1$, $\sqrt{1 + ja} \approx \pm \left(1 + \frac{ja}{2}\right)$;

(b) 若 $a \gg 1$, $\sqrt{1 + ja} \approx \pm (1 + j) \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 。

5.1-3 设 $E(t)$ 的复振幅为 $\dot{E} = e + je_i$, $H(t)$ 的复振幅为 $\dot{H} = h + jh_i$, 试证 $E(t)H(t) \neq \text{Re}[\dot{E} \dot{H} e^{j\omega t}]$, 并求 $E(t)$ 、 $H(t)$ 。

5.1-4 将下列场矢量的瞬时值变换为复矢量, 或作相反的变换:

(a) $\bar{E}(t) = \hat{x}E_0 \sin(\omega t - kz) + \hat{y}3E_0 \cos(\omega t - kz)$;

(b) $\bar{E}(t) = \hat{x} \left[E_0 \sin \omega t + 3E_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) \right]$;

(c) $\dot{\bar{H}} = (\hat{x} + j\hat{y}) e^{-jkz}$;

(d) $\dot{\bar{H}} = -\hat{y}jH_0 e^{-jkz \sin \theta}$ 。

5.2-1 已知自由空间某点的电场强度 $\bar{E}(t) = \hat{x}E_0 \sin(\omega t - kz) (\text{V/m})$, 求:

(a) 磁场强度 $\bar{H}(t)$;

(b) 坡印廷矢量 $\bar{S}(t)$ 及其一个周期 $T = 2\pi/\omega$ 内的平均值 $\bar{S}^{\text{av}}$ 。

5.2-2 对于非均匀的各向同性线性媒质, 请证明其无源区电场强度复矢量的波动方程为

$$\nabla^2 \dot{\bar{E}} + \omega^2 \mu \epsilon \dot{\bar{E}} + \frac{\nabla \mu}{\mu} \times \nabla \times \dot{\bar{E}} + \nabla \left(\frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \cdot \dot{\bar{E}} \right) = 0$$

5.3-1 设真空中同时存在两款时谐电磁场, 其电场强度分别为 $\dot{\bar{E}}_1 = \hat{x}E_{10} e^{-jk_1 z}$, $\dot{\bar{E}}_2 = \hat{y}E_{20} e^{-jk_2 z}$, 试证总平均功率流密度等于两款时谐场的平均功率流密度之和。

5.3-2 同轴线内导体半径为 a , 外导体内半径为 b , 某截面处内外导体间电压的复振幅为 $\dot{U}$, 内导体上电流的复振幅为 $\dot{I}$ 。试用复坡印廷矢量计算内、外导体间向负载传输的总功率。

5.3-3 在理想导体平面上方的空气区域 ($z > 0$) 存在时谐电磁场, 其电场强度为 $\bar{E}(t) = \hat{x}E_0 \sin kz \cos \omega t$ 。

(a) 求磁场强度 $\bar{H}(t)$;

(b) 求在 $z = 0, \pi/4k$ 和 $\pi/2k$ 处的坡印廷矢量瞬时值及平均值;

(c) 求导体表面的面电流密度。

5.3-4 已知时谐电磁场瞬时值为 $\bar{E}_e(t) = \hat{x}\sqrt{2}E_e \cos(\omega t + 30^\circ)$, $\bar{H}_e(t) =$

$\hat{y}\sqrt{2}H_e\cos(\omega t+30^\circ)$ 。请写出其复矢量 $\dot{\bar{E}}_e$ 和 $\dot{\bar{H}}_e$,求坡印廷矢量瞬时值 $\bar{S}(t)=\bar{E}_e(t)\times\bar{H}_e(t)$,并证明其一个周期的平均值为 $\bar{S}^{av}=\hat{z}E_eH_e$ 。

5.3-5 设时谐电磁场瞬时值为

$$\bar{E}(t)=\text{Im}[\dot{\bar{E}}e^{j\omega t}], \quad \bar{H}(t)=\text{Im}[\dot{\bar{H}}e^{j\omega t}]$$

试求坡印廷矢量瞬时值 $\bar{S}(t)=\bar{E}(t)\times\bar{H}(t)$,并求其一个周期内平均值 $\bar{S}^{av}$ 。

5.4-1 氦氖激光器发射的激光束在空气中的波长为 $6.328\times 10^{-7}\text{m}$,计算其频率、周期和波数(标出单位)。

5.4-2 人马座 α 星离地球4.33光年,1光年是光在一年中传播的距离。问该星座离地球多少公里?

5.4-3 地球接收太阳全部频率的辐射功率密度约为 1.4kW/m^2 。问:

(a) 若设到达地面的是单一频率的平面波,则其电场强度和磁场强度振幅多大?

(b) 地球接收太阳能总功率约为多少? 地球半径为 6380km 。

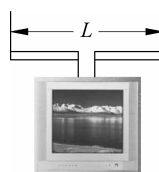
(c) 若太阳的辐射是各向同强度的,那么太阳总辐射功率约为多大? 太阳与地球相距约 $1.5\times 10^8\text{km}$ 。

5.4-4 如题图5-1所示为对称振子天线。若用它来接收波长 λ 的电视信号,当其长度 $L\approx\lambda/2$ 时最有效。问接收下列频道时, L 应取多长:

(a) 5频道($f_0=88\text{MHz}$);

(b) 8频道($f_0=187\text{MHz}$);

(c) 26频道($f_0=618\text{MHz}$)。



题图 5-1 电视机天线

5.4-5 设 $\bar{E}=\hat{z}E_0e^{-jkz}$,该电场是否满足无源区麦氏方程组? 若满足,求出其 $\bar{H}$;若不满足,请指出为什么。

5.4-6 在理想介质中一平面波的电场强度为

$$\bar{E}(t)=\hat{x}5\cos 2\pi(10^8t-z)(\text{V/m})$$

(a) 求介质中波长及自由空间波长;

(b) 已知介质 $\mu=\mu_0, \epsilon=\epsilon_0\epsilon_r$,求介质的 ϵ_r ;

(c) 写出磁场强度的瞬时表示式。

5.4-7 某一自由空间传播的电磁波,其电场强度复矢量为 $\bar{E}=(\hat{x}-\hat{y})e^{j(\frac{\pi}{4}-kz)}(\text{V/m})$ 。

(a) 写出磁场强度复矢量;

(b) 求平均功率流密度。

5.5-1 分别在 3kHz 和 3GHz 计算下列媒质中传导电流和位移电流振幅之比,并指出是否是介质或导体:

(a) 海水, $\epsilon_r=80, \sigma=4\times 10^{-4}\text{S/m}$;

(b) 聚四氟乙烯, $\epsilon_r=2.1, \sigma=10^{-16}\text{S/m}$;

(c) 铜, $\epsilon_r=1, \sigma=5.8\times 10^7\text{S/m}$ 。

5.5-2 频率为 550kHz 的广播信号通过一导电媒质, $\epsilon_r=2.1, \mu_r=1, \sigma/(\omega\epsilon)=0.2$,求:

(a) 衰减常数和相位常数;

(b) 相速和相位波长;

(c) 波阻抗。

5.5-3 对高速固态电路中常用的砷化镓(GaAs)基片,若样品足够大,通过 10GHz 均匀平面波, $\epsilon_r=12.9, \mu_r=1, \tan\delta_e=5\times 10^{-4}$, 求:

(a) 衰减常数 α (Np/m);

(b) 相速 v_p (m/s);

(c) 波阻抗 η_c (Ω)。

5.5-4 平面波在导电媒质中传播, $f=1950\text{MHz}$, 媒质 $\epsilon_r=\mu_r=1, \sigma=0.11\text{S/m}$ 。

(a) 求波在该媒质中的相速和波长;

(b) 设在媒质中某点 $E=10^{-2}\text{V/m}$, 求该点的磁场强度;

(c) 波行进多大距离后, 场强衰减为原来的 1/1000?

5.5-5 证明电磁波在良导体中传播时, 每波长内场强的衰减约为 55dB。

5.5-6 铜导线的半径 $a=1.5\text{mm}$, 求它在 $f=20\text{MHz}$ 时的单位长度电阻和单位长度直流电阻(注: 只要 $\alpha \gg \delta$ (集肤深度), 计算电阻时可把导线近似为宽 $2\pi a$ 的平面导体)。

5.5-7 若要求电子仪器的铝外壳至少为 5 个集肤深度厚, 为防止 20kHz~200MHz 的无线电干扰, 铝外壳应取多厚?

5.5-8 若 10MHz 平面波垂直射入铝层, 设铝层表面处磁场强度振幅 $H_0=0.5\text{A/m}$, 求:

(a) 铝表面处的电场强度 E_0 ; 经 5δ (集肤深度) 后, E 为多少?

(b) 铝层每单位面积吸收的平均功率。

5.5-9 飞机高度表利用接收所发射电脉冲的地面回波来测高。若地面上有 $d=20\text{cm}$ 厚的雪, 对 3GHz 的电磁波, 雪的参数为 $\epsilon_r=1.2, \tan\delta_e=3\times 10^{-4}$ 。问:

(a) 雪层引起的测高误差多大? (设高度表按 $h=(1/2)ct$ 计算高度, c 为空气中光速, t 为地面回波延迟的时间, 如题图 5-2 所示。)

(b) 由雪层引起的回波信号衰减约多少 dB? (忽略各交界面处的反射损失)。

5.6-1 请证明: 在等离子体中 $vB \ll E$, 即 $E/B \gg v$, v 是电子速度。

5.7-1 以下各式表示的是什么极化波?

(a) $\vec{E} = \hat{x}E_0 \sin(\omega t - kz) + \hat{y}E_0 \cos(\omega t - kz)$;

(b) $\vec{E} = \hat{x}E_0 \cos(\omega t - kz) + \hat{y}2E_0 \cos(\omega t - kz)$;

(c) $\vec{E} = \hat{x}E_0 \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{4}\right) + \hat{y}E_0 \cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{4}\right)$;

(d) $\vec{E} = \hat{x}E_0 \sin\left(\omega t + kz + \frac{\pi}{4}\right) + \hat{y}E_0 \cos\left(\omega t + kz - \frac{\pi}{3}\right)$ 。

5.7-2 将下列线极化波分解为圆极化波的叠加:

(a) $\vec{E} = \hat{x}E_0 e^{-jkz}$;

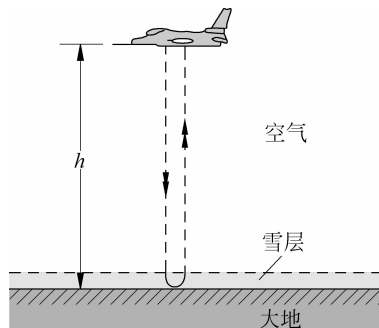
(b) $\vec{E} = \hat{x}E_0 e^{-jkz} - \hat{y}E_0 e^{-jkz}$ 。

5.7-3 在 $\epsilon_r=5, \mu_r=2, \sigma=0$ 的媒质中, 一椭圆极化

波的磁场强度有两相互垂直的分量(都垂直于传播方向), 振幅分别为 3A/m 和 4A/m, 后者相位引前 45° 。试求:

(a) 轴比 r_A 、倾角 τ 及旋向;

(b) 通过与其传播方向相垂直的 5m^2 面积的平均功率。



题图 5-2 飞机高度表工作原理