

第5章

各向同性介质光传输

本章主要阐述光波在各向同性介质中的传输特点,涉及各向同性介质是指各点介电常数 ϵ 和电导率 σ 与空间位置无关且为常数的一类介质。首先,介绍各向同性介质中高斯光束的传输特性;然后,阐述类透镜高斯光束的传输特性;最后,简介激光脉冲传输特性并讨论类透镜介质的群速度色散。

5.1 各向同性介质高斯光束

在各向同性介质中传输的平面光波是一种理想化的情况。事实上,有关高斯光束和高斯光脉冲在各向同性介质中的传输问题更具广泛意义。如果光波具有很小发散角且介质折射率横向变化亦很小,则光波场矢量方程可简化为光波场标量方程。由第4章可知,在折射率慢变近似条件下,光波场标量方程满足式(4.1-20)。假设光波的电场按式(4.1-15)规律变化,则光波场标量方程式(4.1-20)变成

$$\nabla^2 E(r) + K^2 E(r) = 0 \quad (5.1-1)$$

5.1.1 类透镜介质光束传输

在光学领域,最常遇到的是呈高斯分布的激光束,而传输激光束的光波导结构通常是具有轴对称性的圆柱体(如光棒、光纤或光锥)。这种结构的光传输介质具有类透镜性质,其折射率分布形式为

$$n^2(r) = n_0^2 \left(1 - \frac{k_2 r^2}{k} \right) \quad (5.1-2)$$

式中, k_2 为介质的一个特征常数; n_0 是对称轴上的折射率; r 为离开对称轴的距离; k 为波数 ($k = (2\pi n_0)/\lambda$)。光波在折射率为 n 的介质内传输距离 dz 后,将产生 $[(2\pi dz)/\lambda]n$ 的相

位延迟量。因此,式(5.1-2)描述的介质相当于一个薄透镜,它所引起的相移与 r^2 成正比。

由式(5.1-2)所描述的介质,其在标量亥姆霍兹方程中的 $K^2(r)$ 项由下式给出

$$K^2(r) = k^2 - kk_2r^2 \quad (5.1-3)$$

若进一步假设解的横向分布仅与 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 有关,则式(5.1-1)中的拉普拉斯算符 ∇^2 可写成

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5.1-4)$$

于是,标量亥姆霍兹方程(5.1-1)的解是圆柱形对称解。

本章所研究的激光束传输类型与平面波相近,其能流主要沿单一方向(如 z 方向)传输,因此可采用标量波近似且只限于分析其具有单一横向分量的光波场,即

$$E(x, y, z) = \psi(x, y, z) e^{-ikz} \quad (5.1-5)$$

由式(5.1-1)和式(5.1-3)容易得到

$$\nabla_t^2 \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} - kk_2r^2 \psi = 0 \quad (5.1-6)$$

此处假定波函数 ψ 沿 z 轴变化足够慢,以致有 $k(\partial\psi/\partial z) \gg (\partial^2\psi/\partial z^2) \gg k^2\psi$ 。

为求解圆柱形对称光束的振幅,可引入两个复函数 $p(z)$ 和 $q(z)$,将 ψ 写成如下形式

$$\psi = e^{-i\left[p(z) + \frac{k}{2q(z)}r^2\right]} \quad (5.1-7)$$

将式(5.1-7)代入式(5.1-6),并利用关系式(5.1-4),可得

$$-\left(\frac{k}{q}\right)^2 r^2 - 2i\left(\frac{k}{q}\right) - k^2 r^2 \left(\frac{1}{q}\right)' - 2kp' - kk_2r^2 = 0 \quad (5.1-8)$$

式中,上角标“'”表示对位置变量 z 取微商。如果式(5.1-8)对所有的 r 均成立,则不同幂次的 r 之系数必须为零。由此得出

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q}\right)' + \frac{k_2}{k} &= 0 \\ p' + \frac{i}{q} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.1-9)$$

这是光波场标量方程(5.1-1)另一种很有用的形式,它适用于分析类透镜介质中圆柱形对称光束模式的情况。

5.1.2 介质中高斯光束传输

对于各向同性的光传输介质,因折射率为常数,故由式(5.1-2)可知 $k_2=0$ 。于是,光波场标量方程式(5.1-9)变成

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q}\right)' &= 0 \\ p' + \frac{i}{q} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.1-10)$$

引入如下函数 $u(z)$,可以方便地求得 $p(z)$ 和 $q(z)$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dz} \quad (5.1-11)$$

由式(5.1-10)可直接得到 $d^2u/dz^2=0$,于是有 $du/dz=a, u=az+b$ 。由式(5.1-11)得

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{a}{az + b} \quad (5.1-12)$$

式中, a, b 为两个任意常数。参量 $q(z)$ 可改写为

$$q = z + q_0 \quad (5.1-13)$$

式中, q_0 为复常数 [$q_0 = q(0) = b/a$]。另一个复函数 $p(z)$ 可由式(5.1-10)和式(5.1-13)得到

$$p' = -\frac{i}{q} = -\frac{i}{z + q_0} \quad (5.1-14)$$

对式(5.1-14)积分, 得到

$$p(z) = -i \ln\left(1 + \frac{z}{q_0}\right) \quad (5.1-15)$$

上式取积分常数为零, 这是因为积分常数只影响式(5.1-5)解中的光波场相位, 不同积分常数相当于移动了时间原点。

将式(5.1-13)和式(5.1-15)代入式(5.1-7), 得到光波场标量方程式(5.1-10)的圆柱形对称解, 即

$$\psi = e^{-i[-i \ln(1 + \frac{z}{q_0}) + \frac{k}{2(q_0 + z)} r^2]} \quad (5.1-16)$$

式中, q_0 为任意复常数。研究式(5.1-16)发现, 若选择 q_0 为虚数, 可得到一个有实际物理意义的波解 ψ , 其能量密度局限在 z 轴附近。当 $r \rightarrow \infty$ 时, ψ 值趋近于零。

现在用一个新常数 ω_0 取代 q_0 , 令二者关系为

$$q_0 = i \frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda} \quad (5.1-17)$$

式中, n 与各向同性介质中的 n_0 相同; $\lambda = (2\pi n)/k$ 。将这些关系式代入式(5.1-16), 可得到两个因子。第一个因子如下

$$e^{-\ln(1 - i \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2 n})} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda z / \pi \omega_0^2 n)^2}} e^{i \arctan(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2 n})} \quad (5.1-18)$$

式中, 已利用了关系式 $\ln(a + ib) = \ln \sqrt{a^2 + b^2} + i \arctan(b/a)$ 。

第二个因子如下

$$e^{-\frac{i r^2}{2(q_0 + z)}} = e^{-\frac{r^2}{\omega_0^2 (1 + [\lambda z / (\pi \omega_0^2 n)]^2)} - \frac{i r^2}{2z (1 + [\pi \omega_0^2 n / (\lambda z)]^2)}} \quad (5.1-19)$$

如果定义以下各参数

$$\omega^2(z) = \omega_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2 n} \right)^2 \right] = \omega_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right) \quad (5.1-20)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda z} \right)^2 \right] = z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2} \right) \quad (5.1-21)$$

则得到

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + i(\pi \omega_0^2 n)/\lambda} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z) n} \quad (5.1-22)$$

$$\eta(z) = \arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2 n}\right) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (5.1-23)$$

式中, z_0 为高斯光束的共焦参数, 且 $z_0 \equiv (\pi \omega_0^2 k)/\lambda$ 。将式(5.1-20)~式(5.1-23)先代入式(5.1-18)和式(5.1-19), 再合并到式(5.1-16)中, 注意到式(5.1-5), 于是得到

$$E(x, y, z) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{-i[kz - \eta(z) + \frac{kr^2}{2q(z)}]} = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{-i[kz - \eta(z)] - r^2 \left[\frac{1}{\omega(z)} + \frac{i}{2R(z)} \right]} \quad (5.1-24)$$

式中, $k = (2\pi n)/\lambda$ 。式(5.1-24)是基本结果,称为基模高斯光束解,它在横向上的分布仅与 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 有关,且呈现指数关系。

5.1.3 基模高斯光束主要特征

式(5.1-24)给出的是高斯光束的基模解。在一般情况下,处理光束特别是相干光束问题,这是最基本的光束形式。通过深入分析式(5.1-24)的各项物理意义,可以揭示基模高斯光束的主要特征。

1. 振幅分布特征

分析式(5.1-24)可知,基模高斯光束的振幅是径向坐标 r 与传输距离 z 的函数,一般形式为

$$\left| \frac{E(x, y, z)}{E_0} \right| = \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{-\frac{r^2}{\omega^2(z)}} \quad (5.1-25)$$

式中, ω_0 为高斯光束的“束腰半径”; $\omega(z)$ 为光斑半径,即

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2} \quad (5.1-26)$$

光斑半径 $R(z)$ 随着 z 坐标按式(5.1-21)呈双曲线规律扩展。由式(5.1-26)可知,若知道束腰半径 ω_0 值,即可确定任何位置 z 处的光斑半径 $\omega(z)$ 。在激光器设计中, ω_0 是一个很重要的参数,它决定谐振腔的设计结构。

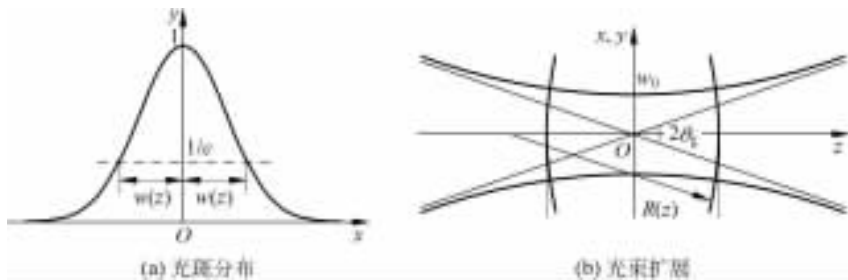


图 5.1-1 光波场的高斯分布示意图

光波场的高斯分布如图 5.1-1 所示,其特征是横截面内光波场的振幅分布按高斯函数从中心(即传输轴线)向外平滑下降。

2. 相移因子特征

式(5.1-24)有两个相因子项,即纵向相因子 φ_1 和横向相因子 φ_2 ,它们各有不同的物理意义,现分述如下。

(1) 纵向相因子。由于 φ_1 仅与 z 轴有关,即 $\varphi_1(z) = kz - \eta(z) = kz - \arctan(z/z_0)$,故称为纵向相因子。其中,第一部分 kz 为传输因子,它描述了高斯光束的几何相移;第二部

分 $\eta(z) = \arctan(z/z_0)$ 描述的是一种附加相移,这使得高斯光束的相速大于光速,即

$$V_p = \frac{1}{\varphi_1(z)/(\omega z)} = \frac{c/n}{1 - [\lambda_0/(2\pi z)] \arctan(z/z_0)} \quad (5.1-27)$$

在一般情况下,由于 $kz \gg \eta(z)$,故这种差别不很明显。

(2) 横向相因子。 φ_2 不仅与 z 轴有关,而且还与横向坐标 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 有关,即 $\varphi_2(z, r) = (r^2 k)/[2R(z)]$,故称为横向相因子。由于 φ_2 与 r 有关,因此使 $z = \text{常数}$ 的任意横截面已非等相面。考虑到 φ_2 描述的是与横向坐标有关的相移,因此高斯光束的等相位面是以 $R(z)$ 为半径的球面,即

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right] \quad (5.1-28)$$

由式(5.1-28)可知,若 $z > 0$,则 $R(z) > 0$,即在 $z = \text{常数}$ 的横截面上,边缘处光波场的相位滞后于轴上($r=0$)光波场的相位。反之, $z < 0$ 则 $R(z) < 0$,则相应的相位滞后变为相位超前,即此时的等相面(波前)不再是平面,而是变为弯曲的球面了。

3. 光束传输特征

由上述分析可知,基模高斯光束既非平面波,亦非球面波,其能量传输方向为如图 5.1-1 所示的双曲线,且具有一定的发散性,其发散程度可用发散角 θ_g 表征。对于 z 很大的远场,双曲面渐近于如下的圆锥体

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\lambda}{\pi w_0 n} z \quad (5.1-29)$$

该圆锥的半顶角可作为光束远场发散角的量度,即

$$\theta_g = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{r(z)}{z} \right) \approx \frac{\lambda}{\pi w_0 n} \quad (5.1-30)$$

式(5.1-30)是光波衍射的严格表达式。图 5.1-2 是不同束腰半径的高斯光束远场发散角对比图。

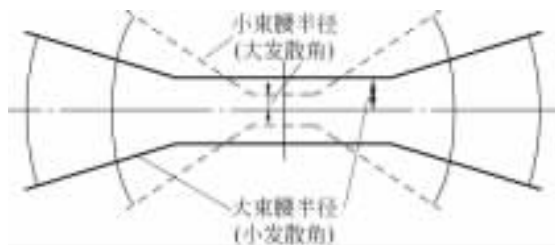


图 5.1-2 不同束腰半径的高斯光束远场发散角对比图

对给定的任意 z 值横截面,无损的高斯光束总功率为

$$P = \frac{1}{2} \iint \frac{EE^*}{\rho} dA = \frac{1}{2} \frac{E_0^2 w_0^2}{\rho w^2(z)} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}} r dr d\varphi = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\rho} \left(\frac{\pi w_0^2}{2} \right) \quad (5.1-31)$$

式中, ρ 为介质的阻抗,且有 $\sqrt{\mu_0/\epsilon} = \rho_0/n$ 。因子 $w_0/w(z)$ 随光束发散(即 z 的增大)而减小,这说明光波场的峰值振幅也是随 z 的增大而不断减小。

综上所述,当基模高斯光束在光波导轴线附近传输时,可视为一种非均匀球面波,其等相位面为曲率中心不断变化的球面,振幅和强度在横向上呈高斯函数分布,且被限制在半径为 w_0 的孔径内。在远场($z \gg \pi w_0^2 \pi / \lambda$)区域,将按式(5.1-30)发散(衍射)。

5.1.4 介质中高斯光束高阶模

在解光波场标量方程式(5.1-1)时,曾经假设波解的横向分布仅与 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 有关,没有讨论含方位角变量的高阶波解。下面简介各向同性介质的高斯光束高阶模。

假设光波场与方位角 φ 有关,并令 $k_2 = 0$,则光波场标量方程式(5.1-1)有以下形式的解

$$\begin{aligned} E_{l,m}(x,y,z) &= E_0 \frac{w_0}{w(z)} H_l\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \cdot e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2q(z)} - ikz + i(l+m+1)\eta} \\ &= E_0 \frac{w_0}{w(z)} H_l\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)} - \frac{ik(x^2+y^2)}{2R(z)} - ikz + i(l+m+1)\eta} \end{aligned} \quad (5.1-32)$$

式中, H_l 、 H_m 分别为 l 、 m 阶厄米多项式; $w(z)$ 、 $R(z)$ 、 $q(z)$ 和 η 与式(5.1-20)~式(5.1-23)的定义相同。具有形如式(5.1-32)解的光波(光束),称为厄米-高斯光波(光束)。

上述厄米-高斯光束与基模高斯光束有所不同,其区别在于前者的横向光波场分布由高斯函数与厄米多项式的乘积决定,即

$$E_{l,m}(x,y) \propto e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \quad (5.1-33)$$

由式(5.1-33)可知,厄米-高斯光束沿 x 方向有 l 条节线,沿 y 方向有 m 条节线。沿着传输轴线,相对于几何相移的附加相位超前 $(l+m+1)\arctan(z/z_0)$,并随着 l 和 m 的增大而增大。厄米-高斯光束在传输轴线上的相位变化为

$$\eta = kz - (l+m+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (5.1-34)$$

x 方向和 y 方向的束腰半径分别为

$$\left. \begin{aligned} w_l^2 &= (2l+1)w_0^2 \\ w_m^2 &= (2m+1)w_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.1-35a)$$

在 z 处的束腰半径为

$$\left. \begin{aligned} w_l^2(z) &= (2l+1)w^2(z) \\ w_m^2(z) &= (2m+1)w^2(z) \end{aligned} \right\} \quad (5.1-35b)$$

式中, w_0 和 $w(z)$ 分别为基模高斯光束的束腰半径和 z 处的光斑半径。 x 方向和 y 方向上的远场发散角为

$$\left. \begin{aligned} \theta_l &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{w(z)}{z} \right) = \sqrt{2l+1} \cdot \theta_g \\ \theta_m &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{w(z)}{z} \right) = \sqrt{2m+1} \cdot \theta_g \end{aligned} \right\} \quad (5.1-36)$$

式中, θ_g 为基模高斯光束的远场发散角。

分析式(5.1-35b)和式(5.1-36)可知,厄米-高斯光束的光斑半径和光束远场发散角均随 l 和 m 的增大而增大,且方向性变差。

由上述分析可知,光波场的电场沿 x (或 y)的横向变化为 $H_l(\xi)e^{-\xi^2/2}$,其中 $\xi=\sqrt{2}(x/w)$ 。此函数与量子力学中谐振振荡器的波函数 $u_l(\xi)$ 是一致的。图 5.1-3 给出了三个($l=0, 1, 2$)归一化且表示总光束能量相同的厄米-高斯函数分布曲线,其中实线代表函数 $u_l(\xi)$,虚线代表函数 $|u_l(\xi)|^2$ 。

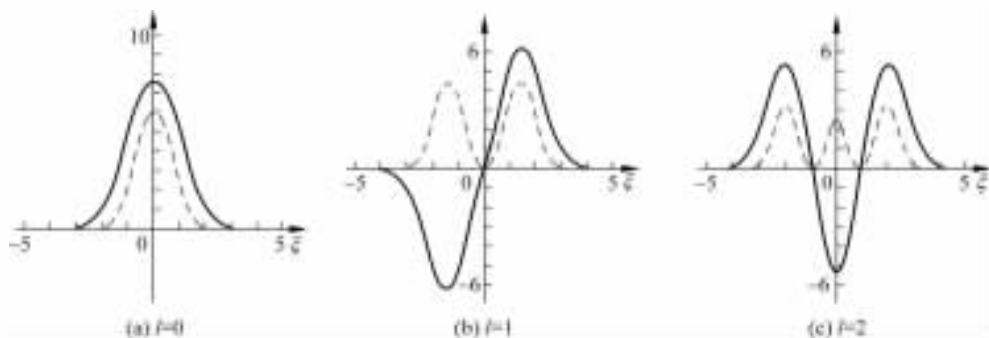


图 5.1-3 几个厄米-高斯光束高阶模的横向分布

5.2 类透镜介质高斯光束

81

在 5.1 节中,我们讨论了各向同性介质光波场标量方程式(5.1-1)当 $k_2=0$ 时的一个高斯光束解。事实上,有许多介质的折射率遵从二次方规律变化。例如,梯度型光纤的折射率 $n(r)$ 便近似由方程式(5.1-2)给出;再如,高斯光束在 Kerr 介质中的传输,折射率平方率变化是由于激光束本身的强度分布所引起。对于在这种介质中传输的光波,可采用高斯光束法和本征值法两种方法描述。对于本征模法,任意光波均可表示为许多本征模的线性叠加,这些本征模有单一的传输常数和单一的横向场分布。而对于高斯光束法,则假定在 z 的各光波传输遵从式(5.1-7),其光束参数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 按式(5.1-9)演变。

5.2.1 类透镜高斯光束传输分析

下面利用高斯光束法分析 $k_2 \neq 0$ 时类透镜介质的高斯光束传输。现在引入一个函数 u ,使其满足下式

$$\frac{1}{q} = \frac{u'}{u} \quad (5.2-1)$$

将式(5.2-1)代入方程式(5.1-9),得到

$$u'' + u\left(\frac{k_2}{k}\right) = 0 \quad (5.2-2)$$

由式(5.2-2)解得

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= a \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\right)z + b \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\right)z \\ u'(z) &= a \sqrt{\frac{k_2}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\right)z - b \sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\right)z \end{aligned} \right\} \quad (5.2-3)$$

式中, a 和 b 为任意常数; 上角标“'”表示对 z 取微商。

利用方程式(5.2-3)和式(5.2-1), 由 $z=0$ 时的输入值 $q(0)=q_0$, 可得到复光束半径 $q(z)$ 的表示式

$$q(z) = \frac{q_0 \cos \alpha_2 z + \alpha_2^{-1} \sin \alpha_2 z}{-q_0 \alpha_2 \sin \alpha_2 z + \cos \alpha_2 z} \quad (5.2-4)$$

式中, α_2 定义为 $\alpha_2 = \sqrt{k_2/k}$ 。考查式(5.2-4)发现, 输入光束参数 q_0 和输出光束参数 q 之间的关系, 与几何光学成像理论中的共线关系相一致。

在这种情况下, $q(z)$ 的物理意义可由式(5.1-7)得到表征。将与 r 有关的振幅 $\psi(r, z)$ 展开, 其结果为

$$\psi(r, z) \propto e^{-\frac{ikr^2}{2q(z)}} \quad (5.2-5)$$

如果将 $q(z)$ 的实部和虚部表示为

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)} \quad (5.2-6)$$

则可得到

$$\psi(r, z) \propto e^{-\frac{r^2}{\omega^2(z)} - i \frac{kr^2}{2R(z)}} \quad (5.2-7)$$

由式(5.2-7)可知, $\omega(z)$ 即为光束的光斑半径, $R(z)$ 是波前的曲率半径, 这与各向同性介质中的情况是一样的。而参量 $q(z)$ 通常称为高斯光束的复半径。对于各向同性介质, $k_2=0$ 是上述讨论的一种特殊情况, 这时式(5.2-4)便简化为式(5.1-13)。

5.2.2 类透镜高斯光束变换定律

在第2章中, 我们导出了程函方程式(2.2-5)和光线方程式(2.2-10)。利用近轴光线条件(即光线与 z 轴形成很小的夹角), 则光线方程式(2.2-10)中的 ds 可用 dz 代替。于是, 对于用式(5.1-2)描述的类透镜情况, 光线方程变为

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{k_2}{k} r = 0 \quad (5.2-8)$$

需要指出的是: 方程式(5.2-8)与式(5.2-2)形式上是相同的。这意味着, 在近轴(接近平行)光线的限制内, 类透镜介质中高斯光束的复参数 q 和光线参数 $r/(dr/ds)$ 的空间演变过程是相同的, 亦即光线变化规律也适用于高斯光束复参数 q 。

为了研究类透镜介质中的光线传输规律, 可用一个由参量 r 和 r' 构成的列矩阵表征任一位置 z 处的光线。于是, 由光线方程式(5.2-8)可推导出如下光线矩阵

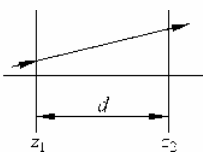
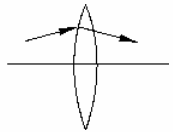
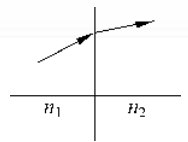
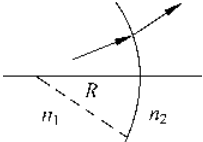

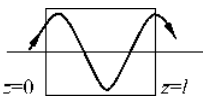
$$\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}_2 = [ABCD] \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}_1 \quad (5.2-9)$$

式中, $r' = (dr/dz)$; 角标 1 和 2 分别代表位置 z_1 和 z_2 ; $[ABCD]$ 为变换矩阵, 表征类透镜介质中光束的变换特性。式(5.2-9)也可写成以下形式

$$\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}_2 = \frac{A (r/r')_1 + B}{C (r/r')_1 + D} \quad (5.2-10)$$

表 5.2-1 列出了一些常用光学元件和介质的光线矩阵。表中 $\gamma_1 = \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\right)$, $\gamma_2 = \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right)$, $\gamma_3 = -\sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right)$, $\gamma_4 = \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}l\right)$; 平方律介质的折射率为 $n = n_0\left(1 - \frac{k_2 \gamma^2}{2k}\right)$ 。

表 5.2-1 一些常用光学元件和介质的光线矩阵

① 直线: 截面长度为 d		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
② 薄透镜: 焦距为 f ($f > 0$, 聚焦; $f < 0$, 发散)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
③ 平面介质分界面: 折射率为 n_1, n_2		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
④ 球面介质分界面: 曲率半径为 R		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
⑤ 球面反射镜: 曲率半径为 R		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$
⑥ 折射率为平方律的介质		$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix}$

上面导出了可用 k_2 表征的类透镜介质高斯光束变换规律式(5.2-4)和光线变换规律式(5.2-10),并证明了满足近轴光线条件的光束参数 q 和光线参数 r/r' 遵从相同的变换规律,亦即光束复参数 q 的变换可表征为

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (5.2-11)$$

式中, A, B, C 和 D 均为光线矩阵元素,并通过式(5.2-9)把平面 $z = z_2$ 上的光线和平面 $z = z_1$ 上的光线联系起来。式(5.2-11)称为高斯光束通过类透镜介质的 $ABCD$ 公式,即高斯光束变换定律(亦称 $ABCD$ 定律)。因此,当高斯光束经过表 5.2-1 所列的元件时,因为它们

均可视为类透镜的特殊情况,所以无论是透射还是反射的光束,均遵从式(5.2-11)所描述的规律。

1. 单一薄透镜高斯光束传输

假设薄透镜的焦距为 f ,令输入光束参数为 q_1 ,输出光束参数为 q_2 ,根据表 5.2-1 和式(5.2-11)得到

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} \quad (5.2-12)$$

应用式(5.2-12),可得到

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 &= \omega_1 \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} \end{aligned} \right\} \quad (5.2-13)$$

式中, ω_1 、 ω_2 和 R_1 、 R_2 分别为光束在 $z=z_1$ 和 $z=z_2$ 两个平面的光斑半径和曲率半径。由式(5.2-13)可知,高斯光束通过薄透镜时,其光斑半径不变,曲率半径遵从式(5.2-13)给出的关系。如果用 $R/2$ 代替 f ,则可以把该公式应用于具有曲率半径为 R 的反射镜情况。

2. 系列薄透镜高斯光束传输

假设第一种介质的光线矩阵为 $[A_1 B_1 C_1 D_1]$,第二种介质的光线矩阵为 $[A_2 B_2 C_2 D_2]$,由式(5.2-11)可得到第一种介质输出的光束参数 $q_2 = (A_1 q_1 + B_1)/(C_1 + D_1)$ 和第二种介质输出的光束参数 $q_3 = (A_2 q_2 + B_2)/(C_2 + D_2)$,把这两个方程结合起来得到

$$q_3 = \frac{A_T q_1 + B_T}{C_T q_1 + D_T} \quad (5.2-14)$$

式中, A_T 、 B_T 、 C_T 和 D_T 均为联系输出平面 3 与输入平面 1 的光线矩阵元素,即

$$\begin{pmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \quad (5.2-15)$$

由归纳法可知,式(5.2-14)可用于解决高斯光束通过多个类透镜介质和光学元件的传输问题,矩阵 $[A_T B_T C_T D_T]$ 表征了系列介质和光学元件在传输路径上各自矩阵的乘积。

例如,有 N 个光学元件,即相当于 N 个矩阵元素,其输出光束的光线矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} A_N & B_N \\ C_N & D_N \end{pmatrix} \quad (5.2-16)$$

这就是光束通过系列光学元件的 ABCD 定律内容,其实用性在于对一系列复杂类透镜元件系列的高斯光束参数 $q(z)$ 的追踪成为可能。并且,由式(5.2-6),可求出任何一个 z 平面处的光束曲率半径 $R(z)$ 以及该处的光斑半径 $\omega(z)$ 。

5.2.3 类透镜介质高斯光束简正模

下面利用本征模法导出 $k_2 \neq 0$ 时类透镜介质中传输的高斯光束简正模。令 $k_2 = (2\pi n_2)/\lambda$,则满足式(5.1-2)的类透镜介质折射率变为

$$n^2(r) = n_0^2 \left(1 - \frac{n_2}{n_0} r^2 \right) \quad (5.2-17)$$

式中, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。形如式(5.2-17)的折射率分布介质常称为平方律介质, 将其代入光波场标量方程式(5.1-1)得到

$$\nabla^2 E(r) + k^2 \left(1 - \frac{n_2}{n_0} r^2\right) E(r) = 0 \quad (5.2-18)$$

式(5.2-18)的解可表示为横向场分布 $\psi(x, y)$ 和纵向场分布 $e^{-i\beta z}$ 的乘积, 即

$$E(x, y, z) = \psi(x, y) e^{-i\beta z} \quad (5.2-19)$$

进一步, 再令 $\psi(x, y) = f(x)g(y)$, 则光波场标量方程式(5.2-18)变为

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + k^2 - k^2 \frac{n_2}{n_0} (x^2 + y^2) - \beta^2 = 0 \quad (5.2-20)$$

式(5.2-20)可分解为关于 x 和 y 的两个方程, 令 C 为常数, 则有

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(k^2 - \beta^2 - k^2 \frac{n_2}{n_0} x^2\right) = C \quad (5.2-21)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - k^2 \frac{n_2}{n_0} y^2 = -C \quad (5.2-22)$$

为了化简式(5.2-21)和式(5.2-22), 现定义变量 $\xi = \alpha x, \zeta = \alpha y$, 其中 $\alpha = \sqrt{k(n_2/n_0)}$ 。于是, 式(5.2-21)和式(5.2-22)变为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \left(\frac{k^2 - \beta^2 - C}{\alpha^2} - \xi^2\right) f = 0 \quad (5.2-23)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{C}{\alpha^2} - \zeta^2\right) g = 0 \quad (5.2-24)$$

易知, 式(5.2-23)和式(5.2-24)与谐振子薛定谔方程具有相同的形式, 它们的本征值 $(k^2 - \beta^2 - C)/\alpha^2$ 和 C/α^2 须分别满足下面关系式

$$\frac{k^2 - \beta^2 - C}{\alpha^2} = 2l + 1 \quad (l = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.2-25)$$

$$\frac{C}{\alpha^2} = 2m + 1 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.2-26)$$

对应于整数 l, m , 其解的形式为

$$f_l(\xi) = H_l(\xi) e^{-\xi^2/2} \quad (5.2-27)$$

$$g_m(\zeta) = H_m(\zeta) e^{-\zeta^2/2} \quad (5.2-28)$$

式中, $H_l(\xi), H_m(\zeta)$ 分别为 l 阶、 m 阶厄米多项式。综合式(5.2-27)和式(5.2-28), (l, m) 简正模的 $\psi_{l,m}(x, y)$ 解为

$$\psi_{l,m}(x, y) = H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} \quad (5.2-29)$$

由变量 ξ 和 ζ 的定义, 可得到光斑半径 w 为

$$w = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{k} \left(\frac{n_0}{n_2}\right)^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{1}{n_0 n_2}\right)^{\frac{1}{4}}} \quad (5.2-30)$$

基于上述分析, 类透镜介质中 (l, m) 简正模的复数电场表达式为

$$\begin{aligned} E_{l,m}(x, y, z) &= \psi_{l,m}(x, y) e^{-i\beta_{l,m} z} \\ &= E_0 H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} e^{-i\beta_{l,m} z} \end{aligned} \quad (5.2-31)$$

由式(5.2-25)和式(5.2-26),可得到 (l, m) 简正模的传输常数 $\beta_{l,m}$ 为

$$\beta_{l,m} = k \sqrt{1 - \frac{2}{k} \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} (l + m + 1)} \quad (5.2-32)$$

于是,类透镜介质中传输的总光波场分布为上述简正模光场的线性叠加(或组合),即

$$E(x, y, z) = \sum_{l,m} c_{l,m} E_{l,m}(x, y, z) \quad (5.2-33)$$

式中, $c_{l,m}$ 为对应于 (l, m) 简正模光场的系数。

简正模是能够在介质中独立传输的光波场结构,具有如4.2.2节所述的模式特点,即叠加性、正交性、有序性和稳定性。这些简正模的解有以下两个值得注意的性质。

(1) 光斑半径 w 与传输轴位置无关。与各向同性介质($n_2=0$,相当于 $k_2=0$)中电场的解不同,类透镜中简正模的光斑半径 w 与传输轴的位置(即变量 z)无关,这可用折射率 $n_2 > 0$ 的聚焦作用加以解释:即这种折射率的聚焦作用与受限光束衍射(扩散)的自然趋向相互抵消。对于折射率 $n_2 < 0$ 的情形,由式(5.2-30)和式(5.2-31)可知, $w^2 < 0$,因此约束解不能存在,此时会引起光束散焦,使得光束的衍射现象加强。

(2) 传输常数 $\beta_{l,m}$ 与模数 (l, m) 相关。因传输常数 $\beta_{l,m}$ 与模数 (l, m) 存在依赖关系,故导致其相速与群速不尽相同。对此,分析 l, m 模的群速度模色散(即与 l, m 的依赖关系)则可获得直观阐释。需要指出的是,群速度模色散对光通信系统(尤其是高速光通信系统)有重要的影响,这一问题将在5.3节讨论。

5.3 激光脉冲传输与色散

在第1章中,我们简述了光波的平面波及其基本特性,考虑的仅是具有确定频率和波数的单色平面波。例如,以连续方式工作的激光可以认为是单色光,通常可用平面波表示。然而,许多应用领域涉及的激光都是脉冲运转的激光。在脉冲模式下,能量可被集中在极短时间内,因而其峰值功率大为增加,这是至关重要的性质。在科学研究及应用中,利用超短脉冲使探测极短寿命(10^{-12} s)的瞬态现象成为可能。

众所周知,激光脉冲的有限持续时间可引起光频(或波长)有限展宽。由于麦克斯韦方程组具有线性特征,因此激光脉冲在各向同性介质中的传输可用不同频率的单色波以适当的线性叠加来描述。然而,激光脉冲在色散介质中传输将会出现诸多新特性,即光波因其不同频率成分的存在使其传输速度不同,从而导致彼此间相位上出现变化,并引起激光脉冲的展宽。值得注意的是,在色散介质中传输的激光脉冲能流速度可能会与其相速有较大的差别。因此,研究激光脉冲在色散介质中的传输及其特性是很有必要的。

5.3.1 一维脉冲标量光波及特性

为简化分析且不失一般性,现考虑一个沿 z 方向传输的一维标量光波,其脉冲幅度 $\psi(z, t)$ 可视为光波场矢量的一个分量。令 $A(k)$ 表示波数为 k 的平面波分量振幅,则 $\psi(z, t)$ 可

表示为

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i[\omega(k)t - kz]} dk \quad (5.3-1)$$

式中,被积函数是同一麦克斯韦方程组的平面波基本解,因此该积分亦满足麦克斯韦方程。从形式上看, $A(k)$ 是 $\psi(z, t)$ 的傅里叶变换,故称 $|A(k)|^2$ 为 $\psi(z, t)$ 的傅里叶光谱(频谱)。 ω 与 k 的色散关系由 $|\vec{k}| = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ 给出。在各向同性介质中,色散特性与传输方向无关,因此有 $\omega(-k) = \omega(k)$ 。在下面的讨论中, k 和 $\omega(k)$ 均假定为实数。图 5.3-1 为一种典型的激光脉冲及其傅里叶光谱。

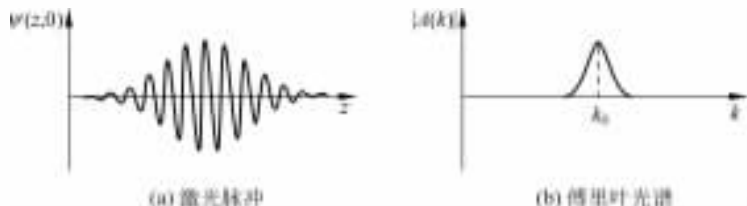


图 5.3-1 典型激光脉冲及其傅里叶光谱

激光脉冲通常由其中心频率 ω_0 (或对应波数 k_0)以及 ω_0 附近的频宽 $\Delta\omega$ (或对应的波数展宽 Δk)表征。在一般情况下, $A(k)$ 在 k_0 附近有一锐利峰值(即 $\Delta k \ll k_0$)。为研究这样一个时间脉冲包络,可将 $\omega(k)$ 在 k_0 附近展成泰勒级数

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 (k - k_0) + \dots \quad (5.3-2)$$

然后,将式(5.3-2)代入式(5.3-1),则式(5.3-1)可写成

$$\psi(z, t) \approx e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t - z\right] \cdot (k - k_0)} dk \quad (5.3-3)$$

式中,忽略了 $(k - k_0)$ 的高阶项。式(5.3-3)中的积分仅是复合变量 $[z - (d\omega/dk)_0 t]$ 的函数,称其为包络函数 $E[z - (d\omega/dk)_0 t]$ 。于是,激光脉冲振幅可写成

$$\psi(z, t) \approx E\left[z - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t\right] e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \quad (5.3-4)$$

式(5.3-4)表明,除了总的相位因子外,激光脉冲的形状无畸变地向前传输,如图 5.3-2 所示。

在图 5.3-2 中,波包的传输速度称为群速度,用 V_g 表示为

$$V_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 \quad (5.3-5)$$

需指出的是,只有当分布函数 $A(k)$ 在 k_0 处有锐利峰值且频率 $\omega(k)$ 在 k_0 附近是 k 的平滑缓变函数时,这种对激光脉冲形状无失真传输的近似才是合理的。如果激光脉冲的能量密度与光波场的振幅绝对值平方有关,则在这种近似中的群速度仅代表能量的运输。

需注意的是,在激光脉冲情况下,群速度与相速度一般是不同的,即 $(d\omega/dk)_0 \neq (\omega_0/k_0)$ 。在通常情况下,激光脉冲的相速大于其群速,该相速是指一给定的波峰或波谷上某一点的速度,这与平面波的相速意义是相同的。

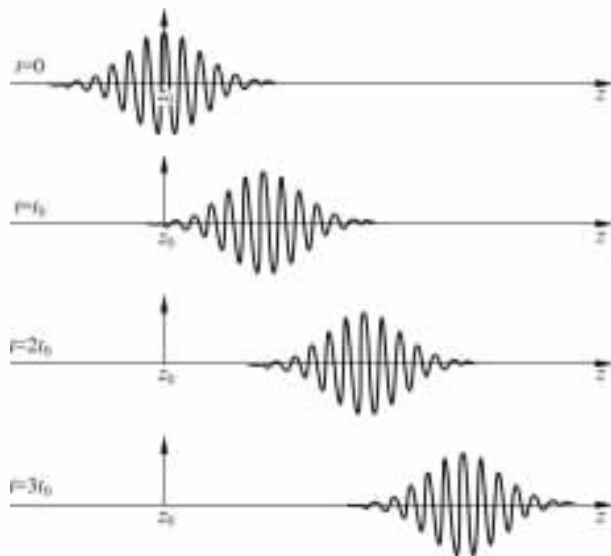


图 5.3-2 激光脉冲无失真传输示意图

5.3.2 色散介质的激光脉冲传输

光学中的介质色散通常以折射率 $n(\omega)$ 作为频率(或波长)的函数来描述, ω 与 k 的关系为

$$k = n(\omega) \frac{\omega}{c} \quad (5.3-6)$$

式中, c 为光在真空中的速度。相速为

$$V_p = \frac{c}{n(\omega)} \quad (5.3-7)$$

根据上述二式, 得到群速为

$$V_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} \quad (5.3-8)$$

对于正常色散, 即 $(dn/d\omega) > 0$, 群速小于相速。而对于反常色散, 有 $(dn/d\omega) < 0$, 且因其负值很大, 故群速远大于相速(有时 $V_g > c$), 这等效于 ω 随 k 急剧变化, 故上述近似式(5.3-2)不再合理, 但这并不违背狭义相对论。

上述研究表明, 在色散介质中传输的激光脉冲, 若保持其形状不发生变化, 必须忽略式(5.3-2)中的高阶项 $(d\omega/dk)_0 (k - k_0)$ 。如果式(5.3-2)中的下一个高阶项 $(1/2)(d^2\omega/dk^2)_0 (k - k_0)^2$ 不能忽略, 则激光脉冲形状在传输过程中将发生变化。一般而言, 因激光脉冲每一频率成分具有不同的群速度(群色散), 故可对脉冲展宽作出阐释。设 Δk 为激光脉冲的光谱展宽, 则群速度展宽量级为

$$\Delta V_g \sim \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_0 \Delta k \quad (5.3-9)$$

于是, 随着光脉冲的传输, 预计约有 $(\Delta V_g)t$ 的位置展宽量。

5.3.3 类透镜介质的群速度色散

群速度色散主要从模色散和群色散两个方面影响光脉冲传输,其后果将引起光脉冲的展宽以及限制光波在类透镜介质中频率的重复。

1. 模色散

模色散是指由于多模激发而引起的脉冲展宽现象。考虑到 $\beta \propto k$, 由式(5.3-5)可改写群速度定义式如下

$$(V_g)_{l,m} = \frac{d\omega}{d\beta_{l,m}} \quad (5.3-10)$$

由式(5.3-10)可知,模式 (l,m) 不同,其群速度 V_g 则不同。假设光波导折射率变化很小,即有 $(1/k)\sqrt{n_2/n_0}(l+m+1) \ll 1$, 则式(5.2-32)可近似表示为

$$\beta_{l,m} \simeq k - \sqrt{\frac{n_2}{n_0}}(l+m+1) - \frac{n_2}{2kn_0}(l+m+1)^2 \quad (5.3-11)$$

于是,式(5.3-10)可表示为

$$(V_g)_{l,m} = \frac{c}{n_0 \left[1 + \frac{n_2}{2n_0 k^2} (l+m+1)^2 \right]} \quad (5.3-12)$$

如果光脉冲输入或耦合到光波导输入端激发起大量模式,则每一个模式以各自不同的群速度 $(V_g)_{l,m}$ 传输, $(V_g)_{l,m}$ 由式(5.3-12)给出。如果从 $(0,0)$ 到 (l_{\max}, m_{\max}) 所有的模都被激励,则在 $z=L$ 处输出的光脉冲将被展宽为

$$\Delta\tau \approx L \left[\frac{1}{(V_g)_{l_{\max}, m_{\max}}} - \frac{1}{(V_g)_{0,0}} \right] \quad (5.3-13)$$

由式(5.3-12)并利用 $(n_2/n_0)(l+m+1)^2/2k^2 \ll 1$ 条件,可得到

$$\Delta\tau = \frac{n_0 L}{c} \frac{n_2}{2n_0 k^2} (l_{\max} + m_{\max} + 1)^2 \quad (5.3-14)$$

因此,在输出相邻脉冲无严重重叠的情况下,每秒钟可传输的脉冲最大数目 $f_{\max} \approx 1/\Delta\tau$ 。由此可见,实现高数据传输率必须采用单模激励方式,或采用单模光波导(如单模光纤),利用相干单模激光器激励可达到这一目的。例如,对于一条长达 1km、折射率满足式(5.2-17)的平方律光纤, $n_0 = 1.5$, $n_2 = 5.1 \times 10^3 \text{ cm}^{-2}$ 。令输入波长 $\lambda = 1 \mu\text{m}$ 的光脉冲激发的模式最高为 $l_{\max} = m_{\max} = 30$, 将这些参数代入到式(5.3-14),得到的脉冲展宽 $\Delta\tau = 3.6 \times 10^{-9} \text{ s}$, 脉冲最大速率 $f_{\max} \approx 1/\Delta\tau = 2.8 \times 10^8 / \text{s}$ 。

2. 群色散

群色散是指因群速度与频率的依赖关系导致的光脉冲展宽现象。如上所述,用单模(如 $1,m$)激光传输可消除由于多模激发而引起的脉冲展宽。在这种情况下,因群速度 $(V_g)_{l,m}$ 与频率的依赖关系仍将引起光脉冲的展宽。

现考虑一具有光谱宽度 $\Delta\omega$ 的光脉冲,在经一段传输距离 L 后,其脉冲展宽 $\Delta\tau$ 与 $\Delta\omega$ 的关系可由下式给出

$$\Delta\tau = 2L \left| \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{V_g} \right) \right| \Delta\omega = \frac{2L}{V_g^2} \left| \frac{dV_g}{d\omega} \right| \Delta\omega \quad (5.3-15)$$

如果光脉冲源于一个相干连续光源,且光源的光谱宽度可以忽略,则脉冲的光谱宽度 $\Delta\omega$ 与脉冲持续时间 τ 之间的关系为 $\Delta\omega \approx 2/\tau$ 。于是,式(5.3-15)可写成

$$\Delta\tau \simeq \frac{4L}{V_g^2} \left(\frac{dV_g}{d\omega} \right) \quad (5.3-16)$$

若光源带宽 $\Delta\omega_s$ 超过 τ^{-1} ,则需要将 $\Delta\omega_s$ 代替式(5.3-15)中的 $\Delta\omega$ 。因此,这种光脉冲展宽是由群速度与 ω 的依赖关系(群色散)引起的。对于半直观推导得出的式(5.3-16)的正确性及其意义,可通过对色散通道中具有高斯型包络光脉冲问题的分析加深理解。

设输入光脉冲形式为

$$\begin{aligned} E(z=0, t) &= e^{-\alpha t^2} e^{i\omega_0 t} \\ &= e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \end{aligned} \quad (5.3-17)$$

式中, α 为衰减系数; ω_0 为光脉冲中心角频率; $F(\Omega)$ 为包络 $e^{-\alpha t^2}$ 的傅里叶变换,其表达式为

$$F(\Omega) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha}} e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}} \quad (5.3-18)$$

由于频谱呈高斯分布,因此距离 z 处的光场可由 $e^{-i\beta(\omega_0+\Omega)z}$ 乘以式(5.3-18)中的每一个频率成分得到。将 $\beta(\omega_0+\Omega)$ 在 ω_0 附近进行泰勒级数展开,取二阶近似项,则有

$$E(z, t) = e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\left[\Omega t - \frac{\beta_0}{V_g} z - \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{V_g} \right) \Omega^2 z\right]} d\Omega \quad (5.3-19)$$

式中, $\beta_0 \equiv \beta(\omega_0)$; $d\beta/d\omega = 1/V_g$ 。对式(5.3-19)积分,可得到如下电场包络,即

$$\hat{E}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega \left[t - \frac{z}{V_g} - a\Omega z \right]} d\Omega \quad (5.3-20)$$

式中, $a = (1/2) d(1/V_g)/d\omega = -1/(2V_g^2) (dV_g/d\omega)$ 。将式(5.3-18)代入式(5.3-20)并积分,得

$$\hat{E}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4a\alpha z}} e^{-\frac{\left(t - \frac{z}{V_g}\right)^2}{\frac{1}{\alpha} + 16a^2 z^2}} e^{i\frac{4a\alpha z \left(t - \frac{z}{V_g}\right)^2}{\frac{1}{\alpha} + 16a^2 z^2}} \quad (5.3-21)$$

对于 z 处的光脉冲持续时间 τ (即 z 处的脉宽),可将其视为脉冲包络振幅的平方为其峰值一半时对应的两个时刻间隔,即

$$\tau(z) = \sqrt{2\ln 2} \sqrt{\frac{1}{\alpha} + 16a^2 z^2} \quad (5.3-22)$$

定义半极大强度处的全宽度为初始脉宽,即在 $z=0$ 处的脉冲宽度 τ_0 为

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2\ln 2}{\alpha}} \quad (5.3-23)$$

因此,当光脉冲传输一段距离 L 后,其脉宽可表示为

$$\tau(L) = \tau_0 \sqrt{1 + \left(\frac{8aL \ln 2}{\tau_0^2} \right)^2} \quad (5.3-24)$$

在长距离传输条件下, $aL \gg \tau_0^2$, 由此得到

$$\tau(L) \approx \frac{(8\ln 2)aL}{\tau_0} \quad (5.3-25)$$

将因子 $a = -1/(2V_g^2)(dV_g/d\omega)$ 代入上式, 则有

$$\tau(L) = -\ln 2 \frac{4L}{V_g^2 \tau_0} \frac{dV_g}{d\omega} \quad (5.3-26)$$

此式与式(5.3-16)相比, 仅相差一个常数 $\ln 2$, 这说明式(5.3-16)是正确的。

群色散通常用 $D \equiv (1/L)dT/d\lambda$ 来表征, 其中 T 为通过长度为 L 的光纤时脉冲传输的时间。该定义与 β 对 ω 的二次微商有关, 即

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \left(\frac{d^2 \beta}{d\omega^2} \right) \quad (5.3-27)$$

结合上述因子 a , 式(5.3-27)可改写为 $D = -(4\pi ca)/\lambda^2$ 。于是, 式(5.3-24)可写为

$$\tau(L) = \tau_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2\ln 2}{\pi c} \cdot \frac{DL\lambda^2}{\tau_0^2} \right)^2} \quad (5.3-28)$$

若 DL 、 λ 、 τ 分别以 ps/nm、 μm 和 ps 为单位, 则上式等于

$$\tau(L) = \tau_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1.47DL\lambda^2}{\tau_0^2} \right)^2} \quad (5.3-29)$$

式中, DL 为群色散与长度的乘积。

按式(5.3-26), 使脉冲展宽的群色散(即 V_g 与 ω 有关)可归因于:

(1) 因为 $k = \omega n/c$, 所以 V_g 与 ω 有关, 其关系由式(5.3-12)表征。

(2) 由于介质的 n 与 ω 有关, 而 V_g 是依赖于 ω 的隐函数, 因此可写成 $dV_g/d\omega = \partial V_g/\partial\omega + (\partial V_g/\partial n)(dn/d\omega)$, 再由式(5.3-15)可以得到

$$\Delta\tau = \frac{2L}{c} \left| \frac{n_0 n_2}{ck^3} (l+m+1)^2 - \frac{dn}{d\omega} \right| \Delta\omega \quad (5.3-30)$$

式中, 第二项已假定 $[n_2/(2k^2 n_0)](l+m+1)^2 \ll 1$ 。在多数光波导中, 脉冲展宽由介质色散项 $dn/d\omega$ 所支配。

如果把式(5.3-21)与式(5.3-19)结合, 光波导中位于 z 处的总电场可表示为

$$E(z, t) = \epsilon(z, t) e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} = \frac{e^{-i\beta_0 z}}{\sqrt{1 + i4az}} e^{i \left[\omega_0 t + \frac{4az \left(t - \frac{z}{V_g} \right)^2}{\frac{1}{\alpha^2} + 16a^2 z^2} \right] - \frac{\left(t - \frac{z}{V_g} \right)^2}{\frac{1}{16a^2 z^2 \alpha^2}}} \quad (5.3-31)$$

于是, 振荡相位因子 ϕ 为

$$\phi(z, t) = \omega_0 t + \frac{4az \left(t - \frac{z}{V_g} \right)^2}{\frac{1}{\alpha^2} + 16a^2 z^2} - \beta_0 z \quad (5.3-32)$$

因此, 本地频率 $\omega(z, t)$ 为

$$\omega(z, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t} = \omega_0 + \frac{8az \left(t - \frac{z}{V_g} \right)}{\frac{1}{\alpha^2} + 16a^2 z^2} \quad (5.3-33)$$

由式(5.3-33)可知, ω 由中心频率 ω_0 与群色散项 a 成正比的线性频率展宽(啁啾调频)组成。对于啁啾调频现象, 可直观理解为因群色散使不同频率的光波以不同群速传输造成的。根据式(5.3-29), 若 $DL \ll (\tau_0/\lambda)^2$, 则对给定的激光脉冲而言, 其脉宽展宽率 $[\tau(L)]/\tau_0$ 将很小(即 ~ 1)。当然, 在群色散为零的条件下(即 $D=0$), 光脉冲传输最为理想。例如, 在光纤中某些波长的频率色散与介质色散相互抵消时, 就属于这种理想的传输情况。

本章小结

研究光波在各向同性介质中的传输,是研究其他类型介质光传输的基础,平面波传输是一种理想化的情况,而高斯光束和高斯光脉冲的传输则更具广泛意义。

设光场波函数为 $\psi = e^{-i[p(z) + \frac{k}{2q(z)}r^2]}$, 则具有形如 $n^2(r) = n_0^2 \left(1 - \frac{k_2 r^2}{k}\right)$ 类透镜介质折射率分布的光束传输方程(即光波场标量方程)为

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q}\right)' + \frac{k_2}{k} &= 0 \\ p' + \frac{i}{q} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

对在各向同性介质中传输的高斯光束,考虑折射率为常数($k_2 = 0$),于是光波场标量方程简化为

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q}\right)' &= 0 \\ p' + \frac{i}{q} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

基模高斯光束解的特点:在横向上的光场分布仅与 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 有关,且呈现指数关系。基模高斯光束既非平面波,亦非球面波,其能量传输按双曲线形式变化。高阶模高斯光束的解可由厄米-高斯函数表征,其横向光波场分布由高斯函数与厄米多项式的乘积决定。

类透镜的高斯光束变换定律为: $\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}_2 = \frac{A(r/r')_1 + B}{C(r/r')_1 + D}$ 。

类透镜介质高斯光束简正模:该简正模是能够在介质中独立传输的光波场结构,具有叠加性、正交性、有序性和稳定性的模式特点。这些简正模的解有两个重要性质:一是光斑半径 w 与传输轴位置无关;二是传输常数 $\beta_{l,m}$ 与模数 (l, m) 相关。

激光脉冲在色散介质中传输会出现诸多新特性,这是由于光波中的不同频率具有不同的传输速度,使彼此间出现相位上的变化,从而引起激光脉冲展宽的缘故。在色散介质中传输的激光脉冲能流速度可能会与其相速有较大差异,因此研究激光脉冲在色散介质中的传输及其特性具有重要意义。

问题与思考

- 5.1 什么是各向同性介质? 简述平面波在各向同性介质中的传输特性。
- 5.2 什么是类透镜介质? 试推导类透镜介质中的光束传输方程。
- 5.3 基模高斯光束解有何特点? 其振幅分布和相移因子有何特征?
- 5.4 利用 MATLAB 画出厄米-高斯光束的光斑半径和光束远场发散角随 l 和 m 的变化曲线,并对曲线的变化趋势加以说明。

- 5.5 何为类透镜的高斯光束变换定律? 试写出其具体表达式。
- 5.6 何为简正模? 它有什么特性? 试举例说明。
- 5.7 什么是正常色散? 什么是反常色散? 试举例说明。
- 5.8 一维光脉冲 $E_x = E(z - V_g t) e^{-i(\omega t - k_0 z)}$ 的包络线函数为 $E(z - V_g t)$, 试写出相应磁场 H_y 的包络线, 并计算其坡印亭矢量 \vec{S} 。

5.9 束腰半径是否意味着实际检测的光场半径? 束腰半径的大小有何益处和不足?

5.10 一高斯光束通过焦距为 f 的薄透镜, 实现聚焦。设光束从左向右传输, 入射光束腰在距透镜 d_1 处, 束腰半径为 w_1 。试证明输出光的束腰半径为

$$\frac{1}{w_2^2} = \frac{1}{w_1^2} \left(1 - \frac{d_1}{f}\right)^2 + \frac{1}{f^2} \left(\frac{\pi w_1}{\lambda}\right)^2$$

5.11 某高斯光束的束腰半径为 $w_0 = 1.14 \text{ mm}$, $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$, 试求与束腰相距 30cm、10m 和 1000m 远处的光斑半径 w 大小以及波前曲率半径 R 。

5.12 一光波导的折射率形式为 $n(\omega) = n_0 - \frac{\xi(\omega - \omega_0)}{\xi^2 + (\omega - \omega_0)^2}$ (ξ 为该光波导的特征常数), 计算该光脉冲在该光波导中传输的群速度。

5.13 试证明: 若将折射率表示成波长 λ 的函数, 式(5.3-8)可写成

$$V_g = \frac{c}{n - \left(\frac{dn}{d\lambda}\right)}$$

5.14 若泰勒级数展开的高阶项 $\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \omega}{dk^2}\right)_0 (k - k_0)^2$ 不能忽略, 则激光脉冲在传输中会展宽, 试证明以下关系式成立:

(1) 群速度展宽 $\Delta V_g \approx \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \omega}{dk^2}\right)_0 \Delta k$, 其中 $\Delta k = (k - k_0)$ 为激光脉冲的光谱展宽;

(2) 群速度色散 $\frac{dV_g}{d\lambda} = V_g^2 \left(\frac{\lambda}{c}\right) \frac{d^2 n}{d\lambda^2}$ 。

5.15 假如光波导同时存在时延和色散, 形状呈 $f(t) = \frac{2}{e^{\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}}}$ 的脉冲称为“孤子脉冲”。在考虑群时延时, 其脉冲形状各点的时延是否都一样? 如果不一样, 由脉冲的哪一点代表时延最合理?