第 5 章　二维变换与裁剪

本章学习目标

- 齐次坐标。
- 二维基本几何变换矩阵。
- Cohen-Sutherland 直线段裁剪算法。
- 中点分割直线段裁剪算法。
- Liang-Barsky 直线段裁剪算法。
- Sutherland-Hodgman 多边形裁剪算法。

5.1　图形几何变换基础

通过对图形进行几何变换(geometrical transformation),由简单图形可以构造出复杂图形。图 5-1 将一块地板砖铺设在九宫格内来展示人行道的真实铺设效果,图 5-1(a)只使用了简单的平移变换,图 5-1(b)综合使用了平移变换和旋转变换。图 5-2 为由球类对象构成的三维场景,描述了地球的公转和自转。

图形的几何变换是对图形进行平移变换(translation transformation)、比例变换(scaling transformation)、旋转变换(rotation transformation)、反射变换(reflection transformation)和错切变换(shear transformation)。图形的几何变换可以分为二维图形几何变换和三维图形几何变换,而二维图形几何变换又是三维图形几何变换的基础。

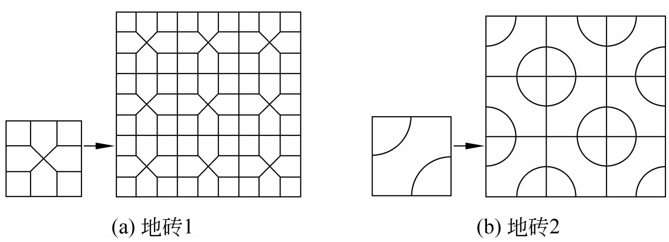

图 5-1　地板砖类二维场景

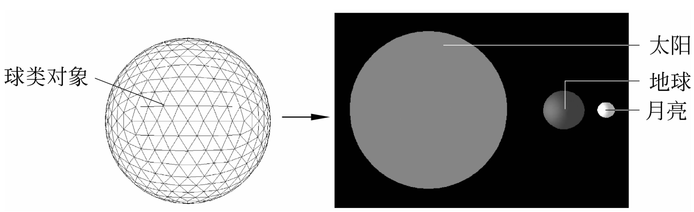

图 5-2　球类三维场景

5.1.1 规范化齐次坐标

为了使图形几何变换表达为图形顶点集合矩阵与某一变换矩阵相乘的问题,引入了规范化齐次坐标。

所谓齐次坐标就是用 $n+1$ 维矢量表示 n 维矢量。例如,在二维平面中,点 $P(x,y)$的齐次坐标表示为(wx,wy,w)。类似地,在三维空间中,点 $P(x,y,z)$的齐次坐标表示为(wx,wy,wz,w)。这里,w 为任意不为 0 的比例系数,如果 $w=1$ 就是规范化的齐次坐标。二维点 $P(x,y)$的规范化齐次坐标为$(x,y,1)$,三维点 $P(x,y,z)$的规范化齐次坐标为$(x,y,z,1)$。

定义了规范化齐次坐标以后,图形的几何变换可以表示为图形顶点集合的规范化齐次坐标矩阵与某一变换矩阵相乘的形式。

5.1.2 矩阵相乘

二维图形顶点表示为规范化齐次坐标后,其图形顶点集合矩阵一般为 $n\times3$ 的矩阵,其中 n 为顶点数,变换矩阵为 3×3 的矩阵。在进行图形几何变换时需要用到线性代数里的矩阵相乘运算。例如,对于 $n\times3$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 3×3 的矩阵 $\boldsymbol{B}$,矩阵相乘公式为:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}&a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}&a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}\\\vdots\quad\vdots\quad\vdots&\vdots\quad\vdots\quad\vdots&\vdots\quad\vdots\quad\vdots\\a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+a_{n3}b_{31}&a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+a_{n3}b_{32}&a_{n1}b_{13}+a_{n2}b_{23}+a_{n3}b_{33}\end{bmatrix}\tag{5-1}$$

由线性代数知道,矩阵乘法不满足交换律,只有左矩阵的列数等于右矩阵的行数时,两个矩阵才可以相乘。特别地,对于二维变换的两个 3×3 的方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$,矩阵相乘公式为:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}&a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}&a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}\\a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}&a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}&a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33}\end{bmatrix}$$

类似地,可以处理三维变换的两个 4×4 矩阵相乘问题。

5.1.3 二维几何变换矩阵

用规范化齐次坐标表示的二维图形几何变换矩阵是一个 3×3 的方阵,简称为二维几何变换矩阵。

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix} \tag{5-2}$$

从功能上可以把二维变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 分为 4 个子矩阵。其中 $\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$是对图形进行比例、旋转、反射和错切变换；$\boldsymbol{T}_2=[l \quad m]$是对图形进行平移变换；$\boldsymbol{T}_3=\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$是对图形进行投影变换；$\boldsymbol{T}_4=[s]$是对图形进行整体比例变换。

5.1.4 物体变换与坐标变换

同一种变换可以看作是物体变换，也可以看作是坐标变换。物体变换是使用同一变换矩阵作用于物体上的所有顶点，但坐标系位置不发生改变。坐标变换是坐标系发生变换，但物体位置不发生改变，然后在新坐标系下表示物体上的所有顶点。这两种变换紧密联系，各有各的优点，只是变换矩阵略有差异而已，以下主要介绍物体变换。

5.1.5 二维几何变换形式

二维几何变换的基本方法是把变换矩阵作为一个算子，作用到变换前的图形顶点集合的规范化齐次坐标矩阵上，得到变换后新的图形顶点集合的规范化齐次坐标矩阵。连接变换后的新图形顶点，就可以绘制出变换后的二维图形。

设变换前图形顶点集合的规范化齐次坐标矩阵为 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix}$，变换后图形顶点集合的规范化齐次坐标矩阵为 $\boldsymbol{P}'=\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & y_n' & 1 \end{bmatrix}$，二维变换矩阵为 $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix}$。则二维几何变换公式为 $\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{T}$，可以写成

$$\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & y_n' & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix} \tag{5-3}$$

5.2 二维图形基本几何变换矩阵

二维图形的基本几何变换是指相对于坐标原点和坐标轴进行的几何变换，包括平移、比例、旋转、反射和错切 5 种变换。物体变换是通过变换物体上每一个顶点实现的，因此以点的二维基本几何变换为例讲解二维图形基本几何变换矩阵。二维坐标点的基本几何变换可以表示为 $\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{T}$ 的形式，其中，$P(x,y)$为变换前的二维坐标点，$P'(x',y')$为变换后的二

维坐标点，$\boldsymbol{T}$ 为 3×3 的变换矩阵。

5.2.1 平移变换矩阵

平移变换是指将 $P(x,y)$点移动到 $P'(x',y')$位置的过程，如图 5-3 所示。

平移变换的坐标表示为$\begin{cases} x'=x+T_x \\ y'=y+T_y \end{cases}$。

相应的齐次坐标矩阵表示为

$$[x' \quad y' \quad 1]=[x+T_x \quad y+T_y \quad 1]=[x \quad y \quad 1]\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\T_x&T_y&1\end{bmatrix}$$

因此，二维平移变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\T_x&T_y&1\end{bmatrix} \tag{5-4}$$

式中，T_x，T_y 为平移参数。

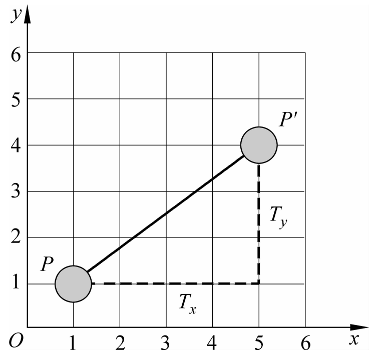

图 5-3　平移变换

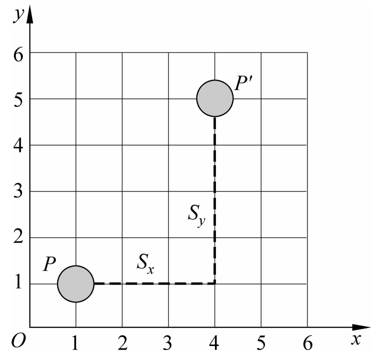

图 5-4　比例变换

5.2.2 比例变换矩阵

比例变换是指 $P(x,y)$点相对于坐标原点 O，沿 x 方向缩放 S_x 倍，沿 y 方向缩放 S_y 倍，得到 $P'(x',y')$点的过程，如图 5-4 所示。

比例变换的坐标表示为$\begin{cases} x'=x\cdot S_x \\ y'=y\cdot S_y \end{cases}$。

相应的齐次坐标矩阵表示为

$$[x' \quad y' \quad 1]=[x\cdot S_x \quad y\cdot S_y \quad 1]=[x \quad y \quad 1]\cdot\begin{bmatrix}S_x&0&0\\0&S_y&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

因此，二维比例变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}S_x&0&0\\0&S_y&0\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{5-5}$$

式中，S_x、S_y 为比例系数。

比例变换可以改变二维图形的形状。当 $S_x=S_y$ 且 S_x、S_y 大于 1 时，图形等比放大；当 $S_x=S_y$ 且 S_x、S_y 小于 1 大于 0 时，图形等比缩小；当 $S_x\neq S_y$ 时，图形发生形变。前面介绍过，变换矩阵的子矩阵 $T_4=[s]$是对图形作整体比例变换，关于这一点读者可以令 $S_x=S_y=S$ 导出，请注意这里 $s=1/S$，即 $s>1$ 时，图形整体缩小；$0<s<1$ 时，图形整体放大。

5.2.3 旋转变换矩阵

旋转变换是 $P(x,y)$点相对于坐标原点 O 旋转一个角度 β（逆时针方向为正，顺时针方向为负），得到 $P'(x',y')$点的过程，如图 5-5 所示。

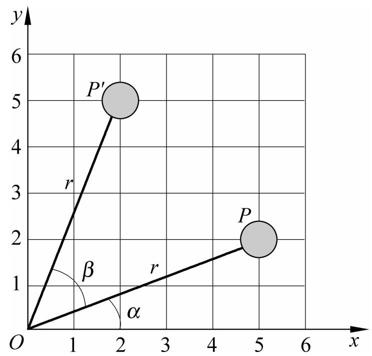

图 5-5 旋转变换

对于 $P(x,y)$点，极坐标表示为

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$

旋转变换的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\beta) = x\cos\beta - y\sin\beta \\ y' = r\sin(\alpha+\beta) = x\sin\beta + y\cos\beta \end{cases}$$

相应的齐次坐标矩阵表示为

$$\begin{aligned} [x' \quad y' \quad 1] &= [x\cdot\cos\theta - y\sin\beta \quad x\sin\beta + y\cos\beta \quad 1] \\ &= [x \quad y \quad 1]\cdot\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此，二维旋转变换矩阵

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-6}$$

式中，α 为 $P(x,y)$点的起始角；β 为 $P(x,y)$点的旋转角。

式(5-6)为绕原点逆时针方向旋转的变换矩阵，若旋转方向为顺时针，β 角取为负值。

绕原点顺时针方向旋转的变换矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & \sin(-\beta) & 0 \\ -\sin(-\beta) & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.2.4 反射变换矩阵

反射变换也称为对称变换，是 $P(x,y)$点关于原点或某个坐标轴反射得到 $P'(x',y')$点的过程。具体可以分为关于原点反射、关于 x 轴反射、关于 y 轴反射等几种情况，如图 5-6 所示。

关于原点反射的坐标表示为$\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$。

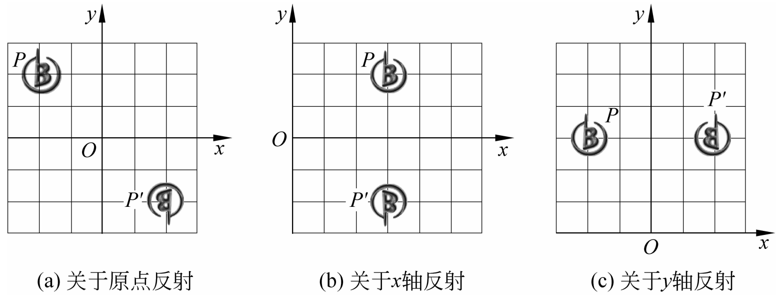

图 5-6　反射变换

相应的齐次坐标矩阵表示为

$$[x' \quad y' \quad 1] = [-x \quad -y \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此,关于原点 O 的二维反射变换矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-7}$$

同理可得,关于 x 轴的二维反射变换矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-8}$$

同理可得,关于 y 轴的二维反射变换矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-9}$$

5.2.5　错切变换矩阵

错切变换是点 $P(x,y)$沿 x 轴和 y 轴发生不等量的变换,得到 $P'(x',y')$点的过程,如图 5-7 所示。

沿 x,y 方向的错切变换的坐标表示为$\begin{cases} x'=x+cy \\ y'=bx+y \end{cases}$。

相应的齐次坐标矩阵表示为

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x+cy \quad bx+y \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此,沿 x,y 两个方向的二维错切变换矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-10}$$

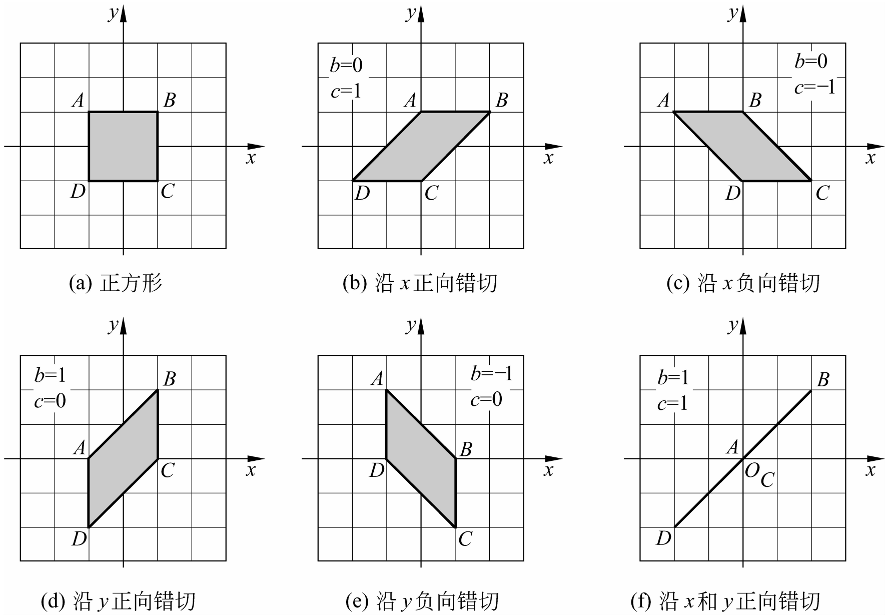

图 5-7　错切变换

其中 b、c 为错切参数。

在前面的变换中，子矩阵 $\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的非对角线元素大多为零，如果 c 和 b 不为零，则意味着对图形进行错切变换，如图 5-7(f)所示。令 $b=0$ 可以得到沿 x 方向的错切变换，$c>0$ 是沿 x 正向的错切变换，$c<0$ 是沿 x 负向的错切变换，如图 5-7(b)和图 5-7(c)所示。令 $c=0$ 可以得到沿 y 方向的错切变换，$b>0$ 是沿 y 正向的错切变换，$b<0$ 是沿 y 负向的错切变换，如图 5-7(d)和图 5-7(e)所示。

上面讨论的 5 种变换给出的都是点变换的公式，图形的变换实际上都可以通过点变换来完成。例如直线段的变换可以通过对两个顶点坐标进行变换，连接新顶点得到变换后的新直线段；多边形的变换可以通过对每个顶点进行变换，连接新顶点得到变换后的新多边形。自由曲线的变换可以通过变换控制多边形的控制点后，重新绘制曲线来实现。

符合下述形式的坐标变换称为二维仿射变换(affine transformation)。

$$[x' \quad y' \quad 1]=[x \quad y \quad 1]\cdot\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & 0 \\ a_{1,3} & a_{2,3} & 1 \end{bmatrix} \tag{5-11}$$

变换后的坐标 x' 和 y' 都是变换前的坐标 x 和 y 的线性函数。参数 $a_{i,j}$ 是由变换类型确定的常数。仿射变换具有平行线变换成平行线，有限点映射为有限点的一般特性。平移、比例、旋转、反射和错切 5 种变换都是二维仿射变换的特例，任何一组二维仿射变换总可以表示为这五种变换的组合。因此，平移、比例、旋转、反射的仿射变换保持变换前后两段直线间的角度、平行关系和长度之比不改变。

5.3 二维复合变换

5.3.1 复合变换原理

复合变换是指图形做了一次以上的基本几何变换，是基本几何变换的组合形式，复合变换矩阵是基本几何变换矩阵的组合。

$\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{T}_1\cdot\boldsymbol{T}_2\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{T}_n$，其中 $\boldsymbol{T}$ 为二维复合变换矩阵，$\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_n$ 为 n 个单次二维基本几何变换矩阵。

注意：进行复合变换时，需要注意矩阵相乘的顺序。由于矩阵乘法不满足交换律，因此通常 $\boldsymbol{T}_1\cdot\boldsymbol{T}_2\neq\boldsymbol{T}_2\cdot\boldsymbol{T}_1$。在复合变换中，矩阵相乘的顺序不可交换。通常先计算出 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1\cdot\boldsymbol{T}_2\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{T}_n$，再计算 $\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{T}$。

5.3.2 相对于任意参考点的二维几何变换

前面已经定义，二维基本几何变换是相对于坐标原点进行的平移、比例、旋转、反射和错切这 5 种变换，但在实际应用中常会遇到参考点不在坐标原点的情况，而比例变换和旋转变换是与参考点相关的。相对于任意参考点的比例变换和旋转变换应表达为复合变换形式，变换方法为首先将参考点平移到坐标原点，对坐标原点进行比例变换或旋转变换，然后再进行反平移将参考点平移回原位置。

例 5-1 一个由顶点 $P_1(10,10)$，$P_2(30,10)$和 $P_3(20,25)$所定义的三角形，如图 5-8 所示，相对于点 $Q(10,25)$逆时针方向旋转 30°，计算变换后的三角形顶点坐标。

(1) 将 Q 点平移至坐标原点，如图 5-9 所示。

变换矩阵 $\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -10 & -25 & 1\end{bmatrix}$。

(2) 三角形相对于坐标原点逆时针方向旋转 30°，如图 5-10 所示。

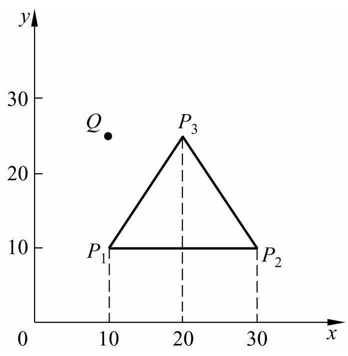

图 5-8 原始图形

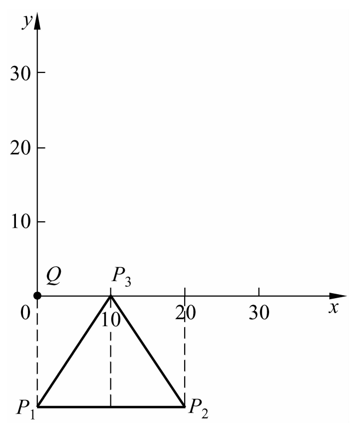

图 5-9 平移变换

变换矩阵 $\boldsymbol{T}_2=\begin{bmatrix}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) & \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) & 0\\ -\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} & 0\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。

(3) 将参考点 $\boldsymbol{Q}$ 平移回原位置，如图 5-11 所示。

变换矩阵 $\boldsymbol{T}_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 10 & 25 & 1\end{bmatrix}$。

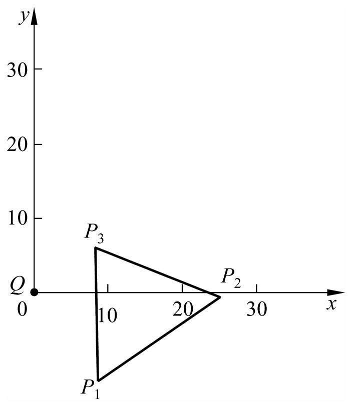

图 5-10　旋转变换

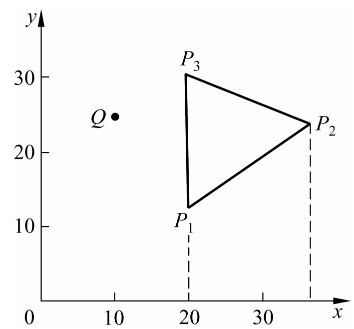

图 5-11　反平移变换

三角形变换后顶点的规范化齐次坐标矩阵等于变换前顶点的规范化齐次坐标矩阵乘以变换矩阵。

$$\begin{bmatrix}x_1' & y_1' & 1\\ x_2' & y_2' & 1\\ x_3' & y_3' & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{T},\quad 而\quad \boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1\cdot\boldsymbol{T}_2\cdot\boldsymbol{T}_3$$

所以

$$\begin{bmatrix}x_1' & y_1' & 1\\ x_2' & y_2' & 1\\ x_3' & y_3' & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 10 & 1\\ 30 & 10 & 1\\ 20 & 25 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -10 & -25 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} & 0\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 10 & 25 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}17.5 & 12.01 & 1\\ 34.82 & 22.01 & 1\\ 18.66 & 30 & 1\end{bmatrix}$$

这样三角形变换后的顶点坐标为 $P_1(17.5,12.01)$，$P_2(34.82,22.01)$ 和 $P_3(18.66,30)$。

5.3.3　相对于任意方向的二维几何变换

二维基本几何变换是相对于坐标轴进行的平移、比例、旋转、反射和错切这 5 种变换，但

在实际应用中常会遇到变换方向不与坐标轴重合的情况。相对于任意方向的变换方法是首先对任意方向做旋转变换,使该方向与坐标轴重合,然后对坐标轴进行二维基本几何变换,最后做反向旋转变换,将任意方向还原到原来的方向。

例 5-2 将图 5-12 所示三角形相对于轴线 $y=kx+b$ 做反射变换,计算每一步的变换矩阵。

(1) 将点$(0,b)$平移至坐标原点,如图 5-13 所示。

变换矩阵 $T_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -b & 1\end{bmatrix}$。

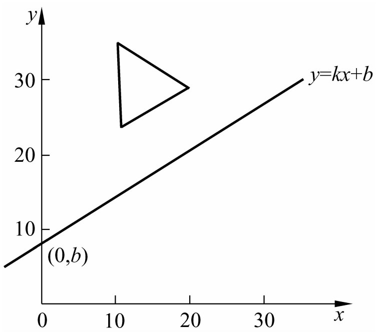

图 5-12 原始图形

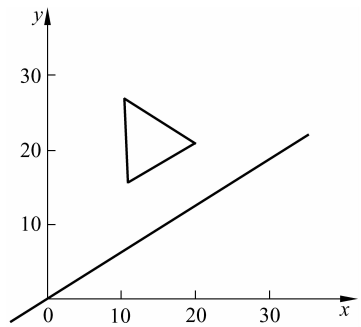

图 5-13 平移变换

(2) 将轴线 $y=kx$ 绕坐标系原点顺时针旋转 β 角($\beta=\arctan k$),落于 x 轴上,如图 5-14 所示。

变换矩阵 $\boldsymbol{T}_2=\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta & 0\\\sin\beta & \cos\beta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。

(3) 三角形相对 x 轴作反射变换,如图 5-15 所示。

变换矩阵 $\boldsymbol{T}_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

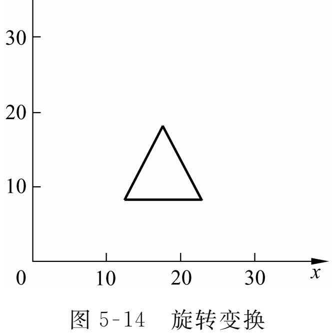

图 5-14 旋转变换

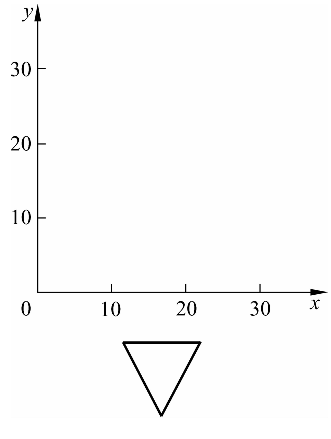

图 5-15 反射变换