第八章　立体几何

第一节　空间几何体的表面积和体积

考纲解读

了解球、棱柱、棱锥及台体的表面积和体积的计算公式(不要求记忆公式).

命题趋势探究

高考中考查表面积和体积问题,主要可分为以下三类.

(1)柱、锥、台体的侧面积分别是其侧面展开图的面积,因此,弄清侧面展开图的形状及各棱的位置关系是求侧面积及解决有关问题的关键.

(2)求柱、锥、台体的体积,关键是找到相应的底面积和高.可充分运用多面体的截面及旋转体的轴截面,将空间问题转化为平面问题.

(3)解决球的有关问题,要注意球半径、截面圆半径及球心到截面圆距离构成的直角三角形.

柱、锥、台体的表面积和体积以公式为主,一般情况下,只要记住公式,题目就可以顺利求解. 因此题目从难度上讲属于中、低档题,在高考中直接出题的可能性较大,容易出现相关的选择题或填空题.

知识点精讲

一、构成空间几何体的基本元素——点、线、面

(1)空间中,点动成线,线动成面,面动成体.

(2)空间中,不共点(不重合)的两点确定一条直线,不共线的三点确定一个平面,不共面的四点确定一个几何体(四面体或三棱锥).

二、简单凸多面体——棱柱、棱锥、棱台

1. 棱柱

两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平

心得体会

行，由这些面所围成的几何体叫作棱柱.

①斜棱柱：侧棱不垂直于底面的棱柱；

②直棱柱：侧棱垂直于底面的棱柱；

③正棱柱：底面是正多边形的直棱柱；

④平行六面体：底面是平行四边形的棱柱；

⑤直平行六面体：侧棱垂直于底面的平行六面体；

⑥长方体：底面是矩形的直平行六面体；

⑦正方体：棱长都相等的长方体.

2. 棱锥

有一个面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的几何体叫作棱锥.

①正棱锥：底面是正多边形，且顶点在底面的射影是底面的中心；

②正四面体：所有棱长都相等的三棱锥.

3. 棱台

用一个平行于底面的平面去截棱锥，底面和截面之间的部分叫作棱台.

由正棱锥截得的棱台叫作正棱台.

简单凸多面体的分类及其之间的关系如图 8-1 所示.

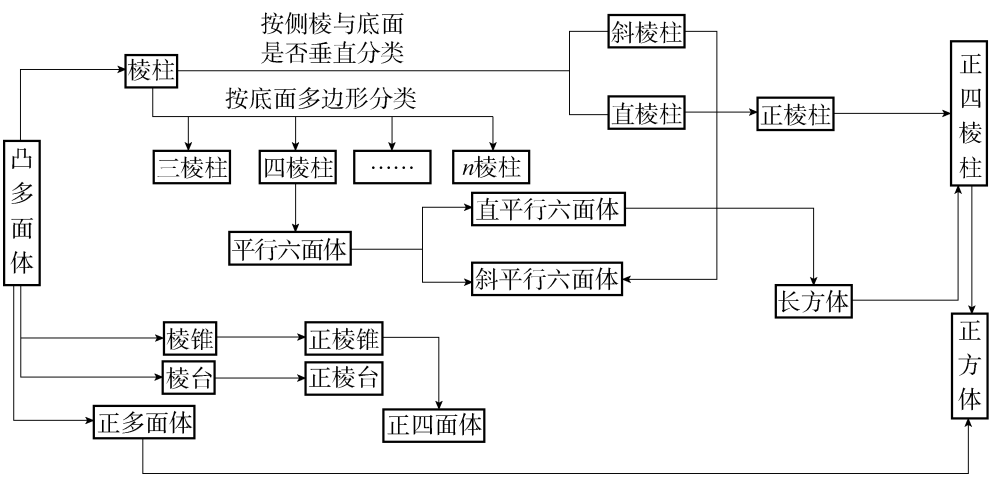


图 8-1

三、简单旋转体——圆柱、圆锥、圆台、球

1. 圆柱

以矩形的一边所在的直线为旋转轴，其余边旋转形成的曲面所围成的几何体叫作圆柱.

2. 圆锥

以直角三角形的一条直角边所在的直线为旋转轴，其余两边旋转形成的曲面所围成的几何体叫作圆锥.

心得体会

3. 圆台

用一个平行于底面的平面去截圆锥，底面和截面之间的部分叫作圆台.

4. 球

以半圆的直径所在的直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的几何体叫作球体，简称为球(球面距离：经过两点的大圆在这两点间的劣弧长度).

四、组合体

由柱体、锥体、台体、球等几何体组成的复杂的几何体叫作组合体.

五、侧面积与表面积公式

1. 直棱柱、正棱锥、正棱台的侧面积(c，c'为底面周长，h 为高，h'为斜高)

$S_{直棱柱侧}=c\cdot h$　　$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}c\cdot h'$　　$S_{正棱台侧}=\frac{1}{2}(c+c')h'$

2. 圆柱、圆锥、圆台的侧面积与表面积(r，r'为底面半径，l 为母线长)

侧面积　$S_{圆柱侧}=2\pi rl$　$S_{圆锥侧}=\pi rl$　$S_{圆台侧}=\pi(r+r')l$

表面积　$S_{圆柱表}=2\pi r(r+l)$　$S_{圆锥表}=\pi r(r+l)$　$S_{圆台表}=\pi(r+r')l+\pi(r^2+r'^2)$

3. 球体表面积

$S_{球}=4\pi R^2$(R 为半径)

六、体积公式

1. 柱、锥、台、球的体积(S，S'为底面积，h 为高，R 为半径)

$V_{柱体}=S\cdot h$　$V_{锥体}=\frac{1}{3}S\cdot h$　$V_{台体}=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h$　$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$

2. 圆柱、圆锥、圆台的体积(r，r'为底面半径，h 为高)

$V_{圆柱}=\pi r^2h$　　$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h$　　$V_{圆台}=\frac{\pi h}{3}(r^2+rr'+r'^2)$

题型归纳及思路提示

题型 105　几何体的表面积与体积

思路提示：熟悉几何体的表面积、体积的基本公式，注意直角等特殊角.

【例 8.1】　(鹰潭市 08 届高三一模改编)三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱 PA，PB，PC 两两垂直，侧面面积分别是 6，4，3，则三棱锥的表面积是_____，体积是_____.

【解析】　设 $PA=a$，$PB=b$，$PC=c(a,b,c>0)$，

心得体会

则$\begin{cases}\frac{ab}{2}=6\\ \frac{bc}{2}=4\\ \frac{ca}{2}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ab=12\\ bc=8\\ ca=6\end{cases}$，三式相乘得 $a^2b^2c^2=12\times8\times6\Rightarrow abc=24$，

所以$\begin{cases}a=3\\ b=4\\ c=2\end{cases}$，又侧棱 PA,PB,PC 两两垂直，所以$\begin{cases}AB=\sqrt{a^2+b^2}=5\\ BC=\sqrt{b^2+c^2}=2\sqrt{5}\\ CA=\sqrt{c^2+a^2}=\sqrt{13}\end{cases}$，

所以 $\cos\angle BCA=\frac{BC^2+CA^2-AB^2}{2BC\cdot CA}=\frac{(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{13})^2-5^2}{2\times2\sqrt{5}\times\sqrt{13}}=\frac{2}{\sqrt{65}}$，

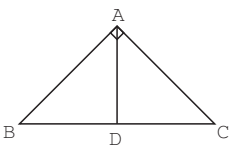
从而 $\sin\angle BCA=\sqrt{1-\cos^2\angle BCA}=\frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\times CA\times\sin\angle BCA=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{13}\times\frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}}=\sqrt{61}$，

所以 $S_{表}=6+4+3+\sqrt{61}=13+\sqrt{61}$，体积 $V=\frac{1}{6}abc=\frac{1}{6}\times24=4$.

【评注】 若三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱 PA,PB,PC 两两垂直，则类比直角三角形中的勾股定理有，$S_{\triangle ABC}^2=S_{\triangle PAB}^2+S_{\triangle PBC}^2+S_{\triangle PCA}^2$（本题 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{6^2+4^2+3^2}=\sqrt{61}$），$V_{P-ABC}=\frac{1}{6}PA\cdot PB\cdot PC$.

【变式 1】 (2011·陕西文,16(2))如图 8-2 所示，在△ABC 中，$\angle ABC=45°$，$\angle BAC=90°$，AD 是 BC 边上的高，沿 AD 把△ABD 折起，使 $\angle BDC=90°$. 若 $BD=1$，求三棱锥 $D-ABC$ 的表面积.



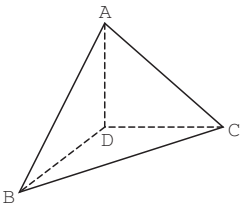


图 8-2

【变式 2】 (2011·上海理,7)若圆锥的侧面积为 2π，底面面积为 π，则该圆锥的体积为_____.

【例 8.2】 (2010·上海文,6)已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 6 的正方形，侧棱 $PA\perp$底面 $ABCD$，且 $PA=8$，则该四棱锥的体积是_____.

【解析】 体积 $V=\frac{1}{3}\times6^2\times8=96$.

【变式 1】 (2009·陕西理,10)若正方体的棱长为$\sqrt{2}$，则以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的体积为(　　).

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

心得体会

【变式 2】（2010・全国Ⅱ理，9）已知正四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SA=2\sqrt{3}$，那么当该棱锥的体积最大时，它的高为（　　）.

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

【变式 3】（2009・辽宁理，11）正六棱锥 $P-ABCDEF$ 中，G 为 PB 的中点，则三棱锥 $D-GAC$ 与三棱锥 $P-GAC$ 的体积之比为（　　）.

A. 1∶1　　B. 1∶2

C. 2∶1　　D. 3∶2

【变式 4】（2010・北京理，8）如图 8-3 所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，动点 E,F 在棱 A_1B_1 上，动点 P,Q 分别在棱 AD,CD 上，若 $EF=1$，$A_1E=x$，$DQ=y$，$DP=z$（x,y,z 大于零），则四面体 $PEFQ$ 的体积（　　）.

A. 与 x,y,z 都有关

B. 与 x 有关，与 y,z 无关

C. 与 y 有关，与 x,z 无关

D. 与 z 有关，与 x,y 无关

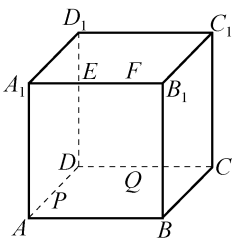


图　8-3

题型 106　球的表面积、体积与球面距离

思路提示：半径为 R 的球 O，表面积 $S=4\pi R^2$，体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$；球面上 A,B 两点间的球面距离为 αR，其中 $\alpha=\angle AOB$（弧度制）.

【例 8.3】（2009・上海理，8）已知三个球的半径 R_1,R_2,R_3 满足 $R_1+2R_2=3R_3$，则它们的表面积 S_1,S_2,S_3 满足的等量关系是_____.

【解析】 $S_1=4\pi R_1^2$，即 $R_1=\frac{\sqrt{S_1}}{2\sqrt{\pi}}$，同理得 $R_2=\frac{\sqrt{S_2}}{2\sqrt{\pi}}$，$R_3=\frac{\sqrt{S_3}}{2\sqrt{\pi}}$，由 $R_1+2R_2=3R_3$ 得 $\sqrt{S_1}+2\sqrt{S_2}=3\sqrt{S_3}$.

【变式 1】若球 O_1,O_2 的表面积之比 $\frac{S_1}{S_2}=4$，则它们的半径之比 $\frac{R_1}{R_2}=$_____.

【变式 2】（2006・山东文，8）正方体的内切球与其外接球的体积之比为（　　）.

A. 1∶3　　B. 1∶3　　C. 1∶$3\sqrt{3}$　　D. 1∶9

【例 8.4】（1）（2005・全国Ⅰ理，3）一个与球心距离为 1 的平面截球所得的圆面面积为 π，则球的表面积为（　　）.

A. $8\sqrt{2}\pi$　　B. 8π　　C. $4\sqrt{2}\pi$　　D. 4π

（2）（2009・四川理，8）在半径为 3 的球面上有 A,B,C 三点，$\angle ABC=90°$，$BA=BC$，球心 O 到平面 ABC 的距离是 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，则 B,C 两点的球面距离是（　　）.

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. π

C. $\frac{4\pi}{3}$　　D. 2π

心得体会

【解析】 (1)设小圆半径为 r,球半径为 R,则 $\begin{cases}\pi r^2=\pi\\ r^2+1^2=R^2\end{cases}\Rightarrow R^2=2\Rightarrow S_{表}=4\pi R^2=8\pi$. 故选 B.

(2)如图 8-4 所示,由题意知截面小圆的半径 $r=\sqrt{3^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,所以 $BC=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 3\sqrt{2}=3$,故 $\triangle OBC$ 为正三角形,所以 $\angle BOC=\frac{\pi}{3}$,所以 B,C 两点的球面距离为 $3\times\frac{\pi}{3}=\pi$. 故选 B.

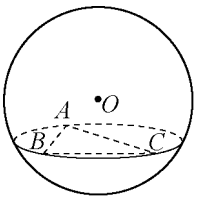


图 8-4

【变式 1】 (2009·陕西理,15)如图 8-5 所示,球 O 的半径为 2,圆 O_1 是一小圆,$O_1O=\sqrt{2}$,A,B 是圆 O_1 上两点,若 A,B 两点间的球面距离为 $\frac{2\pi}{3}$,则 $\angle AO_1B=$_____.

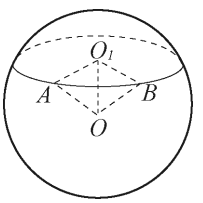


图 8-5

题型 107　几何体的外接球与内切球

思路提示:(1)半径为 R 的球 O,表面积 $S=4\pi R^2$,体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

(2)设小圆 O_1 半径为 r,$OO_1=d$,则 $d^2+r^2=R^2$;若 A,B 是圆 O_1 上两点,则 $AB=2r\sin\frac{\angle AO_1B}{2}=2R\sin\frac{\angle AOB}{2}$.

(3)注意球的直径(或半径)与几何体的关系.

【例 8.5】 (2006·福建理,5)已知正方体外接球的体积是 $\frac{32}{3}\pi$,那么正方体的棱长等于(　　).

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【分析】 正方体外接球的直径为体对角线.

【解析】 设正方体的棱长为 a,外接球半径为 R,则 $\begin{cases}2R=\sqrt{3}a\\ \frac{4\pi R^3}{3}=\frac{32\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{4\sqrt{3}}{3}\\ R=2\end{cases}$. 故选 D.

【变式 1】 (2007·天津理,12)一个长方体的各顶点均在同一球的球面上,且一个顶点上的三条棱的长分别为 1,2,3,则此球的表面积为_____.

【变式 2】 (2007·全国Ⅱ理,15)一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2cm 的球面上.如果正四棱柱的底面边长为 1cm,那么该棱柱的表面积为_____cm^2.

【变式 3】 (2010·湖北理,13)圆柱形容器内盛有高度为 8cm 的水,若放入 3 个相同的球(球的半径与圆柱底面半径相同)后,水恰好淹没最上面的球(如图 8-6 所示),则球的半径为_____cm.

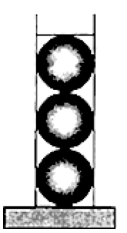


图 8-6

【例 8.6】 (2009·江西理,14)正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内接于半径为 2 的球,若 A,B 两点的球面距离为 π,则正三棱柱的体积为_____.

心得体会

【解析】 设 O 为球心，由题意知 $\begin{cases}2\times\angle AOB=\pi\\ AB=2\times 2\sin\dfrac{\angle AOB}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}\\ AB=2\sqrt{2}\end{cases}$，底面圆的半径为：$\dfrac{AB}{2\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，则正三棱柱的高为 $2\times\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，所以正三棱柱的体积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=8$.

【变式 1】 (2009·全国Ⅰ理，15)直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各顶点都在同一球面上，若 $AB=AC=AA_1=2$，$\angle BAC=120°$，则此球的表面积等于_____.

【变式 2】 (2008·海南、宁夏理，15)一个六棱柱的底面是正六边形，其侧棱垂直于底面. 已知该六棱柱的顶点都在同一个球面上，且其体积为 $\dfrac{9}{8}$，底面周长为 3，则这个球的体积为_____.

【变式 3】 (2011·四川理，15)如图 8-7 所示，半径为 R 的球 O 中有一内接圆柱，当圆柱的侧面积最大时，球的表面积与该圆柱的侧面积之差是_____.

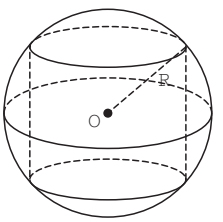


图　8-7

【例 8.7】 (2007·陕西理，6)一个正三棱锥的 4 个顶点都在半径为 1 的球面上，其中底面的 3 个顶点在该球的一个大圆上，则该正三棱锥的体积是(　　).

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

【解析】 设正三棱锥的底面边长为 a，高为 h，由题意知 $\begin{cases}\dfrac{a}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=2\\ h=1\\ V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2h\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{3}\\ V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}$.

故选 C.

【变式 1】 (2010·辽宁文，11)已知 S,A,B,C 是球 O 表面上的点，$SA\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，$SA=AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，则球 O 的表面积等于(　　).

A. 4π　　B. 3π　　C. 2π　　D. π

【变式 2】 (2006·安徽理，9)表面积为 $2\sqrt{3}$ 的正八面体的各个顶点都在同一个球面上，则此球的体积为(　　).

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$　　B. $\dfrac{1}{3}\pi$　　C. $\dfrac{2}{3}\pi$　　D. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

【变式 3】 (2011·重庆理，9)高为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 的四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形，点 S、A、B、C、D 均在半径为 1 的同一球面上，则底面 $ABCD$ 的中心与顶点 S 之间的距离为(　　).

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

心得体会

【变式 4】 (2011·课标全国文,16)已知两个圆锥有公共底面,且两圆锥的顶点和底面的圆周都在同一个球面上.若圆锥底面面积是这个球面面积的$\frac{3}{16}$,则这两个圆锥中,体积较小者的高与体积较大者的高的比值为_____.

【变式 5】 (2011·辽宁理,12)已知球的直径 $SC=4$,A,B 是该球球面上的两点,$AB=\sqrt{3}$,$\angle ASC=\angle BSC=30°$,则棱锥 $S-ABC$ 的体积为(　　).

A. $3\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 1

【变式 6】 (2010·全国Ⅰ文,12)已知在半径为 2 的球面上有 A,B,C,D 四点,若 $AB=CD=2$,则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为(　　).

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

C. $2\sqrt{3}$　　D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

第二节　空间几何体的直观图与三视图

考纲解读

1. 认识柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征,并能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构.
2. 能画出简单空间图形(长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等及其简易组合)的三视图,能识别三视图所表示的立体模型,并会用斜二测画法画出它们的直观图.
3. 会用平行投影与中心投影两种方法,画出简单空间图形的三视图与直视图,了解空间图形的不同表示形式.
4. 会画某些建筑物的三视图与直视图(在不影响图形特征的基础上,尺寸、线条等不作严格要求).

命题趋势探究

高考中对本节内容的考查,可以分为以下两类.

(1)柱、锥、台、球的定义和相关性质是基础,以它们为载体考查线线、线面、面面间的关系是重点.

(2)三视图为新课标新增内容,所以高考会加大对其考查的力度.

在高考中,主要考查三视图和直观图,特别是通过三视图确定原图形的相关量.多以选择题和填空题为主,也不排除通过三视图来给出几何体的直观图的解答题,侧重于考查考生对基础知识的掌握以及应用所学知识解决问题的能力.

心得体会

知识点精讲

一、空间几何体的直观图

1. 斜二测画法

斜二测画法的主要步骤如下.

(1)建立直角坐标系.在已知水平放置的平面图形中取互相垂直的 Ox,Oy,建立直角坐标系.

(2)画出斜坐标系.在画直观图的纸上(平面上)画出对应的 Ox',Oy',使 $\angle xOy=45°$(或 $135°$),它们确定的平面表示水平平面.

(3)画出对应图形.在已知图形平行于 x 轴的线段,在直观图中画成平行于 x' 轴,且长度保持不变;在已知图形平行于 y 轴的线段,在直观图中画成平行于 y' 轴,且长度变为原来的一半.

(4)擦去辅助线.图画好后,要擦去 x 轴、y 轴及为画图添加的辅助线(虚线).被挡住的棱画虚线.

2. 平行投影与中心投影

平行投影的投影线是互相平行的,中心投影的投影线相交于一点.

二、空间几何体的三视图

1. 正(主)视图

几何体前后方向投影所得到的投影图,反映几何体的高度和长度.

2. 侧(左)视图

几何体左右方向投影所得到的投影图,反映几何体的高度和宽度.

3. 俯视图

几何体上下方向投影所得到的投影图,反映几何体的长度和宽度.

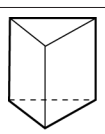
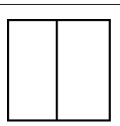
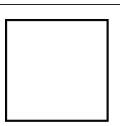
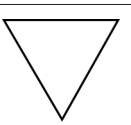
4. 口诀

正侧一样高,正俯一样长,俯侧一样宽(或长对正、高平齐、宽相等).

三、常见几何体的直观图与三视图

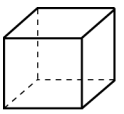
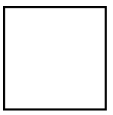
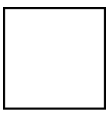
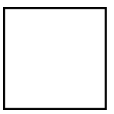
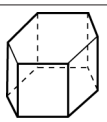
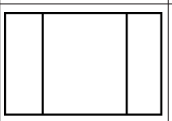
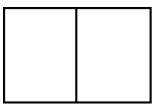
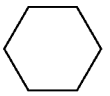
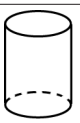
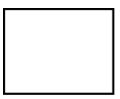
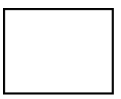
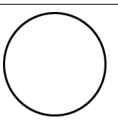
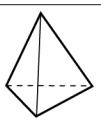
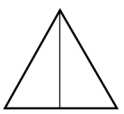
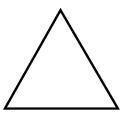
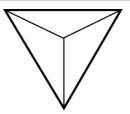
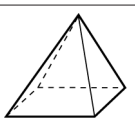
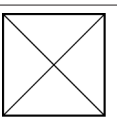
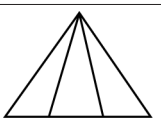
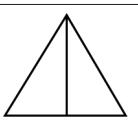
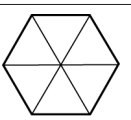
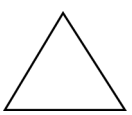
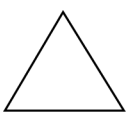
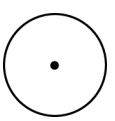
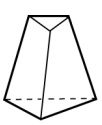
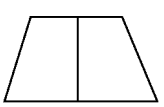
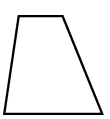
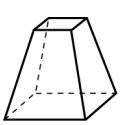
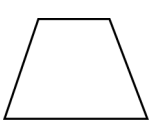
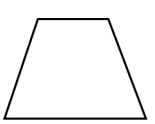
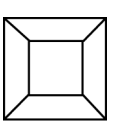
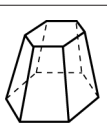
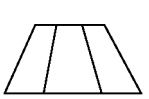
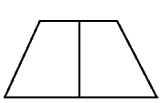
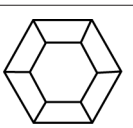
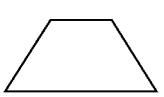
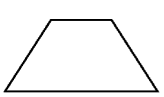
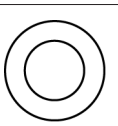
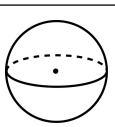
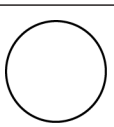
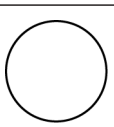
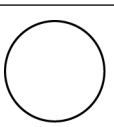
常见几何体的直观图与三视图如表 8-1 所示.

表　8-1

几何体	直观图	正(主)视图	侧(左)视图	俯视图	说明
正三棱柱					直三棱柱的 3 个视图是 2 个矩形和 1 个三角形

心得体会

续表

几何体	直观图	正(主)视图	侧(左)视图	俯视图	说明
正四棱柱					直四棱柱的3个视图是3个矩形
正六棱柱					直六棱柱的3个视图是2个矩形(含有线段)和1个六边形
圆柱					圆柱的3个视图是2个矩形和1个圆形
正三棱锥					正三棱锥的3个视图是3个三角形
正四棱锥					正四棱锥的3个视图是2个三角形和1个正方形(含对角线)
正六棱锥					正六棱锥的3个视图是2个三角形和1个六边形(含对角线)
圆锥					圆锥的3个视图是2个等腰三角形和1个圆
正三棱台					正棱台及圆台的正视图、侧视图均为梯形,俯视图为环形
正四棱台					
正六棱台					
圆台					
球					球的3个视图均为圆

心得体会

题型归纳及思路提示

题型 108　直观图与斜二测画法

【例 8.8】 (1)下列叙述中正确的个数是(　　).

①相等的角在直观图中仍相等;

②长度相等的线段,在直观图中长度仍相等;

③若两条线段平行,在直观图中对应的线段仍平行;

④若两条线段垂直,则在直观图中对应的线段也互相垂直.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(2)如图 8-8 所示,$\triangle O'A'B'$ 是 $\triangle OAB$ 水平放置的直观图,则 $\triangle OAB$ 的面积为(　　).

A. 6　　B. $3\sqrt{2}$

C. $6\sqrt{2}$　　D. 12

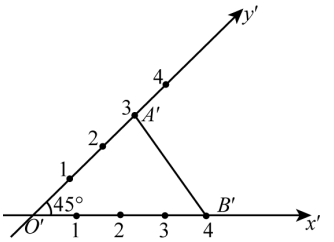


图　8-8

【解析】 (1)①因为 $\angle xOy=90°$ 的直观图为 $\angle x'Oy'=45°$ 或 $135°$,故①不正确;

②因为 y 方向的线段的直观图在 y 方向的长度减半,故②不正确;

③因为所有 x 方向的线段的直观图方向不变,所有 y 方向的线段的直观图均在原有基础上旋转 $45°$,故方向统一,故③正确;

④由③中叙述知,④不正确. 故选 B.

(2)$S_{\triangle O'A'B'}=\dfrac{1}{2}|O'A'||O'B'|\sin 45°$　　①

$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|OA||OB|\sin 90°$　　②

①÷②得 $\dfrac{S_{\triangle O'A'B'}}{S_{\triangle OAB}}=\dfrac{|O'A'||O'B'|\sin 45°}{|OA||OB|\sin 90°}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1}\times\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,

所以 $S_{\triangle O'A'B'}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}S_{\triangle OAB}$. 而 $S_{\triangle O'A'B'}=\dfrac{1}{2}\times 3\times 4\sin 45°=3\sqrt{2}$,所以 $3\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}S_{\triangle OAB}$,即 $S_{\triangle OAB}=12$. 故选 D.

【评注】 直观图中保持不变的有线段的同向性与同向线段长之比.

【变式 1】 已知正 $\triangle ABC$ 的边长为 a,以它的一边为 x 轴,对应的高线为 y 轴,画出它的水平放置的直观图 $\triangle A'B'C'$,则 $\triangle A'B'C'$ 的面积为(　　).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{8}a^2$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{8}a^2$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{16}a^2$

【变式 2】 利用斜二测画法,一个平面图形的直观图是边长为 1 的正方形,如图 8-9 所示,则该平面图形的面积为(　　).

A. $\sqrt{3}$　　B. 2

C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

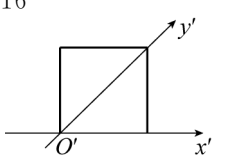


图　8-9

心得体会

题型 109　直观图、三视图

【例 8.9】（2007·江苏无锡）正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 如图 8-10 所示，以面 BCC_1B_1 为正前方画出的三视图正确的是（　　）.

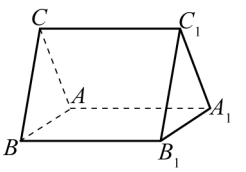
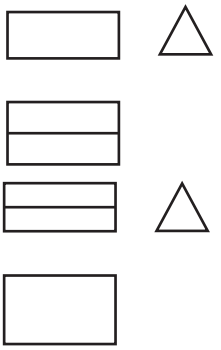
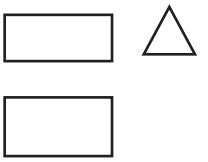


图　8-10

A.

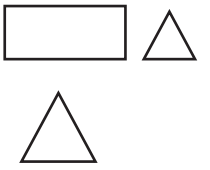


B.



C.

D.



【分析】 先看俯视图，垂点法，把 C_1，C 投影到底面.

【解析】 由垂点法，把 C_1，C 分别投影到底面，如图 8-11 所示，所以俯视图中间必有线段 MN. 故选 A.

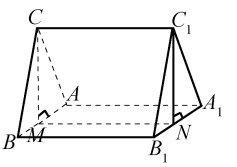


图　8-11

【变式 1】（2010·广东理，6）如图 8-12 所示，$\triangle ABC$ 为正三角形，$AA'/\!/BB'/\!/CC'$，$CC'\perp$ 平面 ABC 且 $3AA'=\frac{3}{2}BB'=CC'=AB$，则多面体 $ABC-A'B'C'$ 的正视图（也称主视图）是（　　）.

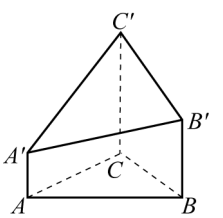
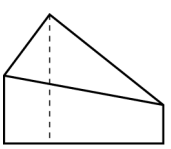
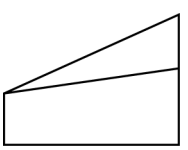


图　8-12

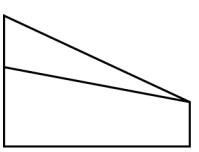
A.



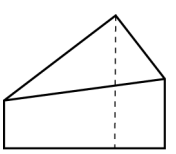
B.



C.



D.



【变式 2】 如图 8-13 所示，已知三棱锥的底面是直角三角形，直角边长分别为 3 和 4，过直角顶点的侧棱长为 4，且垂直于底面，该三棱锥的主视图是（　　）.

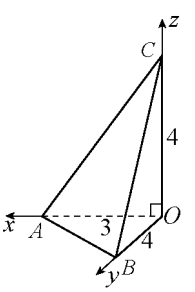
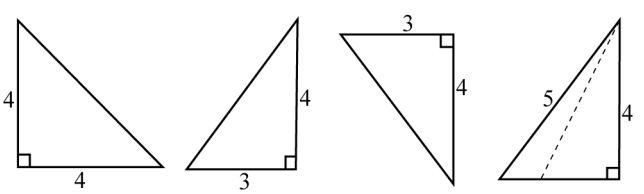


图　8-13



A.　　B.　　C.　　D.

【变式 3】（2008·广东理，5）将正三棱柱截去 3 个角（如图 8-14 所示，A，B，C 分别是 $\triangle GHI$ 三边的中点）得到如图 8-15 所示的几何体，则该几何体按图 8-15 所示方向的侧视图（或称左视图）为（　　）.

心得体会

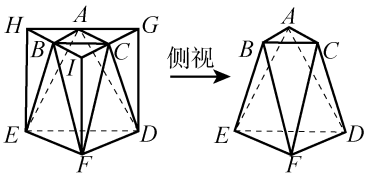
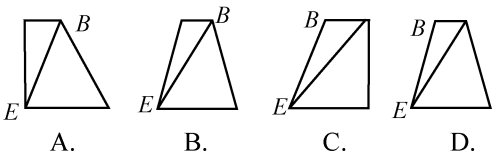


图　8-14　　图　8-15



【变式 4】（2009・天津重点学校二模）如图 8-16 所示，直三棱柱的正视图面积为 $2a^2$，则侧视图的面积为(　　).

A. $2a^2$　　B. a^2

C. $\sqrt{3}a^2$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

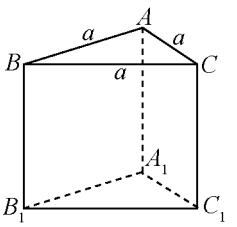


图　8-16

题型 110　三视图⇒直观图——简单几何体的基本量的计算

思路提示：先看俯视图，根据三视图的形状并结合表 8-1，定几何体的形状，由口诀“正侧一样高，正俯一样长，俯侧一样宽”定几何体的相关数据.

【例 8.10】（2010・陕西理，7）若某空间几何体的三视图如图 8-17 所示，则该几何体的体积是(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. 1　　D. 2

【分析】 三视图为 2 个矩形和 1 个三角形，知该几何体是直三棱柱.

【解析】 先看俯视图，定底面，再由正视图为矩形，侧视图为三角形知该几何体为直三棱柱，然后由口诀知数据如图8-18所示，所以以侧面为底得体积 $V=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$. 故选 C.

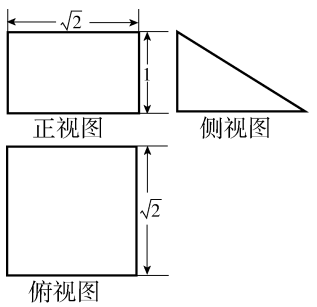


图　8-17

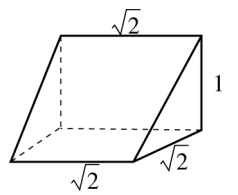


图　8-18

【变式 1】（2009・天津理，12）如图 8-19 所示是一个几何体的三视图，若其体积为 $3\sqrt{3}$，则 $a=$_____.

【变式 2】（2011・山东理，11）如图 8-20 所示，是长和宽分别相等的两个矩形，给定下列三个命题：

①存在三棱柱，其正视图、俯视图如图 8-20 所示；

②存在四棱柱，其正视图、俯视图如图 8-20 所示；

③存在圆柱，其正视图、俯视图如图 8-20 所示.

心得体会

其中真命题的个数是(　　).

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

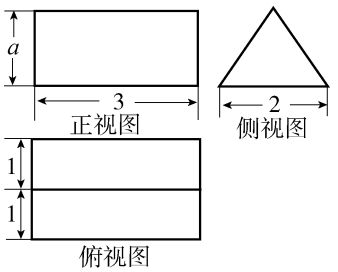


图　8-19

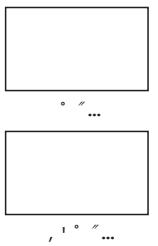


图　8-20

【例 8.11】 (2009·天津河西区二模)如图 8-21 所示,一个空间几何体的正视图和侧视图都是底为 1,高为 2 的矩形,俯视图是一个圆,那么该几何体的表面积为(　　).

A. 2π　　B. $\frac{5\pi}{2}$　　C. 4π　　D. 5π

【分析】 由三视图是 2 个矩形和 1 个圆,可知该几何体为圆柱.

【解析】 由三视图是 2 个矩形和 1 个圆,可知该几何体是圆柱,如图 8-22 所示,再由口诀知数据,所以几何体的表面积 $S_{表}=2\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2+\pi\times1\times2=\frac{5\pi}{2}$. 故选 B.

【变式 1】 (2009·聊城一模)某个几何体的三视图如图8-23所示,则该几何体的体积是(　　).

A. $2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$　　B. $\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{cm}^3$　　D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm}^3$

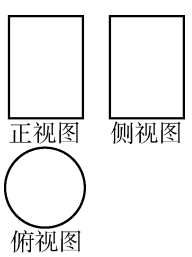


图　8-21

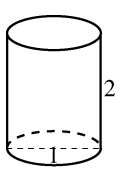


图　8-22

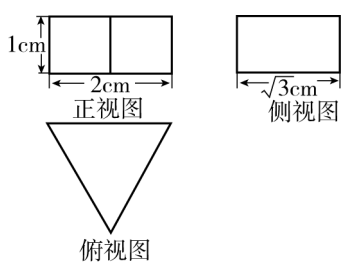


图　8-23

【变式 2】 (2010·福建理,13)若一个正三棱柱的正视图如图 8-24 所示,则其侧面积等于_____.

【变式 3】 (2011·辽宁理,15)一个正三棱柱的侧棱长和底面边长相等,体积为 $2\sqrt{3}$,它的三视图中的俯视图如图 8-25 所示,左视图是一个矩形,则这个矩形的面积是_____.

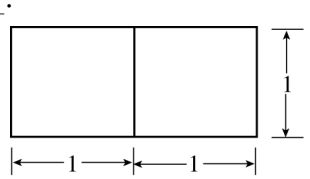


图　8-24

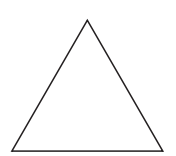


图　8-25

心得体会

【变式 4】（2010·天津文，12）一个几何体的三视图如图 8-26 所示，则该几何体的体积为_____.

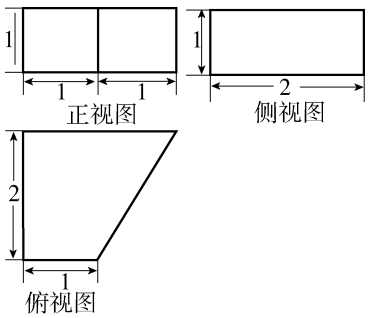


图　8-26

【变式 5】（2011·安徽理，6）一个空间几何体得三视图如图 8-27 所示，则该几何体的表面积为(　　).

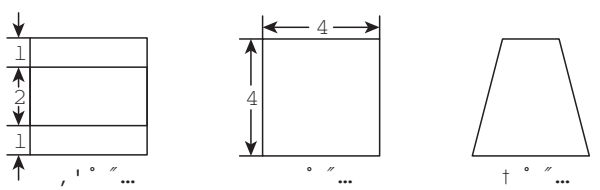


图　8-27

A. 48　　B. $32+8\sqrt{17}$　　C. $48+8\sqrt{17}$　　D. 80

【变式 6】（2011·广东理，7）如图 8-28 所示，某几何体的正视图是平行四边形，侧视图和俯视图都是矩形，则该几何体的体积为(　　).

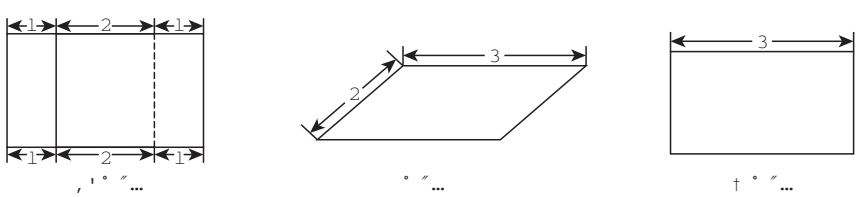


图　8-28

A. $6\sqrt{3}$　　B. $9\sqrt{3}$　　C. $12\sqrt{3}$　　D. $18\sqrt{3}$

【变式 7】（2011·北京丰台二模理，12）一个几何体的三视图如图 8-29 所示，则该几何体的体积是_____.

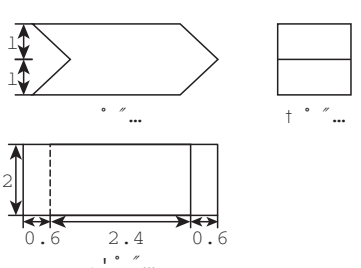


图　8-29

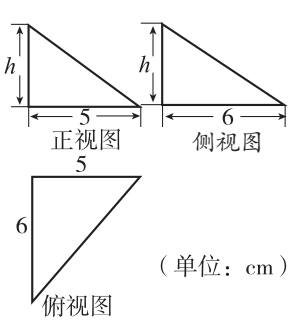


图　8-30

心得体会

【例 8.12】 (2010·湖南理,13)如图 8-30 所示,3 个直角三角形是一个体积为 20cm³ 的几何体的三视图,则$h=$_____cm.

【分析】 由三视图均为三角形,可知该几何体为三棱锥.

【解析】 先看俯视图知底面为直角三角形,再结合正视图和侧视图均为直角三角形,知其中一条侧棱垂直于底面,如图8-31所示,再根据口诀知数据,所以体积 $20=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times5\times6\right)\times h$,即 $h=4$cm.

【变式 1】 (2011·北京理,7)某四面体的三视图如图 8-32 所示,该四面体四个面的面积中最大的是(　　).

A. 8　　B. $6\sqrt{2}$　　C. 10　　D. $8\sqrt{2}$

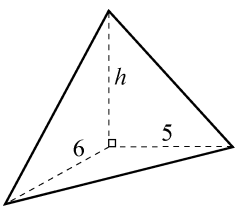


图 8-31

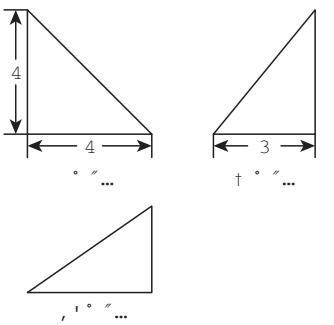


图 8-32

【变式 2】 (2009·海南、宁夏理,11)一个棱锥的三视图如图8-33所示,则该棱锥的全面积为(　　)cm².

A. $48+12\sqrt{2}$　　B. $48+24\sqrt{2}$　　C. $36+12\sqrt{2}$　　D. $36+24\sqrt{2}$

【变式 3】 (2010·三明市三校联考)已知某几何体的三视图如图 8-34 所示,则该几何体的体积为_____.

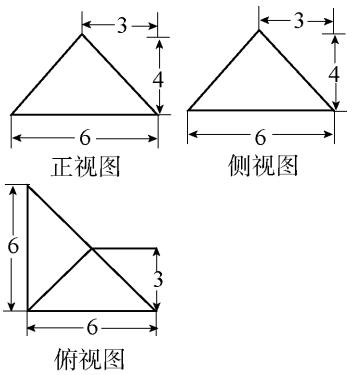


图 8-33

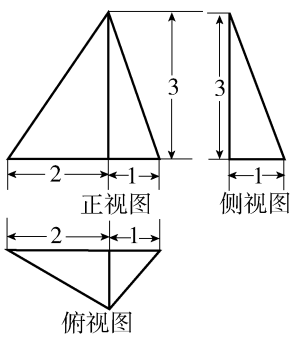


图 8-34

【变式 4】 (2009·辽宁理,15)设某几何体的三视图及其尺寸如图 8-35 所示(单位:m),则该几何体的体积为_____m³.

【例 8.13】 (2009·广州一模)一个几何体的三视图及其尺寸(单位:cm)如图 8-36 所示,则该几何体的侧面积为_____cm².

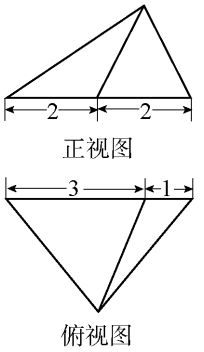


图　8-35

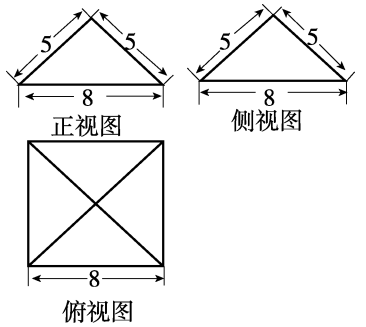


图　8-36

【分析】　由三视图是 2 个三角形和 1 个矩形，可知该几何体是正四棱锥.

【解析】　先看俯视图定底面——正四棱锥的底面，再结合正视图和俯视图，将中心 O“拔地而起”得直观图，如图 8-37 所示，再由“口诀”知数据，且可知斜高 $h'=5$，所以几何体的侧面积 $S_{侧}=4\times\frac{1}{2}\times8\times5=80(\text{cm}^2)$.

【变式 1】　(2011・北京文，5)某四棱锥的三视图如图 8-38 所示，该四棱锥的表面积是(　　).

A. 32　　B. $16+16\sqrt{2}$　　C. 48　　D. $16+32\sqrt{2}$

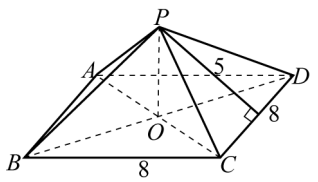


图　8-37

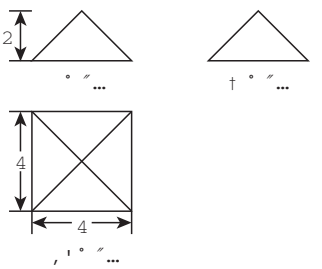


图　8-38

【变式 2】　(2007・海南、宁夏理，8)已知某个几何体的三视图如图 8-39 所示，根据图中标出的尺寸(单位：cm)，可得该几何体的体积为(　　).

A. $\frac{4000}{3}\text{cm}^3$　　B. $\frac{8000}{3}\text{cm}^3$　　C. 2000cm^3　　D. 4000cm^3

【变式 3】　(2009・珠海二模)一个五面体的三视图，其正视图与侧视图是等腰直角三角形，俯视图为直角梯形，部分边长如图 8-40 所示，则此五面体的体积为_____.

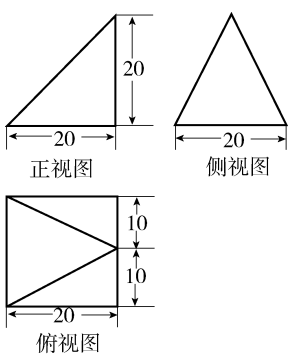


图　8-39

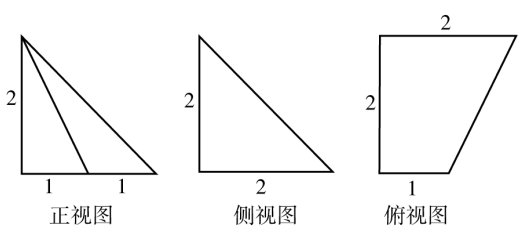


图　8-40

心得体会

【变式 4】 (2009·泰安一模)一个几何体的三视图如图 8-41 所示,则该几何体的体积为(　　).

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

【变式 5】 (2010·辽宁理,15)如图 8-42 所示,网格纸的小正方形的边长是 1,在其上用粗线画出了某多面体的三视图,则该多面体最长的一条棱的长为_____.

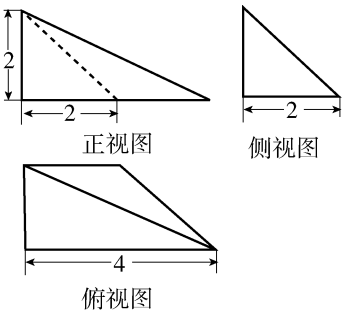


图 8-41

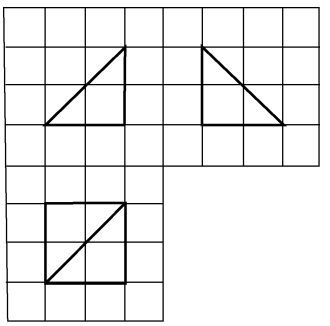


图 8-42

【变式 6】 (2008·海南、宁夏理,12)某几何体的一条棱长为$\sqrt{7}$,在该几何体的正视图中,该棱的投影是长为$\sqrt{6}$的线段,在该几何体的侧视图与俯视图中,该棱的投影分别是长为 a 和 b 的线段,则 $a+b$ 的最大值为(　　).

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{5}$

【变式 7】 (2009·枣庄二模)一个几何体的三视图如图 8-43 所示,则该几何体的体积可能为(　　).

A. $\frac{1}{6}a^3$　　B. $\frac{1}{2}a^3$

C. $\frac{1}{3}a^3$　　D. $\frac{5}{6}a^3$

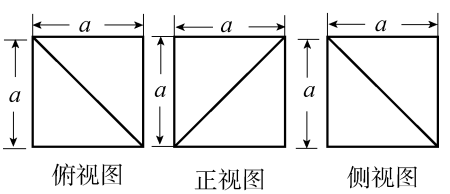


图 8-43

【例 8.14】 (哈师大附中、东北师大附中、辽宁省实验中学)一个几何体的三视图如图8-44所示,其中,正视图中大三角形是边长为 2 的正三角形,俯视图为正六边形,那么该几何体的体积为_____.

【分析】 由三视图是 1 个正六边形(含对角线)及 2 个三角形,可知该几何体是正六棱锥.

【解析】 先看俯视图定底面——正六棱锥的底面,再结合正视图和俯视图知几何体如图 8-45所示,并由口诀知数据,所以体积 $V=\frac{1}{3}\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$.

图 8-44

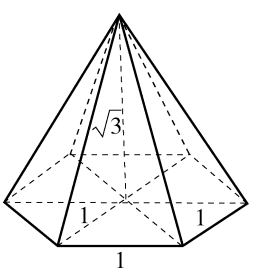


图 8-45

心得体会

题型 111　三视图⇒直观图——简单组合体的基本量的计算

【例 8.15】（2008・山东理，6）如图 8-46 所示是一个几何体的三视图，根据图中数据，可得该几何体的表面积是(　　).

A. 9π　　B. 10π　　C. 11π　　D. 12π

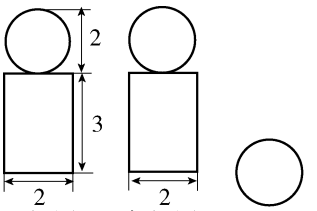


图　8-46

【分析】 先看俯视图定底面.

【解析】 先看俯视图为圆，再结合正视图和侧视图有上、下两部分，可知该几何体下面是圆柱，上面是球，如图 8-47 所示，所以 $S_{表}=4\pi R^2+2\pi R^2+2\pi Rh=4\pi\times\left(\frac{2}{2}\right)^2+2\times\pi\left(\frac{2}{2}\right)^2+2\pi\times\frac{2}{2}\times3=4\pi+2\pi+6\pi=12\pi$. 故选 D.

【变式 1】（2011・天津理，10）一个几何体的三视图如图 8-48 所示(单位：m)，则该几何体的体积为_____m^3.

【变式 2】（2009・山东理，4）一空间几何体的三视图如图 8-49 所示，则该几何体的体积为(　　).

A. $2\pi+2\sqrt{3}$　　B. $4\pi+2\sqrt{3}$　　C. $2\pi+\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $4\pi+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

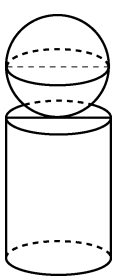


图　8-47

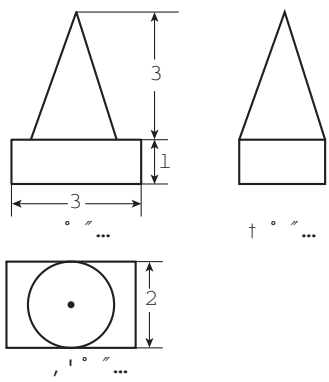


图　8-48

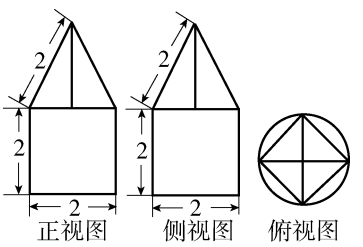


图　8-49

【变式 3】（2011・陕西理，5）某几何体的三视图如图 8-50 所示，则它的体积是(　　).

A. $8-\frac{2\pi}{3}$　　B. $8-\frac{\pi}{3}$

C. $8-2\pi$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

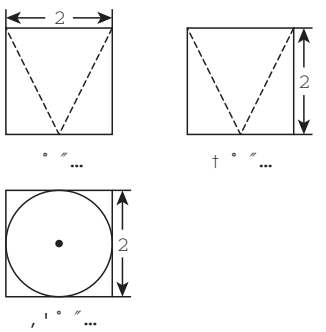


图　8-50

【变式 4】（2010・天津理，12）一个几何体的三视图如图 8-51所示，则该几何体的体积为_____.

【变式 5】（2009・厦门大同中学）如果一个几何体的三视图如图 8-52 所示（单位：cm），则此几何体的表面积是(　　).

A. $(20+4\sqrt{2})\text{cm}^2$　　B. 21cm^2

心得体会

C. $(24+4\sqrt{2})\text{cm}^2$　　D. 24cm^2

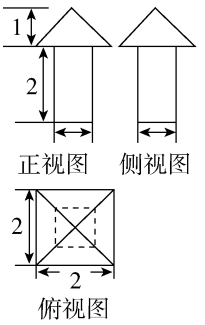


图　8-51

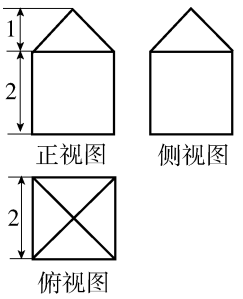


图　8-52

【例 8.16】 (2010·浙江理,12)若某几何体的三视图(单位:cm)如图 8-53 所示,则此几何体的体积是_____cm^3.

【分析】 先看俯视图定底面——正四棱台的底面.再看正视图和侧视图,上面是矩形,下面是等腰梯形,属组合体.

【解析】 先看俯视图定底面——正四棱台的底面,再由正视图和俯视图知该几何体上半部分是正四棱柱,下半部分是正四棱台,如图 8-54 所示,再结合"正侧一样高,正俯一样长,俯侧一样宽"知数据,如图中所示,所以几何体的体积为 $V=4^2\times 2+\frac{1}{3}\times(4^2+4\times 8+8^2)\times 3=32+112=144\text{cm}^3$.

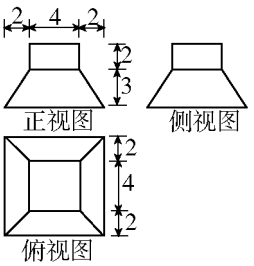


图　8-53

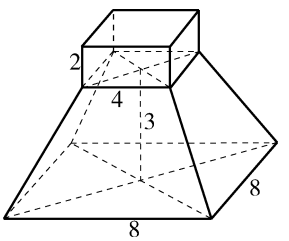


图　8-54

【变式 1】 (2010·安徽理,8)一个几何体的三视图如图 8-55 所示,则该几何体的表面积是(　　).

A. 280　　B. 292　　C. 360　　D. 372

【变式 2】 (2009·浙江理,12)若某几何体的三视图(单位:cm)如图 8-56 所示,则此几何体的体积是_____cm^3.

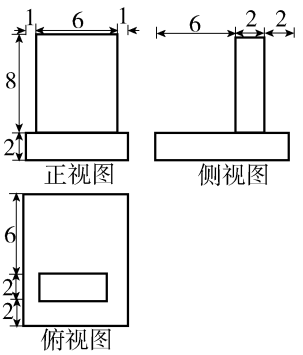


图　8-55

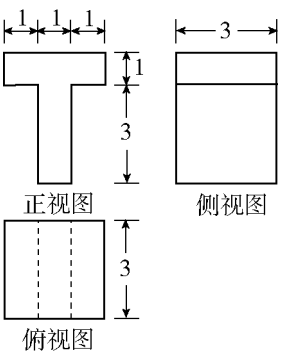


图　8-56

心得体会

【例 8.17】 (2009·台州二模)如图 8-57 所示,一个空间几何体的正视图和侧视图都是面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,一个内角为 60°的菱形,俯视图为正方形,那么该几何体的表面积为(　　).

A. $2\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. 4　　D. 8

【分析】 先看俯视图定底面,再结合正视图和俯视图知该几何体为组合体.

【解析】 先看俯视图为正四棱锥的底面,再结合正视图和俯视图(上、下均为正三角形),可知该几何体上半部分是正四棱锥,下半部分是倒放的正四棱锥,如图 8-58 所示,因为正视图和侧视图都是面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,且一个内角为 60°的菱形,所以该菱形边长为 1,从而正四棱锥侧面的高为 1,正方形边长也为 1,所以几何体的表面积 $S_{表}=8\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\right)=4$. 故选 C.

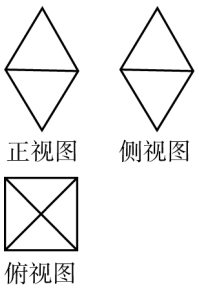


图　8-57

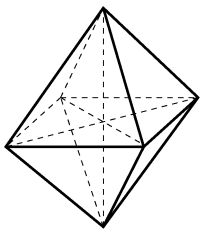
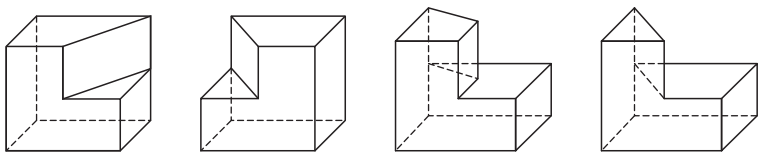


图　8-58

【变式 1】 (2009·临沂一模)一个几何体的三视图及长度数据如图 8-59 所示,则该几何体的表面积与体积分别为(　　).

A. $7+\sqrt{2}$,3　　B. $8+\sqrt{2}$,3　　C. $7+\sqrt{2}$,$\frac{3}{2}$　　D. $8+\sqrt{2}$,$\frac{3}{2}$

【变式 2】 (2011·浙江理,3)若某几何体的三视图如图 8-60 所示,则这个几何体的直观图可以是(　　).



A.　　B.　　C.　　D.

【例 8.18】 (2009·青岛二模)如图 8-61 所示为由长方体木块堆成的几何体的三视图,则组成此几何体的长方体木块的块数为(　　).

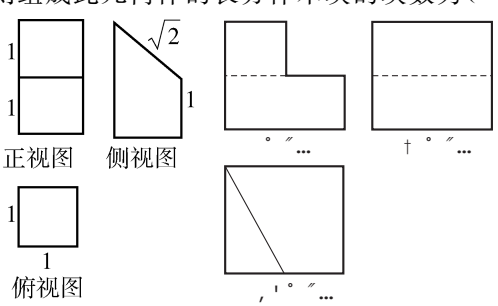


图　8-59

图　8-60

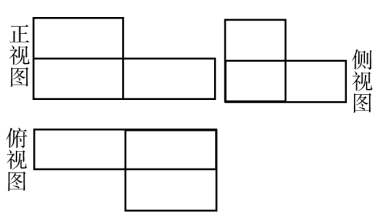


图　8-61

心得体会

A. 3 块　　B. 4 块　　C. 5 块　　D. 6 块

【分析】 先看俯视图，从下往上“拔地而起”.

【解析】 先看俯视图定底面，再结合正视图和侧视图，从下往上堆积可知其直观图，如图 8-62所示. 故选 B.

【变式 1】 (2009 · 湛江一模)用单位立方块搭一个几何体，使其主视图和俯视图如图 8-63 所示，则该几何体体积的最小值与最大值分别为(　　).

A. 9 与 13　　B. 7 与 10　　C. 10 与 16　　D. 10 与 15

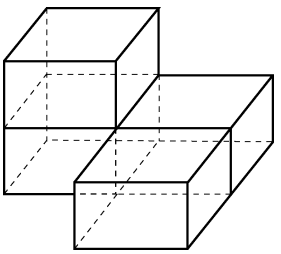


图　8-62

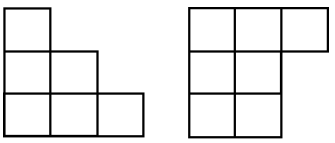


图　8-63

题型 112　部分三视图⇒其余三视图

【例 8.19】 (2010 · 北京理，3)一个长方体去掉一个小长方体，所得几何体的正视图与侧视图如图 8-64 所示，则该几何体的俯视图为(　　).

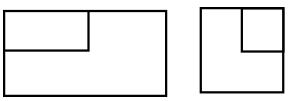
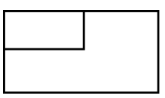
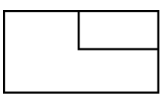
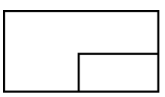
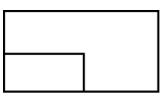


图　8-64

A. 

B. 

C. 

D. 

【解析】 因为该几何体是一个大长方体去掉一个小长方体，结合正视图中线段均为实线，所以“缺口”就在前面的左上方，所以俯视图“缺口”必在靠近眼前的左边且为实线. 故选 D.

【变式 1】 (2009 · 福建文，5)如图 8-65 所示，某几何体的正视图与侧视图都是边长为 1 的正方形，且体积为 $\frac{1}{2}$，则该几何体的俯视图可以是(　　).

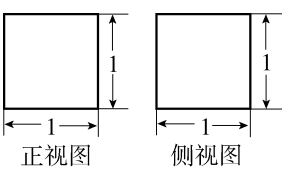
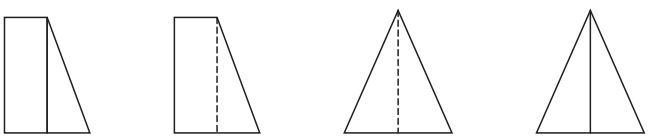


图　8-65

A.　　B.　　C.　　D.

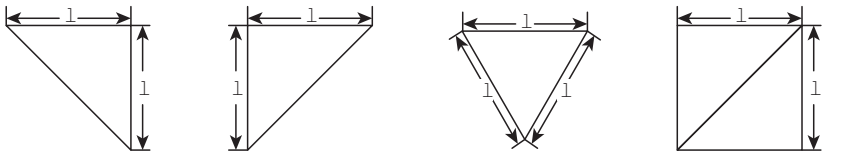
【变式 2】 (2011 · 课标全国理，6)在一个几何体的三视图中，正视图和俯视图如图 8-66 所示，则相应的侧视图可以为(　　).



A.　　B.　　C.　　D.

心得体会

【变式 3】（2011·海淀二模理，6）一个锥体的正视图和侧视图如图 8-67 所示，下面选项中，不可能是该锥体的俯视图的是（　　）.



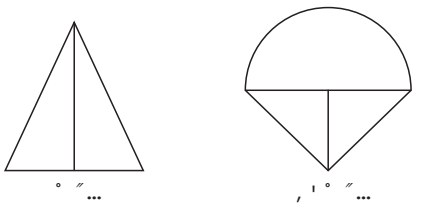


图　8-66

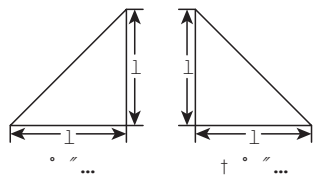


图　8-67

第三节　空间点、直线、平面之间的关系

考纲解读

理解空间直线、平面位置关系的定义，并了解如下可以作为推理依据的公理和定理.

公理 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有点在此平面内.

公理 2：过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面.

公理 3：如果两个不重合的平面有一公共点，那么它们有且只有一条过该点的直线.

公理 4：平行于同一条直线的两条直线平行.

定理：空间中如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补.

命题趋势探究

(1)考查内容.

①近年来，高考命题呈现出由考查知识向考查能力方向转变的趋势，题目新颖，灵活性强. 立体几何试题经常以简单几何体为载体，考查线面位置关系，以中档难度题为主.

②平面的基本性质、公理、公理的推论及直线与平面的位置关系，都是每年必考的知识点，试题难度不大，多为选择题和填空题.

③考查平面与平面平行的判定和性质，通常是以棱柱、棱锥为背景设计命题，考查的方向是直线与平面、平面与平面的位置关系，并结合平面几何有关知识进行考查.

④垂直是直线与直线、直线与平面、平面与平面位置关系中的纽带，常常起到承上启下的作用，或称“二传手”，不少问题常以垂直为解题的突破口，然后深入，主要考查渗透转化思想.

心得体会

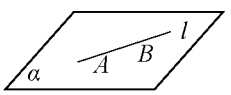
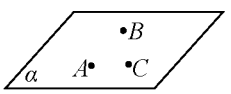
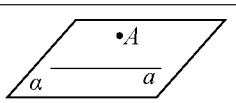
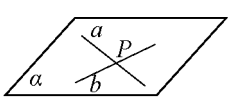
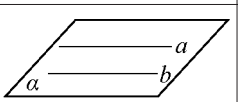
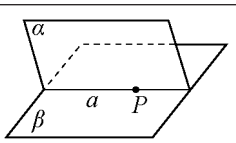
(2)本专题知识的考查多为识记、理解内容,如果掌握了方法,题目一般不是太难,每年高考分值约 5 分.

知识点精讲

一、平面的基本性质

平面的基本性质如表 8-2 所示.

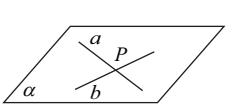
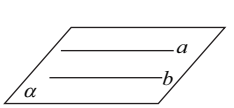
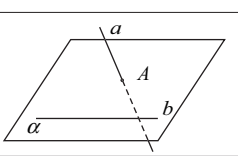
表 8-2

名称		图形	文字语言	符号语言
公理 1			如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在此平面内	$A\in l$, $B\in l$, $A\in\alpha$, $B\in\alpha$ $\Rightarrow l\subset\alpha$
公理 2			过不在同一直线上的三点有且只有一个平面	A,B,C 不共线$\Rightarrow A,B,C\in\alpha$ 且 α 是唯一确定的
公理 2 的推论	推论 1		经过一条直线和该直线外一点有且只有一个平面	若点 $A\notin a$,则 A 和 a 确定一个平面 α
	推论 2		两条相交直线确定一个平面	$a\cap b=P\Rightarrow$有且只有一个平面 α,使 $a\subset\alpha,b\subset\alpha$
	推论 3		两条平行直线确定一个平面	$a\parallel b\Rightarrow$有且只有一个平面 α,使 $a\subset\alpha,b\subset\alpha$
公理 3			如果两个不重合的平面有一个公共点,那么它们有且只有一条过该点的公共直线	若 $P\in\alpha$,且 $P\in\beta$,则 $\alpha\cap\beta=a$ 且 $P\in a$

二、空间直线与直线的位置关系

1. 位置关系如表 8-3 所示.

表 8-3

位置关系	相交(共面)	平行(共面)	异面
图形			

续表

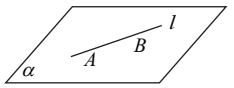
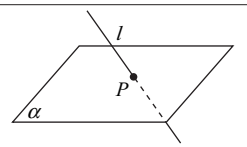
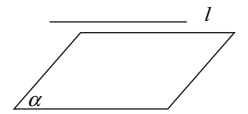
位置关系	相交(共面)	平行(共面)	异面
符号	$a\cap b=P$	$a/\!/b$	$a\cap\alpha=A,b\subset\alpha,A\notin b$
公共点个数	1	0	0
特征	两条相交直线确定一个平面	两条平行直线确定一个平面	两条异面直线不同在任何一个平面内

2. 公理 4(平行公理):平行于同一直线的两条直线互相平行.

3. 公理:空间中若两个角的两边分别对应平行,则这两个角相等(同向)或互补(反向).

三、空间中的直线与平面的位置关系如表 8-4 所示.

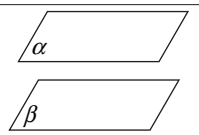
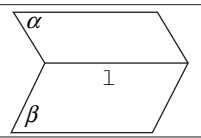
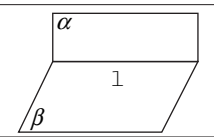
表　8-4

位置关系	包含(面内线)	相交(面外线)	平行(面外线)
图形			
符号	$l\subset\alpha$	$l\cap\alpha=P$	$l/\!/\alpha$
公共点个数	无数个	1	0

注:直线在平面外有两种情形:①相交;②平行,此乃易错点.不可忽视.

四、空间中的平面与平面的位置关系如表 8-5 所示.

表　8-5

位置关系	平行	相交(但不垂直)	垂直
图形			
符号	$\alpha/\!/\beta$	$\alpha\cap\beta=l$	$\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=l$
公共点个数	0	无数个公共点且都在唯一的一条直线上	无数个公共点且都在唯一的一条直线上

注:垂直是相交(成 90°)的特殊情形,异面直线经平移后相交成 90°也叫垂直.

题型归纳及思路提示

题型 113　证明"线共面"、"点共面"或"点共线"

思路提示:要证明"线共面"可先由部分直线或点确定一个平面,再证其余直线或点也在该平面内(即纳入法);证明"点共线"可将线看作两个平面的交线,只要证明这些点都是这两个平面的公共点,根据公理 3 可知这些点在交线上,因此共线.

心得体会

心得体会

【例 8.20】 (2008·四川理,19)如图 8-68 所示,平面 $ABEF\perp$平面 $ABCD$,四边形 $ABEF$ 与 $ABCD$ 都是直角梯形,$\angle BAD=\angle FAB=90^\circ$,$BC\parallel\frac{1}{2}AD$,$BE\parallel\frac{1}{2}AF$.

求证:C,D,F,E 四点共面.

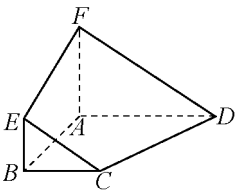


图 8-68

【解析】 如图 8-69 所示,延长 DC 交 AB 的延长线于点 G,

由 $BC\parallel\frac{1}{2}AD$,得$\frac{GB}{GA}=\frac{GC}{GD}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$,

延长 FE 交 AB 的延长线于 G',同理可得

$\frac{G'E}{G'F}=\frac{G'B}{G'A}=\frac{BE}{AF}=\frac{1}{2}$,故$\frac{G'B}{G'A}=\frac{GB}{GA}$,

即 G' 与 G 重合.因此,直线 CD 和 EF 相交于点 G,

即 C,D,F,E 四点共面.

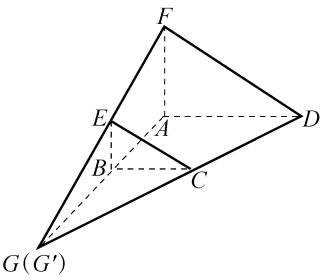


图 8-69

【变式 1】 (2007·江苏理,18)如图 8-70 所示,已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体,点 F 在 CC_1 上,且 $AE=FC_1$,

求证:E、B、F、D_1 四点共面.

【变式 2】 (2008·陕西八校)如图 8-71 所示,长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=AA_1$,$BC=\sqrt{2}AB$,M 是 AD 的中点,N 是 B_1C_1 的中点.求证:A_1,M,C,N 四点共面.

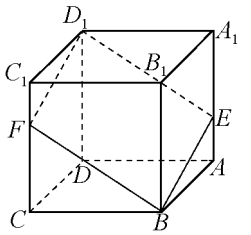


图 8-70

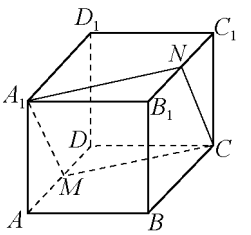


图 8-71

【变式 3】 (2007·安徽理,17)如图 8-72 所示,在六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,上、下底面均为正方形,$DD_1\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$,$DD_1\perp$平面 $ABCD$.

求证:A_1C_1 与 AC 共面,B_1D_1 与 BD 共面.

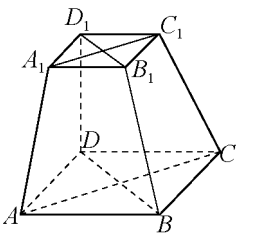


图 8-72

【例 8.21】 如图 8-73 所示,空间四边形 $ABCD$ 中,E,F,G 分别在 AB,BC,CD 上,且满足 $AE:EB=CF:FB=2:1$,$CG:GD=3:1$,过 E,F,G 的平面交 AD 于 H,连接 EH,HG.(1)求 $AH:HD$;

(2)求证:EH,FG,BD 三线共点.

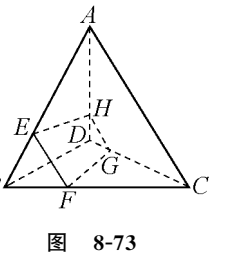


图 8-73

【解析】 (1)因为$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FB}=2$,所以 $EF\parallel AC$,又 $EF\not\subset$平面 ACD,所以 $EF\parallel$平面 ACD,而 $EF\subset$平面 $EFGH$,且平面 $EFGH\cap$平面 $ACD=GH$,所以 $EF\parallel GH$,而 $EF\parallel AC$,所以 $AC\parallel HG$,所以$\frac{AH}{HD}=\frac{CG}{GD}=3$,即 $AH:HD=3:1$.

心得体会

(2)证明:因为 $EF/\!/GH$,且$\frac{EF}{AC}=\frac{1}{3}$,$\frac{GH}{AC}=\frac{1}{4}$,所以 $EF\neq GH$,

所以四边形 $EFGH$ 为梯形.令 $EH\cap FG=P$,则 $P\in EH$,$P\in FG$

而 $EH\subset$平面 ABD,$FG\subset$平面 BCD,平面 $ABD\cap$平面 $BCD=BD$,所以 $P\in BD$,故 EH,FG,BD 三线共点.

【评注】 所谓"线共点"问题就是证明三条或三条以上直线交于一点,证明三线共点的思路为:先证明两条直线交于一点,再证明第三条直线经过该点,把问题转化为证明点在直线上的问题.实际上,点共线、线共点的问题都可以转化为点在直线上的问题.

【变式 1】 如图 8-74 所示,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别是 AB,AA_1 的中点.求证:(1)E,C,D_1,F 四点共面;

(2)CE、D_1F、DA 三线共点.

【变式 2】 (2010·江苏南京)如图 8-75 所示,点 E,F,G,H 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB,BC,CC_1,C_1D_1 的中点,证明:FE,HG,DC 三线共点.

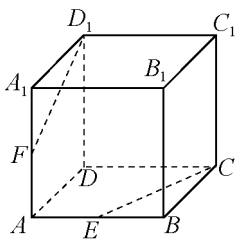


图　8-74

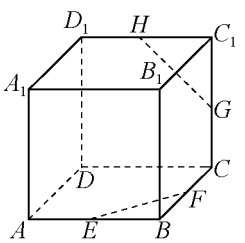


图　8-75

题型 114　异面直线的判定

思路提示:判定空间两条直线是异面直线的方法如下.

(1)判定定理:平面外一点 A 与平面内一点 B 的连线和平面内不经过该点的直线是异面直线.

(2)反证法:证明两线不可能平行、相交或共面,从而得到两线异面.

【例 8.22】 (2008·江苏宜兴)一条直线与两条异面直线中的一条平行,则它和另一条的位置关系是(　　).

A. 平行或异面　B. 相交或异面　C. 异面　D. 相交

【解析】 假设 a 与 b 是异面直线,而 $c/\!/a$,则 c 显然与 b 不平行(否则 $c/\!/b$,则有 $a/\!/b$,矛盾).因此 c 与 b 可能相交或异面.故选 B.

【变式 1】 (2010·北京西城一模,8)如图 8-76 所示,平面 $\alpha\perp$平面 β,$\alpha\cap\beta=l$,A 和 C 是 α 内不同的两点,B 和 D 是 β 内不同的两点,且 A,B,C,$D\notin$直线 l.M,N 分别是线段 AB 和 CD 的中点,下列判断正确的是(　　).

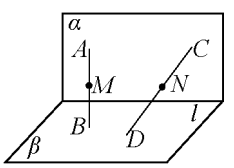


图　8-76

A. 当 $|CD|=2|AB|$ 时,M 和 N 两点不可能重合

B. M 和 N 两点可能重合,但此时直线 AC 与 l 不可能相交

C. 当 AB 与 CD 相交,直线 AC 平行于 l 时,直线 BD 可以与 l 相交

D. 当 AB 和 CD 是异面直线时,直线 MN 可能与 l 平行

心得体会

【变式 2】 (2010·浙江杭州)已知 a,b 为不垂直的异面直线,α 是一个平面,则 a,b 在 α 上的射影可能是:①两条平行直线;②两条互相垂直的直线;③同一条直线;④一条直线及其外一点.则在上面的结论中,正确的结论的编号是_____(写出所有正确的编号).

【变式 3】 (2007·浙江理,6)若 P 是两条异面直线 l 和 m 外的任意一点,则(　　).

A. 过点 P 有且仅有一条直线与 l,m 都平行

B. 过点 P 有且仅有一条直线与 l,m 都垂直

C. 过点 P 有且仅有一条直线与 l,m 都相交

D. 过点 P 有且仅有一条直线与 l,m 都异面

【变式 4】 (2011·浙江文,4)若直线 l 不平行于平面 α,且 $l\not\subset\alpha$,则(　　).

A. α 内的所有直线与 l 异面　　B. α 内不存在与 l 平行的直线

C. α 内存在唯一的直线与 l 平行　　D. α 内的直线与 l 都相交

【例 8.23】 (2009·辽宁理,18(1))如图 8-77 所示,已知两个正方形 $ABCD$ 和 $DCEF$ 不在同一平面内,M 和 N 分别为 AB 和 DF 的中点.用反证法证明:直线 ME 与 BN 是两条异面直线.

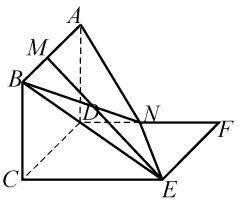


图　8-77

【解析】 假设直线 ME 与 BN 共面,连接 AN,NE,EB.则 $AB\subset$平面 $MBEN$,且平面 $MBEN$ 与平面 $DCEF$ 交于 EN.

由已知,两正方形 $ABCD$ 和 $DCEF$ 不在同一平面,

故 $AB\not\subset$平面 $DCEF$,又 $AB/\!/CD$,所以 $AB/\!/$平面 $DCEF$,

又平面 $MBEN\cap$平面 $DCEF=EN$,所以 $AB/\!/EN$.

又 $AB/\!/CD/\!/EF$,所以 $EF/\!/EN$,这与 $EN\cap EF=E$ 矛盾,

故假设不成立,所以直线 ME 与 BN 不共面,则直线 ME 与 BN 异面.

【例 8.24】 (2010·全国Ⅱ理,19)如图 8-78 所示,直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AC=BC,AA_1=AB,D$ 为 BB_1 的中点,E 为 AB_1 上的一点,$AE=3EB_1$.

求证:DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线.

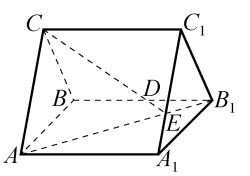


图　8-78

【分析】 证明 DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线,即证明 $DE\perp AB_1$,且 $DE\perp CD$.

【解析】 如图 8-79 所示,连接 A_1B 交 AB_1 于点 O,取 AB 的中点 F,连接 CF,DF,因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱,

所以 $AA_1\perp$底面 ABC,故四边形 AA_1B_1B 为矩形,

又 $AA_1=AB$,则四边形 AA_1B_1B 为正方形,

故 $A_1B\perp AB_1$.由 $AE=3EB_1$,得 $OE=EB_1$,

即点 E 为 OB_1 的中点,点 D 为 BB_1 的中点,

故 $DE/\!/A_1B$,所以 $DE\perp AB_1$.

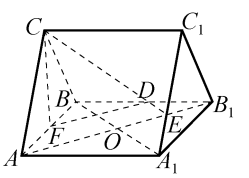


图　8-79

由 $AC=BC$,点 F 为 AB 的中点,得 $CF\perp AB$

又平面 $ABC\perp$侧面 AA_1B_1B　　$\Rightarrow CF\perp$平面 AA_1B_1B,

平面 $ABC\cap$侧面 $AA_1B_1B=AB$

所以 $CF\perp A_1B$，

$$\left.\begin{array}{l}A_1B\perp AB_1\\AB_1\parallel DF\end{array}\right\}\Rightarrow A_1B\perp DF\quad\left.\begin{array}{l}\\CF\cap DF=F\end{array}\right\}\Rightarrow A_1B\perp\text{平面 }CDF\Rightarrow\left.\begin{array}{l}A_1B\perp CD\\A_1B\parallel DE\end{array}\right\}\Rightarrow CD\perp DE.$$

故 DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线.

【变式 1】 (2010·四川理,18)如图 8-80 所示,已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$,点 M 是棱 AA'的中点,点 O 是对角线 BD'的中点.

求证:OM 为异面直线 AA'和 BD'的公垂线.

【变式 2】 (2006·全国Ⅱ理,20)如图 8-81 所示,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=BC$,D 和 E 分别为 BB_1 和 AC_1 的中点.求证:ED 为异面直线 BB_1 与 AC_1 的公垂线.

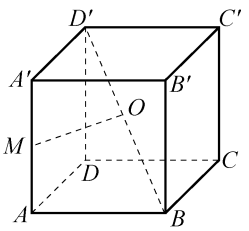


图　8-80

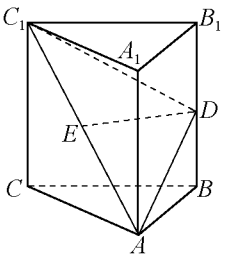


图　8-81

第四节　直线、平面平行的判定与性质

考纲解读

1. 理解空间直线和平面位置关系的定义.

2. 以立体几何的定义、公理和定理为出发点,认识和理解空间中线面平行的有关性质与判定.理解以下判定定理:

如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行,那么该直线与此平面平行.

如果一个平面的两条相交直线与另一个平面都平行,那么两个平面平行.

理解以下性质定理,并能够证明:

如果一条直线与一个平面平行,那么经过该直线的任一平面与此平面的交线和该直线平行.

如果两个平行平面同时和第三个平面相交,那么它们的交线相互平行.

命题趋势探究

有关平行的问题是高考的必考内容,主要分为两大类:一类是空间线面关系的判定和推理;一类是几何量的计算.主要考查学生的空间想象能力、思维能力和解决问题的能力.

心得体会

平行关系是立体几何中的一种重要位置关系，在高考中，选择题、填空题几乎每年都考，难度一般不超过解答题，且常常以棱柱、棱锥为背景.

(1)高考始终把直线与平面、平面与平面平行的判定与性质作为考查的重点，通常以棱柱、棱锥为背景设计命题. 考查的方向是直线与平面、平面与平面的位置关系，结合平面几何有关知识考查.

(2)以棱柱、棱锥为依托考查两平行平面间的距离，可转化为点面距离、线面距离和两异面直线间的距离问题，通常是算、证结合，考查学生的渗透转化思想.

预测 2012 年高考对直线、平面平行的判定与性质的考查集中在两个方面：客观题中，结合线面垂直考查平行、垂直的判定，主要针对判定定理的条件是否充分、平行条件是否可以推广到空间中来进行考查；解答题中，考查在特定的几何体中证明线面、面面平行.

知识点精讲

一、直线与平面的位置关系

直线与平面的位置关系如表 8-6 所示.

表 8-6

位置关系		公共点个数
直线在平面内		直线上有两个点在平面内，则所有点都在平面内
直线在平面外	直线和平面相交	直线与平面有且仅有一个交点
	直线和平面平行	直线与平面没有公共点

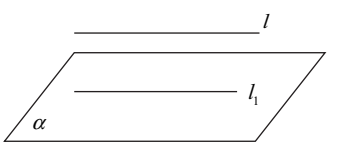
二、直线和平面平行

1. 定义

直线与平面没有公共点，则称此直线 l 与平面 α 平行，记作 $l\parallel\alpha$.

2. 判定定理(文字语言，图形语言，符号语言)如表 8-7 所示.

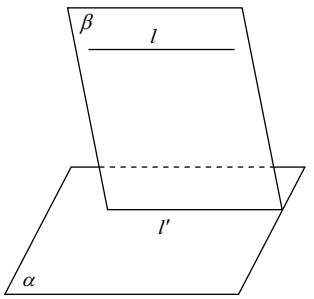
表 8-7

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行(简记为“线线平行⇒线面平行”).		$\left.\begin{array}{l} l\parallel l_1 \\ l_1\subset\alpha \\ l\not\subset\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow l\parallel\alpha$

3. 性质定理(文字语言，图形语言，符号语言)如表 8-8 所示.

心得体会

表　8-8

	文字语言	图形语言	符号语言
性质定理	如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行		$\left.\begin{array}{l} l/\!/\alpha \\ l\subset\beta \\ \alpha\cap\beta=l' \end{array}\right\}\Rightarrow l/\!/l'$

三、两个平面平行

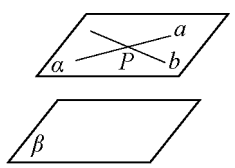
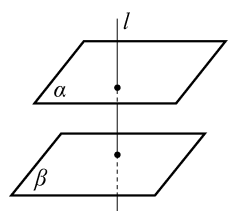
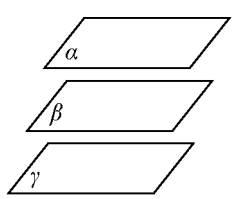
1. 定义

没有公共点的两个平面叫作平行平面，用符号表示为对于平面 α 和 β，若 $\alpha\cap\beta=\varnothing$，则 $\alpha/\!/\beta$.

2. 判定定理（文字语言、图形语言、符号语言）

两平面平行的判定定理如表 8-9 所示.

表　8-9

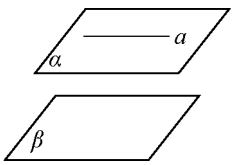
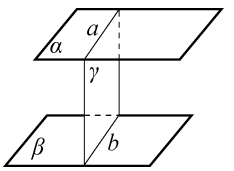
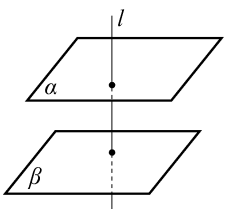
序号	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理 1	如果一个平面内有两条相交的直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行（简记为“线面平行⇒面面平行”）		$a\subset\alpha, b\subset\alpha, a\cap b=P, a/\!/\beta, b/\!/\beta\Rightarrow\alpha/\!/\beta$
判定定理 2	如果两个平面同垂直于一条直线，那么这两个平面平行		$\left.\begin{array}{l} l\perp\alpha \\ l\perp\beta \end{array}\right\}\Rightarrow\alpha/\!/\beta$
判定定理 3	平行于同一个平面的两个平面平行		$\left.\begin{array}{l} \alpha/\!/\beta \\ \beta/\!/\gamma \end{array}\right\}\Rightarrow\alpha/\!/\gamma$

3. 性质定理（文字语言、图形语言、符号语言）

两平面平行的性质定理如表 8-10 所示.

心得体会

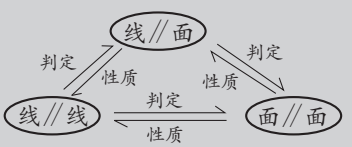
表 8-10

序号	文字语言	图形语言	符号语言
性质定理 1	如果两个平面平行，那么在一个平面内所有直线都平行于另一平面		$\left.\begin{array}{l}\alpha /\!/ \beta \\ a \subset \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow a /\!/ \beta$
性质定理 2	如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行（简记为“面面平行⇒线线平行”）		$\alpha /\!/ \beta$ 且 $\gamma \cap \alpha = a$ 且 $\gamma \cap \beta = b$ $\Rightarrow a /\!/ b$
性质定理 3	如果两个平行平面中有一个垂直于一条直线，那么另一个平面也垂直于这条直线		$\left.\begin{array}{l}\alpha /\!/ \beta \\ l \perp \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow l \perp \beta$

题型归纳及思路提示

题型 115　证明空间中直线、平面的平行关系

思路提示：线线平行、线面平行、面面平行的转换如下图所示.



(1)证明直线与平面平行的常用方法.

①利用定义，证明直线 a 与平面 α 没有公共点，一般结合反证法证明.

②利用线面平行的判定定理，即线线平行⇒线面平行. 辅助线的作法为，平面外直线的端点进平面；同向进面，得平行四边形的对边；不同向进面，延长交于一点得平行于第三边的线段.

③利用面面平行的性质定理，把面面平行转化为线面平行.

(2) 证明面面平行的常用方法.

①利用面面平行的定义，此法一般与反证法结合.

②利用面面平行的判定定理.

③利用两个平面垂直于同一直线.

④证明两个平面同时平行于第三个平面.

【例 8.25】 (2008 · 安徽理，4)已知 m,n 是两条不同直线，α,β,γ 是三个不同平面，下列命题正确是(　　).

心得体会

A. 若 $m\parallel\alpha,n\parallel\alpha$，则 $m\parallel n$　　B. 若 $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$，则 $\alpha\parallel\beta$

C. 若 $m\parallel\alpha,m\parallel\beta$，则 $\alpha\parallel\beta$　　D. 若 $m\perp\alpha,n\perp\alpha$，则 $m\parallel n$

【解析】 举反例排除.

如图 8-82 所示，$m\parallel\alpha,n\parallel\alpha$，但 m 与 n 相交，显然选项 A 不正确；

如图 8-83 所示，$\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma,\alpha\cap\beta=l$，显然选项 B 不正确；

如图 8-84 所示，$m\parallel\alpha,m\parallel\beta$，但 $\alpha\cap\beta=l$，显然选项 C 不正确.

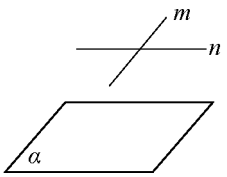


图　8-82

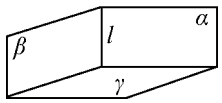


图　8-83

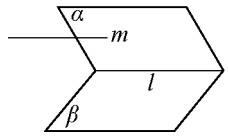


图　8-84

选项 D 是线面垂直的一个性质. 故选 D.

【评注】 此类问题可以特殊化为一个长方体的棱、面等，进而进行判断.

【变式 1】 (2007 · 江苏，4)已知两条直线 m,n，两个平面 α,β. 给出下面四个命题：

①$m\parallel n,m\perp\alpha\Rightarrow n\perp\alpha$；

②$\alpha\parallel\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta\Rightarrow m\parallel n$；

③$m\parallel n,m\parallel\alpha\Rightarrow n\parallel\alpha$；

④$\alpha\parallel\beta,m\parallel n,m\perp\alpha\Rightarrow n\perp\beta$.

其中正确命题的序号是(　　).

A. ①③　　B. ②④　　C. ①④　　D. ②③

【变式 2】 (2006 · 广东理，5)给出以下四个命题：

①如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行；

②如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面；

③如果两条直线都平行于一个平面，那么这两条直线相互平行；

④如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

其中真命题的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【变式 3】 (2010 · 辽宁沈阳)若平面 $\alpha\parallel$ 平面 β，直线 $a\parallel$ 平面 α，点 $B\in\beta$，则在平面 β 内与过点 B 的所有直线中(　　).

A. 不一定存在与 a 平行的直线　　B. 只有两条与 a 平行的直线

C. 存在无数条与 a 平行的直线　　D. 存在唯一与 a 平行的直线

【变式 4】 (2010 · 广东北江)若 a 不平行于平面 α，且 $a\not\subset\alpha$，则下列结论成立的是(　　).

A. α 内的所有直线与 a 异面　　B. α 内与 a 平行的直线不存在

C. α 内存唯一的直线与 a 平行　　D. α 内的直线与 a 都相交

【例 8.26】 如图 8-85 所示，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 是 BC 的中点. 求证：$A_1C\parallel$ 平面 AB_1D.

【分析】 要证明线面平行，可通过线线平行⇒线面平行，关键是在平面内找到一条直线

心得体会

与已知直线平行.

【解析】 如图 8-86 所示,连接 A_1B,设 $A_1B\cap AB_1=E$,连接 DE. 因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 是三棱柱,所以四边形 A_1B_1BA 是平行四边形,故 E 为 A_1B 的中点. 又因为 D 是 BC 的中点,所以 DE 是 $\triangle BA_1C$ 的中位线,所以 $DE\parallel A_1C$. 因为 $DE\subset$ 平面 AB_1D,$A_1C\not\subset$ 平面 AB_1D,所以 $A_1C\parallel$ 平面 AB_1D.

【评注】 本题可以通过不同向进面法,在平面内找到一条直线与已知直线平行,即点 C 沿 CD 方向进入平面 AB_1D 的点 D,延长到点 B,点 A_1 不能沿 CD 方向进入平面,则连接 A_1B 交平面 AB_1D 于点 E,连接 DE,DE 就是平面 AB_1D 内要找的直线,只要证明 $DE\parallel A_1C$ 即可.

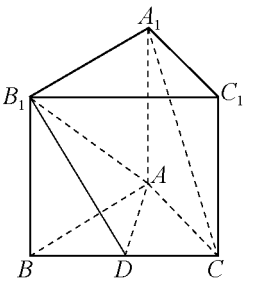


图 8-85

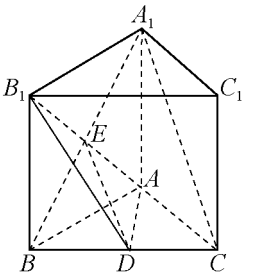


图 8-86

【变式 1】 (2006·北京理,17)如图 8-87 所示,在底面为平行四边形的四棱锥 $P-ABCD$ 中,点 E 是 PD 的中点. 求证:$PB\parallel$ 平面 AEC.

【变式 2】 (2009·浙江理,20)如图 8-88 所示,三棱锥 $P-ABC$ 中,E,F,O 分别为 PA,PB,AC 的中点,G 为 OC 的中点,求证:$FG\parallel$ 平面 BOE.

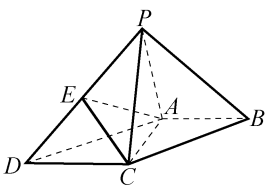


图 8-87

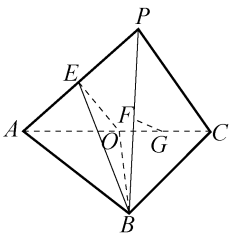


图 8-88

【变式 3】 (2010·北京海淀文,17)如图 8-89 所示,在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,若 M,N 是棱 BC 上的两个三等分点. 求证:$A_1N\parallel$ 平面 AB_1M.

【变式 4】 (2010·辽宁文,19)如图 8-90 所示,三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,设 D 是 A_1C_1 上的点,且 $A_1B\parallel$ 平面 B_1CD,求 $A_1D:DC_1$ 的值.

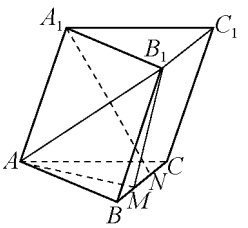


图 8-89

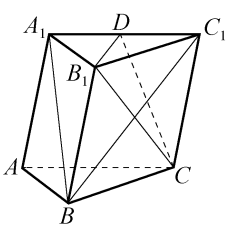


图 8-90

【例 8.27】 如图 8-91 所示,四棱锥 $P-ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,E,F 分别是 AB 和 PD 的中点,求证:$AF\parallel$ 平面 PCE.

心得体会

【解析】 如图 8-92 所示，取 PC 的中点 G，连接 EG，FG，由 F 为 PD 的中点，

得 $FG\parallel\frac{1}{2}CD$. 由已知有 $AE\parallel\frac{1}{2}CD$，所以 $FG\parallel AE$.

故四边形 $AEGF$ 是平行四边形，因此 $AF\parallel EG$，又 $EG\subset$ 平面 PCE，$AF\not\subset$ 平面 PCE，所以 $AF\parallel$ 平面 PCE.

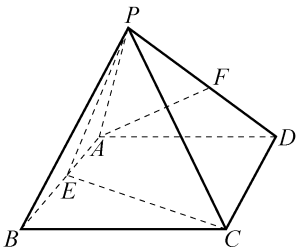


图　8-91

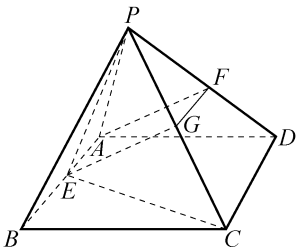


图　8-92

【评注】 通过同向进面法能有效地在平面 PCE 内找到与 AF 平行的直线. 点 A 沿 AE 方向进平面于点 E，点 F 同向沿 AE 进平面于点 G，连接 EG，只要证明 $EG\parallel AF$ 即可.

【变式 1】 (2008・安徽理，18)如图 8-93 所示，在四棱锥 $O-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，M 为 OA 的中点，N 为 BC 的中点. 求证：直线 $MN\parallel$ 平面 OCD.

【变式 2】 (2010・安徽理，18)如图 8-94 所示，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是正方形，$EF\parallel AB$，$AB=2EF$，$BF=FC$，H 为 BC 的中点. 求证：$FH\parallel$ 平面 EDB.

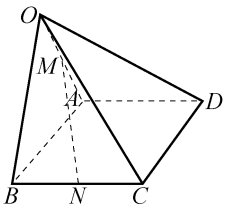


图　8-93

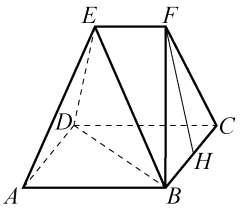


图　8-94

【变式 3】 (2010・北京理，16)如图 8-95 所示，正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直，$EF\parallel AC$，$AB=\sqrt{2}EF$，求证：$AF\parallel$ 平面 BDE.

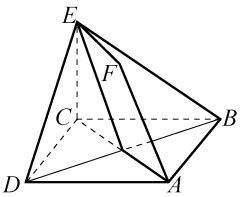


图　8-95

【例 8.28】 (2010・北京海淀一模理，16)如图 8-96 所示，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，O 为 AC 的中点. 在 BC_1 上是否存在一点 E，使得 $OE\parallel$ 平面 A_1ABB_1，若不存在，说明理由；若存在，确定点 E 的位置.

【解析】 如图 8-97 所示，连接 B_1C，设 $B_1C\cap BC_1=E$，连接 OE. 由三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，得四边形 BCC_1B_1 为平行四边形，故 E 为 B_1C 中点，又 O 为 AC 中点，所以 OE 为 $\triangle AB_1C$ 的中位线，所以 $OE\parallel AB_1$. 又 $OE\not\subset$ 平面 A_1ABB_1，$AB_1\subset$ 平面 A_1ABB_1，所以 $OE\parallel$ 平面 A_1ABB_1. 因此当点 E 为 BC_1 的中点时，$OE\parallel$ 平面 A_1ABB_1.

心得体会

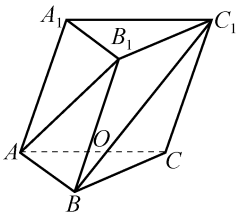


图 8-96

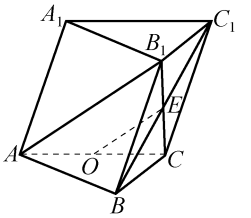


图 8-97

【变式 1】 (2010·北京丰台一模理,16)如图 8-98 所示,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,F 是 PC 的中点,G 为 AC 上一点.试确定点 G 在线段 AC 上的位置,使 $FG\parallel$ 平面 PBD,并说明理由.

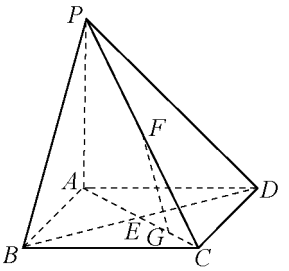


图 8-98

【变式 2】 (2010·西城一模文,17)如图 8-99 所示,在三棱锥 $P-ABC$ 中,$PA\perp$ 平面 ABC,$AC\perp BC$,D 为侧棱 PC 上一点,三棱锥的正视图和侧视图如图 8-100 所示.在$\angle ACB$ 的平分线上确定一点 Q,使 $PQ\parallel$ 平面 ABD,并求此时 PQ 的长.

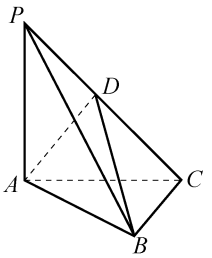


图 8-99

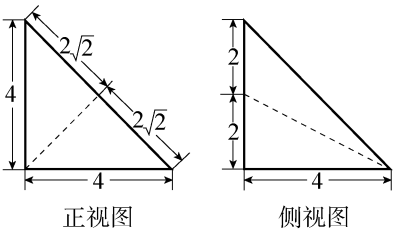


图 8-100

【变式 3】 (2010·湖南理,18)如图 8-101 所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E 是棱 DD_1 的中点,在棱 C_1D_1 上是否存在一点 F,使 $B_1F\parallel$ 平面 A_1BE? 证明你的结论.

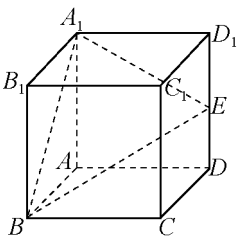


图 8-101

心得体会

第五节　直线、平面垂直的判定与性质

考纲解读

1. 以立体几何中的定义、公理和定理为出发点，认识和理解空间中线面垂直的有关性质和判定定理.

(1)如果一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，那么该直线与此平面垂直.

(2)如果一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面互相垂直.

理解以下性质定理，并能够证明：

(1)垂直于同一个平面的两条直线平行.

(2)如果两个平面垂直，那么一个平面内垂直于它们交线的直线与另一平面垂直.

2. 能运用公理、定理和已获得的结论证明一些关于空间图形位置关系的简单命题.

命题趋势探究

在高考中，对垂直关系的考查一般有两种方式：一是考查垂直关系的有关定义、判定及性质，即通过有关命题的真假判定，直接考查有关的判定和性质定理；二是以空间几何体为载体，证明有关线线、线面、面面的垂直关系.

预测在2012年高考中，对本专题的考查在客观题中以证明线面垂直为重点.

知识点精讲

一、直线与平面垂直

1. 定义

如果一条直线和一个平面相交，并且和这个平面内的任意一条直线都垂直，则称这条直线和这个平面互相垂直.

2. 判定定理

如果一条直线和一个平面内的两条相交直线垂直，那么这条直线垂直于平面，用数学符号表示为：已知 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m\cap n=B$，$l\perp m$，$l\perp n$，则 $l\perp\alpha$.

3. 性质定理

垂直于同一个平面的两条直线平行.

二、斜线在平面内的射影

从斜线上斜足以外的一点向平面引垂线，过垂足与斜足的直线叫作斜线在这个平面

心得体会

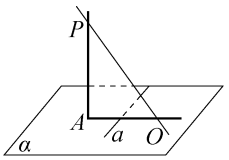
内的射影，垂足与斜足间的线段叫作这点到平面的斜线段在这个平面内的射影.

斜线上任意一点在平面上的射影一定在斜线的射影上.

三、三垂线定理及其逆定理

三重线定理及其逆定理如表 8-11 所示.

表 8-11

图形		三垂线定理	逆定理
	文字语言	平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直	平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它和这条斜线的射影垂直
	符号语言	$PA\perp\alpha$ 于点 A $a\subset\alpha$ $OA\subset\alpha$ $\Rightarrow a\perp PO$ $a\perp OA$	$PA\perp\alpha$ 于点 A $a\subset\alpha$ $OA\subset\alpha$ $\Rightarrow a\perp OA$ $a\perp PO$

题型归纳及思路提示

题型 116　证明空间中直线、平面的垂直关系

思路提示： 线⊥线 $\underset{\text{性质定理}}{\overset{\text{判定定理}}{\rightleftharpoons}}$ 线⊥面 $\underset{\text{性质定理}}{\overset{\text{判定定理}}{\rightleftharpoons}}$ 面⊥面

(1)证明线线垂直的方法.

①三垂线定理及其逆定理.

②线面垂直的性质($a\perp\alpha, b\subset\alpha\Rightarrow a\perp b$).

③平行线垂直直线的传递性($a\parallel b, a\perp c\Rightarrow b\perp c$).

(2)证明线面垂直的方法.

①线面垂直的定义.

②线面垂直的判定($a\perp b, a\perp c, b\subset\alpha, c\subset\alpha, b\cap c=P\Rightarrow a\perp\alpha$).

③面面垂直的性质($\alpha\perp\beta, \alpha\cap\beta=b, a\subset\alpha, a\perp b\Rightarrow a\perp\beta$).

④平行线垂直平面的传递性($a\perp\alpha, b\parallel a\Rightarrow b\perp\alpha$).

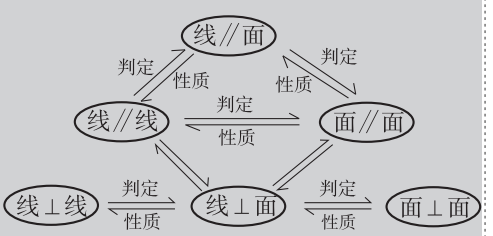
⑤面面垂直的性质($\alpha\perp\gamma, \beta\perp\gamma, \alpha\cap\beta=l\Rightarrow l\perp\gamma$).

(3)证明面面垂直的方法.

①面面垂直的定义.

②面面垂直的判定定理($a\perp\beta$, $a\subset\alpha\Rightarrow\alpha\perp\beta$).

空间中的线面平行、垂直的位置关系结构图如右图所示，由图可知，线面垂直在所有关系中处于核心位置.



心得体会

一、线线垂直

证线线垂直常用的两种方法.

方法一：三垂线定理及其逆定理.

(1)三垂线定理：由平面到空间，如图 8-102 所示.

$$\left.\begin{array}{l} AB\perp\alpha \text{ 于点 } B \\ a\subset\alpha \\ BC\subset\alpha \\ a\perp BC \end{array}\right\}\Rightarrow a\perp AC;$$

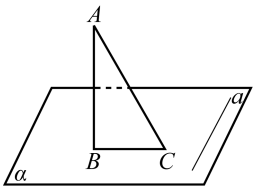


图　8-102

(2)逆定理：由空间到平面

$$\left.\begin{array}{l} AB\perp\alpha \text{ 于点 } B \\ a\subset\alpha \\ BC\subset\alpha \\ a\perp AC \end{array}\right\}\Rightarrow a\perp BC.$$

方法二：线面垂直的性质(线面垂直⇒线线垂直).

【例 8.29】 (2008・天津理，4)设 a,b 是两条直线，α,β 是两个平面，则 $a\perp b$ 的一个充分条件是(　　).

A. $a\perp\alpha,b\parallel\beta,\alpha\perp\beta$　　B. $a\perp\alpha,b\perp\beta,\alpha\parallel\beta$

C. $a\subset\alpha,b\perp\beta,\alpha\parallel\beta$　　D. $a\subset\alpha,b\parallel\beta,\alpha\perp\beta$

【解析】 举反例排除法.

由图 8-103 知，$a\perp\alpha,b\parallel\beta,\alpha\perp\beta\Rightarrow a\parallel b$，选项 A 错；

由图 8-104 知，$a\perp\alpha,b\perp\beta,\alpha\parallel\beta\Rightarrow a\parallel b$，故得不到 $a\perp b$，选项 B 错.

由图 8-105 知，$a\subset\alpha,b\parallel\beta,\alpha\perp\beta\not\Rightarrow a\perp b$，选项 D 错.

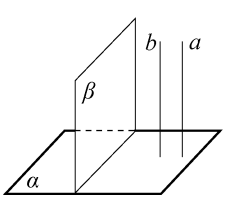


图　8-103

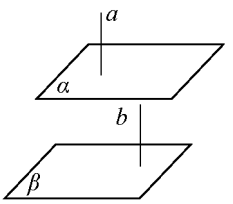


图　8-104

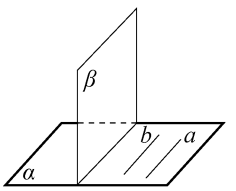


图　8-105

对于选项 C，$\left.\begin{array}{l}\alpha\parallel\beta\\ b\perp\beta\end{array}\right\}\Rightarrow b\perp\alpha$，$\left.\begin{array}{l} b\perp\alpha\\ a\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow b\perp a$. 故选 C.

【变式 1】 (2009・广东惠州)在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，M 是 BC 的中点，G 是 $\triangle PAD$ 的重心，则在平面 PAD 中经过点 G 且与直线 PM 垂直的直线有多少条？

【变式 2】 (2008・山东德州)已知 α,β 是两个不同的平面，m,n 是平面 α 及 β 之外的两条不同直线，给出四个论断：①$m\perp n$；②$\alpha\perp\beta$；③$n\perp\beta$；④$m\perp\alpha$.

以其中三个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出你认为正确的一个命题_____.

心得体会

【变式 3】（2011·四川理，3）l_1，l_2，l_3是空间三条不同的直线，则下列命题正确的是（　　）.

A. $l_1\perp l_2$，$l_2\perp l_3\Rightarrow l_1\parallel l_3$　　B. $l_1\perp l_2$，$l_2\parallel l_3\Rightarrow l_1\perp l_3$

C. $l_1\parallel l_2\parallel l_3\Rightarrow l_1$，$l_2$，$l_3$共面　　D. l_1，l_2，l_3共点$\Rightarrow l_1$，l_2，l_3共面

【例 8.30】（2005·北京理，16）如图 8-106 所示，在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AC\perp BD$，垂足为 E. 求证：$BD\perp A_1C$.

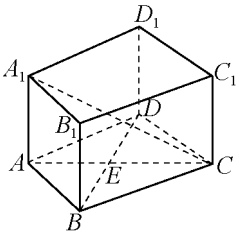


图　8-106

【分析】　直接利用三垂线定理.

【解析】　在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 $AA_1\perp$底面 $ABCD$，所以 AC 是 A_1C 在平面 $ABCD$ 上的射影. 又因为 $BD\perp AC$，$BD\subset$平面 $ABCD$，所以 $BD\perp A_1C$.

【变式 1】（2009·湖北理，18）如图 8-107 所示，四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形，$SD\perp$平面 $ABCD$，点 E 是 SD 上异于 D 点的任意一点. 求证：$AC\perp BE$.

【变式 2】（2008·山东理，20）如图 8-108 所示，已知四棱锥 $P-ABCD$，底面 $ABCD$ 为菱形，$PA\perp$平面 $ABCD$，$\angle ABC=60^\circ$，E 是 BC 的中点. 求证：$AE\perp PD$.

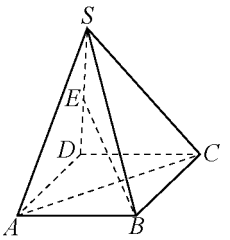


图　8-107

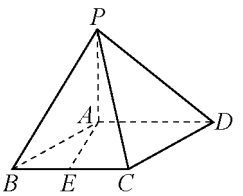


图　8-108

【变式 3】（2008·全国Ⅰ理，18）如图 8-109 所示，四棱锥 $A-BCDE$ 中，底面 $BCDE$ 为矩形，侧面 $ABC\perp$底面 $BCDE$，$BC=2$，$CD=\sqrt{2}$，$AB=AC$. 求证：$AD\perp CE$.

【变式 4】（2010·辽宁理，19）如图 8-110 所示，已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$平面 ABC，$AB\perp AC$，$AC=\frac{1}{2}AB$，N 为 AB 上一点，$AB=4AN$，M，S 分别为 PB 和 BC 的中点. 求证：$CM\perp SN$.

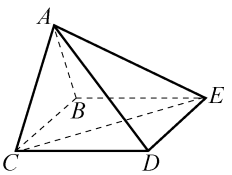


图　8-109

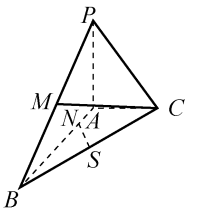


图　8-110

【变式 5】（2010·湖北理，17）如图 8-111 所示，在四面体 $ABOC$ 中，$OC\perp OA$，$OC\perp OB$，$\angle AOB=120^\circ$，且 $OA=OB=OC=1$. 点 P 为 AC 的中点. 求证：在 AB 上存在一点 Q，使 $PQ\perp OA$，并计算$\frac{AB}{AQ}$的值.

【变式 6】（2010·北京理，16）如图 8-112 所示，正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直，$CE\perp AC$，$EF\parallel AC$，$AB=\sqrt{2}CE=\sqrt{2}EF$. 求证：$CF\perp$平面 BDE.

心得体会

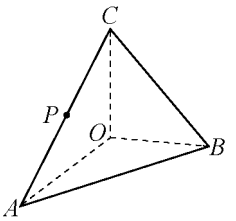


图　8-111

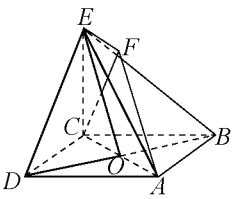


图　8-112

【例 8.31】 (2007・浙江理,17)如图 8-113 所示,在长方形 $ABCD$ 中,$AB=2$,$BC=1$,E 为 CD 的中点,F 为线段 EC 上(端点除外)一动点. 现将△AFD 沿 AF 折起,使平面 $ABD\perp$平面 $ABCF$. 在平面 ABD 内过点 D 作 $DK\perp AB$,K 为垂足. 设 $AK=t$,则 t 的取值范围是_____.

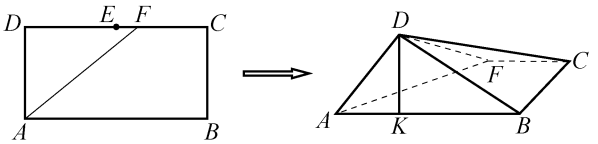


图　8-113

【解析】 如图 8-114 所示,过 K 作 $KM\perp AF$ 于点 M,连接 DM,易得 $DM\perp AF$,与折前的图形对比,可知折前的图形中 D,M,K 三点共线且 $DK\perp AF$(如图 8-115 所示),于是△$DAK\backsim$△FDA,所以 $\dfrac{AK}{AD}=\dfrac{AD}{DF}$,即 $\dfrac{t}{1}=\dfrac{1}{DF}$,所以 $t=\dfrac{1}{DF}$,又 $DF\in(1,2)$,故 $t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

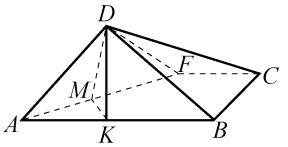


图　8-114

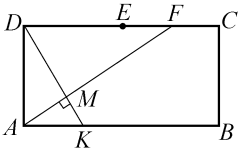


图　8-115

【变式 1】 (2010・北京海淀二模文,7)如图 8-116 所示,正四面体 $ABCD$ 中,棱长为 4,M 是 BC 的中点,P 在线段 AM 上运动(P 不与 A,M 重合),过点 P 作直线 $l\perp$平面 ABC,l 与平面 BCD 交于点 Q,给出下列命题:①$BC\perp$平面 AMD;②点 Q 一定在直线 DM 上;③$V_{C-AMD}=4\sqrt{2}$,其中正确的是(　　).

A. ①②　　B. ①③

C. ②③　　D. ①②③

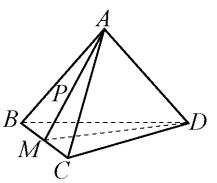


图　8-116

【例 8.32】 (2008・湖北理,18)如图 8-117 所示,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,平面 $A_1BC\perp$侧面 A_1ABB_1. 求证:$AB\perp BC$.

【分析】 通过线面垂直,证明线线垂直.

【解析】 如图 8-118 所示,过点 A 在平面 A_1ABB_1 内作 $AD\perp A_1B$ 于点 D,连接 CD,则由平面 $A_1BC\perp$侧面 A_1ABB_1,且平面 $A_1BC\cap$侧面 $A_1ABB_1=A_1B$,得 $AD\perp$平面 A_1BC,又 $BC\subset$平面 A_1BC,所以 $AD\perp BC$. 因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是

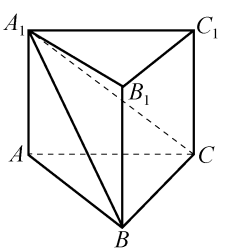


图　8-117

心得体会

直三棱柱，故 $AA_1\perp$底面 ABC，所以 $AA_1\perp BC$，又 $AA_1\cap AD=A$，从而 $BC\perp$侧面 A_1ABB_1，又 $AB\subset$侧面 A_1ABB_1，故 $AB\perp BC$.

【评注】 垂面里面作垂线，有效地将面面垂直转化为线面垂直.

【变式 1】 (2008·北京文，16)如图 8-119 所示，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AC=BC$，$PA=PB$. 求证：$PC\perp AB$.

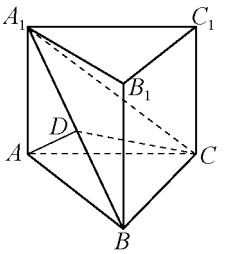


图 8-118

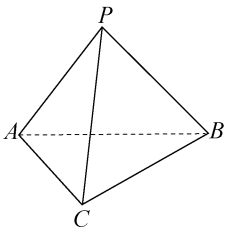


图 8-119

二、线面垂直

垂直关系中线面垂直是重点，

线垂面哪里找{
- 垂直两条相交线；
- 垂面里面作垂线；
- 直(正)棱柱的侧棱是垂线；
- 正棱锥的顶点与底面的中心的连线是垂线.

线垂面有何用{
- 垂直面里所有线(证线线垂直)；
- 过垂线作垂面(证面面垂直)；
- 三垂线定理(逆定理)找射影.

证明线面垂直常用两种方法.

方法一：线面垂直的判定.

线线垂直⇒线面垂直，符号表示为：$a\perp b$，$a\perp c$，$b\subset\alpha$，$c\subset\alpha$，$b\cap c=P$，那么 $a\perp\alpha$.

方法二：面面垂直的性质.

面面垂直⇒线面垂直，符号表示为：$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=b$，$a\subset\alpha$，$a\perp b$，那么 $a\perp\beta$.

【例 8.33】 (2010·福建宁化)已知直线 l 和两个不同的平面 α，β，则下列命题正确的是(　　).

A. 若 $l\perp\alpha$，$l\perp\beta$，则 $\alpha\parallel\beta$　　B. 若 $l\parallel\alpha$，$l\parallel\beta$，则 $\alpha\parallel\beta$

C. 若 $l\perp\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则 $l\parallel\beta$　　D. 若 $l\parallel\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则 $l\perp\beta$

【解析】 选项 B 中，α，β 可能相交；选项 C 中，可能有 $l\subset\beta$；选项 D 中，可能有 $l\parallel\beta$.

故选 A.

【变式 1】 (2008·广东中山)已知直线 $l\perp$平面 α，直线 $m\subset$平面 β，有下面 4 个命题：

①$\alpha\parallel\beta\Rightarrow l\perp m$；②$\alpha\perp\beta\Rightarrow l\parallel m$；③$l\parallel m\Rightarrow\alpha\perp\beta$；④$l\parallel m\Rightarrow\alpha\parallel\beta$.

其中正确的命题是(　　).

A. ①②　　B. ③④　　C. ②④　　D. ①③

【变式 2】 (2009·辽宁抚顺)设 m 和 n 是两条不同的直线，α 和 β 是两个不同的平面，给出下列 4 个命题：

心得体会

①若 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n\not\subset\alpha$，则 $n\parallel\alpha$；

②若 $m\parallel\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则 $m\parallel\beta$；

③若 $m\perp\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $m\parallel\alpha$ 或 $m\subset\alpha$；

④若 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$.

其中正确命题的序号为_____.

【例 8.34】 如图 8-120 所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别在 AA_1，CC_1 上，且 $B_1E\perp A_1B$，$B_1F\perp BC_1$.

求证：$BD_1\perp$ 平面 B_1EF.

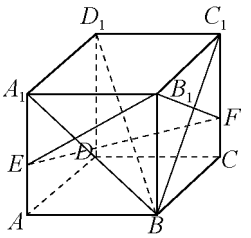


图　8-120

【分析】 由三垂线定理证明 $BD_1\perp B_1E$，$BD_1\perp B_1F$，再根据方法一证得线面垂直.

【解析】 A_1B 为 BD_1 在侧面 ABB_1A_1 上的射影，$B_1E\perp A_1B$，据三垂线定理得 $B_1E\perp BD_1$，同理 $BD_1\perp B_1F$. $B_1E\cap B_1F=B_1$，$B_1E\subset$面 B_1EF，$B_1F\subset$面 B_1EF，所以 $BD_1\perp$ 平面 B_1EF.

【评注】 线面垂直的判定：线线垂直⇒线面垂直，即 $m\perp a$，$m\perp b$，$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a\cap b=P\Rightarrow m\perp\alpha$.

【变式 1】 (2008・全国Ⅱ理，19)如图 8-121 所示，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB=4$，点 E 在 CC_1 上且 $C_1E=3EC$. 求证：$A_1C\perp$ 平面 BDE.

【变式 2】 (2010・天津理，16)如图 8-122 所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别是棱 BC，CC_1 上的点，$CF=AB=2CE$，$AB:AD:AA_1=1:2:4$. 求证：$AF\perp$ 平面 A_1ED.

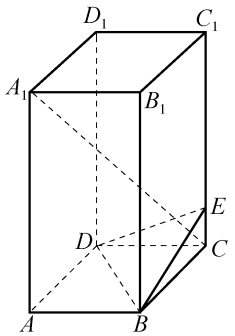


图　8-121

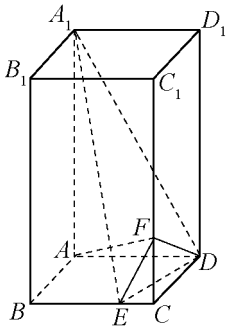


图　8-122

【变式 3】 (2010・安徽理，16)如图 8-123 所示，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是正方形，$EF\parallel AB$，$EF\perp FB$，$AB=2EF$，$BF=FC$，H 为 BC 的中点.

求证：$AC\perp$ 平面 EDB.

【变式 4】 (2011・大纲全国理，19(1))如图 8-124 所示，四棱锥 $S-ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$BC\perp CD$，侧面 SAB 为等边三角形，$AB=BC=2$，$CD=SD=1$.

求证：$SD\perp$ 平面 SAB.

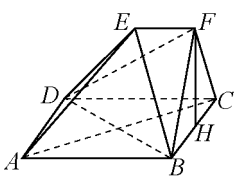


图　8-123

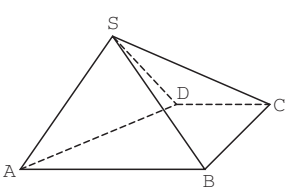


图　8-124

心得体会

【变式 5】 (2011·广东理,18(1))如图 8-125 所示,在锥体 $P-ABCD$ 中,$ABCD$ 是边长为 1 的菱形,且 $\angle DAB=60^\circ$,$PA=PD=\sqrt{2}$,$PB=2$,E,F 分别是 BC,PC 的中点. 求证:$AD\perp$ 平面 DEF.

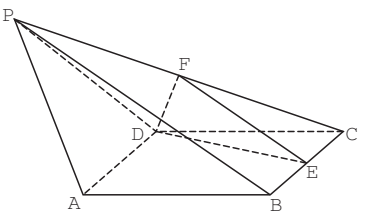


图 8-125

三、面面垂直

主要证明方法是利用面面垂直的判定,(线垂面,过垂线作垂面)即 $a\perp\alpha$,$a\subset\beta$,则 $\alpha\perp\beta$.

【例 8.35】 (2008·山东东营)如图 8-126 所示,四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形,侧棱 $PA=a$,$PB=PD=\sqrt{2}a$,则它的 5 个面中,互相垂直的面有_____对.

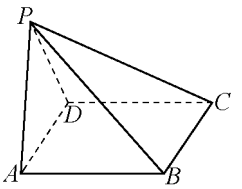


图 8-126

【解析】 依题意,$PA=a$,$PB=\sqrt{2}a$,底面 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形,则 $AB=a$,故 $\triangle PAB$ 为直角三角形.

故 $AB\perp PA$ ⎫
又 $AB\perp AD$ ⎬$\Rightarrow$ $AB\perp$ 平面 PAD ⎫$\Rightarrow$平面 $PAB\perp$ 平面 PAD. 同理可证:平面
$PA\cap AD=A$ ⎭ $AB\subset$ 平面 PAB ⎭

$PAD\perp$ 平面 $ABCD$,

平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PAB\perp$ 平面 PBC,平面 $PAD\perp$ 平面 PCD.

故互相垂直的面有 5 对.

【变式 1】 (2010·山东济南)如图 8-127 所示,在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\angle BAC=90^\circ$,$BC_1\perp AC$,则 C_1 在底面 ABC 上的射影 H 必在(　　).

A. 直线 AB 上　　B. 直线 BC 上

C. 直线 AC 上　　D. $\triangle ABC$ 内部

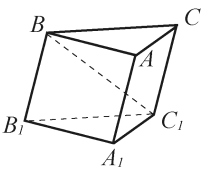


图 8-127

【变式 2】 (2011·浙江理,4)下列命题中错误的是(　　).

A. 如果平面 $\alpha\perp$ 平面 β,那么平面 α 内一定存在直线平行于平面 β

B. 如果平面 α 不垂直于平面 β,那么平面 α 内一定不存在直线垂直于平面 β

C. 如果平面 $\alpha\perp$ 平面 γ,平面 $\beta\perp$ 平面 γ,$\alpha\cap\beta=l$,那么 $l\perp$ 平面 γ

D. 如果平面 $\alpha\perp$ 平面 β,那么平面 α 内所有直线都垂直于平面 β

【例 8.36】 (2007·北京理,17)如图 8-128 所示,在三棱锥 $O-ABC$ 中,$OC\perp$ 底面 ABC,$\angle ACB=90^\circ$,点 D 在棱 OB 上. 求证:平面 $ACD\perp$ 平面 OBC.

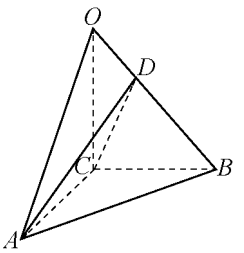


图 8-128

心得体会

【分析】 根据面面垂直的判定，由线面垂直⇒面面垂直.

【解析】 $OC\perp$底面 ABC，故 $OC\perp AC$. 因为$\angle ACB=90°$，所以 $AC\perp BC$，$OC\cap BC=C$，故 $AC\perp$平面 OBC. 又 $AC\subset$平面 ACD，所以平面 $ACD\perp$平面 OBC.

【变式 1】 (2007・湖北理，18)如图 8-129 所示，在三棱锥 $V-ABC$ 中，$VC\perp$底面 ABC，$AC\perp BC$，D 是 AB 的中点，且 $AC=BC$. 求证：平面 $VAB\perp$平面 VCD.

【变式 2】 (2009・江西理，20)如图 8-130 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，以 AC 的中点 O 为球心，AC 为直径的球面交 PD 于点 M. 求证：平面 $ABM\perp$平面 PCD

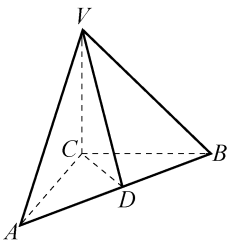


图　8-129

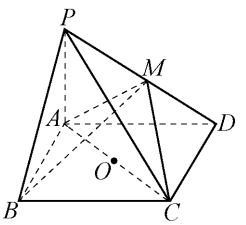


图　8-130

【变式 3】 (2011・辽宁理，18(1))如图 8-131 所示，四边形 $ABCD$ 为正方形，$PD\perp$平面 $ABCD$，$PD/\!/QA$，$QA=AB=\frac{1}{2}PD$. 求证：平面 $PQC\perp$平面 DCQ.

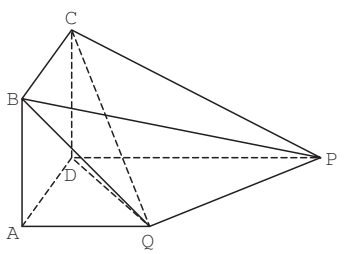


图　8-131

【变式 4】 (2010・山东理，19)如图 8-132 所示，在五棱锥 $P-ABCDE$ 中，$PA\perp$平面 $ABCDE$，$AB/\!/CD$，$AC/\!/ED$，$AE/\!/BC$，$\angle ABC=45°$，$AB=2\sqrt{2}$，$BC=2AE=4$，三角形 PAB 是等腰三角形. 求证：平面 $PCD\perp$平面 PAC.

【变式 5】 (2010・湖南文，18)如图 8-133 所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=1$，$AA_1=2$，M 是棱 CC_1 的中点. 求证：平面 $ABM\perp$平面 A_1B_1M.

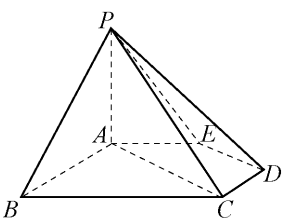


图　8-132

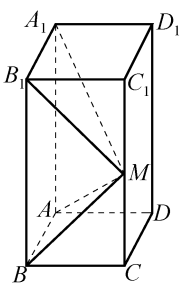


图　8-133

心得体会

第六节　空间向量及其应用

考纲解读

1. 空间向量及其运算.
   (1)了解空间向量的概念,了解空间向量的基本定理及其意义,掌握空间向量的正交分解及其坐标表示.
   (2)掌握空间向量的线性运算及其坐标表示.
   (3)掌握空间向量的数量积及其表示,能用向量的数量积判断向量的共线与垂直.
2. 空间向量的应用.
   (1)理解直线的方向向量与平面的法向量.
   (2)能用向量语言表述直线与直线、直线与平面、平面与平面的垂直、平行关系.
   (3)能用向量方法证明有关直线和平面位置关系的一些定理(包括三垂线定理).
   (4)能用向量方法解决直线与直线、直线与平面、平面与平面的夹角的计算问题,了解向量方法在研究几何问题中的应用.

命题趋势探究

立体几何试题中,考查线面的位置关系一般利用传统方法证明,对于空间角和距离的计算,既可用传统方法解答,也可用向量法解答,而且多数情况下向量法会更容易一些.预测在2012年高考对本专题的考查在解答题中以中档题出现,分值保持在10分左右.

知识点精讲

一、空间向量及其加减运算

1. 空间向量

在空间,我们把具有大小和方向的量叫作空间向量,向量的大小叫作向量的长度或模.空间向量也可用有向线段表示,有向线段的长度表示向量的模,若向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点是 A,终点是 B,则向量 $\boldsymbol{a}$ 也可以记作 $\overrightarrow{AB}$,其模记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$.

2. 零向量

规定长度为0的向量叫作零向量,记作 $\mathbf{0}$. 当有向线段的起点 A 与终点 B 重合时,$\overrightarrow{AB}=0$.

3. 单位向量

心得体会

模为 1 的向量称为单位向量.

4. 相反向量

与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等而方向相反的向量,称为 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量,记为 $-\boldsymbol{a}$.

5. 相等向量

方向相同且模相等的向量称为相等向量.在空间,同向且等长的有向线段表示同一向量或相等向量.空间任意两个向量都可以平移到同一个平面,成为同一平面内的两个向量.

6. 空间向量的加法和减法运算

(1)$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 如图8-134所示.

(2)空间向量的加法运算满足交换律及结合律

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

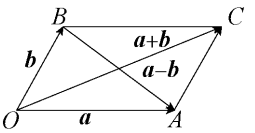


图　8-134

二、空间向量的数乘运算

1. 数乘运算

实数 λ 与空间向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 称为向量的数乘运算.当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同;当 $\lambda<0$ 时,向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反.$\lambda\boldsymbol{a}$ 的长度是 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 $|\lambda|$ 倍.

2. 空间向量的数乘运算满足分配律及结合律

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

3. 共线向量

如果表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合,则这些向量叫作共线向量或平行向量,$\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$,记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

4. 共线向量定理

对空间中任意两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$,$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

5. 直线的方向向量

如图 8-135 所示,l 为经过已知点 A 且平行于已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的直线.对空间任意一点 O,点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数 t,使 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{a}$①,其中向量 $\boldsymbol{a}$ 叫作直线 l 的方向向量,在 l 上取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,则式①可化为

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\text{②}$$

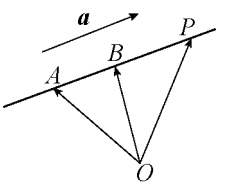


图　8-135

①和②都称为空间直线的向量表达式,当 $t=\frac{1}{2}$,即点 P 是线段 AB 的中点时,$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,此式叫作线段 AB 的中点公式.

6. 共面向量

如图 8-136 所示,已知平面 α 与向量 $\boldsymbol{a}$,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,如果直线 $\overrightarrow{OA}$ 平行于平面 α 或 $\boldsymbol{a}$ 在平面 α 内,则说明向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于平面 α.平行于同一平面的向量,叫作共面向量.

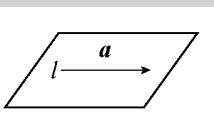


图　8-136

心得体会

7. 共面向量定理

如果两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序数对 (x,y)，使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

推论：(1)空间一点 P 位于平面 ABC 内的充要条件是存在有序实数对 (x,y)，使 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$；或对空间任意一点 O，有 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，该式称为空间平面 ABC 的向量表达式.

(2)已知空间任意一点 O 和不共线的三点 A,B,C，满足向量关系式 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$(其中 $x+y+z=1$)的点 P 与点 A,B,C 共面；反之也成立.

三、空间向量的数量积运算

1. 两向量夹角

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB$ 叫作向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，通常规定 $0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$，于是 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$，如果 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$，那么向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互相垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

2. 数量积定义

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 叫作 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$. 零向量与任何向量的数量积为 0，特别地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

3. 空间向量的数量积满足的运算律.

空间向量的数量积满足如下运算律：

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律)；

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律).

四、空间向量的坐标运算及应用

(1)设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$；

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$；$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$；

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Rightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3$；

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Rightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

(2)设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

这就是说，一个向量在直角坐标系中的坐标等于表示该向量的有向线段的终点的坐标减起点的坐标.

(3)两个向量的夹角及两点间的距离公式.

①已知 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$；

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

②已知 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$，或者 $d_{A,B}=|\overrightarrow{AB}|$. 其中 $d_{A,B}$ 表示 A 与 B 两点间的距离，这就是空间两点的距离

心得体会

公式.

(4)向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的射影为 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

(5)设 $\boldsymbol{n}$ 是平面 M 的一个法向量,AB,CD 是 M 内的两条相交直线,则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0$,由此可求出一个法向量 $\boldsymbol{n}$(向量$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{CD}$已知).

(6)利用空间向量证明线面平行:只要在平面 α 内找到一条直线的方向向量 $\boldsymbol{b}$,已知直线的方向向量为 $\boldsymbol{a}$,将问题转化为证明 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 即可,或已知直线上的 A,B 两点坐标,在平面 α 内找出两点 C,D,并写成坐标形式,$\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1,z_1)$,$\overrightarrow{CD}=(x_2,y_2,z_2)$,只要证明 $x_1=\lambda x_2$,$y_1=\lambda y_2$,$z_1=\lambda z_2$ 即可.

(7)利用空间向量证明两条异面直线垂直:在两条异面直线中各取一个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,只要证明 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 即可.

(8)证明线面垂直,若已知直线 l,平面 α,要证 $l\perp\alpha$,只要在 l 上取一个非零向量 $\boldsymbol{p}$,在 α 内取两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,可将问题转化为证明 $\boldsymbol{p}\perp\boldsymbol{a}$ 且 $\boldsymbol{p}\perp\boldsymbol{b}$,也就是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}=0$ 且 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{p}=0$.

(9)证明面面平行、面面垂直,最终都要转化为证明线线平行、线线垂直.

(10)空间角公式.

①异面直线所成角公式:设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 分别为异面直线 l_1,l_2 上的方向向量,θ 为异面直线所成的角,则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

②线面角公式:设 l 为平面 α 的斜线,$\boldsymbol{a}$ 为 l 的方向向量,$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量,θ 为 l 与 α 所成的角,则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{n}|}$.

③面面角公式:

设 $\boldsymbol{n}_1$,$\boldsymbol{n}_2$ 分别为平面 α,β 的法向量,二面角为 θ,则 $\theta=\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$ 或 $\pi-\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$(需要根据具体情况判断相等或互补),其中 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$.

设 $\boldsymbol{n}_1$,$\boldsymbol{n}_2$ 为二面角两个半平面的法向量,二面角为 θ,则 $\theta=\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$ 或 $\theta=\pi-\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$(需要根据具体情况判断相等或互补),其中 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$.

(11)点 A 到平面 α 的距离,$B\in\alpha$,$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量,$d=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.

题型归纳及思路提示

题型 117　空间向量及其运算

思路提示:空间向量及其运算包括空间向量的加法、减法、数乘、数量积及坐标运算,可以类比平面向量的运算法则.

一、空间向量的加法、减法、数乘运算

【例 8.37】 如图 8-137 所示,已知空间四边形 $OABC$,点 M,N 分别为 OA,BC 的中点,且

心得体会

$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{MN}$，则 $\overrightarrow{MN}=$_____.

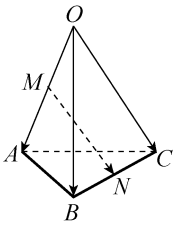


图 8-137

【解析】 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$.

【变式 1】 (2009·山东烟台)如图 8-138 所示，已知空间四边形 $OABC$，其对角线为 OB,AC，M 和 N 分别是对边 OA 和 BC 的中点，点 G 在线段 MN 上，且分 MN 所成的比为 2，现用基向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 表示向量 $\overrightarrow{OG}$，设 $\overrightarrow{OG}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，则 x,y,z 的值分别是(　　).

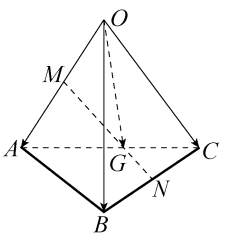


图 8-138

A. $x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{3},z=\frac{1}{3}$　　B. $x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{3},z=\frac{1}{6}$

C. $x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{6},z=\frac{1}{3}$　　D. $x=\frac{1}{6},y=\frac{1}{3},z=\frac{1}{3}$

【变式 2】 (2007·安徽文,13)如图 8-139 所示，在四面体 $O-ABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$D$ 为 BC 的中点，E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{OE}=$_____(用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示).

【变式 3】 在空间四边形 $ABCD$ 中，连接对角线 AC,BD，若 $\triangle BCD$ 是正三角形，且 E 为其重心，则 $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{AD}$ 的化简结果为_____.

【变式 4】 如图 8-140 所示，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则下列向量中与 $\overrightarrow{BM}$ 相等的向量是(　　).

A. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

C. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　D. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

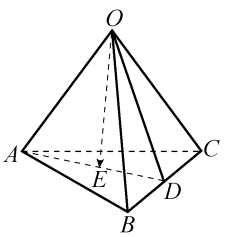


图 8-139

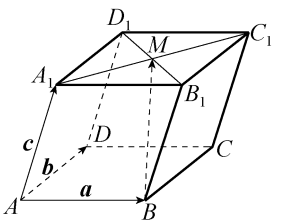


图 8-140

二、空间共线向量定理的应用

空间共线向量定理：$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

利用此定理可解决立体几何中的平行问题.

【例 8.38】 已知 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{n}=(x+1)\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+2y\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，若 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$，求 x,y 的值.

【解析】 因为 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$ 且 $\boldsymbol{m}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{m}$，即 $(x+1)\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+2y\boldsymbol{c}=\lambda(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c})$.

心得体会

又因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，所以 $\begin{cases}x+1=3\lambda\\8=-2\lambda\\2y=-4\lambda\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-13\\y=8\end{cases}$.

三、空间向量的数量积运算

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$；

求模长时，可根据 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$；

求空间向量夹角时，可先求其余弦值 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$. 要判断空间两向量垂直时，可以求两向量的数量积是否为 0，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为锐角$\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$；$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为钝角$\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$. 由此，通常通过计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值来判断两向量夹角是锐角还是钝角.

【例 8.39】 已知空间四边形 $ABCD$ 的每条边和对角线的长都等于 a，点 E,F 分别是 BC,AD 的中点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的值为(　　).

A. a^2　　B. $\dfrac{1}{2}a^2$　　C. $\dfrac{1}{4}a^2$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

【解析】 依题意，点 E,F 为 BC,AD 的中点，如图 8-141 所示，

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})$$

$$=\frac{1}{4}(a^2\cos60^\circ+a^2\cos60^\circ)=\frac{1}{4}a^2.$$ 故选 C.

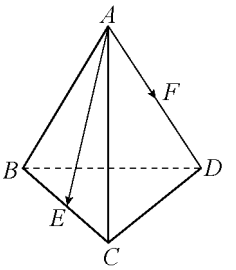


图　8-141

【变式 1】 如图 8-142 所示，已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\angle A_1AD=\angle A_1AB=\angle DAB=60^\circ$，且 $A_1A=AB=AD=1$，则 $AC_1=$_____.

【变式 2】 (2010·山东淄博)如图 8-143 所示，设 A,B,C,D 是空间不共面的 4 个点，且满足 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，则 $\triangle BCD$ 的形状是(　　).

A. 钝角三角形　　B. 直角三角形

C. 锐角三角形　　D. 无法确定

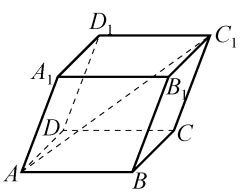


图　8-142

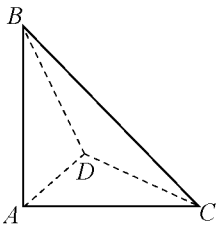


图　8-143

【例 8.40】 (2010·辽宁沈阳)如图 8-144 所示，在 45°的二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱上有两点 A,B，点 C,D 分别在 α,β 内，且 $AC\perp AB$，$\angle ABD=45^\circ$，$AC=BD=AB=1$，则 CD 的长度为_____.

【分析】 求 CD 的长度转化为求空间向量 $\overrightarrow{CD}$ 的模.

心得体会

【解析】 因为$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，

故$|\overrightarrow{CD}|^2=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2$

$=\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BD}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=1+1+1+0+2\times1\times1\times\cos135^\circ+2\times1\times1\times\cos\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\rangle$. 又$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=-\cos45^\circ\cdot\cos45^\circ=-\frac{1}{2}=1\times1\times\cos\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\rangle$，故$\cos\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\rangle=-\frac{1}{2}$. 因此$|\overrightarrow{CD}|^2=2-\sqrt{2}$，则$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

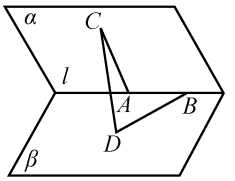


图 8-144

【变式 1】 (2009·全国Ⅰ理,10)已知二面角$\alpha-l-\beta$为60°,动点P,Q分别在面α,β内,P到β的距离为$\sqrt{3}$,Q到α的距离为$2\sqrt{3}$,则P,Q两点之间距离的最小值为(　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

【变式 2】 在直角坐标系中,设$A(3,2)$,$B(-2,-3)$,沿y轴把坐标平面折成120°的二面角后,AB的长为(　　).

A. $\sqrt{6}$　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{11}$

【例 8.41】 (2008·江苏,22)如图8-145所示,设动点P在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的对角线BD_1上,记$\frac{D_1P}{D_1B}=\lambda$. 当$\angle APC$为钝角时,求$\lambda$的取值范围.

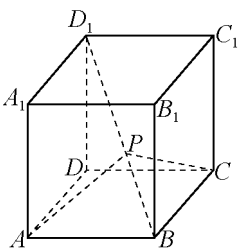


图 8-145

【解析】 由题设可知,以$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$为单位正交基底,建立如图8-146所示的空间直角坐标系$D-xyz$,则有

$A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$C(0,1,0)$,$D_1(0,0,1)$.

由$\overrightarrow{D_1B}=(1,1,-1)$,$\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1B}=(\lambda,\lambda,-\lambda)$,$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{D_1A}-\overrightarrow{D_1P}=(1,0,-1)-(\lambda,\lambda,-\lambda)=(1-\lambda,-\lambda,\lambda-1)$,$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{D_1C}-\overrightarrow{D_1P}=(0,1,-1)-(\lambda,\lambda,-\lambda)=(-\lambda,1-\lambda,\lambda-1)$.

显然$\angle APC$不是平角,所以$\angle APC$为钝角,$\cos\angle APC=\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC}\rangle=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|}<0$,等价于$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}<0$,

即$(1-\lambda)(-\lambda)+(-\lambda)(1-\lambda)+(\lambda-1)^2<0$,

得$\frac{1}{3}<\lambda<1$. 因此,λ的取值范围是$\left(\frac{1}{3},1\right)$.

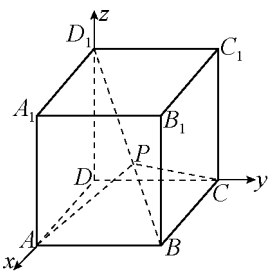


图 8-146

【评注】 利用向量知识将$\angle APC$为钝角转化为$\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC}\rangle<0$求解是本题的关键.

【变式 1】 (2009·辽宁大连)已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1,点P在线段BD_1上,当$\angle APC$最大时,三棱锥$P-ABC$的体积为(　　).

A. $\frac{1}{24}$　　B. $\frac{1}{18}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{1}{12}$

【例 8.42】 (2008·天津十校联考)如图8-147所示,在四棱锥$P-ABCD$中,侧面PAD为正三角形,底面$ABCD$为正方形,侧面$PAD\perp$底面$ABCD$,M为底面$ABCD$内的一个动点,且满足$MP=MC$,则点M在正方形$ABCD$内的轨迹为(　　).

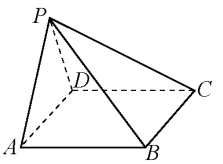
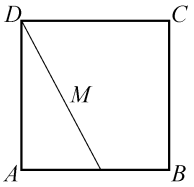
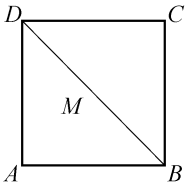


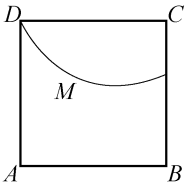
图 8-147



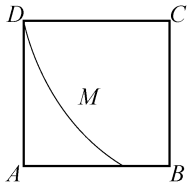
A.



B.



C.



D.

【解析】 取 AD 的中点 O，以 $\overrightarrow{OA}$ 为 x 轴，垂直于 OA 的 $\overrightarrow{OE}$ 为 y 轴，$\overrightarrow{OP}$ 为 z 轴，建立空间直角坐标系如图 8-148 所示. 设 $M(x,y,0)$，正方形的边长为 a，$P\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，$C\left(-\frac{a}{2},a,0\right)$，

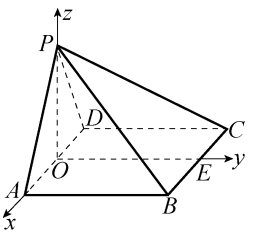


图　8-148

则 $|MC|=\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y-a)^2}$，

$|MP|=\sqrt{x^2+y^2+\frac{3}{4}a^2}$，由 $|MP|=|MC|$，

得 $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y-a)^2=x^2+y^2+\frac{3a^2}{4}$，

即 $x-2y+\frac{a}{2}=0$. 所以点 M 在正方形 $ABCD$ 内的轨迹为一条直线，且过 D 点和 AB 的中点. 故选 A.

【变式 1】 (2010・重庆理，10)到两互相垂直的异面直线距离相等的点，在过其中一条直线且平行于另一条直线的平面内的轨迹是(　　).

A. 直线　　B. 椭圆

C. 抛物线　　D. 双曲线

题型 118　空间向量在立体几何中的应用

思路提示：用向量法可以证点共线、线共点、线(或点)共面、两直线(或线与面、面与面)平行、两直线(或线与面、面与面)垂直的问题，也可以求空间角和距离. 因此，凡涉及上述类型的问题，都可以考虑利用向量法求解，且其解法一般都比较简单.

用向量法解题的途径有两种：一种是坐标法，即通过建立空间直角坐标系，确定出一些点的坐标，进而求出向量的坐标，再进行坐标运算；另一种是基底法，即先选择基向量(除要求不共面外，还要能够便于表示所求的目标向量，并优先选择相互夹角已知的向量作为基底，如常选择几何体上共点而不共面的三条棱所在的向量为基底)，然后将有关向量用基向量表示，并进行向量运算.

一、证明几点共线(如 A,B,C 三点共线)的方法

先构造共起点的向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，然后证明存在非零实数 λ，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$.

【例 8.43】 如图 8-149 所示，已知在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 为 DD_1 的中点，点 N 在 AC 上，且 $AN:NC=2:1$，点 E 为 BM 的中点.

求证：A_1,E,N 三点共线.

心得体会

【解析】 以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系 $D-xyz$，如图8-150所示. 不妨设 $DA=a$，$DC=b$，$DD_1=c$，则

$M\left(0,0,\frac{c}{2}\right)$，$B(a,b,0)$，$E\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{4}\right)$，

$A_1(a,0,c)$，$N\left(\frac{a}{3},\frac{2b}{3},0\right)$，

则 $\overrightarrow{A_1E}=\left(-\frac{a}{2},\frac{b}{2},-\frac{3c}{4}\right)$，

$\overrightarrow{A_1N}=\left(-\frac{2a}{3},\frac{2b}{3},-c\right)$，

因为 $\overrightarrow{A_1N}=\frac{4}{3}\overrightarrow{A_1E}$，故 A_1，E，N 三点共线.

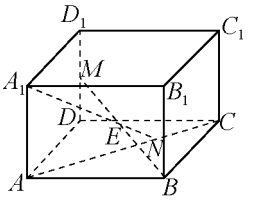


图 8-149

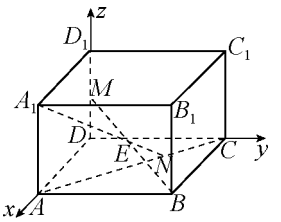


图 8-150

【变式 1】 (2008·辽宁理，11)在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 AA_1 和 CC_1 的中点，则在空间中与三条直线 A_1D_1，EF，CD 都相交的直线(　　).

A. 不存在　　B. 有且只有两条

C. 有且只有三条　　D. 有无数条

【变式 2】 如图 8-151 所示，在空间四边形 $ABCD$ 中，M，N 分别是 AB 和 CD 的中点，P 为线段 MN 的中点，Q 为△BCD 的重心. 求证：A，P，Q 三点共线.

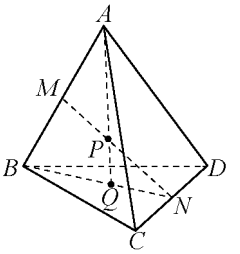


图 8-151

二、证明几点共面的方法

要证明几点(如 A，B，C，D)共面，可使用以下方法解题.

先作出从同一点出发的三个向量(如 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$)，然后证明存在两个实数 x，y，使得 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

【例 8.44】 (2008·四川理，19)如图 8-152 所示，平面 $ABEF\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABEF$ 与 $ABCD$ 都是直角梯形，$\angle BAD=\angle FAB=90^\circ$，$BC\parallel\frac{1}{2}AD$，$BE\parallel\frac{1}{2}AF$. 求证：$C$，$D$，$E$，$F$ 四点共面.

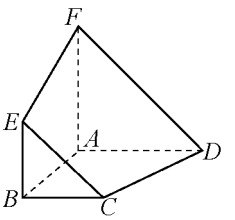


图 8-152

【解析】 由平面 $ABEF\perp$ 平面 $ABCD$，又 $AF\perp AB$，平面 $ABEF\cap$ 平面 $ABCD=AB$，得 $AF\perp$ 平面 $ABCD$，以 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，如图 8-153 所示.

设 $AB=a$，$BC=b$，$BE=c$，则

$B(a,0,0)$，$C(a,b,0)$，$D(0,2b,0)$，

$E(a,0,c)$，$F(0,0,2c)$.

$\overrightarrow{CE}=(0,-b,c)$，

$\overrightarrow{DF}=(0,-2b,2c)$，因为 $\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{CE}$，所以 $DF\parallel CE$. 则 CE，DF 确定一个平面，即 C，D，E，F 四点共面，

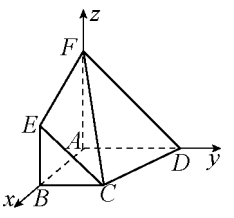


图 8-153

【变式 1】 如图 8-154 所示，已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，E，F，G，H 分别是棱 A_1D_1，D_1C_1，C_1C，AB 的中点.

求证：E,F,G,H 四点共面.

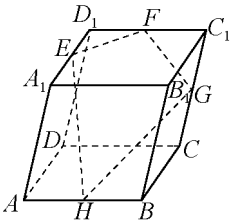


图　8-154

三、证明直线和直线平行的方法

将证线线平行转化为证两向量共线. 设 a,b 是两条不重合的直线，它们的方向向量分别为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq0)$.

【例 8.45】 如图 8-155 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，MN 是异面直线 A_1D 与 AC 的公垂线段. 求证：$MN\parallel BD_1$.

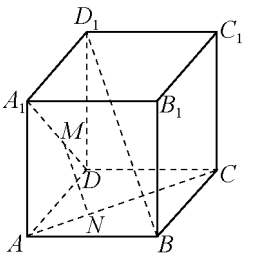


图　8-155

【解析】 以点 D 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $D-xyz$. 如图 8-156所示，设正方体的棱长为 a，则 $A_1(a,0,a)$，$A(a,0,0)$，$C(0,a,0)$，$B(a,a,0)$，$D_1(0,0,a)$.

设 $\overrightarrow{MN}=(x,y,z)$，由 MN 是异面直线 A_1D 与 AC 的公垂线段，得 $MN\perp A_1D$，$MN\perp AC$，又 $\overrightarrow{A_1D}=(-a,0,-a)$，$\overrightarrow{AC}=(-a,a,0)$，

故 $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0\\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，$\begin{cases}-ax-az=0\\ -ax+ay=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $z=-1$，$y=1$，所以 $\overrightarrow{MN}=(1,1,-1)$. $\overrightarrow{BD_1}=(-a,-a,a)=-a\overrightarrow{MN}$，即 $\overrightarrow{BD_1}\parallel\overrightarrow{MN}$. 因此 $MN\parallel BD_1$.

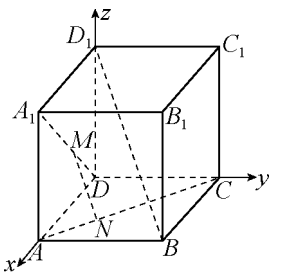


图　8-156

四、证明直线和平面平行的方法

(1)利用共面向量定理. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为平面 α 内不共线的两个向量，证明存在两个实数 x,y，使得 $\boldsymbol{l}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，则 $l\parallel\alpha$.

(2)转化为证明直线和平面内的某一直线平行.

(3)转化为证明直线的方向向量与平面的法向量垂直(此方法最常用).

【例 8.46】 (2007·山东理，19)如图 8-157 所示，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $DC=DD_1=2AD=2AB$，$AD\perp DC$，$AB\parallel DC$，E 是 DC 的中点. 求证：$D_1E\parallel$ 平面 A_1BD.

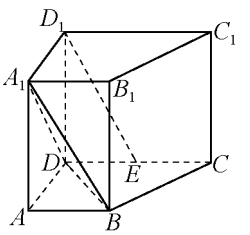


图　8-157

【解析】 因为 $\overrightarrow{D_1E}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DD_1}$，$\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AA_1}$，

E 是 DC 的中点，$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$，

所以 $\overrightarrow{D_1E}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{A_1B}$.

又因为 $D_1E\not\subset$ 平面 A_1BD，$\overrightarrow{D_1E}\parallel\overrightarrow{A_1B}$，

所以 $D_1E\parallel$ 平面 A_1BD.

【变式 1】 如图 8-158 所示，已知 P 是正方形 $ABCD$ 所在平面外一点，M,N 分别是 PA、BD 上的点，且 $PM:MA=BN:ND=5:8$，求证：直线 $MN\parallel$ 平面 PBC.

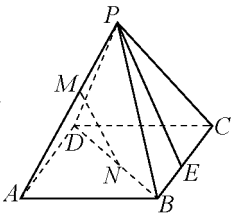


图　8-158

心得体会

五、证明平面与平面平行的方法

(1)证明两平面内有两条相交直线分别平行.

(2)转化为证两平面的法向量平行(常用此方法).

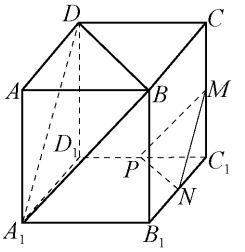


图 8-159

【例 8.47】 如图 8-159 所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M,N,P 分别是 C_1C,B_1C_1,C_1D_1 的中点.

求证:平面 MNP // 平面 A_1BD.

【解析】 解法一:以 D_1 为坐标原点,D_1A_1 为 x 轴,D_1C_1 为 y 轴,D_1D 为 z 轴,建立空间直角坐标系 D_1-xyz,如图 8-160 所示.设正方体的棱长为 a,则 $A_1(a,0,0)$,$D(0,0,a)$,

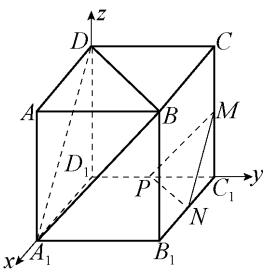


图 8-160

$C_1(0,a,0)$,$C(0,a,a)$,$B_1(a,a,0)$,$M\left(0,a,\frac{a}{2}\right)$,

$P\left(0,\frac{a}{2},0\right)$,$N\left(\frac{a}{2},a,0\right)$,$\overrightarrow{A_1D}=(-a,0,a)$,

$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{a}{2},0,-\frac{a}{2}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1D}$,

所以 $\overrightarrow{MN}$ // $\overrightarrow{A_1D}$,即 MN // A_1D,$\overrightarrow{BD}=(-a,-a,0)$,

$\overrightarrow{PN}=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$,所以 $\overrightarrow{PN}$ // $\overrightarrow{BD}$,即 PN // BD. 因为 $MN\cap PN=N$,$A_1D\cap BD=D$,所以平面 MNP // 平面 A_1BD.

解法二:设平面 MNP 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,由 $\overrightarrow{MN}\perp\boldsymbol{n}_1$,$\overrightarrow{PN}\perp\boldsymbol{n}_1$,

得 $\begin{cases}\frac{a}{2}x_1-\frac{a}{2}z_1=0\\ \frac{a}{2}x_1+\frac{a}{2}y_1=0\end{cases}$,令 $z_1=1$,得 $\begin{cases}x_1=1\\ y_1=-1\\ z_1=1\end{cases}$,所以 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,1)$.

设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,由 $\overrightarrow{A_1D}\perp\boldsymbol{n}_2$,$\overrightarrow{BD}\perp\boldsymbol{n}_2$,得

$\begin{cases}-ax_2+az_2=0\\ -ax_2-ay_2=0\end{cases}$,令 $z_2=1$,得 $\begin{cases}x_2=1\\ y_2=-1\\ z_2=1\end{cases}$,所以 $\boldsymbol{n}_2=(1,-1,1)$.

因为 $\boldsymbol{n}_1$ // $\boldsymbol{n}_2$,所以平面 MNP // 平面 A_1BD.

【变式 1】 如图 8-161 所示,在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F,G 分别是 A_1D_1,D_1D,D_1C_1 的中点.求证:平面 EFG // 平面 AB_1C.

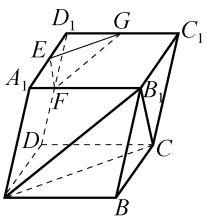


图 8-161

六、证明直线与直线垂直的方法

设直线 l_1,l_2 的方向向量为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

这里要特别指出的是,用向量法证明两直线尤其是两异面直线垂直是非常有效的方法.

【例 8.48】 如图 8-162 所示,四棱锥 $A-BCDE$ 中,底面 $BCDE$ 为矩形,侧面 $ABC\perp$ 底面 $BCDE$,$BC=2$,$CD=\sqrt{2}$,$AB=AC$. 求证:$AD\perp CE$.

【分析】 平面 $ABC\perp$ 平面 $BCDE$,在平面 ABC 内作 $AO\perp BC\Rightarrow AO\perp$ 平面 $BCDE$,以点

O 为坐标原点建立空间直角坐标系.

【解析】 作 $AO\perp BC$，垂足为 O，则 $AO\perp$ 底面 $BCDE$，且 O 为 BC 的中点，以 O 为坐标原点，OC 为 x 轴，建立如图 8-163 所示的直角坐标系 $O-xyz$. 设 $A(0,0,a)$，由已知条件知 $C(1,0,0)$，$D(1,\sqrt{2},0)$，$E(-1,\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{CE}=(-2,\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AD}=(1,\sqrt{2},-a)$. 所以 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，得 $\overrightarrow{CE}\perp\overrightarrow{AD}$，即 $AD\perp CE$.

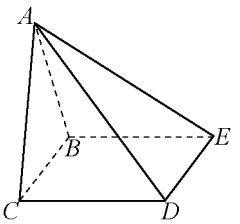


图　8-162

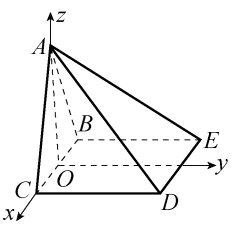


图　8-163

【评注】 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0\Rightarrow\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$.

【变式 1】 (2007·全国Ⅰ理,19)如图 8-164 所示，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$，已知 $\angle ABC=45^\circ$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$SA=SB=\sqrt{3}$. 求证：$SA\perp BC$.

【变式 2】 如图 8-165 所示，已知空间四边形 $ABCD$ 的每条边和对角线长都等于 a，点 M，N 分别是边 AB，CD 的中点. 求证：MN 为 AB 和 CD 的公垂线.

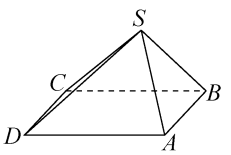


图　8-164

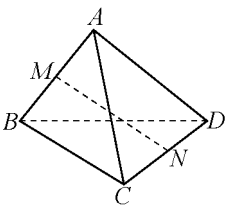


图　8-165

七、证明直线与平面垂直的方法

(1)证明直线和平面内的两条相交直线垂直.

(2)证明直线和平面内的任一直线垂直.

(3)转化为证明直线与平面的法向量共线.

【例 8.49】 如图 8-166 所示，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AB/\!/CD$，$AB=AD=1$，$D_1D=CD=2$，$AB\perp AD$. 求证：$BC\perp$ 平面 D_1DB.

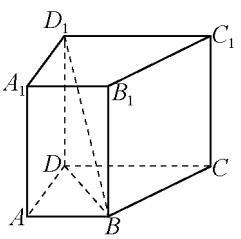


图　8-166

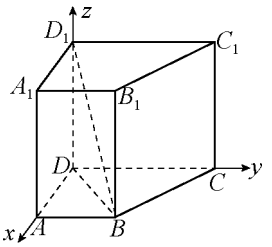


图　8-167

心得体会

【解析】 如图 8-167 所示，以 D 为坐标原点，建立空间直角立坐标系 $D-xyz$，$D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，$D_1(0,0,2)$，所以 $\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{D_1D}=(0,0,-2)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，因为 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{D_1D}=0$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，所以 $BC\perp D_1D$，$BC\perp DB$.

因为 $D_1D\cap DB=D$，所以 $BC\perp$ 平面 D_1DB.

【评注】 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0\Rightarrow\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0\Rightarrow\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{b}$，$a\cap b=A$，$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，得 $n\perp\alpha$.

【变式 1】 (2008·江西理，20)正三棱锥 $O-ABC$ 的三条侧棱 OA，OB，OC 两两垂直，且长度均为 2，E，F 分别是 AB，AC 的中点，H 是 EF 的中点，过 EF 的一个平面与侧棱 OA，OB，OC 或其延长线分别相交于 A_1，B_1，C_1. $OA_1=\frac{3}{2}$.

求证：$B_1C_1\perp$ 平面 OAH.

【变式 2】 (2007·天津理，19)如图 8-168 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$AC\perp CD$，$\angle ABC=60°$，$PA=AB=BC$，E 是 PC 的中点. 证明：$PD\perp$ 平面 ABE.

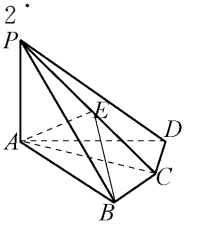


图 8-168

八、证明平面和平面垂直的方法

(1)转化为证明两平面的法向量互相垂直.

(2)转化为证明一平面内的一直线垂直于另一个平面.

【例 8.50】 如图 8-169 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 BB_1，CD 的中点. 求证：平面 $DEA\perp$ 平面 A_1FD_1.

【解析】 如图 8-170 所示，以 D 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，令 $DD_1=2$，则 $D(0,0,0)$，$D_1(0,0,2)$，$A(2,0,0)$，$A_1(2,0,2)$，$F(0,1,0)$，$E(2,2,1)$.

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$ 分别为平面 DEA 与平面 A_1FD_1 的法向量，则 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DA}$，$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DE}$. 又 $\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{DE}=(2,2,1)$，

则 $\begin{cases}2x_1=0\\2x_1+2y_1+z_1=0\end{cases}$，令 $y_1=-1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(0,-1,2)$.

同理可得 $\boldsymbol{n}_2=(0,2,1)$. 因为 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0+(-1)\times2+2\times1=0$，所以 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$，故平面 $DEA\perp$ 平面 A_1FD_1.

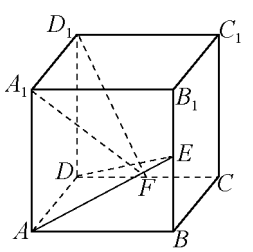


图 8-169

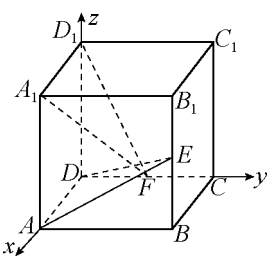


图 8-170

【变式 1】 如图 8-171 所示，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形，$AB/\!/DC$，$\angle DAB=90°$，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PA=AD=DC=\frac{1}{2}AB=1$. 求证：平面 $PAD\perp$ 平面 PCD.

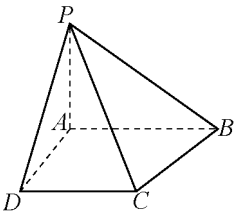


图 8-171

心得体会

九、求两异面直线所成角的方法

设两异面直线 a 和 b 的方向向量为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，利用求角余弦公式可求得 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，由于两向量所成角 θ 的范围是 $[0,\pi]$，而两异面直线所成角 α 的范围是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\cos\alpha=|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

【例 8.51】 (2008·海南理，18)如图 8-172 所示，已知点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 上，$\angle PDA=60°$，求 DP 与 CC_1 所成角的大小.

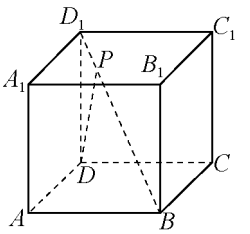


图　8-172

【分析】 从 $\angle PDA=60°$ 入手，确定点 P 的坐标与其相关点的坐标，利用向量的数量积来计算异面直线所成角的余弦值.

【解析】 如图 8-173 所示，以 D 为原点，DA 为单位长度建立空间直角坐标系 $D-xyz$，则 $A(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$C_1(0,1,1)$，$\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,1)$. 连接 B_1D_1，在平面 BDD_1B_1 中，延长 DP 交 B_1D_1 于 H.

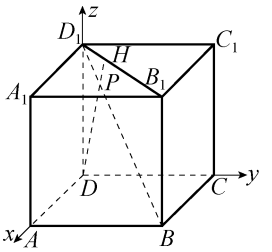


图　8-173

设 $\overrightarrow{DH}=(m,m,1)\ (m>0)$，由已知 $\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DA}\rangle=60°$，

得 $\cos\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DA}\rangle=\frac{\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DH}||\overrightarrow{DA}|}=\frac{1}{2}$，

即 $\frac{(m,m,1)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{2m^2+1}\cdot 1}=\frac{1}{2}$，可得 $2m=\sqrt{2m^2+1}$，

解得 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\overrightarrow{DH}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

因为 $\cos\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{CC_1}\rangle=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{2}\times 1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{CC_1}\rangle=45°$，即 DP 与 CC_1 所成的角为 $45°$.

【变式 1】 (2008·全国Ⅱ，10)已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧棱长与底面边长都相等，E 是 SB 的中点，则 AE 和 SD 所成角的余弦值为(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

【变式 2】 (2008·全国Ⅰ理，16)如图 8-174 所示，等边三角形 ABC 与正方形 $ABDE$ 有一公共边 AB，二面角 $C-AB-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，M，N 分别是 AC，BC 的中点，则 EM 和 AN 所成角的余弦值等于_____.

【变式 3】 (2011·北京理，16(2))如图 8-175 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是菱形，$AB=2$，$\angle BAD=60°$. 若 $PA=AB$，求 PB 与 AC 所成角的余弦值.

心得体会

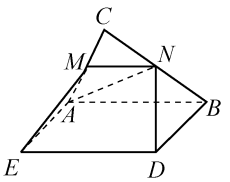


图 8-174

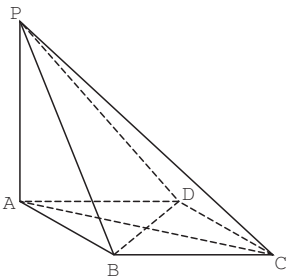


图 8-175

十、求直线与平面所成角的方法

(1)先作出该角,再利用求角余弦公式来求.

(2)改求直线的方向向量与平面的法向量所成的角的余角. 如图 8-176所示,设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{l}_1$,平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$,直线 l 和平面 α 所成的角为 θ,则 $\langle \boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{n}\rangle+\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\langle \boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{n}\rangle-\theta=\frac{\pi}{2}$,因为 θ 的取值范围是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{l}_1||\boldsymbol{n}|}$.

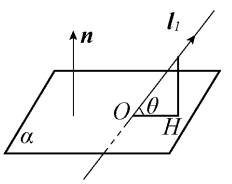


图 8-176

【例 8.52】 (2007·全国Ⅰ,19)如图 8-177 所示,四棱锥 $S-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为平行四边形,侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$,已知 $\angle ABC=45^\circ$,$BC=2\sqrt{2}$,$SA=SB=\sqrt{3}$. 求直线 SD 与平面 SAB 所成角的正弦值.

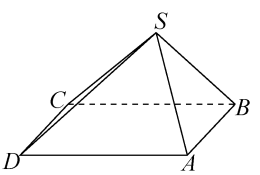


图 8-177

【解析】 如图 8-178 所示,作 $SO\perp BC$,垂足为 O,连接 AO,由侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$,得 $SO\perp$ 底面 $ABCD$,由 $SA=SB$,可得 $OA=OB$. 由 $\angle ABC=45^\circ$,得 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,$OA\perp OB$. 建立空间直角坐标系 $O-xyz$,则 $A(\sqrt{2},0,0)$,$B(0,\sqrt{2},0)$,$C(0,-\sqrt{2},0)$,$S(0,0,1)$,$D(\sqrt{2},-2\sqrt{2},0)$,$\overrightarrow{DS}=(-\sqrt{2},2\sqrt{2},1)$,$\overrightarrow{SA}=(\sqrt{2},0,-1)$,$\overrightarrow{SB}=(0,\sqrt{2},-1)$.

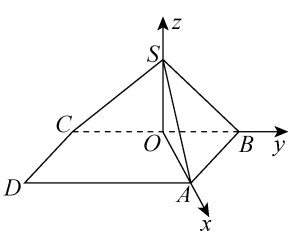


图 8-178

设平面 SAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,由 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SA}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0$ 得

$\begin{cases}\sqrt{2}x_1-z_1=0\\ \sqrt{2}y_1-z_1=0\end{cases}$,令 $z_1=\sqrt{2}$,则 $x_1=1$,$y_1=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{2})$.

设直线 SD 与平面 SAB 所成角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{DS},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{DS}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{DS}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|-\sqrt{2}+2\sqrt{2}+\sqrt{2}|}{\sqrt{11}\times 2}=\frac{\sqrt{22}}{11}$.

所以直线 SD 与平面 SAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{22}}{11}$.

【变式 1】 (2009·东北育才)如图 8-179 所示,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PD\perp$ 底面 $ABCD$,

心得体会

底面 $ABCD$ 为正方形，$PD=DC$，E，F 分别是 AB，PB 的中点. 求 DB 与平面 DEF 所成角的正弦值.

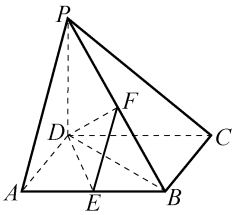


图　8-179

【变式 2】 (2011・天津文，17(3))如图 8-180 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle ADC=45^\circ$，$AD=AC=1$，O 为 AC 的中点，$PO\perp$ 平面 $ABCD$，$PO=2$，M 为 PD 的中点. 求直线 AM 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值.

【变式 3】 (2009・江西理，20)如图 8-181 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=AD=4$，$AB=2$，以 AC 的中点 O 为球心，以 AC 为直径的球面交 PD 于点 M，求直线 CD 与平面 ACM 所成角的正弦值.

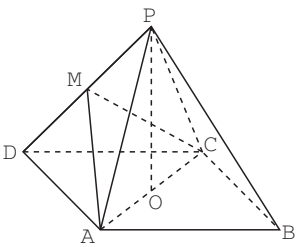


图　8-180

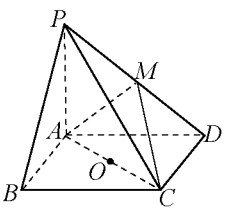


图　8-181

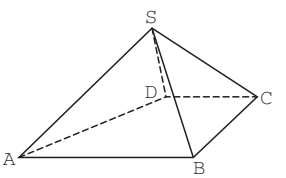


图　8-182

【变式 4】 (2011・大纲全国理，19(2))如图 8-182 所示，四棱锥 $S-ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$BC\perp CD$，侧面 SAB 为等边三角形，$AB=BC=2$，$CD=SD=1$.
求 AB 与平面 SBC 所成的角的正弦值.

十一、求平面与平面所成角的方法

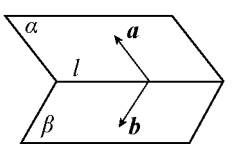


图　8-183

(1)在平面 α 内，$\boldsymbol{a}\perp l$，在平面 β 内，$\boldsymbol{b}\perp l$，其方向如图 8-183 所示，则二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角的余弦值为 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

(2)设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个半平面的法向量，其方向一个指向二面角内侧，另一个指向二面角外侧，则二面角 $\alpha-l-\beta$ 的余弦值为 $\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$.

【例 8.53】 (2008・山东理，20)如图 8-184 所示，已知四棱锥 $P-ABCD$，底面 $ABCD$ 为菱形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=AB=2$，$\angle ABC=60^\circ$，E，F 分别为 BC，PC 的中点. 求二面角 $E-AF-C$ 的余弦值.

【解析】 AE，AD，AP 两两垂直，以 A 为坐标原点，建立如图 8-185 所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，又 E，F 分别为 BC，PC 的中点，所以 $A(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(\sqrt{3},0,0)$，$F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$. 设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，

又 $\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{AF}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$，

心得体会

得$\begin{cases}\sqrt{3}x=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+z=0\end{cases}$，令 $z=-1$，则 $\boldsymbol{n}=(0,2,-1)$.

因为 $BD\perp AC$，$BD\perp PA$，$PA\cap AC=A$，所以 $BD\perp$ 平面 PAC，故$\overrightarrow{BD}$为平面 AFC 的法向量，又$\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{3},3,0)$，所以$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BD}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BD}|}=\dfrac{6}{\sqrt{5}\times2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

由图知所求的二面角为锐角，所以所求二面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

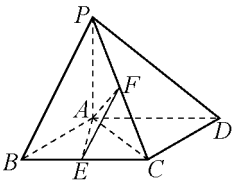


图 8-184

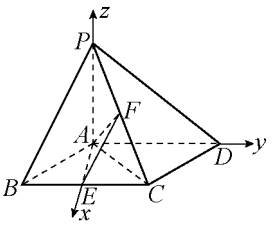


图 8-185

【变式 1】 （2004・全国Ⅰ理，20）如图 8-186 所示，已知四棱锥 $P-ABCD$，$PB\perp AD$，侧面 PAD 是边长等于 2 的正三角形，底面 $ABCD$ 为菱形，侧面 PAD 与底面 $ABCD$ 所成二面角为 120°，求平面 APB 与平面 CPB 所成二面角的余弦值.

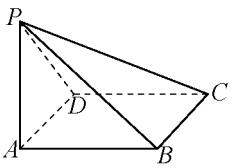


图 8-186

【变式 2】 （2010・全国Ⅰ，19）如图 8-187 所示，四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SD\perp$ 底面 $ABCD$，$AB/\!/DC$，$AD\perp DC$，$AB=AD=1$，$DC=SD=2$，E 为棱 SB 上一点，平面 $EDC\perp$ 平面 SBC. 求二面角 $A-DE-C$ 的大小.

【变式 3】 （2008・山东临沂）如图 8-188 所示，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=1$，$CB=\sqrt{2}$，侧棱 $AA_1=1$，侧面 AA_1B_1B 的两条对角线的交点为 D，B_1C_1 的中点为 M，求平面 B_1BD 与平面 CDM 所成二面角的正弦值.

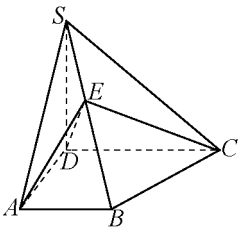


图 8-187

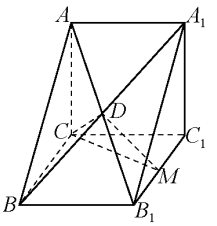


图 8-188

十二、求点到平面距离的方法

如图 8-189 所示，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，点 Q 是平面 α 内一点，点 P 是平面 α 外的任意一点，则点 P 到平面 α 的距离 d，就等于向量$\overrightarrow{PQ}$在法向量 $\boldsymbol{n}$ 方向上的投影的绝对值，

即 $d=|\overrightarrow{PO}|=|\overrightarrow{PQ}||\cos\langle\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{n}\rangle|$ 或 $d=\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.

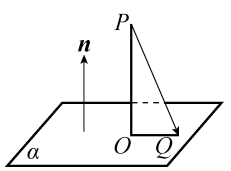


图 8-189

【例 8.54】 如图 8-190 所示，该多面体是由底面为 $ABCD$ 的长方体

被截而得到的，其中 $AB=4$，$BC=2$，$CC_1=3$，$BE=1$，求点 C 到平面 AEC_1F 的距离.

【解析】 建立如图 8-191 所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则 $D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(2,4,0)$，$C(0,4,0)$，$E(2,4,1)$，$C_1(0,4,3)$. 设 $F(0,0,z)$，因为四边形 AEC_1F 为平行四边形，所以 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EC_1}$，得 $(-2,0,z)=(-2,0,2)$，故 $z=2$，$F(0,0,2)$，设 $\boldsymbol{n}_1$ 为平面 AEC_1F 的法向量，$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，由 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AE}$，$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AF}$ 得 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，又 $\overrightarrow{AE}=(0,4,1)$，$\overrightarrow{AF}=(-2,0,2)$，得 $\begin{cases}4y_1+z_1=0\\ -2x_1+2z_1=0\end{cases}$，

令 $z_1=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=\left(1,-\frac{1}{4},1\right)$，又 $\overrightarrow{CC_1}=(0,0,3)$，

则点 C 到平面 AEC_1F 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}_1|}{|\boldsymbol{n}_1|}=\dfrac{3}{\frac{\sqrt{33}}{4}}=\dfrac{4\sqrt{33}}{11}$.

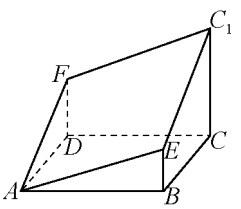


图　8-190

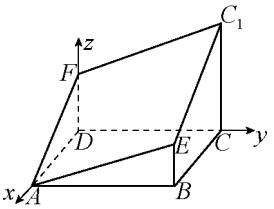


图　8-191

【评注】 $CC_1\cap$ 平面 $\alpha=C_1$，d 为点 C 到平面 α 的距离，$\boldsymbol{n}$ 为 α 的一个法向量，从而 $d=|\overrightarrow{CC_1}|\,|\cos\langle\overrightarrow{CC_1},\boldsymbol{n}\rangle|=|\overrightarrow{CC_1}|\dfrac{|\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CC_1}|\,|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.

【变式 1】 如图 8-192 所示，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=a$，D，E 分别为棱 AB，BC 的中点，M 为棱 AA_1 上的点，二面角 $M-DE-A$ 为 $30°$.

求 MA 的长，并求点 C 到平面 MDE 的距离.

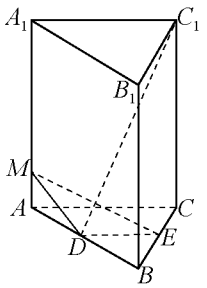


图　8-192

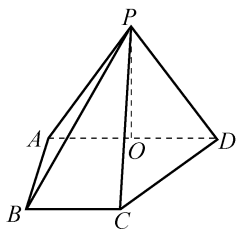


图　8-193

【变式 2】 如图 8-193 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，侧棱 $PA=PD=\sqrt{2}$，底面 $ABCD$ 为直角梯形，其中 $BC/\!/AD$，$AB\perp AD$，$AD=2AB=2BC=2$，O 为 AD 中点，线段 AD 上是否存在点 Q，到平面 PCD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$？若存在，求出 $\dfrac{AQ}{QD}$ 的值；若不存在，请说明理由.

心得体会

第七节　空间角与距离

考纲解读

1. 掌握各种角的定义，弄清异面直线所成的角与两直线所成角、二面角与二平面角的平面角、直线与平面所成的角和斜线与平面所成角、二面角与两平面所成的角的联系与区别，弄清它们各自的取值范围.
2. 细心体会求空间角的转化和数形结合思想，熟练掌握平移、射影等方法.
3. 灵活运用向量方法与综合方法，从不同角度解决立体几何中角的问题.

命题趋势探究

异面直线所成的角、线面角、二面角是高考中考查的热点. 解答与空间角有关的问题时既可用传统法，又可用向量法. 在新课程标准下，对立体几何的基本理论知识要求有所降低，因此应用向量这一工具解题更为重要，特别是要熟练掌握利用空间图形的特殊性，构造适当的空间直角坐标系解决问题的方法，并能灵活应用.

空间角是立体几何中的一个重要概念，它是空间图形的一个突出的量化指标，是空间图形位置关系的具体体现，故以高频的姿态出现在历届高考试题中，在选择题、填空题及解答题中均有出现.

知识点精讲

一、空间角的定义和范围

(1)两条异面直线所成角 θ 的范围是 $0^\circ<\theta\leqslant 90^\circ$，当 $\theta=90^\circ$ 时，这两条异面直线互相垂直.

(2)斜线 AO 与它在平面 α 内的射影 AB 所成的角 θ 叫作直线与平面所成的角.

平面的斜线和平面所成的角，是这条斜线和这个平面内的任一直线所成角中最小的角，如果直线和平面垂直，那么直线与平面所成的角为 90°；如果直线和平面平行或直线在平面内，那么就说直线和平面所成的角为 0°. 直线和平面所成的角的范围为 $[0^\circ,90^\circ]$；斜线和平面所成的角的范围为 $(0^\circ,90^\circ)$.

(3)从一条直线出发的两个半平面所组成的角叫作二面角，这条直线叫作二面角的棱，这两个半平面叫作二面角的面，棱为 l，两个面分别为 α,β 的二面角记为 $\alpha-l-\beta$，二面角的范围是 $[0,\pi]$.

(4)一个平面垂直于二面角的公共棱 l，且与两个半平面的交线分别是射线 OA,OB，则 $\angle AOB$ 叫作二面角的平面角，平面角是直角的二面角叫直二面角，相交成直二面角的

两个平面垂直.

二、点到平面的距离定义

点到平面的距离即点到它在平面内的正射影的距离.

题型归纳及思路提示

题型 119　空间角的计算

思路提示：求解空间角如异面直线所成的角、直线与平面所成的角、二面角的平面角的大小，常用方法有：(1)定义法；(2)选点平移法；(3)垂线法；(4)垂面法；(5)向量法.

一、异面直线所成的角

方法一：通过选点平移法将异面直线所成的角转化为共面相交的两直线的夹角来求解，但要注意两条异面直线所成的角的范围是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

方法二：向量法. 设两异面直线 a 和 b 的方向向量为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，利用夹角余弦公式可求得 a 与 b 的夹角大小 α，且 $\cos\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

【例 8.55】 (2010·全国Ⅰ文，9)直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 $\angle BAC=90°$，$AB=AC=AA_1$，则异面直线 BA_1 与 AC_1 所成的角等于(　　).

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

【分析】 通过选点平移法将异面直线所成的角转化为相交直线的夹角，在三角形中利用余弦定理来求解.

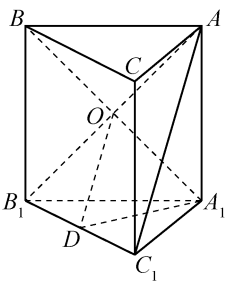


图　8-194

【解析】 如图 8-194 所示，连接 AB_1，设 $AB_1\cap A_1B=O$，过点 O 作 $OD\parallel AC_1$ 交 B_1C_1 于点 D，连接 A_1D，故 $\angle A_1OD$(或其补角)为异面直线 A_1B 与 AC_1 所成的角，设 $AB=AC=AA_1=a$，则 $AC_1=\sqrt{2}a$，$OD=\frac{1}{2}AC_1=\frac{\sqrt{2}a}{2}$，$OA_1=\frac{A_1B}{2}=\frac{\sqrt{2}a}{2}$，$A_1D=\frac{1}{2}B_1C_1=\frac{\sqrt{2}a}{2}$，故 $\triangle A_1OD$ 为正三角形，$\angle A_1OD=60°$，即异面直线 BA_1 与 AC_1 所成的角等于 60°. 故选 C.

【变式 1】 (2010·湖南文，18)如图 8-195 所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=1$，$AA_1=2$，M 是棱 CC_1 的中点. 求异面直线 A_1M 和 C_1D_1 所成的角的正切值.

【变式 2】 (2007·北京文，17)如图 8-196 所示，在 Rt$\triangle AOB$ 中，$\angle OAB=\frac{\pi}{6}$，斜边 $AB=4$，Rt$\triangle AOC$ 可以通过 Rt$\triangle AOB$ 以直线 AO 为轴旋转得到，且二面角 $B-AO-C$ 是直二面角，点 D 是 AB 的中点. 求异面直线 AO 与 CD 所成角的正切值.

心得体会

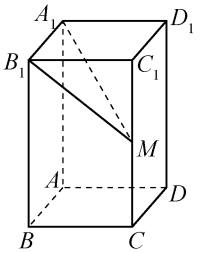


图 8-195

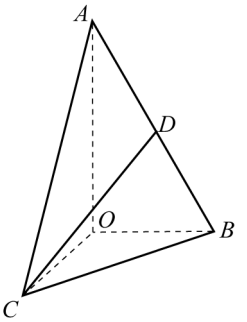


图 8-196

【变式 3】 (2011·天津理,17(1))如图 8-197 所示,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,H 是正方形 AA_1B_1B 的中心,$AA_1=2\sqrt{2}$,$C_1H\perp$ 平面 AA_1B_1B,$C_1H=\sqrt{5}$,求异面直线 AC 与 A_1B_1 所成角的余弦值.

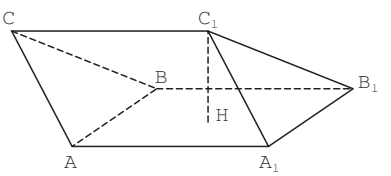


图 8-197

【例 8.56】 (2009·福建理,17)如图 8-198 所示,四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形,$MD\perp$ 平面 $ABCD$,$NB\perp$ 平面 $ABCD$,且 $MD=NB=1$,E 为 BC 的中点.求异面直线 NE 与 AM 所成角的余弦值.

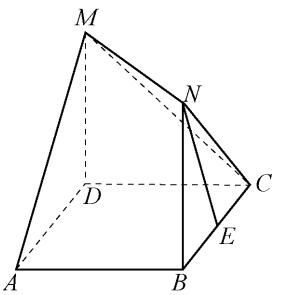


图 8-198

【分析】 利用向量法求解异面直线所成的角.

【解析】 如图 8-199 所示,以 D 为坐标原点,建立空间直角坐标系 $D-xyz$. 依题意,得 $D(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$M(0,0,1)$,$C(0,1,0)$,$B(1,1,0)$,$N(1,1,1)$,$E\left(\frac{1}{2},1,0\right)$. 所以 $\overrightarrow{NE}=\left(-\frac{1}{2},0,-1\right)$,$\overrightarrow{AM}=(-1,0,1)$.

因为 $\cos\langle\overrightarrow{NE},\overrightarrow{AM}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{NE}|\,|\overrightarrow{AM}|}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,

所以异面直线 NE 与 AM 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

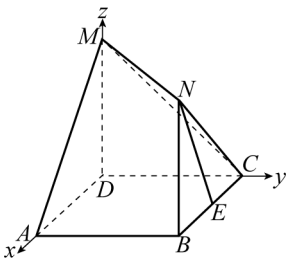


图 8-199

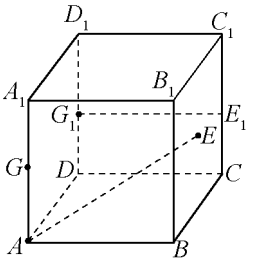


图 8-200

【变式 1】 (2009·广东理,18)如图 8-200 所示,已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,点 E 是正方形 BCC_1B_1 的中心,点 G 是棱 AA_1 的中点,设点 E_1,G_1 分别是 E,G 在平面 DCC_1D_1 内的正投影.求异面直线 E_1G_1 与 EA 所成角的正弦值.

心得体会

二、直线与平面所成的角

方法一：(垂线法)直线与平面所成的角就是直线与此直线在平面内的射影直线所成的角. 过直线上一点作出平面的垂线，得到垂足，而射影直线就通过斜足与垂足. 因此作出平面的垂线是必要的一步.

方法二：(向量法)直线与平面所成的角为直线的方向向量与平面的法向量所成的锐角的余角.

如图 8-201 所示，设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{l}_1$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，直线 l 和平面 α 所成的角为 θ，则 $\langle \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{n}\rangle + \theta = \frac{\pi}{2}$，或 $\langle \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{n}\rangle - \theta = \frac{\pi}{2}$，因为 θ 的取值范围是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\sin\theta = |\cos\langle \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{n}\rangle| = \frac{|\boldsymbol{l}_1 \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{l}_1||\boldsymbol{n}|}$.

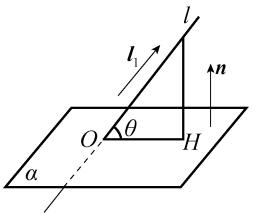


图　8-201

方法三：(点面距法)利用相关方法求出直线上一点到平面的距离 d，再求出此点与斜足间的距离 l，设直线 l 和平面 α 所成的角为 θ，则 $\sin\theta = \frac{d}{l}$.

【例 8.57】 (2010 · 四川理，15)如图 8-202 所示，二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小是 60°，线段 $AB \subset \alpha$，$B \in l$，AB 与 l 所成角为 30°，则 AB 与平面 β 所成的角的正弦值是_____.

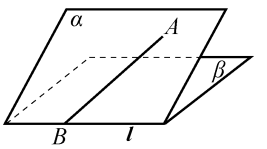


图　8-202

【分析】 作出直线 AB 在平面 β 内的射影，射影与 AB 所成的角即为 AB 与平面所成的角，再求其正弦值.

【解析】 如图 8-203 所示，过点 A 作 $AH \perp \beta$ 于点 H，过点 H 作 $GH \perp l$ 于点 G，连接 AG，由三垂线定理得 $l \perp AG$，故 $\angle AGH$ 为二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角，得 $\angle AGH = 60°$，不妨设 $AG = 2$，则 $AH = \sqrt{3}$，$HG = 1$，又 AB 与 l 所成的角为 30°，故 $AB = \frac{2}{\sin 30°} = 4$，在 Rt$\triangle ABH$ 中，$\sin\angle ABH = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{4}$，故 AB 与平面 β 所成的角的正弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

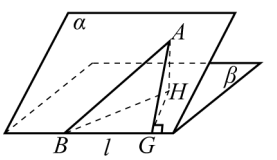


图　8-203

【变式 1】 (2008 · 上海理，16)如图 8-204 所示，在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是 BC_1 的中点. 求直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值.

【变式 2】 如图 8-205 所示，在三棱锥 $V - ABC$ 中，$VC \perp$ 底面 ABC，$AC \perp BC$，点 D 是 AB 的中点，且 $AC = BC = a$，$\angle VDC = \theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$. 当 θ 变化时，求直线 BC 与平面 VAB 所成角的取值范围.

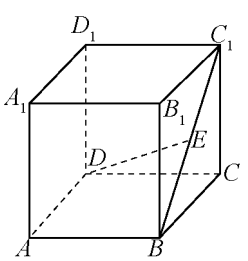


图　8-204

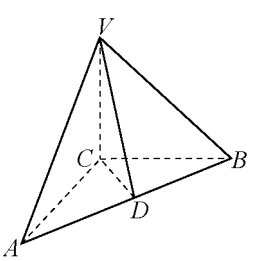


图　8-205

心得体会

【变式 3】（2007·北京理，16）如图 8-206 所示，在 Rt△AOB 中，$\angle OAB=\frac{\pi}{6}$，斜边 $AB=4$. Rt△AOC 可以通过 Rt△AOB 以直线 AO 为轴旋转得到，且二面角 $B-AO-C$ 是直二面角，动点 D 在斜边 AB 上，求 CD 与平面 AOB 所成角正切的最大值.

【变式 4】（2009·全国Ⅱ理）如图 8-207 所示，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，D，E 分别为 AA_1，B_1C 的中点，$DE\perp$ 平面 BCC_1B. 设二面角 $A-BD-C$ 为 60°，求 B_1C 与平面 BCD 所成角的大小.

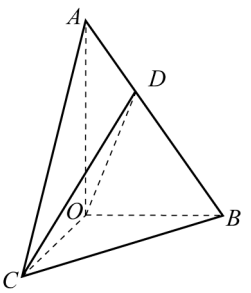


图 8-206

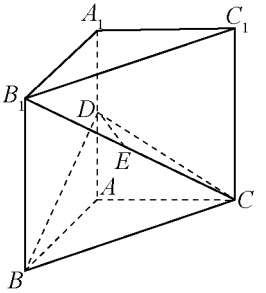


图 8-207

三、二面角的平面角

求二面角的平面角的方法有：①根据定义，即在公共棱上取一点分别在两个半平面内作棱的垂线，两条垂线所组成的角即为二面角的平面角；②利用三垂线定理及其逆定理；③当二面角由两个等腰三角形构成时，利用底边的两条中线；④求正棱锥侧面夹角时利用全等三角形；⑤在直棱柱中求截面与底面夹角时，用二面角的面积射影定理 $S_{射}=S_{斜}|\cos\theta|$，其中 θ 为二面角的大小；⑥利用空间向量求解二面角，转化为两平面的法向量夹角，公共棱不明显的二面角常用此法来求，但应注意法向量 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 的夹角与二面角 θ 的大小是相等或互补的.

【例 8.58】（2008·湖北理，18）如图 8-208 所示，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $A_1BC\perp$ 侧面 A_1ABB_1. 若直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角为 θ，二面角 A_1-BC-A 的大小为 φ，试判断 θ 与 φ 的大小关系，并予以证明.

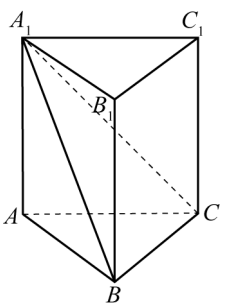


图 8-208

【分析】 利用定义找出线面角与二面角，并比较其大小.

【解析】 如图 8-209 所示，过 A 在平面 A_1ABB_1 内作 $AD\perp A_1B$ 于点 D，则由平面 $A_1BC\perp$ 侧面 A_1ABB_1，且平面 $A_1BC\cap$ 侧面 $A_1ABB_1=A_1B$，得 $AD\perp$ 平面 A_1BC，连接 CD，则知 $\angle ACD$ 是直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角，即 $\angle ACD=\theta$，由 $BC\perp AA_1$，$BC\perp AD$，$AA_1\cap AD=A$，AA_1，$AD\subset$ 平面 A_1AB，得 $BC\perp$ 平面 A_1AB，故 $BC\perp A_1B$，$BC\perp AB$. 所以 $\angle ABA_1$ 是二面角 A_1-BC-A 的平面角，即 $\angle ABA_1=\varphi$，于是在Rt△ADC中，$\sin\theta=\frac{AD}{AC}$，在Rt△ADB中，$\sin\varphi=\frac{AD}{AB}$. 不难知 $AB<AC$，因此 $\sin\theta<\sin\varphi$，又 $0<\theta,\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\theta<\varphi$.

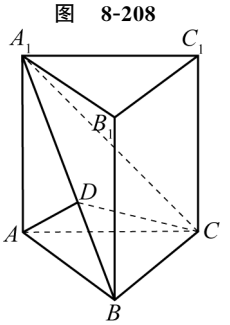


图 8-209

心得体会

【变式 1】 (2009・湖北理,18)如图 8-210 所示,四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形,$SD\perp$平面 $ABCD$,$SD=2a$,$AD=\sqrt{2}a$ $(a>0)$. 点 E 是 SD 上的点,且 $DE=\lambda a$ $(0<\lambda\leqslant 2)$.

设二面角 $C-AE-D$ 的大小为 θ,直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成的角为 φ. 若 $\tan\theta\cdot\tan\varphi=1$,求 λ 的值.

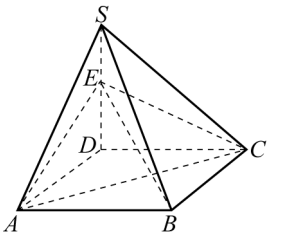


图　8-210

【变式 2】 (2006・全国Ⅱ理,19)如图 8-211 所示,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=BC$,D,E 分别为 BB_1,AC_1 的中点,设 $AA_1=AC=\sqrt{2}AB$. 求二面角 A_1-AD-C_1 的大小.

【变式 3】 (2010・湖北理,18)如图 8-212 所示,在四面体 $OABC$ 中,$OC\perp OA$,$OC\perp OB$,$\angle AOB=120°$,且 $OA=OB=OC=1$. 求二面角 $O-AC-B$ 的平面角的余弦值.

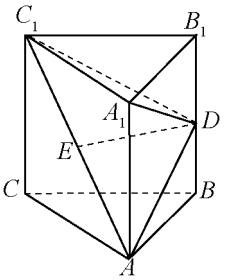


图　8-211

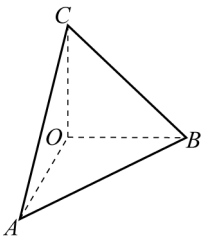


图　8-212

【变式 4】 如图 8-213 所示,已知四棱锥 $P-ABCD$,底面 $ABCD$ 是菱形,$\angle DAB=60°$,$PD\perp$平面 $ABCD$,$PD=AD$,点 E 为 AB 的中点,点 F 为 PD 的中点.

求二面角 $P-AB-F$ 的余弦值.

【变式 5】 (2010・北京理,16)如图 8-214 所示,正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直,$CE\perp AC$,$EF/\!/AC$,$AB=\sqrt{2}$,$CE=EF=1$. 求二面角 $A-BE-D$ 的大小.

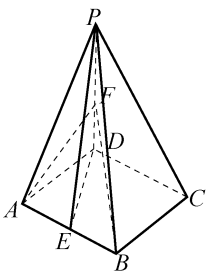


图　8-213

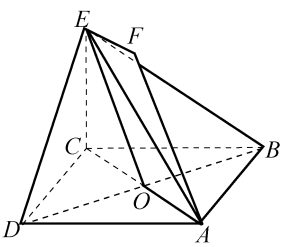


图　8-214

【变式 6】 (2010・广东理,18)如图 8-215 所示,$\overset{\frown}{AEC}$是半径为 a 的半圆,AC 为直径,点 E 为$\overset{\frown}{AC}$的中点,点 B 和点 C 为线段 AD 的三等分点,平面 AEC 外一点 F 满足 $FB=FD=\sqrt{5}a$,$FE=\sqrt{6}a$,点 Q,R 分别为线段 FE,FB 上的点,使得 $FQ=\frac{2}{3}FE$,$FR=\frac{2}{3}FB$,求平面 BED 与平面 RQD 所成二面角的正弦值.

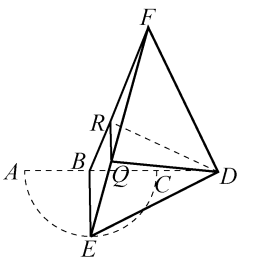


图　8-215

心得体会

【例 8.59】 (2010·天津理,19)如图 8-216 所示,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别是 BC,CC_1 上的点,$CF=AB=2CE$,$AB:AD:AA_1=1:2:4$,求二面角 A_1-ED-F 的正弦值.

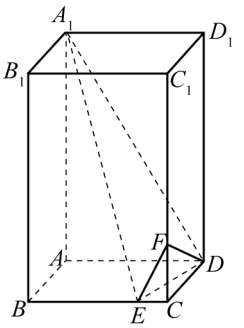


图 8-216

【解析】 如图 8-217 所示,连接 AC,设 $AC\cap DE=N$,因为 $\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{EC}{CD}=\dfrac{1}{2}$,所以 $\mathrm{Rt}\triangle DCE\backsim\mathrm{Rt}\triangle CBA$,从而 $\angle CDE=\angle BCA$,

又由于 $\angle CDE+\angle CED=90^\circ$,所以 $\angle BCA+\angle CED=90^\circ$,

故 $AC\perp DE$,又 $DE\perp CF$,$AC\cap CF=C$,

则 $DE\perp$ 平面 CFN,得 $DE\perp FN$,同理得 $DE\perp A_1N$,

故 $\angle A_1NF$ 为二面角 A_1-DE-F 的平面角,

易知 $\mathrm{Rt}\triangle CNE\backsim\mathrm{Rt}\triangle CBA$,所以 $\dfrac{CN}{BC}=\dfrac{EC}{AC}$,又 $AC=\sqrt{5}$,所以 $CN=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,在 $\mathrm{Rt}\triangle CNF$ 中,$NF=\sqrt{CF^2+CN^2}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1AN$ 中,$A_1N=\sqrt{AN^2+AA_1^2}=\dfrac{4\sqrt{30}}{5}$,连接 A_1C_1,A_1F,在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1C_1F$ 中,$A_1F=\sqrt{A_1C_1^2+C_1F^2}=\sqrt{14}$,在 $\triangle A_1NF$ 中,$\cos\angle A_1NF=\dfrac{A_1N^2+FN^2-A_1F^2}{2A_1N\cdot FN}=\dfrac{2}{3}$,所以 $\sin\angle A_1NF=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$,所以二面角 A_1-ED-F 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

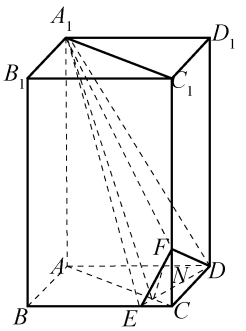


图 8-217

【变式 1】 (2010·全国Ⅰ理,19)如图 8-218 所示,四棱锥 $S-ABCD$ 中,$SD\perp$ 平面 $ABCD$,$AB/\!/DC$,$AD\perp DC$,$AB=AD=1$,$DC=SD=2$,E 为棱 SB 上的一点,平面 $EDC\perp$ 平面 SBC,求二面角 $A-DE-C$ 的大小.

【变式 2】 (2011·湖北理,18(2))如图 8-219 所示,已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长都是 4,E 是 BC 的中点,动点 F 在侧棱 CC_1 上,且不与点 C 重合,设二面角 $C-AF-E$ 的大小为 θ,求 $\tan\theta$ 的最小值.

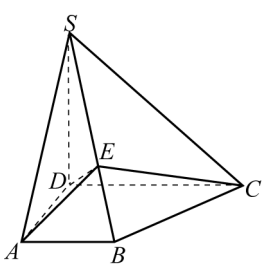


图 8-218

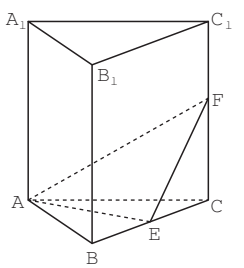


图 8-219

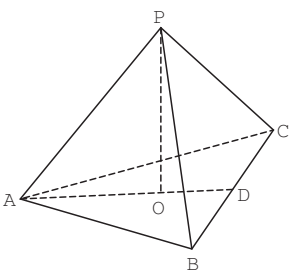


图 8-220

【变式 3】 (2011·浙江理,20(2))如图 8-220 所示,在三棱锥 $P-ABC$ 中,$AB=AC$,D 为 BC 的中点,$PO\perp$ 平面 ABC,垂足 O 落在线段 AD 上. 若 $BC=8$,$PO=4$,$AO=3$,$OD=2$,求二面角 $B-AP-C$ 的大小.

【例 8.60】 (2008·山东理,20)如图 8-221 所示,已知四棱锥 $P-ABCD$,底面 $ABCD$ 是

菱形，$PA\perp$平面 $ABCD$，$PA=AB=2$，$\angle ABC=60^\circ$，E,F 分别是 BC,PC 的中点. 求二面角 $E-AF-C$ 的余弦值.

【分析】 利用空间向量法求解二面角的平面角.

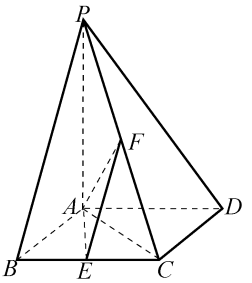


图　8-221

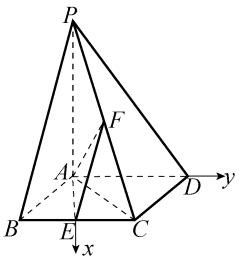


图　8-222

【解析】 由 AE,AD,AP 两两垂直，以 A 为坐标原点，建立如图 8-222 所示的空间直角坐标系 $A-xyz$. 又 E,F 分别是 BC,PC 的中点，所以 $A(0,0,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$P(0,0,2)$，$E(\sqrt{3},0,0)$，$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$. 所以 $\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$. 设平面 AEF 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}x_1=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1+z_1=0\end{cases}$，取 $z_1=-1$，则 $y=2$. 所以 $\boldsymbol{m}=(0,2,-1)$，设平面 AFC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x_2+\frac{1}{2}y_2+z_2=0\\ \sqrt{3}x_2+y_2=0\end{cases}$，取 $x_2=-1$，则 $y_2=\sqrt{3}$，$z_2=0$，所以 $\boldsymbol{n}=(-1,\sqrt{3},0)$ 设二面角 $E-AF-C$ 的大小为 θ，则 $\cos\theta=\cos\langle m,n\rangle=\frac{m\cdot n}{|m||n|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times 2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 所以所求二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

【变式 1】 （2011・课标全国理，18(2)）如图 8-223 所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle DAB=60^\circ$，$AB=2AD$，$PD\perp$底面 $ABCD$. 若 $PD=AD$，求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.

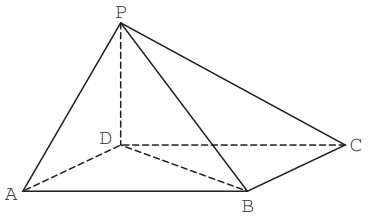


图　8-223

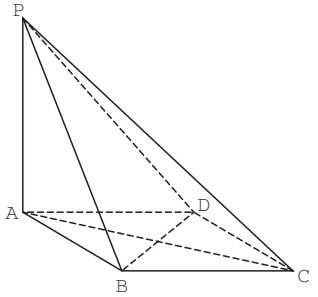


图　8-224

【变式 2】 （2011・北京理，16(3)）如图 8-224 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$平面

心得体会

$ABCD$，底面 $ABCD$ 是菱形，$AB=2$，$\angle BAD=60^\circ$. 当平面 PBC 与平面 PDC 垂直时，求 PA 的长.

【变式 3】 (2011·辽宁理，18(2))如图 8-225 所示，四边形 $ABCD$ 为正方形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD/\!/QA$，$QA=AB=\frac{1}{2}PD$. 求二面角 $Q-BP-C$ 的余弦值.

【变式 4】 (2011·山东理，19(2))在如图 8-226 所示的几何体中，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle ACB=90^\circ$，$EA\perp$ 平面 $ABCD$，$EF/\!/AB$，$FG/\!/BC$，$EG/\!/AC$，$AB=2EF$. 若 $AC=BC=2AE$，求二面角 $A-BF-C$ 的大小.

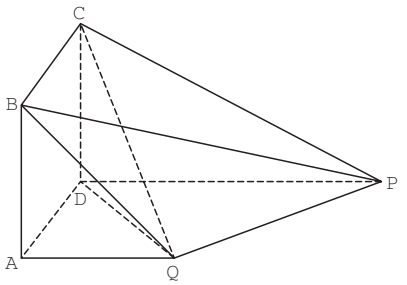


图 8-225

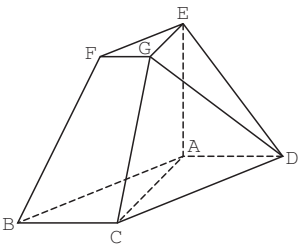


图 8-226

题型 120　点到平面距离的计算

思路提示：求解点到平面的距离，常用方法有：(1)直接法；(2)转化法；(3)向量法.

(1)定义法. 作出点到平面的垂线，垂线段的长度就是点到平面的距离.

(2)转化法. 利用等体积法或者线面平行的位置关系，将点 A 到平面 α 的距离转化为与其相关的点 B 到平面 α 的距离.

(3)向量法. 点 P 为平面 α 外一点，点 Q 为平面 α 上任一点，$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量，点 P 到平面 α 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.

【例 8.61】 如图 8-227 所示，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AC=BC=2$，$\angle ACB=90^\circ$，$AP=BP=AB$，$PC\perp AC$. 求点 C 到平面 APB 的距离.

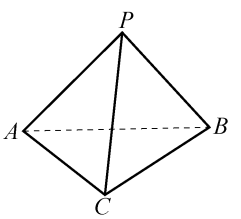


图 8-227

【分析】 利用定义法直接作出点 C 到平面 APB 的距离.

【解析】 如图 8-228 所示，取 AB 的中点 D，连接 CD，PD. 因为 $AP=BP$，所以 $PD\perp AB$. 又因为 $AC=BC$，所以 $CD\perp AB$. 又 $PD\cap CD=D$，所以 $AB\perp$ 平面 PCD，$AB\subset$ 平面 APB，所以平面 $PAB\perp$ 平面 PCD. 过 C 作 $CH\perp PD$，垂足为 H. 因为平面 $PAB\cap$ 平面 $PCD=PD$，所以 $CH\perp$ 平面 APB. 所以 CH 的长即为点 C 到平面 APB 的距离. 由 $AB\perp$ 平面 PCD，$PC\subset$ 平面 PCD，所以 $PC\perp AB$，又 $PC\perp AC$，$AC\cap AB=A$，故 $PC\perp$ 平面 ABC，又 $CD\subset$ 平面 ABC，所以 $PC\perp CD$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PCD$ 中，$CD=\frac{1}{2}AB=\sqrt{2}$，

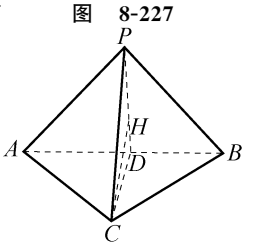


图 8-228

心得体会

$PD=\frac{\sqrt{3}}{2}PB=\sqrt{6}$，所以 $PC=\sqrt{PD^2-CD^2}=2$. 所以 $CH=\frac{PC\cdot CD}{PD}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以点 C 到平面 APB 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【评注】 这里直接作出点 C 到平面 APB 的垂线 CH（H 为垂足），CH 的长即为所求的点面距离.

【变式 1】 如图 8-229 所示，在四棱锥 $O-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形，$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$，$OA\perp$ 底面 $ABCD$，$OA=2$. 求点 B 到平面 OCD 的距离.

【变式 2】 如图 8-230 所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AB=\sqrt{6}$，求直线 AD 与平面 PBC 的距离.

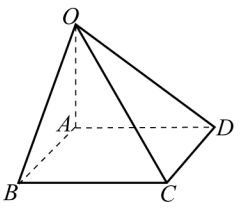


图　8-229

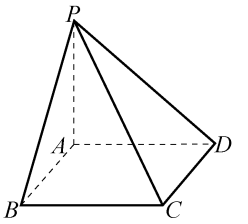


图　8-230

【例 8.62】 如图 8-231 所示，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2，D 为 CC_1 的中点. 求点 C 到平面 A_1BD 的距离.

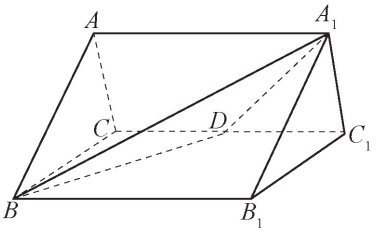


图　8-231

【分析】 利用等体积转化法求点 C 到平面 A_1BD 的距离.

【解析】 在 $\triangle A_1BD$ 中，$BD=A_1D=\sqrt{5}$，$A_1B=2\sqrt{2}$，$S_{\triangle A_1BD}=\sqrt{6}$，$S_{\triangle BCD}=1$. 在三棱柱中，$A_1$ 到平面 BCC_1B_1 的距离为 $\sqrt{3}$，设点 C 到平面 A_1BD 的距离为 d.

由 $V_{A_1-BCD}=V_{C-A_1BD}$，得 $\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BD}\cdot d$，所以 $d=\frac{\sqrt{3}S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle A_1BD}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以点 C 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【评注】 本题利用了等体积法转化，该方法是求解点到平面距离的重要方法.

【变式 1】 （2010·江苏，16）如图 8-232 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD=DC=BC=1$，$AB=2$，$AB/\!/DC$，$\angle BCD=90°$，求点 A 到平面 PBC 的距离.

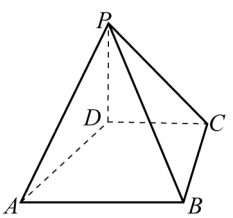


图　8-232

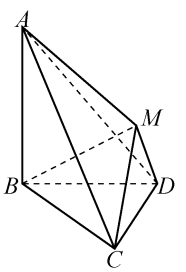


图　8-233

心得体会

【变式 2】 如图 8-233 所示，△BCD 与△MCD 都是边长为 2 的正三角形，平面 $MCD\perp$ 平面 BCD，$AB\perp$ 平面 BCD，$AB=2\sqrt{3}$，求点 A 到平面 MBC 的距离.

【例 8.63】 如图 8-234 所示，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面是等腰直角三角形，且 $AC=2$，$\angle ACB=90°$，侧棱 $AA_1=2$，D，E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点.

求点 A_1 到平面 AED 的距离.

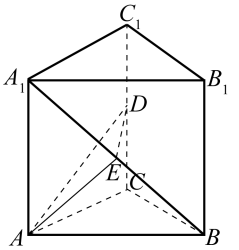


图 8-234

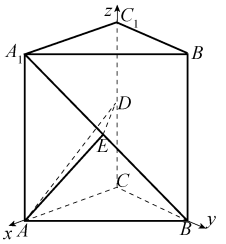


图 8-235

【分析】 利用向量法求解点到平面的距离.

【解析】 以点 C 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $C-xyz$.

如图 8-235 所示，$A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$D(0,0,1)$，$E(1,1,1)$，$A_1(2,0,2)$.

所以$\overrightarrow{DA}=(2,0,-1)$，$\overrightarrow{DE}=(1,1,0)$. 设平面 AED 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DA}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DE}$，得 $\begin{cases}2x-z=0\\x+y=0\end{cases}$，令 $x=1$，得 $\begin{cases}x=1\\y=-1\\z=2\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$，又 $\overrightarrow{DA_1}=(2,0,1)$，所以点 A_1 到平面 AED 的距离为 $d=\left|\dfrac{\overrightarrow{DA_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{4}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

【变式 1】 (2011·上海理，21(2))如图 8-236 所示，已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是底面边长为 1 的正四棱柱，O_1 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点. 若点 C 到平面 AB_1D_1 的距离为 $\dfrac{4}{3}$，求正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高.

【变式 2】 (2011·福建理，20(2))如图 8-237 所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$AB+AD=4$，$CD=\sqrt{2}$，$\angle CDA=45°$，$AB=AP$.

(1)若直线 PB 与平面 PCD 所成的角为 30°，求线段 AB 的长；

(2)在线段 AD 上是否存在一个点 G，使得点 G 到点 P，B，C，D 的距离都相等？说明理由.

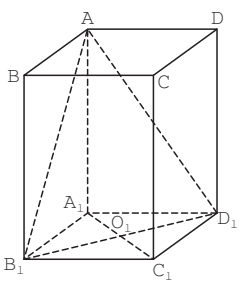


图 8-236

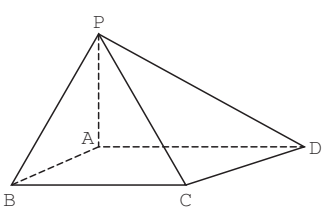


图 8-237

第九章　直线与圆的方程

第一节　直线的方程

考纲解读

1. 在平面直角坐标系中，结合具体图形，确定直线位置的几何要素.
2. 理解直线的倾斜角和斜率的概念，掌握两点的直线斜率的计算公式.
3. 掌握确定直线位置的几何要素，掌握直线方程的几种形式（点斜式、两点式及一般式），了解斜截式与一次函数的关系.

命题趋势探究

（1）从内容上看，主要考查直线方程的基本概念、倾斜角和斜率.

（2）从考查形式上看，以选择和填空题为主，鲜有解答题.

（3）从考查能力上看，侧重对基本知识和技能的考查，考生一定要体会数学思想与方法，提高综合解题能力.

（4）从近几年高考情况来看，预测 2012 年高考本专题会主要考查以下内容：

①根据条件确定直线方程.

②考查直线性质，如倾斜角与斜率关系、方程与充要条件等.

知识点精讲

一、基本概念

如果以一个方程的解为坐标的点都在某条直线上，且这条直线上点的坐标都是这个方程的解，那么这个方程叫这条直线的方程，这条直线叫这个方程的直线.

我们把直线 $y=kx+b$ 中 x 的系数 k（$k\in\mathbf{R}$）叫作这条直线的斜率. 垂直于 x 轴的直线，其斜率不存在. x 轴正方向与直线向上的方向所成的角叫这条直线的倾斜角. 倾斜角 $\alpha\in[0,\pi)$，规定与 x 轴平行或重合的直线的倾斜角为零度角，倾斜角不是 $\frac{\pi}{2}$ 的直线的倾斜角的正切值叫该直线的斜率，常用 k 表示，即 $k=\tan\alpha$.

心得体会

二、基本公式

1. $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$两点间的距离公式

$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

2. 斜率公式

$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\tan\alpha\left(x_1\neq x_2,\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. 直线方程的几种形式

(1)点斜式：直线的斜率 k 存在 $y-y_0=k(x-x_0)$：①当 $k=0$ 时，$y=y_0$；②当 k 不存在时，$x=x_0$.

(2)斜截式：直线的斜率 k 存在，且过点$(0,b)$，$y=kx+b$.

(3)两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$，不能表示垂直于坐标轴(包含 x 轴和 y 轴)的直线.

注 $(x_2-x_1)(y-y_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$可表示经过两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$的所有直线.

(4) 截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，不能表示垂直于坐标轴及过原点的直线.

(5) 一般式：$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq0)$，能表示平面上任何一条直线.

题型归纳及思路提示

题型 121　倾斜角与斜率的计算

思路提示：正确理解倾斜角的定义，明确倾斜角的取值范围，熟记斜率公式 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，根据该公式求出经过两点的直线的斜率. 当 $x_1=x_2$，$y_1\neq y_2$ 时，直线的斜率不存在，此时的倾斜角为 90°.

求斜率可用 $k=\tan\alpha(\alpha\neq90°)$，其中 α 为倾斜角，由此可见倾斜角与斜率相互联系，不可分割. 牢记“斜率变化分两段，90°是分界，遇到斜率要谨记，存在与否要讨论”.

【例 9.1】 (2010·山东青岛)设直线 l 与 x 轴的交点是 P，且倾斜角是 α，若将此直线绕点 P 按逆时针方向旋转 45°，得到直线的倾斜角为 $\alpha+45°$，则(　　).

A. $0°\leqslant\alpha\leqslant180°$　　B. $0°\leqslant\alpha<135°$　　C. $0°<\alpha\leqslant135°$　　D. $0°<\alpha<135°$

【解析】 解答本题应紧扣直线的倾斜角的取值范围，还要注意与 x 轴相交的直线的倾斜角不能为 0°，所以有 $\begin{cases}0°<\alpha<180°\\0°\leqslant\alpha+45°<180°\end{cases}$，即 $0°<\alpha<135°$. 故选 D.

【评注】 本题考查直线倾斜角的概念及范围问题，本题中将 $0°<\alpha<180°$错认为 $0°\leqslant\alpha<180°$是考生失分的主要原因.

【例 9.2】 (2008·山东济南)已知直线 l 的倾斜角为 α，且 $0°\leqslant\alpha<135°$，则直线 l 的斜率

心得体会

的取值范围是(　　).

A. $[0,+\infty)$　　B. $(-\infty,+\infty)$

C. $[1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$

【解析】 由 $k=\tan\alpha(0\leqslant\alpha<135^\circ)$,

当 $0^\circ\leqslant\alpha<90^\circ$ 时,$k=\tan\alpha\geqslant0$;

当 $\alpha=90^\circ$ 时,斜率不存在;

当 $90^\circ<\alpha<135^\circ$ 时,$k=\tan\alpha<-1$.

所以直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$. 故选 D.

【变式 1】 若直线 l_1,l_2 的倾斜角分别为 α_1,α_2,则下列四个命题中正确的是(　　).

A. 若 $\alpha_1<\alpha_2$,则两直线的斜率 $k_1<k_2$

B. 若 $\alpha_1=\alpha_2$,则两直线的斜率 $k_1=k_2$

C. 若两直线的斜率 $k_1<k_2$,则 $\alpha_1<\alpha_2$

D. 若两直线的斜率 $k_1=k_2$,则 $\alpha_1=\alpha_2$

【例 9.3】 若直线 l 的斜率 k 的变化范围是 $[-1,\sqrt{3}]$,则其倾斜角的变化范围是(　　).

A. $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$　　B. $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$

C. $\left[-\frac{\pi}{3},-\frac{3\pi}{4}\right]$　　D. $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

【分析】 斜率的取值范围有正有负的情况,要注意分段. 如本题需把 $k\in[-1,\sqrt{3}]$ 分为 $k\in[-1,0)$ 和 $k\in[0,\sqrt{3}]$ 两段.

【解析】 当 $-1\leqslant k<0$ 时,倾斜角的范围是 $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$;当 $0\leqslant k\leqslant\sqrt{3}$ 时,倾斜角的范围是 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$. 故所求倾斜角的范围是 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$. 故选 D.

【评注】 (1)研究斜率的变化要与倾斜角的变化结合起来考虑,因为倾斜角的范围是 $[0,\pi)$,该范围不是正切函数的单调区间,往往要分段,即分为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 讨论解决. 相对应的,对斜率多分成 $k\geqslant0$ 及 $k<0$ 两段来讨论.

(2)沟通直线斜率与倾斜角关系的工具是正切函数 $y=\tan\alpha$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上的图像. 通过此图像(如图 9-1 所示)能很好地理解斜率的变化与倾斜角变化的联系. 当 $k=\tan\alpha\in[-1,\sqrt{3}]$ 时,易见对应的倾斜角的取值范围是 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

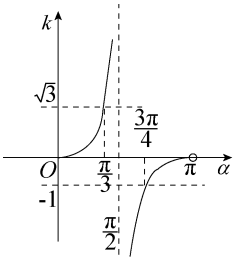


图　9-1

(3)由斜率范围确定倾斜角的范围,求解时要注意:

①斜率不存在时,倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$;②熟记倾斜角的取值范围是 $[0,\pi)$;③由斜率 k 的范围求倾斜角的范围时,利用数形结合法(结合正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $[0,\pi)$ 上的图像,有利于问题的求解.

【变式 1】 (2007·东莞)直线 l 经过 $A(2,1),B(1,m^2)$ 两点($m\in\mathbf{R}$),那么直线 l 的倾斜

心得体会

角的取值范围是(　　).

A. $[0,\pi)$　　B. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$

C. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$　　D. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

【变式 2】 (2010·山东潍坊)直线 $x\cos\alpha+\sqrt{3}y+2=0$ 的倾斜角的范围是(　　).

A. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$　　B. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right)$

C. $\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

【例 9.4】 已知直线 l 过 $P(-1,2)$,且与以 $A(-2,-3)$,$B(3,0)$为端点的线段 AB 相交,求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

【分析】 本题为"由直线区域求直线斜率范围"求解步骤.①作出直线区域图;②求出区域边界区域 k_1,k_2;③按逆时针方向旋转得到 $k_1\to k_2$;④若 $k_2>k_1$,直接写 $k\in[k_1,k_2]$(或开区间),$k_2<k_1$ 过无穷,$k\in(-\infty,k_2]\cup[k_1,+\infty)$.

【解析】 解法一:如图 9-2 所示,$k_{PA}=5$,$k_{PB}=-\frac{1}{2}$.

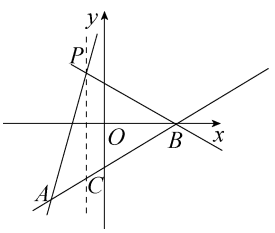


图　9-2

因为过点 $P(-1,2)$且与 x 轴垂直的直线 PC 与线段 AB 相交,但此时直线 l 斜率不存在,当直线 PA 绕点 P 逆时针旋转到 PC 的过程中,l 斜率始终为正,且逐渐增大,所以此时 l 斜率的范围是$[5,+\infty)$;

当直线 l 由 PC(不包括 PC)逆时针旋转至 PB 的过程中,l 斜率始终为负值,且逐渐变大,范围是$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.故所求直线 l 的斜率 k 的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[5,+\infty)$.

解法二:本题也可以用线性规划的知识来解决,设直线 l 的方程为 $y=k(x+1)+2$,即 $kx-y+k+2=0$,要使 l 与线段 AB 有交点,只需 A,B 落在直线 l 的两侧或直线 l 上,则应满足$[k\cdot(-2)-(-3)+k+2]\cdot(k\cdot3+k+2)\leqslant0$,得 $k\geqslant5$ 或 $k\leqslant-\frac{1}{2}$.

解法三:设过点 $P(-1,2)$的直线 l 的斜率为 k,则直线方程可设为 $y=k(x+1)+2$,线段 AB 的方程为 $3x-5y-9=0(-2\leqslant x\leqslant3)$,由$\begin{cases}3x-5y-9=0\\y=k(x+1)+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=f(k)\\y=g(k)\end{cases}$,由

$-2\leqslant f(k)\leqslant3\Rightarrow k\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[5,+\infty)$

【评注】 本题主要用了数形结合的方法.另外,直线斜率的绝对值越大,直线就越"陡"(即越靠近于 y 轴),这一规律在判断直线的倾斜程度上应用较广.

心得体会

【变式 1】（2008·山东聊城）已知点 $A(-2,4)$，$B(4,2)$，直线 l 过点 $P(0,-2)$ 与线段 AB 相交，则直线 l 的斜率 k 的取值范围是_____.

【变式 2】（2010·北京丰台）已知线段 PQ 两端点的坐标分别为 $(-1,1)$，$(2,2)$，若直线 $l:x+my+m=0$ 与线段 PQ 有交点，求实数 m 的范围.

【变式 3】（2009·浙江宁波）已知实数 x,y 满足 $y=x^2-2x+2(-1\leqslant x\leqslant 1)$，试求 $\dfrac{y+3}{x+2}$ 的最大值与最小值.

题型 122　直线的方程

思路提示：要重点掌握直线方程的特征值（主要指斜率、截距）等问题；熟练地掌握和应用直线方程的几种形式，尤其是点斜式、斜截式和一般式.

【例 9.5】 求下列直线方程：

(1)直线 l_1：过点 $(2,1)$，$k=-2$；

(2)直线 l_2：过点 $(-2,1)$ 和点 $(3,-3)$；

(3)直线 l_3：过点 $(0,1)$，斜率为 $-\dfrac{1}{2}$.

【分析】 已知点的坐标和斜率用点斜式，已知两点的坐标用两点式，已知在 y 轴上的截距和斜率用截距式，最后结果都得化成直线的一般式.

【解析】 (1)由直线的点斜式方程得 $y-1=-2(x-2)$，整理得 l_1 的方程为 $2x+y-5=0$.

(2)由直线的两点式方程得 $\dfrac{y-1}{-3-1}=\dfrac{x-(-2)}{3-(-2)}$，整理得 l_2 的方程为 $4x+5y+3=0$.

(3)由直线的斜截式方程得 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$，整理得 l_3 的方程为 $x+2y-2=0$.

【变式 1】 已知两直线 $l_1:a_1x+b_1y+7=0$，$l_2:a_2x+b_2y+7=0$ 都经过点 $(3,5)$，则经过点 (a_1,b_1)，(a_2,b_2) 的直线方程是_____.

【变式 2】（2011·安徽理，15）在平面直角坐标系中，如果 x 与 y 都是整数，就称点 (x,y) 为整点. 题中正确的是_____（写出所有正确命题的编号）.

①存在这样的直线，既不与坐标轴平行又不经过任何整点；

②如果 k 与 b 都是无理数，则直线 $y=kx+b$ 不经过任何整点；

③直线 l 经过无穷多个整点，当且仅当 l 经过两个不同的整点；

④直线 $y=kx+b$ 经过无穷多个整点的充分必要条件是：k 与 b 都是有理数；

⑤存在恰经过一个整点的直线.

【例 9.6】 直线 l 经过点 $P(-5,-4)$，且与两坐标轴围成的三角形面积为 5，求直线 l 的方程.

【解析】 设直线 l 的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，因为直线 l 过点 $P(-5,-4)$，

所以 $\dfrac{-5}{a}+\dfrac{-4}{b}=1$，即 $4a+5b=-ab$，由已知有 $\dfrac{1}{2}|a||b|=5$，

即 $|ab|=10$，解方程组 $\begin{cases}4a+5b=-ab\\|ab|=10\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=-\dfrac{5}{2}\\b=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=5\\b=-2\end{cases}$.

心得体会

故所求直线 l 的方程为：$\dfrac{x}{-\frac{5}{2}}+\dfrac{y}{4}=1$ 或 $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{-2}=1$.

即 $8x-5y+20=0$ 或 $2x-5y-10=0$.

【变式 1】 (2006·北京理,11)若三点 $A(2,2)$,$B(a,0)$,$C(0,b)(ab\neq 0)$共线,则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的值等于_____.

【变式 2】 (2008·江苏,9)如图 9-3 所示,在平面直角坐标系 xOy 中,设△ABC 的顶点为 $A(0,a)$,$B(b,0)$,$C(c,0)$. 点 $P(0,p)$ 为线段 AO 上的一点(异于端点),这里 a,b,c,p 为非零常数. 设直线 BP,CP 分别与边 AC,AB 交于点 E,F. 某同学已正确求得直线 OE 的方程为 $\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)x+\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{a}\right)y=0$,请完成直线 OF 的方程：(_____)$x+\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{a}\right)y=0$.

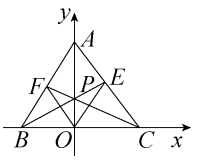


图 9-3

【变式 3】 过点 $P(2,1)$ 作直线 l 分别与 x,y 轴正半轴交于 A,B 两点.

(1)当△AOB 面积最小时,求直线 l 的方程;

(2)当 $|OA|+|OB|$ 取最小值时,求直线 l 的方程;

(3)当 $|PA||PB|$ 取最小值时,求直线 l 的方程.

【变式 4】 已知直线 l 过点 $P(3,2)$,且与 x 轴 y 轴的正半轴分别交于 A,B 两点,如图 9-4 所示,求△ABO 面积的最小值及此时直线 l 的方程.

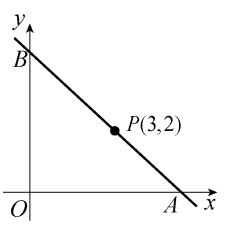


图 9-4

【例 9.7】 一条直线 l 被两条直线 l_1：$4x+y+6=0$ 和 l_2：$3x-5y-6=0$ 截得的线段中点 M 恰好是坐标原点,求直线 l 的方程.

【解析】 解法一：已知点 $O(0,0)$,故可以考虑使用点斜式方程. 通过两次联立方程,分别求出直线 l 与 $4x+y+6=0$ 和 $3x-5y-6=0$ 的两个交点坐标. 然后利用中点坐标公式求得 k 的值. 当 l 斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=kx$,

由 $\begin{cases}y=kx\\4x+y+6=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{-6}{k+4}\\y=\dfrac{-6k}{k+4}\end{cases}$,由 $\begin{cases}y=kx\\3x-5y-6=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{6}{3-5k}\\y=\dfrac{6k}{3-5k}\end{cases}$,

其交点的中点坐标为 $\left(\dfrac{\frac{-6}{k+4}+\frac{6}{3-5k}}{2},\dfrac{\frac{-6k}{k+4}+\frac{6k}{3-5k}}{2}\right)$.

据题意知 $\dfrac{-6}{k+4}+\dfrac{6}{3-5k}=0$,得 $k=-\dfrac{1}{6}$.

故所求直线的方程为 $y=-\dfrac{1}{6}x$.

当直线 l 斜率不存在时,则 l：$x=0$ 与 l_1,l_2 交点分别为 $(0,-6)$,$\left(0,-\dfrac{6}{5}\right)$,其中点坐标为 $\left(0,-\dfrac{18}{5}\right)$,不为原点,不满足题意.

心得体会

解法二：为了确定直线 l 的方程，需要两个独立的要素，故考虑求出直线上的两个点的坐标，从而可得直线 l 方程. 因为两个交点的线段中点为原点，故设直线 l 与 $l_1:4x+y+6=0$ 的交点为 $A(a,b)$，则与 $l_2:3x-5y-6=0$ 的交点为 $B(-a,-b)$，因为 $A(a,b)$在直线 $l_1:4x+y+6=0$ 上，$B(-a,-b)$在直线 $l_2:3x-5y-6=0$ 上，故有 $\begin{cases}4a+b+6=0\\3(-a)-5(-b)-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{36}{13}\\b=-\dfrac{6}{13}\end{cases}$.

所以直线通过点 $A\left(\dfrac{36}{13},-\dfrac{6}{13}\right)$和点 $O(0,0)$，易得直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{1}{6}x$.

【评注】 求直线方程最常用的方法是待定系数法，本题所求方程的直线过已知点 $M(0,0)$，故设出直线方程的点斜式 $y=kx$，由题中另一条件确定斜率，思路顺理成章. 但要注意讨论斜率是否存在，特别是能否把已知条件与相关知识联系变通再得新的解法，如本题中的解法二.

确定直线方程基本可分为两类题型：一是根据题目条件确定点和斜率或确定两点，进而套用直线方程的几种形式，此法可称为直接法；二是利用直线在题目中具有的某些性质，先设出方程(含有参数或待定系数)，再确定方程(即求出参数值)，此时对直线方程来讲可称为间接法.

因为确定一条直线需要两个独立的几何量，要么一个是点，一个为斜率，要么两个都是点，所以在求直线方程时，要拿着“方程思想”去积极地从题设中获得未知的几何量所应满足的方程或方程组，然后加以解决即可得解.

【变式 1】 过点 $M(0,1)$作直线，使它被两条直线 $l_1:x-3y+10=0$，$l_2:2x+y-8=0$ 所截的线段恰好被点 M 平分，求此直线的方程.

【例 9.8】 过点 $P(2,-1)$，在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 a，b，且满足 $a=3b$ 的直线方程为_____.

【分析】 过点 $P(2,-1)$，且在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 a，b，注意讨论 a，b 为 0 的情形.

【解析】 若 $a=b=0$，此时直线过原点，设 $y=kx$，又因过点 $P(2,-1)$，则直线方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x$；若 $a=3b\neq0$，则设直线方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. 又 $a=3b$，故 $\dfrac{x}{3b}+\dfrac{y}{b}=1$，又因过点 $P(2,-1)$，则 $\dfrac{2}{3b}-\dfrac{1}{b}=1$，得 $b=-\dfrac{1}{3}$，故直线方程为 $x+3y+1=0$. 故所求的直线方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x$ 或 $x+3y+1=0$.

【评注】 本题常见的求解错误是忽视截距为零的情况，即 $a=b=0$，而直接设出截距式方程. 应注意截距为零，也即直线过原点的情形. 直线在两坐标轴上截距相等的条件是直线斜率为 -1 或其经过原点，往往容易忽视直线过坐标原点的情况.

【变式 1】 直线 l 经过点(3,2)，且在两坐标轴上的截距相等，求直线 l 的方程.

【变式 2】 直线 l 经过点 $P(2,1)$，且在 y 轴上的截距是在 x 轴截距的 2 倍，求直线 l 的方程.

心得体会

第二节　两条直线的位置关系

考纲解读

1. 能根据两条直线的斜率判定这两条直线平行或垂直.
2. 能用解方程组的方法求两条相交直线的交点坐标.
3. 掌握两点间的距离公式,点到直线的距离公式,会求两平行直线间的距离.

命题趋势探究

从内容上看,主要考查两直线平行、垂直的判定,点到直线的距离,两平行线间的距离及对称等问题;从考查形式上看,以选择和填空题为主.

预测 2012 年高考中,两直线平行和垂直关系的判定与应用将是考查的热点,常与充要条件相结合.另外,对称问题也常在高考试题中出现,备考时应多加注意.

知识点精讲

一、两条直线平行与垂直的判定

两条直线 $l_1:y=k_1x+b_1$,直线 $l_2:y=k_2x+b_2$(斜率存在),

直线 $l_1:x=x_1$,直线 $l_2:x=x_2$(斜率不存在)

$l_1/\!/l_2\Leftrightarrow\begin{cases}k_1=k_2,b_1\neq b_2\\ \text{或 } x=x_1,x=x_2,x_1\neq x_2\end{cases}$. $l_1\perp l_2\Leftrightarrow\begin{cases}k_1k_2=-1\\ \text{或 } k_1,k_2\text{中一个为 }0\text{,另一个不存在.}\end{cases}$

二、三种距离

1. 两点间的距离

平面上两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$的距离公式为$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

特别地,原点 $O(0,0)$与任一点 $P(x,y)$的距离$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$.

2. 点到直线的距离

点 $P_0(x_0,y_0)$到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. 特别地,若直线为 $l:x=m$,则点 $P_0(x_0,y_0)$到 l 的距离 $d=|m-x_0|$;若直线为 $l:y=n$,则点 $P_0(x_0,y_0)$到 l 的距离 $d=|n-y_0|$.

心得体会

3. 两条平行线间的距离

已知 l_1，l_2 是两条平行线，求 l_1，l_2 间距离的方法：

(1)转化为其中一条直线上的特殊点到另一条直线的距离.

(2)设 $l_1:Ax+By+C_1=0$，$l_2:Ax+By+C_2=0$，则 l_1 与 l_2 之间的距离 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

注 两直线方程中，x，y 前面对应系数要相等.

题型归纳及思路提示

题型 123　两直线位置关系的判定

思路提示：一般地，设 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ (A_1，B_1 不全为 0)，

$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$(A_2，B_2 不全为 0)，则：

当 $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ 时，直线 l_1，l_2 相交；当 $A_1B_2=A_2B_1$ 时，直线 l_1，l_2 平行或重合，代回检验；当 $A_1A_2+B_1B_2=0$ 时，直线 l_1，l_2 垂直. 向量的平行与垂直类比记忆.

【例 9.9】 (2007·天津文，3)“$a=2$”是“直线 $ax+2y=0$ 平行于直线 $x+y=1$”的(　　).

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】 由 $a=2$ 得直线方程 $2x+2y=0$，即直线 $x+y=0$ 与 $x+y=1$ 平行，反之，由直线 $ax+2y=0$ 平行于直线 $x+y=1$，得 $a=2$. 故“$a=2$”是“直线 $ax+2y=0$ 平行于直线 $x+y=1$”的充分必要条件. 故选 C.

【变式 1】 (2009·西南师大附中第三次月考)“$a=3$”是“直线 $ax-2y-1=0$ 与直线 $6x-4y+c=0$ 平行”的(　　).

A. 充要条件　　B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

【变式 2】 (2005·北京文，3)“$m=\dfrac{1}{2}$”是“直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直”的(　　).

A. 充要条件　　B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

【例 9.10】 已知直线 $l_1:ax+2y+6=0$ 和直线 $l_2:x+(a-1)y+a^2-1=0$.

(1)试判断 l_1 与 l_2 是否平行；

(2)当 $l_1\perp l_2$ 时，求 a 的值.

【解析】 (1)由 $A_1B_2-A_2B_1=0$，得 $a(a-1)-1\times 2=0$，$a=-1$ 或 2.

当 $a=-1$ 时，$l_1:x-2y-6=0$，$l_2:x-2y=0$，$l_1\parallel l_2$.

当 $a=2$ 时，$l_1:x+y+3=0$，$l_2:x+y+3=0$，l_1 与 l_2 重合，故舍去.

故当 $a=-1$ 时，$l_1\parallel l_2$，否则 l_1 与 l_2 不平行.

(2)由 $l_1\perp l_2$，得 $A_1A_2+B_1B_2=0$，即 $a+2(a-1)=0$，$a=\dfrac{2}{3}$.

心得体会

【变式 1】 已知直线 $l_1:(m+3)x+4y=5-3m$，$l_2:2x+(m+5)y=8$，问 m 为何值时：(1)$l_1 /\!/ l_2$；(2)l_1 与 l_2 重合；(3)l_1 与 l_2 相交；(4)l_1 与 l_2 垂直.

【变式 2】 (2011·浙江文，12)若直线 $x-2y+5=0$ 与直线 $2x+my-6=0$ 互相垂直，则实数 $m=$_____.

题型 124　有关距离的计算

思路提示：两点间的距离、点到直线的距离以及两平行直线间的距离的计算.

【例 9.11】 (1)过点 $A(4,a)$ 和 $B(5,b)$ 的直线与直线 $y=x+m$ 平行，则两点间的距离 $|AB|$ 为_____；

(2)已知点 $P(4,1)$，则点 P 到直线 $l:x-2y+3=0$ 的距离为_____；

(3)已知点 $(a,2)$ 到直线 $l:x-y+3=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$，则 $a=$_____.

【解析】 (1)由题意可知，$k_{AB}=\dfrac{b-a}{5-4}=b-a=1$，故 $|AB|=\sqrt{(5-4)^2+(b-a)^2}=\sqrt{2}$.

(2)由点到直线的距离公式，距离 $d=\dfrac{|4-2\times1+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

(3)由题意得 $d=\dfrac{|a-2+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|a+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow|a+1|=2$，故 $a=1$ 或 $a=-3$.

【变式 1】 点 P 在直线 $3x+y-5=0$ 上，且点 P 到直线 $x-y-1=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$，则点 P 的坐标为(　　).

A. $(1,2)$　　B. $(2,1)$

C. $(1,2)$ 或 $(2,-1)$　　D. $(2,1)$ 或 $(-1,2)$

【例 9.12】 (2008·广东广州)已知点 (x_0,y_0) 在 $ax+by=0(a,b$ 为常数)上，则 $\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}$ 的最小值为_____.

【解析】 $\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}$ 可看作点 (x_0,y_0) 与点 (a,b) 的距离，而点 (x_0,y_0) 在直线 $ax+by=0$ 上，所以 $\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}$ 的最小值为点 (a,b) 到直线 $ax+by=0$ 的距离 $\dfrac{|a\cdot a+b\cdot b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{a^2+b^2}$.

【变式 1】 (2008·海南三亚)点 $(1,\cos\theta)$ 到直线 $x\sin\theta+y\cos\theta-1=0$ 的距离为 $\dfrac{1}{4}(0°\leqslant\theta\leqslant180°)$，那么 θ 等于(　　).

A. 150°　　B. 30°或 150°　　C. 30°　　D. 30°或 210°

【变式 2】 (2010·北京海淀二模)已知直线 $l_1:x+y+1=0$，$l_2:x+y-1=0$，则 l_1 与 l_2 之间的距离为(　　).

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【变式 3】 (2010·山东烟台)已知三直线 $l_1:2x-y+a=0(a>0)$，直线 $l_2:-4x+2y+1=0$ 和 $l_3:x+y-1=0$，且 l_1 与 l_2 的距离是 $\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$.

(1)求 a 的值；

(2)能否找到一点 P，使 P 同时满足下列三个条件：①P 是第一象限的点；②点

心得体会

P 到 l_1 的距离是点 P 到 l_2 的距离的 $\frac{1}{2}$；③点 P 到 l_1 的距离与点 P 到 l_3 的距离之比是 $\sqrt{2}:\sqrt{5}$. 若能，求点 P 坐标；若不能，请说明理由.

【例 9.13】 若直线 l 过点 $P(-1,2)$，且点 $A(2,3)$ 和点 $B(-4,5)$ 到直线 l 的距离相等，求此直线 l 的方程.

【分析】 由几何知识“两个不同点 A,B 到直线 l 的距离相等，等价于 $l\parallel AB$ 或 l 过线段 AB 的中点”求解.

【解析】 由题意，点 A,B 到直线 l 的距离相等，即等价于 $l\parallel AB$ 或 l 过 AB 的中点.

(1)若 $l\parallel AB$，则因 $k_{AB}=-\frac{1}{3}$，又 l 过点 $P(-1,2)$，可得方程为 $x+3y-5=0$.

(2)若 l 过 AB 的中点，则因 AB 的中点坐标为 $(-1,4)$，又 l 过点 $P(-1,2)$，所以直线的斜率不存在，其方程为 $x=-1$.

综上可知，所求直线 l 的方程为 $x=-1$ 或 $x+3y-5=0$.

【变式 1】 求过点 $M(1,2)$，且与 $A(-1,2),B(3,0)$ 两点距离相等的直线方程.

题型 125　对称问题

思路提示：(1)中心对称.

①若点 $M(x_1,y_1)$ 及 $N(x_2,y_2)$ 关于 $P(a,b)$ 对称，则由中点坐标公式得 $\begin{cases}x_2=2a-x_1\\y_2=2b-y_1\end{cases}$.

②直线 l_1 关于点 P 的对称的直线方程，主要求解方法是：在已知直线上取一点，利用中点坐标公式求出关于已知点对称的点坐标，再利用 $l_1\parallel l_2$，由点斜式得到所求直线 l_2 的方程.

(2)轴对称.

①点关于直线的对称.

方法一：两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 的中点在直线 l 上，且 P_1P_2 的直线斜率与直线 l 的斜率乘积为 -1.

方法二：先过 $P_1(x_1,y_1)$ 作垂直于直线 l 的直线 l' 交直线 l 于点 M，利用点 M 为点 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 的中点，求解点 P_2 的坐标.

②直线关于直线的对称.

此类问题一般转化为关于直线的对称点来解决，若已知直线 l_1 与对称轴 l 相交，则交点必在 l_1 对称的直线 l_2 上，然后再求出 l_1 上某一个已知点 P_1 关于对称轴 l 对称的点 P_2，那么经过交点及 P_2 的直线就是 l_2；若已知直线 l_1 与对称轴 l 平行，则 l 到与 l_1 对称的直线和 l_1 到直线 l 的距离相等，由平行直线系和两条平行线间的距离即可求出 l_1 的对称直线.

注 对于“点关于直线的对称”问题，利用方程组求解并不是一件容易的事情. 建议采用如下易于操作的步骤来求解：先由直线 $l:Ax+By+C=0$ 的斜率 $k=-\frac{A}{B}$ 获得过点 $P(x,y)$ 和所求对称点 $Q(x_1,y_1)$ 的直线的斜率 $k_{PQ}=\frac{B}{A}$，又因直线 PQ 过已知点 $P(x,y)$，

心得体会

故可利用点斜式方程求得直线 PQ 的方程；然后通过联立直线 l：$Ax+By+C=0$ 和直线 PQ 的方程，得到线段 PQ 中点的坐标 $M(m,n)$，则所求对称点 $Q(x_1,y_1)$ 的坐标为 $(2m-x,2n-y)$.

一类特殊的对称轴是其斜率为 ±1 的情况，以对称轴 $y=x+m$ 为例，点 $P(x_0,y_0)$ 的对称点为 $Q(x_1,y_1)$，则有 $\begin{cases}x_1=y_0-m\\y_1=x_0+m\end{cases}$. 我们可以这样理解：由 $y=x+m$ 可得 $\begin{cases}x=y-m\\y=x+m\end{cases}$，把 $P(x_0,y_0)$ 的坐标 x_0,y_0 分别代入方程右边，可得 $\begin{cases}x=y_0-m\\y=x_0+m\end{cases}$，即 $Q(x_1,y_1)$ 的坐标 $\begin{cases}x_1=y_0-m\\y_1=x_0+m\end{cases}$. 本过程也即把点 $P(x_0,y_0)$ 的坐标代入到对称轴方程 $y=x+m$ 中，解出的相应坐标即为所求对称点的坐标. 我们不妨称这种方法为“一(反)解一代(入)法”，简称“一解一代法”.

故有：曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $x+y+m=0$ 的对称曲线的方程为 $f(-y-m,-x-m)=0$；曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $x-y+m=0$ 的对称曲线的方程为 $f(y-m,x+m)=0$. 记住这两个重要结论，对求解相关对称问题的选择和填空题有着得天独厚的优势.

【例 9.14】 (1)点 $A(1,2)$ 关于点 $B(3,4)$ 对称的点的坐标为_____.

(2)点 $A(1,2)$ 关于直线 $2x+y-3=0$ 对称的点的坐标为_____.

(3)直线 $2x+y-3=0$ 关于点 $A(1,2)$ 对称的直线方程为(　　).

A. $2x+y+5=0$　　B. $2x+y-5=0$

C. $2x+y=0$　　D. $2x+y-9=0$

(4)直线 $2x+y-3=0$ 关于直线 $x-y+1=0$ 对称的直线方程为_____.

【解析】 (1)设对称点的坐标为 (x,y)，则 $\frac{x+1}{2}=3$，$\frac{y+2}{2}=4$ 得 $x=5$，$y=6$，故对称点的坐标为 $(5,6)$.

(2)设点 A 关于直线对称的点的坐标为 (x,y)，

则 $\frac{y-2}{x-1}=\frac{1}{2}$，$\frac{x+1}{2}\times2+\frac{y+2}{2}-3=0$，得 $x=\frac{1}{5}$，$y=\frac{8}{5}$.

则对称点的坐标为 $\left(\frac{1}{5},\frac{8}{5}\right)$.

(3)设直线 $2x+y-3=0$ 上一点的坐标为 (x_0,y_0)，关于 $A(1,2)$ 对称的点的坐标为 $(2-x_0,4-y_0)$，则 $\begin{cases}x=2-x_0\\y=4-y_0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_0=2-x\\y_0=4-y\end{cases}$，满足直线 $2x_0+y_0-3=0$ 得 $2(2-x)+(4-y)-3=0$，即 $2x+y-5=0$. 故选 B.

(4)因为对称轴直线的斜率为 1，故利用“一解一代法”. 设直线 $2x+y-3=0$ 上的点 (x_0,y_0) 关于直线 $x-y+1=0$ 对称的点为 (x,y)，则满足 $\begin{cases}x=y_0-1\\y=x_0+1\end{cases}$，故 $\begin{cases}x_0=y-1\\y_0=x+1\end{cases}$，代入 $2x+y-3=0$ 得 $2(y-1)+x+1-3=0$，即 $x+2y-4=0$.

【变式 1】 (1)求点 $P(4,5)$ 关于点 $M(3,-2)$ 对称的点 Q 的坐标；

(2)求点 $P(4,5)$ 关于直线 l：$3x-y+3=0$ 对称的点 Q 的坐标；

心得体会

(3)直线 $l_1:y=\frac{1}{2}x+b$ 与 $l_2:y=\frac{1}{2}x+b+8$ 关于点 $A(4,6)$ 对称，求 b 的值；

(4)求直线 $l_1:3x-y+3=0$ 关于直线 $l:x-y+2=0$ 对称的直线 l_2 方程.

【变式 2】 (2007·浙江理，3)直线 $x-2y+1=0$ 关于直线 $x=1$ 对称的直线方程是(　　).

A. $x+2y-1=0$　　B. $2x+y-1=0$

C. $2x+y-3=0$　　D. $x+2y-3=0$

【变式 3】 (2009·江苏赣榆高三模拟)直线 $x+2y-3=0$ 与直线 $ax+4y+b=0$ 关于点 $A(1,0)$ 对称，则 $b=$ _____.

【例 9.15】 已知点 $A(-3,5)$，$B(2,15)$，试在直线 $3x-4y+4=0$ 上找一点 P，使 $|PA|+|PB|$ 最小，并求最小值.

【分析】 利用对称思想求解.

【解析】 求出点 A 关于直线 $3x-4y+4=0$ 的对称点 $A'(x,y)$，如图 9-5 所示.

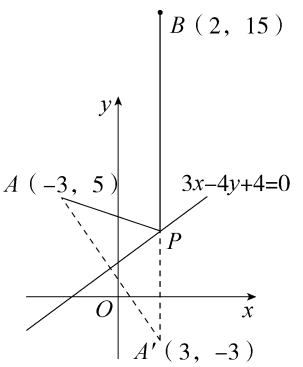


图　9-5

则 $\begin{cases}\frac{5-y}{-3-x}=-\frac{4}{3}\\ 3\times\frac{-3+x}{2}-4\times\frac{y+5}{2}+4=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=3\\ y=-3\end{cases}$，

则点 A' 的坐标为 $(3,-3)$. 连接 $A'B$ 得直线 $A'B$ 的方程为 $y-15=\frac{15+3}{2-3}(x-2)$，

即 $18x+y-51=0$，联立 $\begin{cases}18x+y-51=0\\ 3x-4y+4=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=\frac{8}{3}\\ y=3\end{cases}$，

故点 P 的坐标为 $\left(\frac{8}{3},3\right)$.

此时 $(|PA|+|PB|)_{\min}=|A'B|=\sqrt{(3-2)^2+(-3-15)^2}=5\sqrt{13}$.

【变式 1】 (2010·山东实验中学)如图 9-6 所示，已知 $A(4,0)$，$B(0,4)$，从点 $P(2,0)$ 射出的光线经直线 AB 反射后再射到 OB 上，最后经直线 OB 反射后又回到点 P，则光线所经过的路程是(　　).

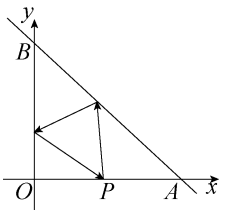


图　9-6

A. $2\sqrt{10}$　　B. 6　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{5}$

【变式 2】 (2010·山东威海)已知直线 $l_1:y=2x+3$，直线 l_2 与 l_1 关于直线 $y=-x$ 对称，则直线 l_2 的斜率为(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. -2

心得体会

第三节　圆的方程

考纲解读

1. 掌握确定圆的几何要素、圆的标准方程与一般方程.
2. 能根据所给条件选取适当的方程形式,利用待定系数法求出圆的方程,结合圆的几何性质解与圆有关的问题.

命题趋势探究

高考中与圆有关的问题主要是圆的方程的求解,4 种方程中标准方程是运用最广泛的,因为它能反映圆的几何特征(圆心和半径),通常用待定系数法求圆的方程.

有关圆的考题,多以选择题、填空题的形式出现,重点考查标准方程和一般方程,难度不大,有时也将圆融入圆锥曲线中作为解答题考查.

预测 2012 年高考本专题会主要考查:

(1)结合直线方程,用待定系数法求圆的方程.

(2)利用圆的几何性质求动点的轨迹方程.

知识点精讲

一、基本概念

平面内到定点的距离等于定长的点的集合(轨迹)叫圆.

二、基本性质、定理与公式

1. 圆的 4 种方程

(1)圆的标准方程:$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,圆心坐标为(a,b),半径为 $r(r>0)$.

(2)圆的一般方程:$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$,圆心坐标为$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$,半径$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

(3)圆的参数方程:

①$x^2+y^2=r^2(r>0)$的参数方程为$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数);

②$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$的参数方程为$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数).

心得体会

注 对于圆的最值问题，往往可以利用圆的参数方程将动点的坐标设为$(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$($\theta$为参数，$(a,b)$为圆心，$r$为半径)，以减少变量的个数，建立三角函数式，从而把代数问题转化为三角问题，然后利用正弦或余弦函数的有界性求解最值.

(4)圆的直径式方程：若$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则以线段AB为直径的圆的方程是$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

2. 点与圆的位置关系判断

(1)点$P(x_0,y_0)$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的位置关系：

①当$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$时，则点P在圆外；

②当$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$时，则点P在圆上；

③当$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$时，则点P在圆内.

(2)点$P(x_0,y_0)$与圆$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$的位置关系：

①当$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F>0$时，则点$P$在圆外；

②当$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0$时，则点$P$在圆上；

③当$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F<0$时，则点$P$在圆内.

题型归纳及思路提示

题型126　求圆的方程

思路提示：(1)求圆的方程必须具备三个独立的条件，从圆的标准方程来讲，关键在于求出圆心坐标和半径；从圆的一般方程来讲，必须知道圆上的三个点. 因此，待定系数法是求圆的方程常用的方法.

(2)用几何法来求圆的方程，要充分运用圆的几何性质，如圆心在圆的任一条弦的垂直平分线上，半径、弦心距、弦长的一半构成直角三角形等.

【例9.16】 根据下列条件求圆的方程：

(1)$\triangle ABC$的三个顶点分别为$A(-1,5)$，$B(-2,-2)$，$C(5,5)$，求其外接圆的方程；

(2)经过点$A(6,5)$，$B(0,1)$，且圆心在直线$3x+10y+9=0$上；

(3)经过点$P(-2,4)$，$Q(3,-1)$，且在x轴上截得的弦长等于6.

【分析】 根据待定系数法求出相应的量即可.

【解析】 (1)解法一：设所求圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，则由题意有，

$$\begin{cases}-D+5E+F+26=0\\-2D-2E+F+8=0\\5D+5E+F+50=0\end{cases}\text{，解得}\begin{cases}D=-4\\E=-2\\F=-20\end{cases}\text{，}$$

故所求圆的方程为$x^2+y^2-4x-2y-20=0$.

解法二：由题意可求得AC的中垂线方程为$x=2$，

BC的中垂线方程为$x+y-3=0$. 所以P是两条中垂线的交点$(2,1)$，

且半径$r=|AP|=\sqrt{(2+1)^2+(1-5)^2}=5$，

所以所求圆的方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=25$，即$x^2+y^2-4x-2y-20=0$.

心得体会

(2)AB 的中垂线方程为 $3x+2y-15=0$，由 $\begin{cases}3x+2y-15=0\\3x+10y+9=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=7\\y=-3\end{cases}$.

所以圆心为 $C(7,-3)$，又 $|BC|=\sqrt{65}$，

故所求的圆的方程为 $(x-7)^2+(y+3)^2=65$.

(3)设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，将点 P,Q 的坐标分别代入，得 $\begin{cases}2D-4E-F=20\\3D-E+F=-10\end{cases}$，又令 $y=0$，得 $x^2+Dx+F=0$. 设 x_1,x_2 是方程的两根，

由 $|x_1-x_2|=6$，有 $D^2-4F=36$，解得 $\begin{cases}D=-2\\E=-4\\F=-8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}D=-6\\E=-8.\\F=0\end{cases}$

故所求圆的方程为 $x^2+y^2-2x-4y-8=0$ 或 $x^2+y^2-6x-8y=0$.

【评注】 圆的方程有两种形式：标准方程和一般方程. 求圆的方程问题一般采用待定系数法，并有两种不同的选择. 一般地，已知圆上的三点时用一般方程；已知圆心或半径关系时用标准方程. 即首先设出圆的方程(标准方程或一般方程)，然后根据题意列出关于圆的方程中参数的方程(组)，解方程或方程组即可求得圆的方程. 一般地，确定一个圆需要三个独立的条件.

【变式 1】 求过点 $A(6,0),B(1,5)$，且圆心在直线 $l:2x-7y+8=0$ 上的圆的方程.

【变式 2】 (2011·辽宁文,13)已知圆 C 经过 $A(5,1),B(1,3)$ 两点，圆心在 x 轴上，则 C 的方程为_____.

【变式 3】 (2011·课标全国文,20(1))在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $y=x^2-6x+1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上. 求圆 C 的方程.

【例 9.17】 已知圆的半径为 $\sqrt{10}$，圆心在直线 $y=2x$ 上，圆被直线 $y=x$ 截得的弦长为 $4\sqrt{2}$，求此圆的方程.

【分析】 求圆的标准方程，就是求 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 中的 a,b,r，可优先考虑待定系数法.

【解析】 解法一：设圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=10$.

由圆心在直线 $y=2x$ 上，得 $b=2a$(式①)

由圆在直线 $y=x$ 上截得的弦长为 $4\sqrt{2}$，将 $y=x$ 代入 $(x-a)^2+(y-b)^2=10$，整理得 $2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2-10=0$，

由弦长公式，得 $\sqrt{2}\sqrt{(a+b)^2-2(a^2+b^2-10)}=4\sqrt{2}$，化简得 $a-b=\pm2$(式②)

由式①②可得 $\begin{cases}a=2\\b=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\b=-4\end{cases}$.

故所求圆的方程为 $(x-2)^2+(y-4)^2=10$ 或 $(x+2)^2+(y+4)^2=10$.

解法二：据几何性质，半径、弦长的一半、弦心距构成直角三角形，可得弦心距 $d=\sqrt{r^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$，又弦心距等于圆心 (a,b) 到直线 $x-y=0$ 的距离，

即 $d=\dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，又已知 $b=2a$，解得 $\begin{cases}a=2\\b=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\b=-4\end{cases}$.

故所求圆的方程为 $(x-2)^2+(y-4)^2=10$ 或 $(x+2)^2+(y+4)^2=10$.

【评注】 注意灵活运用垂径定理来简化圆的方程的求解过程.

心得体会

【变式 1】（2011·重庆文，13）过原点的直线与圆 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 相交所得的弦长为 2，则该直线的方程为_____.

【变式 2】求与 x 轴相切，圆心在直线 $3x-y=0$ 上，且被直线 $x-y=0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{7}$ 的圆的方程.

【变式 3】（2007·上海文，13）圆 $x^2+y^2-2x-1=0$ 关于直线 $2x-y+3=0$ 对称的圆的方程是（　　）.

A. $(x+3)^2+(y-2)^2=\frac{1}{2}$　　B. $(x-3)^2+(y+2)^2=\frac{1}{2}$

C. $(x+3)^2+(y-2)^2=2$　　D. $(x-3)^2+(y+2)^2=2$

【例 9.18】求圆心在直线 $3x+4y-1=0$ 上且过两圆 $x^2+y^2-x+y-2=0$ 与 $x^2+y^2=5$ 的交点的圆的方程.

【分析】把两个圆的方程联立，解得两圆的交点坐标的方法看似平常，实则复杂难解. 而利用圆系方程的概念，则较易求得答案.

【解析】设所求圆为 $x^2+y^2-x+y-2+\lambda(x^2+y^2-5)=0$，

化为一般式 $x^2+y^2-\frac{1}{1+\lambda}x+\frac{1}{1+\lambda}y-\frac{2+5\lambda}{1+\lambda}=0$.

所以 $-\frac{D}{2}=\frac{1}{2(1+\lambda)}$，$-\frac{E}{2}=-\frac{1}{2(1+\lambda)}$，故圆心为 $\left(\frac{1}{2(1+\lambda)},-\frac{1}{2(1+\lambda)}\right)$.

代入直线 $3x+4y-1=0$ 中，得 $\frac{3}{2(1+\lambda)}-\frac{4}{2(1+\lambda)}-1=0$，解方程得 $\lambda=-\frac{3}{2}$.

把 $\lambda=-\frac{3}{2}$ 代入所设的方程中，得 $x^2+y^2+2x-2y-11=0$，

故所求圆的方程为 $x^2+y^2+2x-2y-11=0$.

【评注】圆系是具有某共同性质的圆的集合，圆系虽不是课程标准要求的内容，但在解题过程中适当利用圆系方程，有时可达到理想效果.

【变式 1】（2009·山东聊城）过直线 $2x+y+4=0$ 和圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的交点且面积最小的圆的方程是_____.

题型 127　与圆有关的轨迹问题

思路提示：要深刻理解求动点的轨迹方程就是探求动点的两个坐标 x，y 的等量关系式. 根据题目条件，直接找到或转化得到与动点有关的数量关系，是解决此类问题的关键所在.

【例 9.19】（2005·江苏，19）如图 9-7 所示，圆 O_1 和圆 O_2 的半径都等于 1，$O_1O_2=4$，过动点 P 分别作圆 O_1、圆 O_2 的切线 PM，PN（M，N 为切点），使得 $PM=\sqrt{2}PN$，试建立平面直角坐标系，并求动点 P 的轨迹方程.

【解析】如图 9-8 所示，以 O_1O_2 所在直线为 x 轴，O_1O_2 的垂直平分线所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，连接 PO_1，PO_2，O_1M，O_2N，则 $PM\perp O_1M$，$PN\perp O_2N$，$O(0,0)$，$P(x,y)$，$|PO_1|^2-|O_1M|^2=|PM|^2$，$|PO_2|^2-|O_2N|^2=|PN|^2$，

因为 $PM=\sqrt{2}PN$，所以 $|PM|^2=2|PN|^2$，得

$|PO_1|^2-|O_1M|^2=2(|PO_2|^2-|O_2N|^2)$，

$(x+2)^2+y^2-1=2[(x-2)^2+y^2-1]$，即 $(x-6)^2+y^2=33$.

心得体会

故所求轨迹方程为$(x-6)^2+y^2=33$.

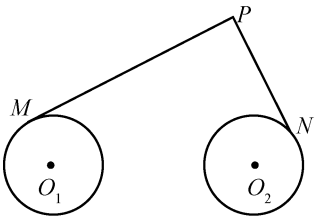


图 9-7

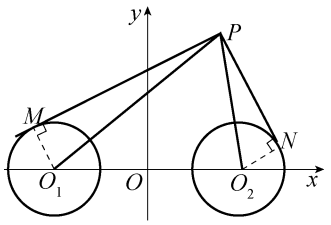


图 9-8

【变式 1】 (2006·四川理,6)已知两定点$A(-2,0)$,$B(1,0)$,如果动点P满足$|PA|=2|PB|$,则点P的轨迹所包围的图形的面积等于(　　).

A. π　　B. 4π　　C. 8π　　D. 9π

【变式 2】 (2008·江苏,13)在$\triangle ABC$中,若$AB=2$,$AC=\sqrt{2}BC$,则$S_{\triangle ABC}$的最大值为_____.

【例 9.20】 如图 9-9 所示,已知$P(4,0)$是圆$x^2+y^2=36$内的一点,A,B是圆上两动点,且满足$\angle APB=90°$,求矩形$APBQ$的顶点Q的轨迹方程.

【解析】 设AB的中点为R,点Q的坐标为(x,y),则在$\mathrm{Rt}\triangle ABP$中,$|AR|=|PR|$,又因为R是弦AB的中点,由垂径定理,在$\mathrm{Rt}\triangle ORA$中,$|AR|^2+|OR|^2=36$,

又$2(|OQ|^2+|OP|^2)=(2|OR|)^2+(2|PR|)^2$(*),得

$|OQ|^2+|OP|^2=2(|OR|^2+|PR|^2)=2\times 36=72$,故

$|OQ|^2=72-|OP|^2=56$.

则矩形$APBQ$的顶点Q的轨迹方程是$x^2+y^2=56$.

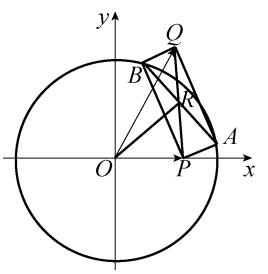


图 9-9

【评注】 式(*)依据平行四边形对角线的平方和等于四条边的平方和.

【变式 1】 已知圆$x^2+y^2=4$上一定点$A(2,0)$,$B(1,1)$为圆内的一定点,P,Q为圆上的动点.

(1)求线段AP中点M的轨迹方程;

(2)若$\angle PBQ=90°$,求线段PQ中点N的轨迹.

【变式 2】 已知点$P(0,5)$及圆C:$x^2+y^2+4x-12y+24=0$.

(1)直线l过P且被圆C截得的线段长$|AB|=4\sqrt{3}$,求l的方程;

(2)求过点P的圆C的动弦的中点M的轨迹方程.

题型 128　点与圆的位置关系判断

思路提示:在处理点与圆的位置关系问题时,应注意圆的不同方程形式对应的不同判断方法,另外还应注意其他约束条件,如圆的一般方程的隐含条件对参数的制约.

【例 9.21】 若点$A(1,1)$在圆$(x-a)^2+(y+a)^2=4$的内部,则实数a的取值范围是(　　).

A. $-1<a<1$　　B. $0<a<1$

C. $a<-1$或$a>1$　　D. $a=\pm 1$

【解析】 把点$A(1,1)$代入圆的方程,使之满足$(x-a)^2+(y+a)^2<4$,即$(1-a)^2+$

心得体会

$(1+a)^2<4$，解得$-1<a<1$. 故选 A.

【评注】 注意度量点与圆的位置关系的方法是：把点的坐标代入圆的标准方程中，若$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$，则点在圆外；若$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$，则点在圆内；若$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则点在圆上. 同理，若把点的坐标代入圆的一般方程中，若$x^2+y^2+Dx+Ey+F>0$，则点在圆外；若$x^2+y^2+Dx+Ey+F<0$，则点在圆内；若$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，则点在圆上.

【变式 1】 点$A(1,0)$在圆$x^2+y^2-2ax+a^2+3a-3=0$上，则a的值为_____.

题型 129　圆的一般方程的充要条件

思路提示：方程$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$表示圆的充要条件是$D^2+E^2-4F>0$，故在解决圆的一般式方程的有关问题时，必须注意这一隐含条件.

【例 9.22】 方程$x^2+y^2+ax+2ay+2a^2+a-1=0$表示圆，则$a$的取值范围是(　　).

A. $a<-2$　　B. $-\frac{2}{3}<a<0$

C. $-2<a<0$　　D. $-2<a<\frac{2}{3}$

【解析】 由$x^2+y^2+ax+2ay+2a^2+a-1=0$可得$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y+a)^2=-\frac{3}{4}a^2-a+1>0$，即$3a^2+4a-4<0$，得$-2<a<\frac{2}{3}$. 故选 D.

【评注】 对于圆的方程的充要条件的不等式不需要记忆，只需通过配方，然后让右边大于零即可.

【变式 1】 方程$x^2+y^2+4mx-2y+5m=0$表示圆的方程的充要条件是(　　).

A. $\frac{1}{4}<m<1$　　B. $m>1$

C. $m<\frac{1}{4}$　　D. $m<\frac{1}{4}$或$m>1$

【变式 2】 若圆$x^2+y^2+(a^2-1)x+2ay-a=0$关于直线$x-y+1=0$对称，则实数a的值为_____.

【变式 3】 过点$P(1,2)$可以向圆$x^2+y^2+2x-4y+k-2=0$引两条切线，则k的范围是(　　).

A. $k<7$　　B. $0<k<7$　　C. $3<k<7$　　D. $k>5$

题型 130　与圆有关的最值问题

思路提示：解决此类问题，应综合运用方程消元法、几何意义法、参数方程法等各种思想和方法求解，才能做到灵活、高效.

【例 9.23】 已知实数x,y满足方程$x^2+y^2-4x+1=0$.

(1)求$\frac{y}{x}$的最大值和最小值；

(2)求$y-x$的最大值和最小值；

(3)求x^2+y^2的最大值和最小值.

心得体会

【分析】 方程 $x^2+y^2-4x+1=0$ 表示圆心为(2,0),半径为$\sqrt{3}$的圆. $\frac{y}{x}=\frac{y-0}{x-0}$的几何意义是圆上一点 $M(x,y)$与原点连线的斜率;设 $y-x=b$,可看作直线 $y=x+b$ 在 y 轴上的截距;x^2+y^2 是圆上一点与原点距离的平方,可借助于平面几何知识,利用数形结合的方法求解.

【解析】 (1)原方程可化为$(x-2)^2+y^2=3$,表示以点(2,0)为圆心,以$\sqrt{3}$为半径的圆. 设 $\frac{y}{x}=k$,即 $y=kx$. 当直线 $y=kx$ 与圆相切时,斜率取最大值和最小值,此时 $\frac{|2k-0|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$,解得 $k=\pm\sqrt{3}$,故$\frac{y}{x}$的最大值为$\sqrt{3}$,最小值为$-\sqrt{3}$.

(2)设 $y-x=b$,即 $y=x+b$,当 $y=x+b$ 与圆相切时,纵截距 b 取得最大值和最小值,此时$\frac{|2-0+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$,即 $b=-2\pm\sqrt{6}$,故 $y-x$ 的最大值为$-2+\sqrt{6}$,最小值为$-2-\sqrt{6}$.

(3)解法一:(几何法)x^2+y^2 表示圆上点与原点距离的平方,由平面几何知识知它在原点与圆心连线与圆的两个交点处取得最大值和最小值,又圆心到原点的距离为 2,故$(x^2+y^2)_{\max}=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$,$(x^2+y^2)_{\min}=(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$.

解法二:(参数方程法)把圆的方程化为标准方程$(x-2)^2+y^2=3$,

设$\begin{cases}x=2+\sqrt{3}\cos\theta\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数,$\theta\in[0,2\pi]$),

则 $x^2+y^2=(2+\sqrt{3}\cos\theta)^2+(\sqrt{3}\sin\theta)^2=7+4\sqrt{3}\cos\theta$.

所以当 $\cos\theta=-1$ 时,$(x^2+y^2)_{\min}=(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$;

当 $\cos\theta=1$ 时,$(x^2+y^2)_{\max}=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$.

解法三:(方程消元法)由圆的标准方程为$(x-2)^2+y^2=3$,

可得 $y^2=3-(x-2)^2$,且 $x\in[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$,

故 $x^2+y^2=x^2+3-(x-2)^2=4x-1$,由 $x\in[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$,

故 $x^2+y^2=4x-1\in[7-4\sqrt{3},7+4\sqrt{3}]$,故所求最大值为 $7+4\sqrt{3}$;

最小值为 $7-4\sqrt{3}$.

【评注】 涉及与圆有关的最值,可借助图形性质,利用数形结合求解. 一般地:

(1)形如 $\mu=\frac{y-b}{x-a}$的最值问题,可转化为动直线斜率的最值问题.

(2)形如 $t=ax+by$ 的最值问题,可转化为动直线截距的最值问题.

(3)形如 $m=(x-a)^2+(y-b)^2$ 的最值问题,可转化为曲线上的点到点(a,b)的距离平方的最值问题.

【例 9.24】 若圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上任意一点(x,y)都使不等式 $x+y-m\geqslant 0$ 恒成立,则实数 m 的取值范围是(　　).

A. $m\leqslant 1-\sqrt{2}$　　B. $m\geqslant 1-\sqrt{2}$

C. $m\leqslant -\sqrt{2}-1$　　D. $m\leqslant\sqrt{2}+1$

心得体会

【解析】 解法一：$x+y-m\geqslant 0$ 恒成立，故只需 $m\leqslant x+y$ 的最小值. 设 $x+y=b$，即有 $y=-x+b$，可知当直线 $x+y-b=0$ 与圆相切时，截距 b 取得最值. 而圆心 $(0,1)$ 到直线 $y=-x+b$ 的距离为 $d=\dfrac{|1-b|}{\sqrt{2}}$，所以当 $d=\dfrac{|1-b|}{\sqrt{2}}=1$，即 $b=1\pm\sqrt{2}$ 时，直线与圆相切，故 b 的范围为 $1-\sqrt{2}\leqslant b\leqslant 1+\sqrt{2}$. 故只需 $m\leqslant 1-\sqrt{2}$ 即可.

或者设 $x+y=b$，则此直线与圆 $x^2+(y-1)^2$ 有公共点，故可得圆心到直线的距离小于或等于半径，即 $\dfrac{|1-b|}{\sqrt{2}}\leqslant 1\Rightarrow|b-1|\leqslant\sqrt{2}$，可解得 $1-\sqrt{2}\leqslant b\leqslant 1+\sqrt{2}$，故只需 $m\leqslant 1-\sqrt{2}$ 即可.

解法二：利用圆的参数方程 $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=1+\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$\theta\in[0,2\pi]$），

故 $x+y=1+\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$，所以 $x+y\in[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$，故只需 $m\leqslant 1-\sqrt{2}$ 即可.

故选 A.

【变式 1】 设 $P(x,y)$ 在圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上，则 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ 的最小值为_____.

【变式 2】 若圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上任意一点 (x,y) 都使不等式 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-m\geqslant 0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）.

A. $m\leqslant 1-\sqrt{2}$　　B. $m\geqslant 1-\sqrt{5}$　　C. $m\leqslant\sqrt{5}-1$　　D. $m\leqslant\sqrt{5}+1$

题型 131　数形结合思想的应用

思路提示：研究曲线的交点个数问题常用数形结合法，即需要作出两种曲线的图像. 在此过程中，尤其要注意需对代数式进行等价变形，以防出现错误.

【例 9.25】 方程 $y=-\sqrt{25-x^2}$ 表示的曲线是（　　）.

A. 一条射线　　B. 一个圆　　C. 两条射线　　D. 半个圆

【分析】 对于方程的变形要注意等价性，即在变形前，先制约变量的取值范围.

【解析】 由题可知 $-5\leqslant x\leqslant 5$，$y\leqslant 0$，且 $x^2+y^2=25$，故原方程表示圆心在 $(0,0)$，半径为 5 的下半圆. 故选 D.

【变式 1】 方程 $x=\sqrt{1-y^2}$ 表示的曲线是（　　）.

A. 一条射线　　B. 一个圆　　C. 两条射线　　D. 半个圆

【例 9.26】 直线 $y=x+b$ 与曲线 $x=\sqrt{1-y^2}$ 有且仅有一个公共点，则 b 的取值范围是（　　）.

A. $b=\pm\sqrt{2}$　　B. $-1<b\leqslant 1$ 或 $b=-\sqrt{2}$

C. $-1\leqslant b\leqslant 1$　　D. $b\geqslant\sqrt{2}$

【分析】 利用数形结合法求解.

【解析】 将曲线方程 $x=\sqrt{1-y^2}$ 变形为 $x^2+y^2=1(x\geqslant 0)$，当直线 $y=x+b$ 与曲线 $x^2+y^2=1$ 相切时，满足 $\dfrac{|0-0-b|}{\sqrt{2}}=1$，整理可得 $|b|=\sqrt{2}$，即 $b=\pm\sqrt{2}$.

如图 9-10 所示，可得当 $b=-\sqrt{2}$ 或 $-1<b\leqslant 1$ 时，直线 $y=x+b$ 与曲线 $x=$

心得体会

$\sqrt{1-y^2}$有且仅有一个公共点.故选 B.

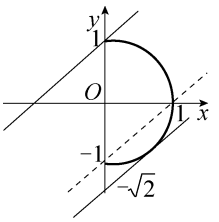


图 9-10

【变式 1】 当曲线 $y=1+\sqrt{4-x^2}$与直线 $y=k(x-2)+4$ 有两个相异交点时,实数 k 的取值范围是(　　).

A. $\left(\frac{5}{12},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{5}{12},\frac{3}{4}\right]$

C. $\left(0,\frac{5}{12}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right]$

【变式 2】 (2010·湖北理,9)若直线 $y=x+b$ 与曲线 $y=3-\sqrt{4x-x^2}$有公共点,则 b 的取值范围是(　　).

A. $[-1,1+2\sqrt{2}]$　　B. $[1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}]$

C. $[1-2\sqrt{2},3]$　　D. $[1-\sqrt{2},3]$

【变式 3】 集合 $P=\{(x,y)\mid y=\sqrt{9-x^2}\}$,$Q=\{(x,y)\mid y=x+b\}$,若 $P\cap Q=\varnothing$,则实数 b 应满足(　　).

A. $b<-3$ 或 $b>3\sqrt{2}$　　B. $-3<b<3\sqrt{2}$

C. $-3\sqrt{2}<b<3\sqrt{2}$　　D. $b>3\sqrt{2}$ 或 $b<-3\sqrt{2}$

【变式 4】 (2011·江苏,14)设集合 $A=\left\{(x,y)\left|\frac{m}{2}\leqslant(x-2)^2+y^2\leqslant m^2,x,y\in\mathbf{R}\right.\right\}$,$B=\{(x,y)\mid 2m\leqslant x+y\leqslant 2m+1,x,y\in\mathbf{R}\}$.若 $A\cap B\neq\varnothing$,则实数 m 的取值范围是_____.

第四节　直线与圆、圆与圆的位置关系

考纲解读

1. 能根据给定直线、圆的方程,判断直线与圆的位置关系;能根据给定的两个圆的方程判断两圆的位置关系.
2. 能用直线和圆的方程解决一些简单的问题.
3. 初步了解用代数方法处理几何问题的思想.

命题趋势探究

直线与圆的位置关系是高考考查的热点之一,通常涉及位置关系判断、圆的切线、直线与圆相交的弦长、公共弦、弦中点问题等.

圆的切线和弦的问题是本节重点,也是历届高考的热点之一,从试题层次上来看,大多为选择题、填空题,解题时应充分利用圆的性质,并注意数形结合.

作为平面解析几何的主要内容,预测 2012 年高考中直线与圆的位置关系仍将是考查的重点.

心得体会

知识点精讲

一、直线与圆的位置关系

直线与圆的位置关系有 3 种：相离、相切和相交.

二、直线与圆的位置关系的判断.

1. 几何方法

圆心(a,b)到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离 $d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，则：

$d<r\Leftrightarrow$直线与圆相交，交于两点 P、Q，$|PQ|=2\sqrt{r^2-d^2}$；

$d=r\Leftrightarrow$直线与圆相切；

$d<r\Leftrightarrow$直线与圆相离.

2. 代数方法

由$\begin{cases}Ax+By+C=0\\(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\end{cases}$，消元得到一元二次方程 $px^2+qx+t=0$（或 $py^2+qy+t=0$）其判别式为 Δ，则：

$\Delta>0\Leftrightarrow$直线与圆相交；

$\Delta=0\Leftrightarrow$直线与圆相切；

$\Delta<0\Leftrightarrow$直线与圆相离.

上述方法，以几何法为主.

三、圆与圆的位置关系

圆与圆的位置关系有 5 种，分别为相离、外切、相交、内切和内含.

四、两圆位置关系的判断

设两圆 O_1，O_2 的半径分别为 R，r（不妨设 $R\geqslant r$），且两圆的圆心距为 d，则：

$d>R+r\Leftrightarrow$两圆相离；

$d=R+r\Leftrightarrow$两圆外切；

$R-r<d<R+r\Leftrightarrow$两圆相交；

$d=R-r\Leftrightarrow$两圆内切；

$0\leqslant d<R-r\Leftrightarrow$两圆内含（$d=0$ 且 $R\neq r$ 时两圆为同心圆）.

五、关于圆的切线的几个重要结论：

(1)过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$的圆的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

(2)过圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$的圆的切线方程为

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.

(3)过圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 上一点 $P(x_0,y_0)$的圆的切线方程为

心得体会

$x_0x+y_0y+D\cdot\frac{x+x_0}{2}+E\cdot\frac{y+y_0}{2}+F=0$.

(4)过圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$(或$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$)外一点 $P(x_0,y_0)$的圆的切线长公式为 $d=\sqrt{x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F}$(或 $d=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2}$).

(5)在求过圆 $x^2+y^2=r^2$ 外一点 $P(x_0,y_0)$的圆的切线方程时,应注意理解:

①所求切线一定有两条;

②设直线方程之前,应对所求直线的斜率是否存在加以讨论.设切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$,利用圆心到切线的距离等于半径,列出关于 k 的方程,求出 k 值.若求出的 k 值有两个,则说明斜率不存在的情形不符合题意;若求出的 k 值只有一个,则说明斜率不存在的情形符合题意.

六、圆系方程及其应用

(1)以(a,b)为圆心的同心圆系方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=\lambda^2(\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq0)$.

(2)与圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 同心的圆系方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+\lambda=0$.

(3)过同一定点(a,b)的圆系方程为$(x-a)^2+(y-b)^2+\lambda_1(x-a)+\lambda_2(y-b)=0$.

(4)过直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的交点的圆系方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$.

(5)过两圆 $C_1:x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 和 $C_2:x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的交点的圆系方程为 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0(\lambda\neq-1)$.该圆系方程中不含有圆 C_2,因此应用该圆系方程时,要注意检验 C_2 是否满足题意,以防漏解.

特别地,在该圆系方程中,当 $\lambda=-1$ 时,方程变为$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$.

①当两圆相交时,此方程为两圆公共弦所在直线的方程;

②当两圆相切时,此方程为两圆公切线的直线方程;

③当两圆相离时,此方程为两圆连心线垂线的直线方程.

即求上述直线方程时,只需把两个圆的方程作差即得所求.

题型归纳及思路提示

题型 132　直线与圆的位置关系的判断

思路提示:判断方法有两种:一是代数法;二是几何法.通常建议利用几何法,即用圆心到直线的距离来判定直线与圆的位置关系.

【例 9.27】 已知圆的方程是 $x^2+y^2=2$,直线方程是 $y=x+b$,当 b 为何值时,圆与直线有两个公共点?只有一个公共点?没有公共点?

【解析】 解法一:(代数法)所求曲线公共点问题可转化为 b 为何值时方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=2\\y=x+b\end{cases}$ 有两组不同实数解、有两组相同实数解和无实数解的问题.

上述方程组整理得 $2x^2+2bx+b^2-2=0$.

该方程的根的判别式 $\Delta=(2b)^2-4\times2(b^2-2)=-4(b+2)(b-2)$.

心得体会

①当$-2<b<2$时，$\Delta>0$，方程组有两组不同实数解，因此直线与圆有两个公共点；

②当$b=2$或$b=-2$时，$\Delta=0$，方程组有两组相同实数解，因此直线与圆只有一个公共点；

③当$b<-2$或$b>2$时，$\Delta<0$，方程组没有实数解，因此直线与圆没有公共点.

以上分别就是直线与圆相交、相切、相离的三种情况.

解法二：(几何法)圆与直线有两个公共点.只有一个公共点和无公共点的问题，可以转化为b取何值时圆心到直线的距离小于半径、等于半径、大于半径的问题.圆的半径$r=\sqrt{2}$，圆心$O(0,0)$到直线$y=x+b$的距离为$d=\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}$.

①当$d<r$，即$-2<b<2$时，圆与直线相交，有两个公共点；

②当$d=r$，即$b=2$或$b=-2$时，圆与直线相切，有一个公共点；

③当$d>r$，即$b<-2$或$b>2$时，圆与直线相离，没有公共点.

【评注】 值得注意的是，在判断直线与圆的公共点个数或有关直线与圆的位置关系问题时，为避免计算量过大，一般不用判别式，而是使用几何方法，即用圆心到直线的距离与半径的大小关系求解；直线与圆的交点问题则常用根与系数的关系来简化运算过程.故强烈建议考生在求与圆有关的问题时，尽量运用圆的几何性质以减少运算量.

题型133　直线与圆的相交关系

思路提示：研究直线与圆的相交问题，应牢牢记住三长关系，即半弦长$\dfrac{l}{2}$、弦心距d和半径长r之间形成的数量关系为$\left(\dfrac{l}{2}\right)^2+d^2=r^2$.

【例9.28】 已知圆$C:x^2+y^2-8y+12=0$，直线$l:ax+y+2a=0$.

(1)当a为何值时，直线l与圆C相切；

(2)当直线l与圆相交于A,B两点，且$AB=2\sqrt{2}$时，求直线l的方程.

【分析】 根据点到直线距离等于半径来度量直线与圆相切问题；根据三长关系解决直线与圆相交问题.

【解析】 (1)圆的方程可化为$x^2+(y-4)^2=4$，故圆心为$C(0,4)$，因直线l与圆C相切，故圆心$C(0,4)$到直线l的距离$d=\dfrac{|4+2a|}{\sqrt{a^2+1}}=2$，解得$a=-\dfrac{3}{4}$.

(2)由题意，直线l与圆C相交，又$AB=2\sqrt{2}$，故有$(\sqrt{2})^2+\left(\dfrac{|4+2a|}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2=4$，化简可得$a^2+8a+7=0$，即$a=-1$或$a=-7$.故所求直线的方程为$x-y+2=0$或$7x-y+14=0$.

【评注】 在处理直线与圆的相交问题时经常用到三长关系.即半弦长、弦心距、半径长构成勾股数.同学们应高度重视此知识点.

【变式1】 直线l经过点$P(5,5)$且与圆$x^2+y^2=25$相交，截得弦长为$4\sqrt{5}$，求直线l的方程.

心得体会

【变式 2】（2011·湖北文，14）过点$(-1,-2)$的直线l被圆$x^2+y^2-2x-2y+1=0$截得的弦长为$\sqrt{2}$，则直线l的斜率为_____.

【例 9.29】（2008·全国Ⅰ理，10）若直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$通过点$M(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则（　　）.

A. $a^2+b^2\leqslant 1$　　B. $a^2+b^2\geqslant 1$

C. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\leqslant 1$　　D. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant 1$

【分析】本题主要考查圆的参数方程的求解、直线与圆的位置关系的判断以及由文字语言向数学语言的转化能力.

【解析】解法一：直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$通过点$M(\cos\alpha,\sin\alpha)$，而点$M$的轨迹为单位圆，即说明直线与单位圆有公共点，即直线与圆相切或相交.

所以$d=\frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\leqslant 1$，所以$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant 1$.

解法二：将点$M(\cos\alpha,\sin\alpha)$代入直线方程$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，得$\frac{\cos\alpha}{a}+\frac{\sin\alpha}{b}=1$.

因为$\left|\frac{\cos\alpha}{a}+\frac{\sin\alpha}{b}\right|=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\,|\sin(\alpha+\varphi)|\leqslant\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$，所以$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\geqslant 1$.

解法三：由直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$通过点$M(\cos\alpha,\sin\alpha)$得$\frac{\cos\alpha}{a}+\frac{\sin\alpha}{b}=1$，

由$\left(\frac{\cos\alpha}{a}+\frac{\sin\alpha}{b}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$，得$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant 1$.

故选 D.

【例 9.30】（2008·山东理，11）已知圆的方程为$x^2+y^2-6x-8y=0$. 设该圆过点$(3,5)$的最长弦和最短弦分别为AC和BD，则四边形$ABCD$的面积为（　　）.

A. $10\sqrt{6}$　　B. $20\sqrt{6}$

C. $30\sqrt{6}$　　D. $40\sqrt{6}$

【解析】$x^2+y^2-6x-8y=0$可化为$(x-3)^2+(y-4)^2=25$，故圆心坐标为$(3,4)$，半径为 5，点$(3,5)$在圆内. 所以AC为直径，即$|AC|=10$. BD最短，有$AC\perp BD$且BD过点$(3,5)$，

所以$|BD|=2\sqrt{25-[(3-3)^2+(5-4)^2]}=4\sqrt{6}$.

所以$S=\frac{1}{2}|AC||BD|=20\sqrt{6}$. 故选 B.

【变式 1】（2009·全国Ⅱ理，16）如图 9-11 所示，已知AC,BD为圆$O:x^2+y^2=4$的两条相互垂直的弦，垂足为$M(1,\sqrt{2})$，则四边形$ABCD$面积的最大值为_____.

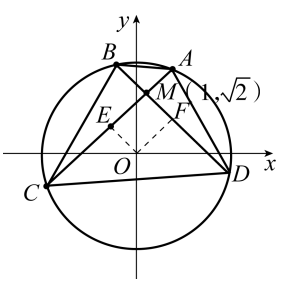


图　9-11

【例 9.31】（2007·江西理，16）设有一组圆$C_k:(x-k+1)^2+(y-3k)^2=2k^4(k\in\mathbf{N}^*)$.

下列四个命题：

A. 存在一条定直线与所有的圆均相切

心得体会

B. 存在一条定直线与所有的圆均相交

C. 存在一条定直线与所有的圆均不相交

D. 所有的圆均不经过原点

其中真命题是_____(写出所有真命题的代号).

【分析】 C_k:圆心坐标为$(k-1,3k)$,故圆心始终落在直线 $y=3x+3$ 上.

【解析】 设直线 l 的方程为 $ax+by+c=0(a^2+b^2\neq 0)$.

选项 A:圆心$(k-1,3k)$到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|a(k-1)+b\cdot 3k+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}k^2$,$k\in$

$\mathbf{N}^*\Rightarrow|(a+3b)k+c-a|=\sqrt{2(a^2+b^2)}\cdot k^2\Rightarrow a^2+b^2=a+3b=0$ 且 $c-a=0$,

与 $a^2+b^2\neq 0$ 矛盾. 故不存在一条直线与所有的圆均相切.

选项 B:直线 $y=3x+3$ 恒过 C_k 的圆心,故与所有圆均相交.

选项 C:$d>\sqrt{2}k^2\Rightarrow|(a+3b)k+c-a|>\sqrt{2(a^2+b^2)}\cdot k^2$,$k\in\mathbf{N}^*$

$\Rightarrow a^2+b^2=a+3b=0$,$c-a\neq 0$,与 $a^2+b^2\neq 0$ 矛盾.

选项 D:$(0-k+1)^2+(0-3k)^2=(k-1)^2+9k^2$,因为 $k\in\mathbf{N}^*$,

当 k 为奇数时,上式为奇数,当 k 为偶数时,上式还是奇数,

而 $2k^4$ 始终为偶数,所以$(k-1)^2+9k^2\neq 2k^4$. 故选 B 和 D.

【评注】 本题关键点在圆心落在直线 $y=3x+3$ 上,若 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 恒等于 0,则 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=a_0=0$.

【例 9.32】 若直线 $2ax-by+2=0(a,b>0)$始终平分圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的周长,则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$的最小值为_____.

【分析】 直线平分圆⇔直线过圆心⇔圆上有两点关于直线对称.

【解析】 直线平分圆的周长,即直线过圆心$(-1,2)$,从而有 $a+b=1(a,b>0)$.

所以$\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(a+b)=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+1=2+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2+2=4$

(当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$时取等号),故$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$的最小值为 4.

【变式 1】 (2008·湖北理,9)过点 $A(11,2)$作圆 $x^2+y^2+2x-4y-164=0$ 的弦,其中弦长为整数的共有(　　).

A. 16 条　　B. 17 条

C. 32 条　　D. 34 条

【变式 2】 (2008·天津理,13)已知圆 C 的圆心与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点关于直线 $y=x$ 对称. 直线 $4x-3y-2=0$ 与圆 C 相交于 A,B 两点,且$|AB|=6$,则圆 C 的方程为_____.

【变式 3】 (2009·江苏, 18)在平面直角坐标系 xOy 中,已知圆 $C_1:(x+3)^2+(y-1)^2=4$ 和 $C_2:(x-4)^2+(y-5)^2=4$.

(1)若直线 l 过点 $A(4,0)$,且被圆 C_1 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$,求直线 l 的方程;

(2)设P 为平面上的点,满足存在过点 P 的无穷多对互相垂直的直线 l_1 和 l_2,它们分别与圆 C_1 和圆 C_2 相交,且直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等. 试求所有满足条件的点 P 的坐标.

心得体会

【变式 4】 (2011·课标全国文,20(2))在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 $y=x^2-6x+1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上.若圆 C 与直线 $x-y+a=0$ 交于 A,B 两点,且 $OA\perp OB$,求 a 的值.

题型 134　直线与圆的相切关系

思路提示:直线与圆相切,则圆心到直线的距离等于半径.切线的几何性质为:圆心和切点的连线垂直于切线.

【例 9.33】 求经过点(1,−7)与圆 $x^2+y^2=25$ 相切的切线方程.

【分析】 将点(1,−7)代入圆方程得 $1^2+(-7)^2=50>25$,知点(1,−7)是圆外一点,故只需求切线的斜率或再求切线上另一点坐标.

【解析】 解法一:依题意,直线的斜率存在.设所求切线斜率为 k,则所求直线方程为 $y+7=k(x-1)$,整理成一般式为 $kx-y-k-7=0$,由圆的切线的性质,可得 $\dfrac{|0-0-k-7|}{\sqrt{1+k^2}}=5$.

化简得 $12k^2-7k-12=0$,解得 $k=\dfrac{4}{3}$ 或 $k=-\dfrac{3}{4}$.

故所求切线方程为:$4x-3y-25=0$ 或 $3x+4y+25=0$.

解法二:依题意,直线的斜率存在.设所求切线方程为 $x_0x+y_0y=25$((x_0,y_0)是圆上的点).

将坐标(1,−7)代入后得 $x_0-7y_0=25$,由 $\begin{cases}x_0-7y_0=25\\x_0^2+y_0^2=25\end{cases}$,

解得 $\begin{cases}x_0=4\\y_0=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-3\\y_0=-4\end{cases}$.故所求切线方程为 $4x-3y-25=0$ 或 $3x+4y+25=0$.

【评注】 已知圆外一点,求圆的切线方程一般有三种方法:①设切点,用切线公式法;②设切线斜率,用判别式法;③设切线斜率,用圆心到切线距离等于圆半径法.一般地,过圆外一点可向圆作两条切线,在后两种方法中,应注意斜率不存在时的情况.

【变式 1】 已知圆 $O:(x-1)^2+(y-2)^2=4$,求过点 $P(-1,5)$ 的圆的切线方程.

【变式 2】 (2011·福建理,17(1))已知直线 $l:y=x+m,m\in\mathbf{R}$.若以点 $M(2,0)$ 为圆心的圆与直线 l 相切与点 P,且点 P 在 y 轴上,求该圆的方程.

【例 9.34】 自点 $A(-3,3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上,被 x 轴反射,其反射光线所在直线与圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切,求入射光线 l 所在直线的方程.

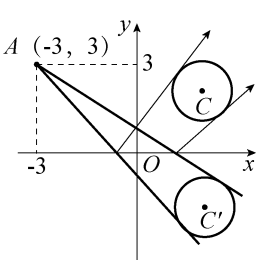


图　9-12

【分析】 利用对称性解决此类反射问题.根据光学特征,对称性的使用既可以使用点的对称,也可以使用圆的对称.

【解析】 已知圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 关于 x 轴的对称圆 C' 的方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=1$,如图 9-12 所示,可设光线 l 所在直线方程为 $y-3=k(x+3)$,所以直线 l 与圆 C' 相

心得体会

切，圆心 $C'(2,-2)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|5k+5|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=-\dfrac{3}{4}$ 或 $k=-\dfrac{4}{3}$，

所以光线 l 所在直线的方程为 $3x+4y-3=0$ 或 $4x+3y+3=0$.

【变式 1】 自点 $A(-3,3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上，被 x 轴反射，其反射光线 l' 所在直线与圆 $C:x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切，求反射光线 l' 所在直线的方程.

题型 135　直线与圆的相离关系

思路提示：关于直线与圆的相离问题的题目大多是最值问题，即直线上的点与圆上的点的最近或最远距离问题.这样的题目往往要转化为直线上的点与圆心距离的最近和最远距离再加减半径长的问题.

【例 9.35】 由直线 $y=x+1$ 上点向圆 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$ 引切线，则切线长的最小值为(　　).

A. $\sqrt{17}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{19}$　　D. $2\sqrt{5}$

【分析】 如图 9-13 所示，过直线 $y=x+1$ 上任意一点 P 向圆 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$ 引切线 PQ，得 $PQ\perp O_1Q$，

$|PQ|=\sqrt{|O_1P|^2-|O_1Q|^2}=\sqrt{|O_1P|^2-1}$.

那么，当切线长 PQ 取最小值时，即 O_1P 取最小值.

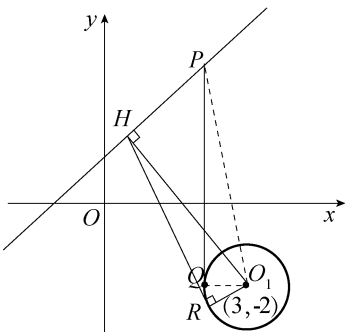


图　9-13

【解析】 过 O_1 作 O_1H 垂直于直线 $y=x+1$ 于点 H，

过 H 作 HR 相切圆 O_1 于点 R，连接 O_1R，则切线长的最小值为 $|HR|$. 圆心坐标 $(3,-2)$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离 $d=\dfrac{|3+2+1|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$.

$|HR|=\sqrt{|O_1H|^2-|O_1R|^2}=\sqrt{17}$. 故选 A.

【变式 1】 已知点 $P(x,y)$ 是直线 $kx+y+4=0(k>0)$ 上一动点，PA，PB 是圆 $C:x^2+y^2-2y=0$ 的两切线，A，B 是切点，若四边形 $PACB$ 的最小面积是 2，则 k 的值为(　　).

A. 3　　B. $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 2

【变式 2】 (2008·北京宣武一模，19)如图 9-14 所示，已知圆和定点 $A(2,1)$，由圆 O 外一点 $P(a,b)$ 向圆 $O:x^2+y^2=1$ 引切线 PQ，切点为 Q，且满足 $|PQ|=|PA|$.

(1)求实数 a，b 间满足的等量关系；

(2)求线段 PQ 长的最小值.

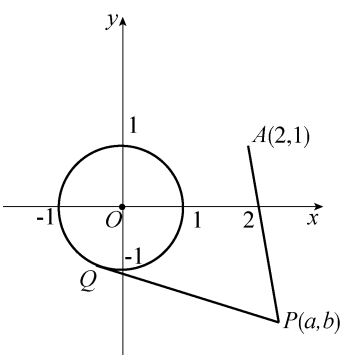


图　9-14

心得体会

题型 136　圆与圆的位置关系

思路提示：已知两圆半径分别为 r_1，r_2，两圆的圆心距为 d，则：

(1)两圆相离$\Leftrightarrow r_1+r_2<d$；

(2)两圆外切 $\Leftrightarrow r_1+r_2=d$；

(3)两圆相交 $\Leftrightarrow |r_1-r_2|<d<r_1+r_2$；

(4)两圆内切$\Leftrightarrow |r_1-r_2|=d$ ；

(5)两圆内含 $\Leftrightarrow |r_1-r_2|>d$.

两圆外切和内切较为重要，这两种位置关系常与椭圆和双曲线的定义综合考查.

【例 9.36】 圆 $O_1:x^2+y^2-2=0$ 和圆 $O_2:x^2+y^2-4y=0$ 的位置关系是(　　).

A. 相离　　B. 相交　　C. 外切　　D. 内切

【分析】 判断圆心距与两圆半径的关系.

【解析】 由圆 $O_1:x^2+y^2=2$ 得 $O_1(0,0)$，$r_1=\sqrt{2}$，

圆 $O_2:x^2+y^2-4y=0$ 得 $O_2(0,2)$，半径 $r_2=2$，

$r_2-r_1<|O_1O_2|=2<r_1+r_2$，故两圆相交. 故选 B.

【变式 1】 圆 $x^2+y^2-2x+2y=0$ 与 $x^2+y^2-2x-3y+\frac{9}{4}=0$ 的位置关系为_____.

【例 9.37】 已知两圆 $x^2+y^2-2x-6y-1=0$ 和 $x^2+y^2-10x-12y+m=0$.

(1)m 取何值时两圆外切.

(2)m 取何值时两圆内切，此时公切线方程是什么？

(3)求 $m=45$ 时两圆的公共弦所在直线的方程和公共弦的长.

【分析】 把两圆的一般方程化为标准方程，求两圆的圆心距 d，判断 d 与 $R+r$，$R-r$ 的关系，再用圆的几何性质分别解决(2)(3)问.

【解析】 两圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2=11$，$(x-5)^2+(y-6)^2=61-m$.

圆心分别为 $M(1,3)$，$N(5,6)$，半径分别为 $\sqrt{11}$ 和 $\sqrt{61-m}$.

(1)当两圆外切时，$\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2}=\sqrt{11}+\sqrt{61-m}$，

解得 $m=25+10\sqrt{11}$.

(2)当两圆内切时，因定圆的半径 $\sqrt{11}$ 小于两圆圆心间距离 5，

故只有 $\sqrt{61-m}-\sqrt{11}=5$，解得 $m=25-10\sqrt{11}$.

两圆方程 $x^2+y^2-2x-6y-1=0$ 与 $x^2+y^2-10x-12y+m=0$ 相减得

$8x+6y-1-m=0$，将 $m=25-10\sqrt{11}$ 代入，得 $8x+6y-1-25+10\sqrt{11}=0$，

即 $4x+3y-13+5\sqrt{11}=0$.

(3)两圆的公共弦所在直线方程为 $(x^2+y^2-2x-6y-1)-(x^2+y^2-10x-12y+45)=0$，即 $4x+3y-23=0$.

所以公共弦长为 $2\sqrt{(\sqrt{11})^2-\left(\frac{|4+3\times3-23|}{\sqrt{4^2+3^2}}\right)^2}=2\sqrt{7}$.

【评注】 应注意两圆位置关系由圆心距和两圆半径的和与差来确定.

心得体会

【变式 1】（2007・上海文，11）如图 9-15 所示，A，B 是直线 l 上的两点，且 $AB=2$. 两个半径相等的动圆分别与 l 相切于点 A，B，点 C 是这两个圆的公共点，则圆弧 AC，CB 与线段 AB 围成图形的面积 S 的取值范围是_____.

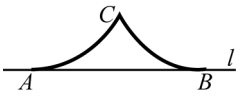


图　9-15

【变式 2】（2009・天津文，14）若圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+2ay-6=0(a>0)$ 公共弦的长为 $2\sqrt{3}$，则 $a=$_____.

【变式 3】（2011・大纲全国文，11）设两圆 C_1，C_2 都和两坐标轴相切，且都过点 $(4,1)$，则两圆的圆心距离 $|C_1C_2|=$（　　）.

A. 4　　B. $4\sqrt{2}$　　C. 8　　D. $8\sqrt{2}$

【变式 4】（2008・北京东城区一模文，19）如图 9-16 所示，在平面直角坐标系中，N 为圆 A：$(x+1)^2+y^2=16$ 上的一动点，点 B 坐标为 $(1,0)$，点 M 是 BN 的中点，点 P 在线段 AN 上，且 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{BN}=0$.

(1)求动点 P 的轨迹方程；

(2)试判断以 PB 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=4$ 的位置关系，并说明理由.

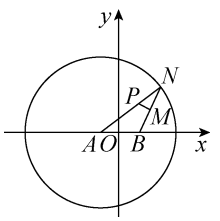


图　9-16

第十章　圆锥曲线方程

第一节　椭圆

考纲解读

1. 了解圆锥曲线的实际背景及其在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.
2. 掌握椭圆的定义、标准方程、几何图形及简单性质.
3. 了解椭圆的简单应用.
4. 理解数形结合的思想.

命题趋势探究

椭圆是圆锥曲线的重要内容，主要考查椭圆的基本性质、椭圆方程的求法、椭圆定义的运用和椭圆中各个量的计算，尤其是离心率的求解，是高考的热点问题，在各种题型中均有体现.

预测2012年高考对本节考查的内容为：

(1)利用标准方程研究几何性质，尤其是离心率的求值问题.

(2)利用确定条件求出椭圆的方程，特别是与向量综合求方程更是重点. 椭圆的定义、标准方程和几何性质的考查以容易题目为主，每年高考分值保持在5分.

知识点精讲

一、椭圆的定义

平面内，与两个定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数 $2a(2a>|F_1F_2|)$ 的点的轨迹叫作椭圆，这两个定点叫作椭圆的焦点，两焦点的距离叫作椭圆的焦距，记作 $2c$. 即

$\{P||PF_1|+|PF_2|=2a\ (2a>|F_1F_2|)\}$.

拓展：当 $2a=2c$ 时，点的轨迹是线段；

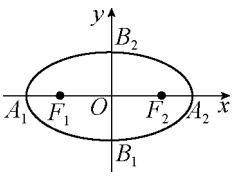
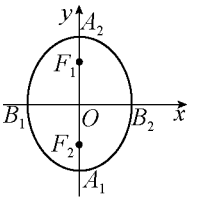
当 $2a<2c$ 时，点的轨迹不存在.

二、椭圆的简单几何性质

椭圆的简单几何性质如表10-1所示.

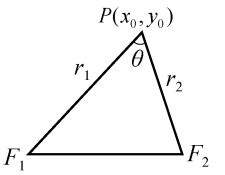
心得体会

表　10-1

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$
图形		
焦点坐标	$F_1(-c,0),F_2(c,0)$	$F_1(0,c),F_2(0,-c)$
对称性	关于 x,y 轴成轴对称，关于原点成中心对称	
顶点坐标	$A_1(-a,0),A_2(a,0)$， $B_1(0,-b),B_2(0,b)$	$A_1(0,-a),A_2(0,a)$， $B_1(-b,0),B_2(b,0)$
范围	$\lvert x\rvert\leqslant a,\lvert y\rvert\leqslant b$	$\lvert x\rvert\leqslant b,\lvert y\rvert\leqslant a$
长轴短轴	长轴 A_1A_2 长为 $2a$，短轴 B_1B_2 长为 $2b$	
离心率	椭圆的焦距与长轴长的比为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\ (0<e<1)$	
点和椭圆的关系	$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\begin{cases}>1\\=1\Leftrightarrow\\<1\end{cases}$ 点 (x_0,y_0) 在椭圆 $\begin{cases}外\\上\\内\end{cases}$	$\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}\begin{cases}>1\\=1\Leftrightarrow\\<1\end{cases}$ 点 (x_0,y_0) 在椭圆 $\begin{cases}外\\上\\内\end{cases}$
切线方程	$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$（k 为切线的斜率）；$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$（$(x_0,y_0)$ 为切点）	$y=kx\pm\sqrt{b^2k^2+a^2}$（k 为切线的斜率）； $\frac{y_0y}{a^2}+\frac{x_0x}{b^2}=1$（$(x_0,y_0)$ 为切点）
切点弦所在的方程	$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$（点 (x_0,y_0) 在椭圆外）	$\frac{y_0y}{a^2}+\frac{x_0x}{b^2}=1$（点 (x_0,y_0) 在椭圆外）
弦长公式	设直线与椭圆的两交点为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),k_{AB}=k$， 则弦长 $\lvert AB\rvert=\sqrt{1+k^2}\lvert x_1-x_2\rvert=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\lvert y_1-y_2\rvert(k\neq0)$， $\lvert x_1-x_2\rvert=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$，其中“$a$”是消“$y$”后关于“$x$”的一元二次方程的“$x^2$”系数	
通径	最短的焦点弦 通径长 $=\frac{2b^2}{a}$，通径过焦点且垂直 F_1F_2	最短的焦点弦 通径长 $=\frac{2b^2}{a}$，通径过焦点且垂直 F_1F_2
焦半径	椭圆上任一点 P 到一个焦点 F 的距离，$\begin{cases}\lvert PF\rvert_{\max}=a+c\\\lvert PF\rvert_{\min}=a-c\end{cases}$	

心得体会

续表

焦点三角形	①$\cos\theta=\frac{2b^2}{r_1r_2}-1$，$\theta_{\max}=\angle F_1BF_2$（$B$ 为短轴的端点） ②$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}r_1r_2\sin\theta=b^2\tan\frac{\theta}{2}=c\lvert y_0\rvert$ ③$\begin{cases}(r_1r_2)_{\max}=a^2(P\text{ 与 }B\text{ 重合})\\(r_1r_2)_{\min}=b^2(P\text{ 与 }A\text{ 重合})\end{cases}$	
参数方程	$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$，$\theta\in[0,2\pi)$	$\begin{cases}x=b\cos\theta\\y=a\sin\theta\end{cases}$，$\theta\in[0,2\pi)$

题型归纳及思路提示

题型 137　椭圆的定义与标准方程

思路提示：(1)定义法：根据椭圆定义，确定 a^2，b^2 的值，再结合焦点位置，直接写出椭圆方程.

(2)待定系数法：根据椭圆焦点是在 x 轴还是在 y 轴上，设出相应形式的标准方程，然后根据条件确定 a，b，c 的方程组，解出 a^2，b^2，从而求得标准方程.

注意：①如果椭圆的焦点位置不能确定，可设方程为

$Ax^2+By^2=1(A>0,B>0,A\neq B)$ 或 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(m>0,n>0,m\neq n)$.

②与椭圆 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ 共焦点的椭圆可设为 $\frac{x^2}{m^2+k}+\frac{y^2}{n^2+k}=1(k>-m^2,k>-n^2$ 且 $m^2\neq n^2)$.

③与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 有相同离心率的椭圆，可设为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k_1$ $(k_1>0$，焦点在 x 轴上）或 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=k_2(k_2>0$，焦点在 y 轴上）.

一、椭圆的定义与标准方程的求解

【例 10.1】 动点 P 到两定点 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$ 的距离之和为 10，则动点 P 的轨迹方程是(　　).

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$　　B. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

C. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$　　D. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

【解析】 依题意，动点 P 满足椭圆方程，且焦点在 x 轴上，设方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

由 $c=4$，$2a=10$，$a=5$，得 $b=3$，则椭圆方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. 故选 B.

心得体会

【变式 1】 求焦点的坐标分别为 $F_1(0,-3)$，$F_2(0,3)$，且过点 $P\left(\frac{16}{5},3\right)$ 的椭圆的方程.

【变式 2】 已知点 P 在以坐标轴为对称轴的椭圆上，点 P 到两焦点的距离分别为 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ 和 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$，过点 P 作长轴的垂线恰好过椭圆的一个焦点，求此椭圆的方程.

【例 10.2】 在△ABC 中，已知 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，动点 C 使得△ABC 的周长为 10. 则动点 C 的轨迹方程为_____.

【解析】 由题意知 $|CA|+|CB|=10-|AB|=10-4=6>|AB|$，

故动点 C 的轨迹是以 A，B 为焦点，长轴长为 6 的椭圆（除去左、右顶点）即 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1(y\neq 0)$.

【变式 1】 已知动圆 P 过定点 $A(-3,0)$，且与圆 $B:(x-3)^2+y^2=64$ 相切，求动圆圆心 P 的轨迹方程.

【变式 2】 如图 10-1 所示，已知一动圆与圆 $O_1:(x+3)^2+y^2=1$ 外切，与圆 $O_2:(x-3)^2+y^2=81$ 内切，试求动圆圆心的轨迹方程.

【变式 3】 已知圆 $O_1:(x+2)^2+y^2=16$，圆 $O_2:(x-2)^2+y^2=4$，动圆 P 与圆 O_1 内切，与圆 O_2 外切，求动圆圆心 P 的轨迹方程.

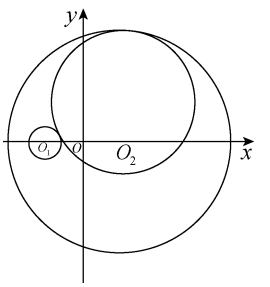


图　10-1

【例 10.3】 已知椭圆的长轴长是 8，离心率是 $\frac{3}{4}$，则此椭圆的标准方程是（　　）.

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 或 $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$

C. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$　　D. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 或 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

【解析】 因为椭圆的长轴长是 8，即 $2a=8$，所以 $a=4$. 离心率为 $\frac{3}{4}$，则 $\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$，$c=3$，所以 $b^2=a^2-c^2=7$，所以椭圆的标准方程是 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 或 $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{7}=1$. 故选 B.

【变式 1】 (2011·陕西文，17(1))设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(0,4)$，离心率为 $\frac{3}{5}$，求 C 的方程.

【变式 2】 (2009·安徽合肥)已知椭圆的中心在原点，焦点在 x 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，且过 $P(-5,4)$，则椭圆的方程为_____.

【变式 3】 (2011·课标全国理，14)在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的中心为原点，焦点 F_1，F_2 在 x 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 过 F_1 的直线 l 交 C 于 A，B 两点，且△ABF_2 的周长为 16，那么 C 的方程为_____.

心得体会

二、椭圆方程的充要条件

【例 10.4】 若方程$\frac{x^2}{5-k}+\frac{y^2}{k-3}=1$表示椭圆，则 k 的取值范围是_____.

【解析】 由题意可知$\begin{cases}5-k>0\\k-3>0\\5-k\neq k-3\end{cases}$，解得 $3<k<4$ 或 $4<k<5$.

故 k 的取值范围为$(3,4)\cup(4,5)$.

【评注】 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示椭圆的充要条件为：$m>0,n>0,m\neq n$；

$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示双曲线方程的充要条件为：$mn<0$；

$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示圆的方程的充要条件为：$m=n>0$.

【变式 1】 如果 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则 k 的取值范围是_____.

【变式 2】 (2009·陕西理，7)“$m>n>0$”是“方程 $mx^2+ny^2=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆”的(　　).

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

题型 138　离心率的值及取值范围

思路提示：求离心率的本质就是探求 a,b,c 之间的数量关系. 知道 a,b,c 中任意两者间的等式关系或不等关系便可求解出 e 或其范围. 具体方法为方程法和定义法.

【例 10.5】 过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆于点 P，F_2 为右焦点，若$\angle F_1PF_2=60°$，则椭圆的离心率为(　　).

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

【解析】 解法一：(定义法)如图 10-2 所示，令$|PF_1|=1$，则$|PF_2|=2$，$|F_1F_2|=\sqrt{3}$，由椭圆定义得 $2a=|PF_1|+|PF_2|=3$，$2c=\sqrt{3}$，所以 $e=\frac{2c}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

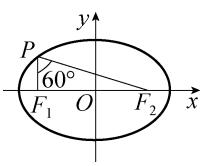


图　10-2

解法二：(标准方程法)因为 $P\left(-c,\pm\frac{b^2}{a}\right)$，再由$\angle F_1PF_2=60°$，有$|PF_2|=2|PF_1|$，$3|PF_1|=\frac{3b^2}{a}=2a$，$2a^2=3b^2=3(a^2-c^2)$，从而可得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

【变式 1】 已知正方形 $ABCD$，以 A,B 为焦点，且过 C,D 两点的椭圆的离心率为_____.

【变式 2】 在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，$\cos B=-\frac{7}{18}$，若以 A,B 为焦点的椭圆经过点 C，则该

椭圆的离心率 $e=$_____.

【例 10.6】 椭圆 $G:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两焦点为 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，椭圆上存在点 M 使 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$，则椭圆离心率 e 的取值范围为_____.

【解析】 由知识点精讲中结论知，当 P 为椭圆的短轴端点时，$\angle F_1PF_2$ 取得最大值，而由题意可知，若在椭圆上存在点 M 使得 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$，即 $\angle F_1MF_2=90°$，只需要焦点三角形的顶角最大值 $\geqslant 90°$ 即可. 故只需保证当点 M 落在椭圆短轴端点处情形时的 $\angle F_1MF_2\geqslant 90°$ 即可. 所以有 $\frac{c}{a}=\sin\frac{\angle F_1MF_2}{2}\geqslant\sin\frac{\pi/2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为 $e<1$，故所求的椭圆离心率 e 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

【变式 1】 已知 F_1,F_2 是椭圆的两个焦点，满足 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$ 的点总在椭圆内部，则椭圆离心率的取值范围是(　　).

A. $(0,1)$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　C. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

【例 10.7】 (2009·山东青岛)已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，且 $|F_1F_2|=2c$，点 A 在椭圆上，且 AF_1 垂直于 x 轴，$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=c^2$，则椭圆的离心率 e 等于(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】 依题意，设 $A\left(-c,\frac{b^2}{a}\right),F_1(-c,0),F_2(c,0),\overrightarrow{AF_1}=\left(0,-\frac{b^2}{a}\right),\overrightarrow{AF_2}=\left(2c,-\frac{b^2}{a}\right)$，

$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=\frac{b^4}{a^2}=c^2$，所以 $b^2=ac=a^2-c^2$，得 $e=1-e^2$，$e^2+e-1=0$，又 $e\in(0,1)$，

所以 $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 故选 C.

【变式 1】 椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，P 为椭圆上任一点，且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最大值的取值范围是 $[c^2,3c^2]$，其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，则椭圆 M 的离心率 e 的取值范围是(　　).

A. $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　C. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},1\right)$

【例 10.8】 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点是 F_1,F_2，若 P 为其上一点，且 $|PF_1|=2|PF_2|$，则此椭圆离心率的取值范围为_____.

【分析】 根据椭圆的定义 $|PF_1|+|PF_2|=2a$ 求解.

【解析】 解法一：由 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|PF_1|=2|PF_2|$，得 $|PF_1|=\frac{4a}{3}$，$|PF_2|=\frac{2a}{3}$，又 $|PF_1|-|PF_2|\leqslant 2c$，得 $\frac{2a}{3}\leqslant 2c$，$\frac{1}{3}\leqslant e<1$.

故离心率的取值范围为 $\left[\frac{1}{3},1\right)$.

心得体会

解法二：因为$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{2a-|PF_2|}{|PF_2|}=\frac{2a}{|PF_2|}-1$，随着点 P 的左移，$|PF_2|$ 增大，故$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$减小，因此$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$随点 P 的左移递减. 故点 P 在右顶点时，$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}\geqslant 2$，即$\frac{a+c}{a-c}\geqslant 2\Rightarrow\frac{1}{3}\leqslant e<1$.

【评注】 若椭圆上存在点 P 使得$|PF_1|=\lambda|PF_2|(\lambda>1)$，则$\frac{a+c}{a-c}\geqslant\lambda\Rightarrow\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\leqslant e<1$.

【变式 1】 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，若椭圆上存在一点 P 使$\frac{\sin\angle PF_1F_2}{\sin\angle PF_2F_1}=\frac{c}{a}$，则该椭圆的离心率的取值范围是_____.

【例 10.9】 设 F_1，F_2 是椭圆的两焦点，以 F_2 为圆心，且过椭圆中心的圆与椭圆的一个交点为 M，若直线 F_1M 与圆 F_2 相切，则椭圆的离心率为(　　).

A. $\sqrt{3}-1$　　B. $2-\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】 由题意可知$(2a-c)^2+c^2=4c^2$，整理可得 $c^2+2ac-2a^2=0$，两边同时除以 a^2 得$\left(\frac{c}{a}\right)^2+2\cdot\frac{c}{a}-2=0$，即 $e^2+2e-2=0$，求得 $e=-1\pm\sqrt{3}$，又 $0<e<1$，故 $e=-1+\sqrt{3}$. 故选 A.

【变式 1】 过椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点 A 的斜率为 k 的直线交椭圆 C 于另一点 B，且点 B 在 x 轴上的射影恰好为右焦点 F，若$\frac{1}{3}<k<\frac{1}{2}$，则椭圆离心率的取值范围是(　　).

A. $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{2}{3},1\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

题型 139　焦点三角形

思路提示： 焦点三角形的性质：$\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $2a+2c$，$S_{\triangle PF_1F_2}=c|y_P|=b^2\tan\frac{\theta}{2}$($\theta=\angle F_1PF_2$).

【例 10.10】 已知 F_1，F_2 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点，$P$ 为椭圆 C 上一点，且$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$，若$\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9，则 $b=$_____.

【解析】 焦点三角形 PF_1F_2 中，$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$，故 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|$，

又$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，$|PF_1|+|PF_2|=2a$，

则$(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1||PF_2|=|F_1F_2|^2$，$4a^2-2|PF_1||PF_2|=4c^2$，

所以$|PF_1||PF_2|=2b^2$，则 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2=9$，故 $b=3$.

【评注】 若$\triangle PF_1F_2$ 为一般三角形，则 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\theta$(用 θ 表示$\angle F_1PF_2$).

由余弦定理得$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\theta=|F_1F_2|^2$，

心得体会

又$|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，

所以$(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1||PF_2|\cdot(1+\cos\theta)=4c^2$，

所以$2|PF_1||PF_2|(1+\cos\theta)=4b^2$，$|PF_1||PF_2|=\dfrac{2b^2}{1+\cos\theta}$，

所以$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2b^2}{1+\cos\theta}\cdot\sin\theta$

$=\dfrac{b^2}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\cdot 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$.

本题$\angle F_1PF_2=90°$，则$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2=9$，易得$b=3$. 故熟记椭圆焦点三角形$PF_1F_2$的面积公式$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$，对于求解选、填问题有着很大优势.

【变式 1】 已知F_1，F_2是椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$的两个焦点，$P$为椭圆$C$上一点，且$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{5}{13}$，求$\triangle F_1PF_2$的面积.

【例 10.11】 已知椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$P$是椭圆上的一动点.

(1)求$|PF_1||PF_2|$的取值范围；

(2)求$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$的取值范围.

【解析】 (1)在焦点三角形PF_1F_2中，

$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\dfrac{2b^2}{|PF_1||PF_2|}-1$，

得$|PF_1||PF_2|=\dfrac{2b^2}{1+\cos\angle F_1PF_2}$，

$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{2b^2}{|PF_1||PF_2|}-1\geqslant\dfrac{2b^2}{\left(\dfrac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2}-1=\dfrac{2b^2}{a^2}-1$(当且仅当$|PF_1|=|PF_2|$时取等号).

故$b^2\leqslant|PF_1||PF_2|\leqslant\dfrac{2b^2}{2b^2/a^2}=a^2$，则$3\leqslant|PF_1||PF_2|\leqslant 4$.

(2)$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|\cos\angle F_1PF_2$

$=|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|\left(\dfrac{2b^2}{|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|}-1\right)=2b^2-|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|\in[2b^2-a^2,b^2]$.

故$2\leqslant\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\leqslant 3$，则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$的取值范围是$[2,3]$.

【评注】 (1)若本题的第(1)问只求$|PF_1||PF_2|$的最大值，则使用椭圆的定义求取更为简洁：由椭圆定义可知$|PF_1|+|PF_2|=2a=4$，又因$4=|PF_1|+|PF_2|\geqslant 2\sqrt{|PF_1||PF_2|}$，故有$|PF_1||PF_2|\leqslant 4$，故$|PF_1||PF_2|$的最大值为4.

(2)通过本题的求解，可得到椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$有以下重要结论：

①$b^2\leqslant|PF_1||PF_2|\leqslant a^2$；

②$b^2-c^2\leqslant\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\leqslant a^2-c^2$；(在椭圆的焦点三角形中有$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=x_P^2+y_P^2-c^2$)；

心得体会

③$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{2b^2}{|PF_1||PF_2|}-1\geqslant\dfrac{2b^2}{a^2}-1$(当且仅当$|PF_1|=|PF_2|=a$,即$P$为椭圆的短轴端点时,$\cos\angle F_1PF_2$取得最小值,且此时点$P$对两个焦点的张角$\angle F_1PF_2$最大.

以上结论在求解椭圆的焦点三角形问题时有重要的应用,值得同学们熟记.

【变式 1】 设P是椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$上一动点,$F_1$,$F_2$分别是左、右两个焦点,则$\cos\angle F_1PF_2$的最小值是(　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{9}$　　C. $-\dfrac{1}{9}$　　D. $-\dfrac{5}{9}$

【变式 2】 设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点为$F_1$和$F_2$,$P$是椭圆上任一点,若$\angle F_1PF_2$的最大值为$\dfrac{2\pi}{3}$,则此椭圆的离心率为_____.

第二节　双曲线

考纲解读

了解双曲线的定义、几何图形和标准方程,知道它的简单几何性质.

命题趋势探究

(1)从内容上看,新课标高考主要考查双曲线的定义、方程、离心率和渐近线等基础知识,侧重考查基本量的计算.

(2)从形式上看,以选择题和填空题为主,难度不大.

(3)从能力上看,主要考查学生的运算和数形结合能力.

总体来看,双曲线的考试要求要比椭圆和抛物线低,预测2012年高考出现解答题的可能性不大,建议复习时把精力主要集中在选择题和填空题上即可.

知识点精讲

一、基本概念

平面内,与两个定点F_1,F_2的距离的差的绝对值等于常数(大于零且小于$|F_1F_2|$)的点的轨迹叫作双曲线(这两个定点叫双曲线的焦点).用集合表示为$\left\{M\,\middle|\,\big||MF_1|-|MF_2|\big|=2a\ (0<2a<|F_1F_2|)\right\}$.

心得体会

注①若定义式中去掉绝对值，则曲线仅为双曲线其中的一支.

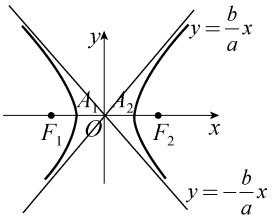
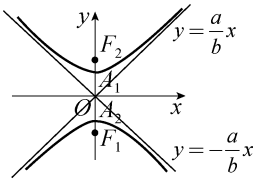
②$2a=|F_1F_2|$时，点的轨迹是以F_1和F_2为端点的两条射线.

③$2a>|F_1F_2|$时，点的轨迹不存在.

二、基本性质、定理与公式

双曲线的基本性质、定理与公式如表 10-2 所示.

表　10-2

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$
图形		
焦点坐标	$F_1(-c,0),F_2(c,0)$	$F_1(0,-c),F_2(0,c)$
对称性	关于x，y轴成轴对称，关于原点成中心对称	
顶点坐标	$A_1(-a,0),A_2(a,0)$	$A_1(0,a),A_2(0,-a)$
范围	$\lvert x\rvert\geqslant a$	$\lvert y\rvert\geqslant a$
实轴、虚轴	实轴长为$2a$，虚轴长为$2b$	
离心率	$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\ (e>1)$	
渐近线方程	令$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$， 焦点到渐近线的距离为$b$	令$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=0\Rightarrow y=\pm\frac{a}{b}x$， 焦点到渐近线的距离为$b$
点和双曲线的位置关系	$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}$ $\begin{cases}>1,\text{点}(x_0,y_0)\text{在双曲线内（含焦点部分）}\\=1,\text{点}(x_0,y_0)\text{在双曲线上}\\<1,\text{点}(x_0,y_0)\text{在双曲线外}\end{cases}$	$\frac{y_0^2}{a^2}-\frac{x_0^2}{b^2}$ $\begin{cases}>1,\text{点}(x_0,y_0)\text{在双曲线内（含焦点部分）}\\=1,\text{点}(x_0,y_0)\text{在双曲线上}\\<1,\text{点}(x_0,y_0)\text{在双曲线外}\end{cases}$
共焦点的双曲线方程	$\frac{x^2}{a^2+k}-\frac{y^2}{b^2-k}=1(-a^2<k<b^2)$	$\frac{y^2}{a^2+k}-\frac{x^2}{b^2-k}=1(-a^2<k<b^2)$
共渐近线的双曲线方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda\ (\lambda\neq0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=\lambda\ (\lambda\neq0)$
切线方程	$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$，$(x_0,y_0)$为切点	$\frac{y_0y}{a^2}-\frac{x_0x}{b^2}=1$，$(x_0,y_0)$为切点
	若(x_0,y_0)为双曲线上一点，在标准方程中用x_0x代替x^2，用y_0y代替y^2即得到切点为(x_0,y_0)的切线方程	
切点弦所在直线方程	$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$， 点$(x_0,y_0)$为双曲线外一点	$\frac{y_0y}{a^2}-\frac{x_0x}{b^2}=1$， 点$(x_0,y_0)$为双曲线外一点
	点(x_0,y_0)为双曲线与两渐近线之间的点	

心得体会

续表

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$
弦长公式	设直线与双曲线两交点为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),k_{AB}=k$， 则弦长 $\|AB\|=\sqrt{1+k^2}\|x_1-x_2\|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\|y_1-y_2\|(k\neq 0)$， $\|x_1-x_2\|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{\Delta}}{\|a\|}$	
通径	同支最短的焦点弦通径长 $=\frac{2b^2}{a}$，通径过焦点且垂直 F_1F_2	同支最短的焦点弦通径长 $=\frac{2b^2}{a}$，通径过焦点且垂直 F_1F_2
焦点三角形	双曲线上一点 $P(x_0,y_0)$ 与两焦点 F_1,F_2 构成的 $\triangle PF_1F_2$ 称为焦点三角形， 设 $\angle F_1PF_2=\theta,\|PF_1\|=r_1,\|PF_2\|=r_2$，则 $\cos\theta=1-\frac{2b^2}{r_1r_2}$， $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}r_1r_2\sin\theta=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot b^2=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}=c\|y_0\|$	
等轴双曲线	等轴双曲线满足如下充要条件： 双曲线为等轴双曲线$\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow$离心率 $e=\sqrt{2}\Leftrightarrow$两渐近线互相垂直$\Leftrightarrow$渐近线方程为 $y=\pm x\Leftrightarrow$方程可设为 $x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$	

题型归纳及思路提示

题型 140　双曲线的标准方程

思路提示：求双曲线的方程问题，一般有下列两种解决途径：

(1)在已知方程类型的前提下，根据题目中的条件求出方程中的参数 a,b,c，即利用待定系数法求方程.

(2)根据动点轨迹满足的条件，来确定动点的轨迹为双曲线，然后求解出方程中的参数，即利用定义法求方程.

【例 10.12】 求满足下列条件的双曲线的标准方程：

(1)经过点 $(-5,2)$，焦点为 $(\sqrt{6},0)$；

(2)实半轴长为 $2\sqrt{3}$ 且与双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 有公共焦点；

(3)经过点 $P(3,2\sqrt{7}),Q(-6\sqrt{2},7)$.

【分析】 利用待定系数法求方程. 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，求双曲线方程，即求参数 a,b，为此需要找出并解关于 a,b 的两个方程.

【解析】 (1)因为焦点坐标为 $(\sqrt{6},0)$，焦点在 x 轴上，故可设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，又双曲线过点 $(-5,2)$，所以 $\frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$，又因为 $c=\sqrt{6}$，所以 a^2+b^2

心得体会

$=6$，解得 $a^2=5$，$b^2=1$，故所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{5}-y^2=1$.

(2)由双曲线方程 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$，得其焦点坐标为 $F_1(-2\sqrt{5},0)$，$F_2(2\sqrt{5},0)$，由题意，可设所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，由已知 $a=2\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{5}$，得 $b^2=c^2-a^2=8$，故所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$.

(3)因为所求双曲线方程为标准方程，但不知焦点在哪个轴上，故可设双曲线方程为 $mx^2+ny^2=1(mn<0)$，因为所求双曲线经过点 $P(3,2\sqrt{7})$，$Q(-6\sqrt{2},7)$，所以 $\begin{cases}9m+28n=1\\72m+49n=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-\frac{1}{75}\\n=\frac{1}{25}\end{cases}$. 故所求双曲线方程为 $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{75}=1$.

【评注】 求双曲线的标准方程一般用待定系数法. 若焦点坐标确定，一般仅有一解；若焦点坐标不能确定是在 x 轴上还是在 y 轴上，可能有两个解，而分类求解较为繁杂，此时可设双曲线的统一方程 $mx^2+ny^2=1(mn<0)$ 或 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(mn<0)$，求出 m,n 即可，这样可以简化运算.

【变式 1】 根据下列条件，求双曲线的标准方程.

(1)与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 有共同的渐近线，且过点 $(-3,2\sqrt{3})$；

(2)与双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 有公共焦点，且过点 $(3\sqrt{2},2)$.

【变式 2】 若动圆 M 与圆 $C_1:(x+3)^2+y^2=9$ 外切，且与圆 $C_2:(x-3)^2+y^2=1$ 内切，求动圆 M 的圆心 M 的轨迹方程.

【例 10.13】 (2007·全国Ⅰ理，4)已知双曲线的离心率为 2，焦点为 $(-4,0)$，$(4,0)$，则双曲线方程为(　　).

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　B. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

C. $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$　　D. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{10}=1$

【解析】 由焦点为 $(-4,0)$，$(4,0)$ 可知焦点在 x 轴上，故设方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，且 $c=4$，又离心率为 $e=\frac{c}{a}=2$，故 $a=2$，所以 $a^2=4$，$c^2=16$，$b^2=c^2-a^2=12$，所以所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. 故选 A.

【变式 1】 (2008·重庆理，8)已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线为 $y=kx$ $(k>0)$，离心率为 $e=\sqrt{5}k$，则双曲线方程为(　　).

A. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1$　B. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5a^2}=1$　C. $\frac{x^2}{4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$　D. $\frac{x^2}{5b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

心得体会

【变式 2】 (2010·天津理,5)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$,一个焦点在抛物线 $y^2=24x$ 的准线上,则双曲线的方程为(　　).

A. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{108}=1$　B. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$　C. $\frac{x^2}{108}-\frac{y^2}{36}=1$　D. $\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{9}=1$

【变式 3】 (2010·北京朝阳一模理,6)已知点 $P(3,-4)$是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$渐近线上的一点,$E,F$ 是左、右两个焦点,若$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{FP}=0$,则双曲线方程为(　　).

A. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$　C. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$　D. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

【变式 4】 (2011·山东文,15)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$和椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$有相同的焦点,且双曲线的离心率是椭圆离心率的两倍,则双曲线的方程为_____.

【例 10.14】 (2008·山东理,10)设椭圆 C_1 的离心率为$\frac{5}{13}$,焦点在 x 轴上且长轴长为 26. 若曲线 C_2 上的点到椭圆 C_1 的两个焦点的距离的差的绝对值等于 8,则曲线 C_2 的标准方程为(　　).

A. $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$　B. $\frac{x^2}{13^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$　C. $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$　D. $\frac{x^2}{13^2}-\frac{y^2}{12^2}=1$

【解析】 设 C_1 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,则$\begin{cases}2a=26\\ \frac{c}{a}=\frac{5}{13}\end{cases}$,得$\begin{cases}a=13\\ c=5\end{cases}$.

椭圆 C_1 的焦点为 $F_1(-5,0),F_2(5,0)$,因为 $8<|F_1F_2|$,且由双曲线的定义知曲线 C_2 是以 F_1,F_2 为焦点,实轴长为 8 的双曲线,故 C_2 的标准方程为$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$. 故选 A.

【变式 1】 设命题甲:平面内有两个定点 F_1,F_2 和一动点 M,使得$||MF_1|-|MF_2||$为定值,命题乙:点 M 的轨迹为双曲线,则命题甲是命题乙的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【变式 2】 (2008·重庆文,21)已知 $M(-2,0)$和 $N(2,0)$是平面上的两个点,动点 P 满足$||PM|-|PN||=2$,求点 P 的轨迹方程.

【变式 3】 (2006·北京理,19)已知点 $M(-2,0),N(2,0)$,动点 P 满足条件$|PM|-|PN|=2\sqrt{2}$,记动点 P 的轨迹为 W,求 W 的方程.

题型 141　双曲线离心率的求解及其范围问题

思路提示:求双曲线的离心率主要有以下两个途径:

(1)求出 a,c,利用定义求 $e=\frac{c}{a}$.

(2)构造关于$\frac{c}{a}$的方程,通过解方程求出离心率. 求双曲线离心率的范围主要是找到 a,b,c 三个量之间的不等关系.

心得体会

【例 10.15】 已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$,则此双曲线的离心率 e 为(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

【解析】 由题意可知 $a^2=4,b^2=3$,故 $c^2=a^2+b^2=7$,故 $c=\sqrt{7}$,所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

故选 D.

【评注】 本题若借用公式 $e^2=1+\frac{b^2}{a^2}=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{7}}{2}$,则更为简洁.因为此种方法在求解过程中避开了基本量 c 的求解,从而使得求解过程变得更为简洁.但是同学们应对公式:椭圆中 $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$(因为 $e<1$);双曲线中 $e^2=1+\frac{b^2}{a^2}$(因为 $e>1$),加以熟练识记.

【变式 1】 (2009·安徽理,3)下列曲线中离心率为$\frac{\sqrt{6}}{2}$的是(　　).

A. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$　　C. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$　　D. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{10}=1$

【变式 2】 (2011·辽宁理,13)已知点(2,3)在双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上,$C$ 的焦距为 4,则它的离心率为_____.

【变式 3】 (2011·课标全国理,7)设直线 l 过双曲线 C 的一个焦点,且与 C 的一条对称轴垂直,l 与 C 交于 A,B 两点,$|AB|$ 为 C 的实轴长的 2 倍,则 C 的离心率为(　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

【例 10.16】 (1)已知 F_1,F_2 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两个焦点,$M$ 为双曲线上的点,若 $MF_1\perp MF_2$,$\angle MF_2F_1=30°$,则双曲线的离心率为(　　).

A. $\sqrt{3}-1$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\sqrt{3}+1$　　D. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

(2)设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(0<a<b)$的半焦距为 c,直线 l 过$(a,0),(0,b)$ 两点,且原点到直线 l 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{4}c$,则双曲线的离心率为_____.

【解析】 (1)依题意,不妨设$|MF_1|=1$,则$|F_1F_2|=2$,$|MF_2|=\sqrt{3}$,

则 $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|MF_2|-|MF_1|}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$. 故选 C.

(2)由 l 过两点$(a,0),(0,b)$,得 l 的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,即为 $bx+ay-ab=0$. 由点到 l 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{4}c$,得$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}c$. 将 $b=\sqrt{c^2-a^2}$代入,平方后整理得 $3c^4-16a^2c^2+16a^4=0$,$3e^4-16e^2+16=0$,$e^2=\frac{4}{3}$或 4,故 $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$或 $e=2$.

心得体会

因 $0<a<b$，故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>\sqrt{2}$，所以应舍去 $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故所求离心率 $e=2$.

【评注】 (1)双曲线离心率的求解一般有定义法和方程法两种方法. 在求解及应用中，应注意公式及其变形的灵活使用. 如 $e=\frac{c}{a}$，$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$，$\frac{b^2}{a^2}=e^2-1$.

(2)求离心率的本质就是探求 a,b,c 间的数量关系，若求离心率的值则探求 a,b,c 的等式关系；若求离心率的范围，则探求 a,b,c 的不等关系式，另外，要注意隐含条件 $a^2+b^2=c^2$ 的使用.

【变式 1】 (2007·江苏,3)在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线的中心在坐标原点，焦点在 y 轴上，一条渐近线的方程为 $x-2y=0$，则它的离心率为(　　).

A. $\sqrt{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【变式 2】 中心在原点，焦点在 x 轴上的双曲线的一条渐近线经过点 $(4,-2)$，则它的离心率为(　　).

A. $\sqrt{6}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【例 10.17】 (2008·陕西理,9)双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1，F_2，过 F_1 作倾斜角为 30°的直线交双曲线右支于 M 点，若 MF_2 垂直于 x 轴，则双曲线的离心率为(　　).

A. $\sqrt{6}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

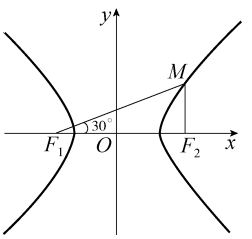


图　10-3

【解析】 依题意，如图 10-3 所示，不妨设 $|MF_2|=1$，则 $|MF_1|=2$，$|F_1F_2|=\sqrt{3}$，则 $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|MF_1|-|MF_2|}=\sqrt{3}$. 故选 B.

【变式 1】 (2009·江西理,6)设 F_1 和 F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的两个焦点，若 $F_1,F_2,P(0,2b)$ 是正三角形的三个顶点，则双曲线的离心率为(　　).

A. $\frac{3}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

【变式 2】 (2011·福建理,7)设圆锥曲线 Γ 的两个焦点分别为 F_1,F_2，若曲线 Γ 上存在点 P 满足 $|PF_1|:|F_1F_2|:|PF_2|=4:3:2$，则曲线 Γ 的离心率等于(　　).

A. $\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$或 2　　C. $\frac{1}{2}$或 2　　D. $\frac{2}{3}$或$\frac{3}{2}$

【例 10.18】 (2008·福建理,11)双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的两个焦点为 F_1,F_2，若 P 为其上一点，且 $|PF_1|=2|PF_2|$，则双曲线离心率的取值范围是(　　).

A. $(1,3)$　　B. $(1,3]$　　C. $(3+\infty)$　　D. $[3,+\infty)$

心得体会

【解析】　解法一：由双曲线的定义知，$||PF_1|-|PF_2||=2a$，$|PF_1|=2|PF_2|$，故 $|PF_1|=4a$，$|PF_2|=2a$，又 $|PF_1|+|PF_2|\geqslant|F_1F_2|=2c$，故 $6a\geqslant 2c$，$e\leqslant 3$，又 $e>1$，故 $1<e\leqslant 3$.

解法二：利用 $\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的单调性，$\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=\dfrac{|PF_2|+2a}{|PF_2|}=1+\dfrac{2a}{|PF_2|}$，随 $|PF_2|$ 的增加，$\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 减小，也就是说当 P 点右移时，$\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 值减小，故要在双曲线上找到一点 P，使得 $\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=2$，故当 P 点在双曲线的右顶点时，$\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}\geqslant 2$，得 $\dfrac{a+c}{c-a}\geqslant 2\Rightarrow 3a\geqslant c$，$1<e\leqslant 3$. 故选 B.

【评注】　若在双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上存在一点 P，使 $|PF_1|=\lambda|PF_2|(\lambda>1)$，则 $1<e\leqslant\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}$. 注意与椭圆中 $\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\leqslant e<1(\lambda>1)$ 类似结论的区分和对比识记.

【变式 1】　(2009·重庆理，15)已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，若双曲线上存在点 P 使 $\dfrac{\sin\angle PF_1F_2}{\sin\angle PF_2F_1}=\dfrac{a}{c}$，则该双曲线的离心率的取值范围是_____.

【例 10.19】　已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 的离心率 $e\in(1,2)$，则 m 的取值范围是(　　).

A. $(-12,0)$　　B. $(-\infty,0)$　　C. $(-3,0)$　　D. $(-60,-12)$

【分析】　利用基本量 a,b 来表示离心率，从而间接求得 m 的取值范围.

【解析】　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{-m}=1$，故 $a^2=4$，$b^2=-m$，半焦距 $c=\sqrt{4+(-m)}$，所以 $e=\dfrac{\sqrt{4-m}}{2}$，又因为 $e\in(1,2)$，故 $1<\dfrac{\sqrt{4-m}}{2}<2$，解得 $-12<m<0$. 故选 A.

【评注】　在确定基本量 a,b 之前，先把双曲线方程化为标准方程，以防出现错误. 本题若借用公式 $\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1\in(0,3)\Rightarrow 0<\dfrac{-m}{4}<3\Rightarrow -12<m<0$，则更为简洁. 同学们应对公式：椭圆中 $\dfrac{b^2}{a^2}=1-e^2$(因为 $e<1$)；双曲线中 $\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1$(因为 $e>1$)，加以熟练识记.

【变式 1】　(1)双曲线 $\dfrac{x^2}{k-3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的离心率 $e<2$，则 k 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,3)$　　B. $(-9,3)$　　C. $(-3,3)$　　D. $(-57,3)$

(2)双曲线 $\dfrac{x^2}{n}-\dfrac{y^2}{12-n}=1$ 的离心率是 $\sqrt{3}$，则 $n=$_____.

题型 142　双曲线的渐近线

思路提示：熟记两种标准方程的不同渐近线的方程；焦点到渐近线的距离称为焦渐距，其值等于虚半轴长 b.

心得体会

【例 10.20】 双曲线$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=-1$的渐近线方程为(　　).

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　B. $x=\pm\sqrt{2}y$

C. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　D. $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}y$

【解析】 双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{2}=1$,焦点在$y$轴上,故渐近线方程为$y=\pm\frac{a}{b}x$,由题意所求渐近线方程为$y=\pm\frac{2}{\sqrt{2}}x$,即$y=\pm\sqrt{2}x$. 故选 A.

【评注】 应熟记,若双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,则焦点落在$x$轴上,渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$;若双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$,则焦点落在$y$轴上,渐近线方程为$y=\pm\frac{a}{b}x$.

【变式 1】 (2011·北京文,10)已知双曲线$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的一条渐近线的方程为$y=2x$,则$b=$_____.

【变式 2】 (2011·湖南理,5)设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1(a>0)$的渐近线方程为$3x\pm2y=0$,则$a$的值为(　　).

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

【变式 3】 (2011·山东理,8)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线均和圆$C:x^2+y^2-6x+5=0$相切,且双曲线的右焦点为圆$C$的圆心,则该双曲线的方程为(　　).

A. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

C. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$　　D. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$

【例 10.21】 已知双曲线的的渐近线方程是$3x\pm2y=0$,则该双曲线的离心率等于_____.

【解析】 依题意,设双曲线的方程为$9x^2-4y^2=\lambda(\lambda\neq0)$. 若$\lambda>0$,则双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{\frac{\lambda}{9}}-\frac{y^2}{\frac{\lambda}{4}}=1$,故$a^2=\frac{\lambda}{9}$,$b^2=\frac{\lambda}{4}$,所以$c^2=a^2+b^2=\frac{13\lambda}{36}$,$e^2=\frac{\frac{13\lambda}{36}}{\frac{\lambda}{9}}=\frac{13}{4}$,$e>1$,则$e=\frac{\sqrt{13}}{2}$;若$\lambda<0$,则双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{-\frac{\lambda}{4}}-\frac{x^2}{-\frac{\lambda}{9}}=1$,故$a^2=-\frac{\lambda}{4}$,$b^2=-\frac{\lambda}{9}$,所以$c^2=a^2+b^2=-\frac{13\lambda}{36}$,则$e^2=\frac{-\frac{13\lambda}{36}}{-\frac{\lambda}{4}}=\frac{13}{9}$,$e>1$,则$e=\frac{\sqrt{13}}{3}$. 故$e$为$\frac{\sqrt{13}}{2}$或$\frac{\sqrt{13}}{3}$.

心得体会

【评注】 若双曲线的渐近线方程为 $y=\pm kx(k>0)$，则离心率 $e=\sqrt{1+k^2}$ 或 $\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$，

且当双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 时，$k=\frac{b}{a}$；

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 时，$k=\frac{a}{b}$.

【例 10.22】 (2008·辽宁文,11)已知双曲线 $9y^2-m^2x^2=1(m>0)$ 的一个顶点到它的一条渐近线的距离为 $\frac{1}{5}$，则 m 等于(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【分析】 将方程化为标准方程，根据顶点到渐近线的距离求出 m.

【解析】 $9y^2-m^2x^2=1$ 化为标准方程为 $\frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}-\frac{x^2}{\left(\frac{1}{m}\right)^2}=1$，其中一个顶点为 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$，

令 $9y^2-m^2x^2=0$ 得其中一条渐近线为 $mx-3y=0$，则 $\frac{\left|m\times 0-3\times\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{m^2+3^2}}=\frac{1}{5}$，

得 $m=4$ 或 $m=-4$(舍). 故选 D.

【变式 1】 (2007·陕西理,7)已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，以 C 的右焦点为圆心且与 C 的渐近线相切的圆的半径是(　　).

A. $\sqrt{ab}$　　B. $\sqrt{a^2+b^2}$　　C. a　　D. b

【变式 2】 与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 有共同渐近线，且经过点 $(-3,2\sqrt{3})$ 的双曲线方程为(　　).

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{4y^2}{9}=1$　　B. $\frac{y^2}{4}-\frac{4x^2}{9}=1$　　C. $\frac{4y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$　　D. $\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

【变式 3】 (2009·四川理,7)已知双曲线 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，其中一条渐近线方程为 $y=x$，点 $P(\sqrt{3},y_0)$ 在该双曲线上，则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 等于(　　).

A. -12　　B. -2　　C. 0　　D. 4

题型 143　焦点三角形

思路提示：利用定义求解有关焦点三角形边长及周长的问题，

焦点三角形面积 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\theta=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot b^2=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$

$=c\cdot|y_P|$.

【例 10.23】 (2007·湖北文,12)过双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 左焦点 F_1 的直线交双曲线的左支于 M,N 两点，F_2 为其右焦点，则 $|MF_2|+|NF_2|-|MN|$ 的值为_____.

【分析】 利用双曲线的定义求解.

【解析】 如图 10-4 所示，由定义知 $|MF_2|-|MF_1|=4$，$|NF_2|-|NF_1|=4$，所以 $|MF_2|+|NF_2|-(|MF_1|+|NF_1|)=8$，

心得体会

所以 $|MF_2|+|NF_2|-|MN|=8$.

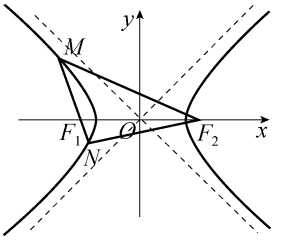


图 10-4

【变式 1】 (2007·辽宁理,11)设 P 为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{12}=1$ 上的一点,F_1,F_2 是该双曲线的两个焦点,若 $|PF_1|:|PF_2|=3:2$,则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为(　　).

A. $6\sqrt{3}$　　B. 12

C. $12\sqrt{3}$　　D. 24

【变式 2】 双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点为 F_1,F_2,点 P 在双曲线上,$\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $\sqrt{3}$,则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 等于(　　).

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. -2　　D. $-\sqrt{3}$

【变式 3】 (2011·大纲全国理,15)已知 F_1,F_2 分别为双曲线 C: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ 的左、右焦点,点 $A\in C$,点 M 的坐标为 $(2,0)$,AM 为 $\angle F_1AF_2$ 的平分线,则 $|AF_2|=$_____.

第三节　抛物线

考纲解读

掌握抛物线、几何图形、标准方程及简单性质.

命题趋势探究

抛物线是圆锥曲线的重要内容,主要考查抛物线的方程、焦点、准线及其几何性质.题型上,选择、填空、解答题(理科)都有可能出现.主要考查学生的运算、数形结合和分析能力.

预测 2012 年高考主要考查抛物线标准方程和性质的应用,焦点弦是热点.

知识点精讲

一、基本概念

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l $(F\notin l)$ 的距离相等的点的轨迹叫作抛物线,定点 F 叫作抛物线的焦点,定直线 l 叫作抛物线的准线.

注 若在定义中有 $F\in l$,则动点的轨迹为 l 的垂线,垂足为点 F.

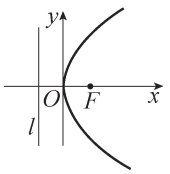
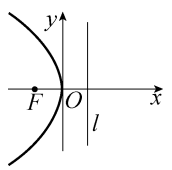
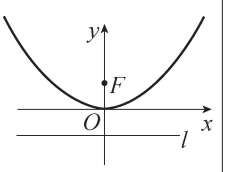
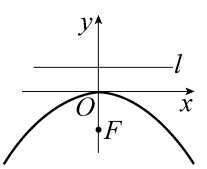
心得体会

二、基本性质、定理与公式

1. 抛物线的标准方程

抛物线的标准方程有 4 种形式：$y^2=2px$，$y^2=-2px$，$x^2=2py$，$x^2=-2py(p>0)$.（如表 10-3 所示）其中一次项与对称轴一致，一次项系数的符号决定开口方向.

表　10-3

标准方程	$y^2=2px(p>0)$	$y^2=-2px(p>0)$	$x^2=2py(p>0)$	$x^2=-2py(p>0)$
图形				
对称轴	x 轴		y 轴	
顶点	原点 $(0,0)$			
焦点坐标	$\left(\frac{p}{2},0\right)$	$\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$\left(0,-\frac{p}{2}\right)$
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$

2. 点 $P(x_0,y_0)$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的关系

(1) P 在抛物线内（含焦点）$\Leftrightarrow y_0^2<2px_0$.

(2) P 在抛物线上 $\Leftrightarrow y_0^2=2px_0$.

(3) P 在抛物线外 $\Leftrightarrow y_0^2>2px_0$.

3. 焦半径

抛物线上的点 $P(x_0,y_0)$ 与焦点 F 的距离称为焦半径，若 $y^2=2px(p>0)$，则焦半径 $|PF|=x_0+\frac{p}{2}$，$|PF|_{\min}=\frac{p}{2}$.

4. $p(p>0)$ 的几何意义

p 为焦点 F 到准线 l 的距离，即焦准距. p 越大，抛物线开口越大.

5. 焦点弦

若 AB 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点弦，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，弦中点为 $M(x_0,y_0)$，则有以下结论：

(1) $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$.

(2) $y_1y_2=-p^2$.

(3) 焦点弦长公式 1：$|AB|=x_1+x_2+p$，$x_1+x_2\geqslant 2\sqrt{x_1x_2}=p$，即当 $x_1=x_2$ 时，焦点弦取最小值 $2p$，即所有焦点弦中通径最短，其长度为 $2p$.

(4) 焦点弦长公式 2：$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$（$\alpha$ 为直线 AB 的倾斜角）.

心得体会

(5)$\triangle AOB$ 的面积公式：$S_{\triangle AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$($\alpha$ 为直线 AB 的倾斜角).

6. 抛物线的弦

若 AB 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的任意一条弦，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，弦 AB 中点为 $M(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$，则：

(1)弦长公式：$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|\,(k_{AB}=k\neq 0)$.

(2)$k_{AB}=\dfrac{p}{y_0}$.

(3)直线 AB 的方程为 $y-y_0=\dfrac{p}{y_0}(x-x_0)$.

(4)线段 AB 的垂直平分线方程为 $y-y_0=-\dfrac{y_0}{p}(x-x_0)$.

7. 求抛物线标准方程的焦点和准线的快速方法($\dfrac{A}{4}$法)

(1)$y^2=Ax(A\neq 0)$，焦点为 $\left(\dfrac{A}{4},0\right)$，准线为 $x=-\dfrac{A}{4}$.

(2)$x^2=Ay(A\neq 0)$，焦点为 $\left(0,\dfrac{A}{4}\right)$，准线为 $y=-\dfrac{A}{4}$.

如 $y=4x^2$，即 $x^2=\dfrac{y}{4}$，焦点为 $\left(0,\dfrac{1}{16}\right)$，准线为 $y=-\dfrac{1}{16}$.

8. 参数方程

$y^2=2px(p>0)$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=2pt^2\\ y=2pt\end{cases}$(参数 $t\in\mathbf{R}$).

9. 切线方程和切点弦方程

抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的切线方程为 $y_0y=p(x+x_0)$，(x_0,y_0) 为切点.

切点弦方程为 $y_0y=p(x+x_0)$，点 (x_0,y_0) 在抛物线外.

题型归纳及思路提示

题型 144　抛物线方程的求解

思路提示：掌握抛物线的定义. 求抛物线标准方程常用的方法为待定系数法和定义法，确定参数 p 是解题核心.

【例 10.24】 (2010·陕西理，8)已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线与圆 $x^2+y^2-6x-7=0$ 相切，则 p 的值为(　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 4

【解析】 抛物线的准线为 $x=-\dfrac{p}{2}$，圆 $x^2+y^2-6x-7=0$ 的标准方程为 $(x-3)^2+y^2=$

心得体会

16，由 $x=-\frac{p}{2}$ 与圆相切，知 $3-\left(-\frac{p}{2}\right)=4$，解得 $p=2$. 故选 C.

【评注】 准线是抛物线的重要性质，要熟记准线方程.

【变式 1】 (2011·陕西理，2)设抛物线的顶点在原点，准线方程为 $x=-2$，则抛物线的方程是(　　).

A. $y^2=-8x$　　B. $y^2=8x$　　C. $y^2=-4x$　　D. $y^2=4x$

【变式 2】 (2011·山东文，9)设 $M(x_0,y_0)$ 为抛物线 $C:x^2=8y$ 上一点，F 为抛物线 C 的焦点，以 F 为圆心，$|FM|$ 为半径的圆和抛物线 C 的准线相交，则 y_0 的取值范围是(　　).

A. $(0,2)$　　B. $[0,2]$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $[2,+\infty)$

【变式 3】 (2010·湖南文，5)设抛物线 $y^2=8x$ 上一点 P 到 y 轴的距离是 4，则点 P 到抛物线焦点的距离是(　　).

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

【变式 4】 (2011·辽宁理，3)已知 F 是抛物线 $y^2=x$ 的焦点，A,B 是该抛物线上的两点，$|AF|+|BF|=3$，则线段 AB 的中点到 y 轴的距离为(　　).

A. $\frac{3}{4}$　　B. 1　　C. $\frac{5}{4}$　　D. $\frac{7}{4}$

【变式 5】 (2011·课标全国文，9)已知直线 l 过抛物线 C 的焦点，且与 C 的对称轴垂直，l 与 C 交于 A,B 两点，$|AB|=12$，P 为 C 的准线上一点，则 $\triangle ABP$ 的面积为(　　).

A. 18　　B. 24　　C. 36　　D. 48

【例 10.25】 (2008·北京理，4)若点 P 到直线 $x=-1$ 的距离比它到点 $(2,0)$ 的距离小 1，则点 P 的轨迹为(　　).

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 双曲线　　D. 抛物线

【解析】 解法一：(直接法)设 $P(x,y)$，依题意有 $|x+1|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}-1$，当 $x\geqslant -1$ 时，$x+1+1=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，整理得 $y^2=8x$. 当 $x<-1$ 时，$y^2=4(x-1)$，显然不成立. 故点 P 的轨迹方程为 $y^2=8x(x\geqslant 0)$.

解法二：(定义法)由题意可知，点 P 只能在 $x=-1$ 的右侧，点 P 到直线 $x=-2$ 的距离等于它到点 $(2,0)$ 的距离，根据抛物线的定义知，点 P 的轨迹是抛物线. 故选 D.

【变式 1】(2011·广东文，8)设圆 C 与圆 $x^2+(y-3)^2=1$ 外切，与直线 $y=0$ 相切，则 C 的圆心轨迹为(　　).

A. 抛物线　　B. 双曲线　　C. 椭圆　　D. 圆

【变式 2】 已知动圆经过点 $M(3,2)$ 且与直线 $x=1$ 相切，求动圆圆心 T 的轨迹方程.

题型 145　与抛物线有关的距离和最值问题

思路提示：抛物线上任意一点到焦点的距离等于到准线的距离，利用这一性质可以把相等长度的线段进行转化，从而把两条线段距离之和的问题转化为两点间的距离问题或点到直线的距离问题，即在解题中掌握“抛物线的定义及其性质”.

心得体会

【例 10.26】 (2009·四川理,9)已知直线 $l_1:4x-3y+6=0$ 和直线 $l_2:x=-1$,抛物线 $y^2=4x$ 上一动点 P 到直线 l_1 和 l_2 的距离之和的最小值是(　　).

A. 2　　B. 3　　C. $\frac{11}{5}$　　D. $\frac{37}{16}$

【分析】 画出图形,利用等价转化,将距离之和的最小值转化为点到直线的距离.

【解析】 如图 10-5 所示,抛物线方程为 $y^2=4x$,l_2 为其准线,焦点为 $F(1,0)$,由抛物线的定义可知 $|PH_1|+|PH_2|=|PH_1|+|PF|\geqslant|FH_1|\geqslant d(F,l_1)=\frac{|4\times1-0+6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$. 故选 A.

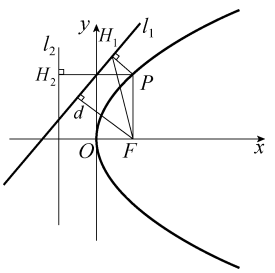


图　10-5

【评注】 本题考查抛物线的定义及转化与化归的数学思想.

【变式 1】 (2008·辽宁理,10)已知点 P 是抛物线 $y^2=2x$ 上的一个动点,则点 P 到点 $M(0,2)$ 与到该抛物线准线的距离之和的最小值为(　　).

A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$　　B. 3　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\frac{9}{2}$

【变式 2】 (2004·全国Ⅲ理,16)设 P 是曲线 $y^2=4(x-1)$ 上的一个动点,则点 P 到点 $(0,1)$ 与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值是_____.

题型 146　抛物线中三角形、四边形的面积问题

思路提示: 解决此类问题经常利用抛物线的定义,将线段长度等价转化,并构造直角三角形或直角梯形,从而计算其面积或面积之比.

【例 10.27】 (2007·山东理,11)抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F,准线为 l,经过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A,$AK\perp l$,垂足为 K,则 $\triangle AKF$ 的面积是(　　).

A. 4　　B. $3\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 8

【分析】 作出图形,利用数形结合思想,在图中找到三角形的底和高从而使问题得以解决.

【解析】 解法一:如图 10-6 所示,由题意可知 $F(1,0)$,准线方程为 $x=-1$,由 $\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$,解得 $A(3,2\sqrt{3})$,故 $|AK|=3+1=4$,因为直线 AF 的斜率为 $\sqrt{3}$,所以 $\angle AFx=60°$,则 $\angle FAK=60°$,又 $|AK|=|AF|$,则 $\triangle AKF$ 为等边三角形. $\triangle AKF$ 的底为 $|AK|=4$,高为 $2\sqrt{3}$,所以 $S_{\triangle AKF}=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

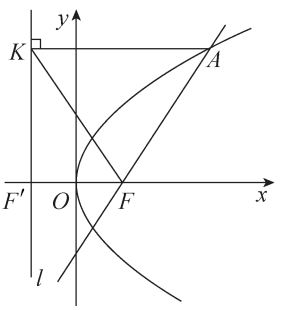


图　10-6

解法二:由焦点 F 到准线 l 的距离为 2,因为直线 AF 的斜率为 $\sqrt{3}$,所以 $\angle AFx=60°$,则 $\angle FAK=60°$,又 $|AK|=|AF|$,则 $\triangle AKF$ 为等边三角形,则 $\angle FKA=60°$,$\angle F'KF=30°$,$|KF|=2|F'F|=4$,所以 $S_{\triangle AFK}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$. 故选 C.

心得体会

【变式 1】（2008·海南海口）已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 F，准线与 x 轴的交点为 K，点 A 在 C 上且 $|AK|=\sqrt{2}|AF|$，则 $\triangle AKF$ 的面积为（　　）.

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

【变式 2】（2009·天津理，9）设抛物线 $y^2=2x$ 的焦点为 F，过点 $M(\sqrt{3},0)$ 的直线与抛物线相交于 A,B 两点，与抛物线的准线相交于点 C，$|BF|=2$，则 $\triangle BCF$ 与 $\triangle ACF$ 的面积之比 $\dfrac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}$ 等于（　　）.

A. $\dfrac{4}{5}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{4}{7}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

第四节　曲线与方程

考纲解读

了解方程的曲线与曲线的方程的对应关系，理解曲线与方程的概念.

命题趋势探究

从内容上看，求曲线的方程是解析几何的基本问题之一，是高考中的一个热点和重点，在历年高考中出现的频率较高，一般与平面向量结合.

从形式上看，以解答题为主，难度中档.

从能力要求上看，高考中注重考查学生的逻辑思维、运算、分析和解决问题的能力，而轨迹方程这一热点，恰好能很好地反映学生在这些能力方面的掌握程度.

预测 2012 年高考中，求曲线方程的题目若出现在主观题中，则综合性比较强，属于较难题；若出现在客观题中，则通常可以利用圆锥曲线的定义解题，为容易题.

轨迹问题是每年必考内容之一，求解方程比较有规律，难度以中等偏难为主.

知识点精讲

一、基本概念

1. 曲线的方程与方程的曲线

在直角坐标系中，如果某曲线 C（看作适合某种条件的点的集合或轨迹）上的点与一个二元方程 $f(x,y)=0$ 的实数解建立了如下的关系：

(1)曲线上的点的坐标都是这个方程的解；

(2)以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点.

那么，这个方程叫作曲线的方程，这条曲线叫作方程的曲线.

心得体会

事实上，曲线可以看作一个点集 C，一个二元方程的解作为坐标的点也组成一个点集 F. 上述定义中 $\begin{cases}\text{条件(1)}\Leftrightarrow C\subseteq F,\\ \text{条件(2)}\Leftrightarrow F\subseteq C\end{cases}\Leftrightarrow C=F$.

2. 直接法求动点的轨迹方程

利用直接法求动点的轨迹方程的步骤如下：

(1)建系——建立适当的坐标系.

(2)设点——设轨迹上的任一点 $P(x,y)$.

(3)列式——列出限制关系式.

(4)代换——依条件式的特点，选用距离和斜率公式等将其转化为 x,y 的方程式，并化简.

(5)证明(一般省略)——证明所求方程即为符合条件的动点轨迹方程(对某些特殊值应另外补充检验).

简记为：建设限(现)代化，补充说明.

注 若求动点的轨迹，则不但要求出动点的轨迹方程，还要说明轨迹是什么曲线.

题型归纳及思路提示

题型 147　求动点的轨迹方程

思路提示：动点的运动轨迹所给出的条件千差万别，因此求轨迹的方法也多种多样，但应理解，所求动点的轨迹方程其实质即为其上动点的横纵坐标 x，y 所满足的等量关系式. 常用的方法有直接法、定义法、相关点法(代入法)、参数法、几何法、交轨法和整体法.

一、直接法(直译法)

如果动点满足的几何条件本身就是一些几何量的等量关系且这些几何条件简单明了且易于表达，那么只需把这种关系“翻译”成含 x，y 的等式，就可得到曲线的轨迹方程. 由于这种求轨迹方程的过程不需要其他步骤，也不需要特殊的技巧，所以被称为直接法.

【例 10.28】 (2010·北京理，19)在平面直角坐标系 xOy 中，点 B 与点 $A(-1,1)$ 关于原点 O 对称，P 是动点，且直线 AP 与 BP 的斜率之积等于 $-\frac{1}{3}$，求动点 P 的轨迹方程.

【分析】 设 $P(x,y)$，将题设中直线 AP 与 BP 的斜率之积等于 $-\frac{1}{3}$ 翻译成含 x,y 的等式.

【解析】 因为点 B 与点 $A(-1,1)$ 关于原点 O 对称，所以点 B 的坐标为 $(1,-1)$. 设点 P 的坐标为 (x,y)，由题意得 $\frac{y-1}{x+1}\cdot\frac{y+1}{x-1}=-\frac{1}{3}$，化简得 $x^2+3y^2=4(x\neq\pm1)$.

故动点 P 的轨迹方程为 $x^2+3y^2=4(x\neq\pm1)$.

【变式 1】 (2011·课标全国理，20(1))在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(0,-1)$，B

心得体会

点在直线 $y=-3$ 上，M 点满足 $\overrightarrow{MB}\parallel\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BA}$，$M$ 点的轨迹为曲线 C. 求 C 的方程.

【变式 2】 (2009·湖北理，20)在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 到点 $F(3,0)$ 的距离的 4 倍与它到直线 $x=2$ 的距离的 3 倍之和记为 d，当点 P 运动时，d 恒等于点 P 的横坐标与 18 之和，求点 P 的轨迹 C.

【变式 3】 (2010·湖北理，20)已知定点 $A(-1,0)$，$F(2,0)$，定直线 $l:x=\dfrac{1}{2}$，不在 x 轴上的动点 P 与点 F 的距离是它到直线 l 的距离的 2 倍，求动点 P 的轨迹方程.

二、定义法

若动点的轨迹符合某一基本轨迹(圆、椭圆、双曲线、抛物线)的定义，则可根据定义直接求出动点的轨迹方程.

【例 10.29】 $M(-2,0)$ 和 $N(2,0)$ 是平面上的两点，动点 P 满足 $|PM|+|PN|=6$. 求点 P 的轨迹方程.

【分析】 动点 P 满足 $|PM|+|PN|=6>4$. 即到两定点 $M(-2,0)$，$N(2,0)$ 的距离等于 6，则满足椭圆定义.

【解析】 因为 $|PM|+|PN|=6>|MN|=4$，所以由椭圆定义，动点 P 的轨迹是以 $M(-2,0)$，$N(2,0)$ 为焦点，长轴长为 6 的椭圆，设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则有 $2a=6$，$a=3$，半焦距 $c=2$，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5}$，所以所求动点 P 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

【评注】 椭圆的定义：在平面内到两定点 F_1，F_2 的距离和等于定长(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹是椭圆. 对于圆、双曲线、抛物线的定义也应熟记.

【变式 1】 (2011·广东理，19(1))设圆 C 与两圆 $(x+\sqrt{5})^2+y^2=4$，$(x-\sqrt{5})^2+y^2=4$ 中的一个内切，另一个外切，求 C 的圆心轨迹 L 的方程.

【变式 2】 已知点 $M(-2,0)$，$N(2,0)$，动点 P 满足条件 $|\overrightarrow{PM}|-|\overrightarrow{PN}|=2\sqrt{2}$，记动点 P 的轨迹为 W，求 W 的方程.

【例 10.30】 已知动圆 P 与定圆 $C:(x+2)^2+y^2=1$ 外切，又与定直线 $l:x=1$ 相切，那么动圆圆心 P 的轨迹方程是_____.

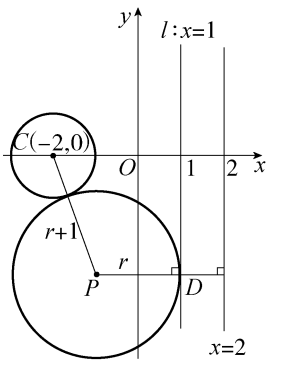


图　10-7

【分析】 动圆 P 与定圆 C 相外切，又与定直线 $l:x=1$ 相切，可得 P 到定点 $C(-2,0)$ 的距离等于到直线 $x=2$ 的距离.

【解析】 如图 10-7 所示，设动圆 P 的半径为 $r(r>0)$，点 P 到定点 C 的距离等于 $1+r$，又点 P 到直线 $x=1$ 的距离 $|PD|$ 等于 r，易知点 P 只能在直线 $x=1$ 的左侧. 将直线 $x=1$ 向右平移 1 个单位得到 $x=2$，则点 P 到定点 $C(-2,0)$ 的距离等于 P 到定直线 $x=2$ 的距离. 这样点 P 的轨迹为抛物线，该抛物线的焦点为 $(-2,0)$，准线方程为 $x=2$，则方程为 $y^2=-8x$.

心得体会

【评注】 若动点到定点的距离比动点到定直线的距离大或小一个正常数，且这个正常数小于定点到定直线的距离，我们可以通过平移定直线使动点轨迹的描述与抛物线定义吻合.

【变式 1】 (2010·上海理,3)若动点 P 到点 $F(2,0)$ 的距离与它到直线 $x+2=0$ 的距离相等，则点 P 的轨迹方程为_____.

【变式 2】 (2010·湖北理,19)已知曲线 C 在 y 轴右侧，C 上每一点到点 $F(1,0)$ 的距离减去它到 y 轴的距离差都是 1，求曲线 C 的方程.

【变式 3】 (2011·湖南文,21(1))已知平面内一动点 P 到点 $F(1,0)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离的差等于 1，求动点 P 的轨迹 C 的方程.

三、相关点法(代入法)

有些问题中，动点满足的条件不便用等式列出，但动点是随着另一动点(称之为相关点)的运动而运动的. 如果相关点满足的条件是明显，或可分析的，这时可以用动点坐标表示相关点的坐标，根据相关点所满足的方程即可求得动点的轨迹方程，这种求轨迹的方法叫作相关点法或代入法.

【例 10.31】 已知 A 为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上的点，点 B 坐标为 $(2,1)$，有 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$. 求点 P 的轨迹方程.

【分析】 本题已知 A(相关点)在椭圆上，点 B 坐标已知，只需用点 P 的坐标表示点 A 的坐标，然后代入椭圆方程便可解出.

【解析】 设 $A(x_0,y_0)$，$P(x,y)$，$\overrightarrow{AP}=(x-x_0,y-y_0)$，$\overrightarrow{PB}=(2-x,1-y)$.

因为 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，故 $\begin{cases}x-x_0=2(2-x)\\ y-y_0=2(1-y)\end{cases}$.

故 $\begin{cases}x_0=3x-4\\ y_0=3y-2\end{cases}$，代入 $\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{16}=1$，得 $\frac{(3x-4)^2}{25}+\frac{(3y-2)^2}{16}=1$，

因此点 P 的轨迹方程为 $\frac{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2}{25/9}+\frac{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2}{16/9}=1$.

【评注】 关键在于用点 P 的坐标来表示点 A 的坐标.

【变式 1】 (2011·陕西理,17(1))如图 10-8 所示，设 P 是圆 $x^2+y^2=25$ 上的动点，点 D 是 P 在 x 轴上的射影，M 为 PD 上一点，且 $|MD|=\frac{4}{5}|PD|$. 当 P 在圆上运动时，求点 M 的轨迹 C 的方程.

【变式 2】 (2011·安徽理,21)设 $\lambda>0$，点 A 的坐标为 $(1,1)$，点 B 在抛物线 $y=x^2$ 上运动，点 Q 满足 $\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{QA}$，经过点 Q 与 x 轴垂直的直线交抛物线于点 M，点 P 满足 $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，求点 P 的轨迹方程.

【变式 3】 (2011·重庆理,20(2))如图 10-9 所示，已知 M,N 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 上两动点，且直线 OM 与 ON 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$，(其中 O 为坐标原点)若点 P 满足：$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$，问：是否存在两个定点 F_1,F_2，使得 $|PF_1|+|PF_2|$ 为定

值？若存在，求 F_1，F_2 的坐标；若不存在，说明理由.

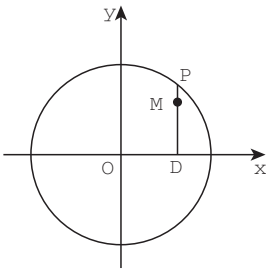


图　10-8

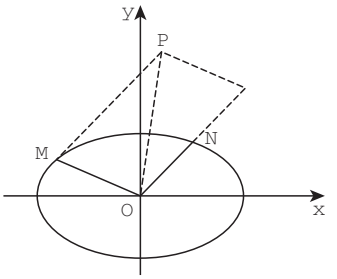


图　10-9

四、参数法

有时不易得出动点应满足的几何条件，也无明显的相关点，但却较易发现（或经分析可发现）该动点常常受到另一个变量（角度、斜率、比值、截距或时间等）的制约，即动点坐标 (x,y) 中的 x，y 分别随另一变量的变化而变化，我们称这个变量为参数，由此建立轨迹的参数方程，这种方法叫作参数法（或设参消参法）. 如果需要得到轨迹的普通方程，只要消去参数即可，在选择参数时，选用的参变量可以具有某种物理或几何性质，如时间、速度、距离、角度、有向线段的数量、直线的斜率及点的横、纵坐标等，也可以没有具体的意义，还要特别注意选定的参变量的取值范围对动点坐标取值范围的影响.

【例 10.32】 设椭圆方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$，过点 $M(0,1)$ 的直线 l 交椭圆于点 A，B，点 O 是坐标原点，点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，求动点 P 的轨迹方程.

【分析】 动点 P 因点 A，B 而动，点 A，B 因直线 l 而动，直线 l 过定点 $M(0,1)$，故因其斜率（倾斜角）而动. 故引入参数——斜率“k”.

【解析】 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x,y)$，因为 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，所以 $\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2}\\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$，

①当直线 l 斜率存在时，设斜率为 k，则 $l:y=kx+1$，由 $\begin{cases}y=kx+1\\ x^2+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$，

得 $x^2+\frac{(kx+1)^2}{4}=1$，整理得 $(4+k^2)x^2+2kx-3=0$.

（因为点 M 在椭圆内，过点 M 的直线与椭圆总有两个交点，故不必考虑判别式）

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{2k}{4+k^2}\\ x_1x_2=-\dfrac{3}{4+k^2}\end{cases}$，故 $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{k}{4+k^2}$，$\frac{y_1+y_2}{2}=k\cdot\left(\frac{-k}{4+k^2}\right)+1=\frac{4}{4+k^2}$，

所以 $\begin{cases}x=-\dfrac{k}{4+k^2} & ①\\ y=\dfrac{4}{4+k^2} & ②\end{cases}$，$\frac{①}{②}$ 得 $\frac{x}{y}=-\frac{k}{4}$，所以 $k=-\frac{4x}{y}$，

心得体会

代入②得 $y=\dfrac{4}{4+\left(\dfrac{-4x}{y}\right)^2}$，化简得 $y^2-y+4x^2=0(0<y\leqslant 1)$.

整理得 $\dfrac{\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2}{1/4}+\dfrac{x^2}{1/16}=1(0<y\leqslant 1)$ ③.

②当直线 l 斜率不存在时，$l:x=0$.

$$\begin{cases}x=0\\ x^2+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-2\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}\Rightarrow A(0,-2),B(0,2),P(0,0).$$

将 $P(0,0)$ 代入③式等式成立.

综①②得，点 P 的轨迹方程为 $\dfrac{\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2}{1/4}+\dfrac{x^2}{1/16}=1(0\leqslant y\leqslant 1)$.

【评注】 动点 P 的坐标随着变量斜率的变化而变化，故利用设参消参的方法求出轨迹方程. 千万要注意，当动直线斜率可变化时，一定要讨论斜率的存在与否，历年高考在该处屡考不鲜.

【变式 1】 已知过点 $D(-2,0)$ 的直线 l 与椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 交于不同的两点 A,B，若 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，求点 P 的轨迹方程.

【变式 2】 在平面直角坐标系 xOy 中，有一个以 $F_1(0,-\sqrt{3})$ 和 $F_2(0,\sqrt{3})$ 为焦点，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆，设椭圆在第一象限的部分为曲线 C，动点 P 在 C 上，C 在点 P 处的切线与 x，y 轴的交点分别为 A，B，且向量 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. 求点 M 的轨迹方程.

【变式 3】 (2011·广东文，21(1))在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l:x=-2$ 交 x 轴于点 A，设 P 是 l 上一点，M 是线段 OP 的垂直平分线上一点，且满足 $\angle MPO=\angle AOP$. 当点 P 在 l 上运动时，求点 M 的轨迹 E 的方程.

五、几何法

若所求的轨迹满足某些几何性质(如线段的垂直平分线、角平分线的性质等)，可以用几何法，该法经常与定义法综合应用.

【例 10.33】 如图 10-10 所示，F_1，F_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点，A 为椭圆上任一点，过焦点 F_2 向 $\angle F_1AF_2$ 的外角平分线作垂线，垂足为 D，并延长 F_2D 交 F_1A 于点 B，则点 D 的轨迹方程是_____，点 B 的轨迹方程是_____.

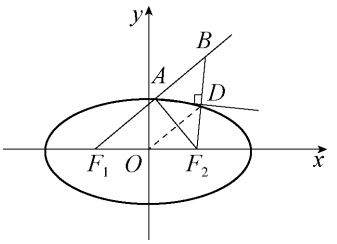


图 10-10

【分析】 由 AD 平分 $\angle BAF_2$，得 $AD\perp F_2B$，易得到 $AF_2=AB$，$DF_2=DB$，$OD\cong\dfrac{1}{2}BF_1$，故 $|OD|=\dfrac{1}{2}|BF_1|=a=2$.

【解析】 因为 $\angle BAD=\angle F_2AD$，$AD\perp BF_2$，所以 $\triangle ADF_2\cong\triangle ADB$，故 $|BD|=|F_2D|$，

心得体会

$|BA|=|F_2A|$，又 O 为 F_1F_2 中点，所以 $OD/\!/\frac{1}{2}BF_1$，$|OD|=\frac{1}{2}(|AF_1|+|AF_2|)=2$，则点 D 的轨迹为以 O 为圆心，2 为半径的圆. 故点 D 的轨迹方程为 $x^2+y^2=4(y\neq 0)$. 同理，点 B 的轨迹是以 $F_1(-1,0)$ 为圆心，4 为半径的圆. 故点 B 的轨迹方程为 $(x+1)^2+y^2=16(y\neq 0)$.

【评注】 在应用角平分线性质的同时，要会很好地结合已知曲线的定义，这里用到了圆的定义以及椭圆的定义.

【变式 1】 已知 F_1，F_2 是双曲线的左、右焦点，Q 是双曲线上任一点（不是顶点），从焦点 F_1 引 $\angle F_1QF_2$ 的平分线的垂线，垂足为 P，则动点 P 的轨迹所在的曲线是（　　）.

A. 直线　　B. 圆　　C. 椭圆　　D. 双曲线

【变式 2】 已知点 P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上异于左、右顶点的任一点，F_1，F_2 是左、右焦点连接 PF_1，PF_2，作 $\triangle PF_1F_2$ 的旁切圆，（与线段 PF_2 相切）其圆心为 O'，则动圆圆心 O' 的轨迹所在的曲线是（　　）.

A. 直线　　B. 圆　　C. 椭圆　　D. 双曲线

【变式 3】 已知点 P 为双曲线右支上异于顶点的任一点，连接 PF_1，PF_2，作 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆，其圆心为 O'，则动圆圆心 O' 的轨迹所在的曲线是（　　）.

A. 直线　　B. 圆

C. 椭圆　　D. 双曲线

【变式 4】 如图 10-11 所示，在正方体中，P 是侧面 BCC_1B_1 内一动点，若 P 到直线 BC 与到直线 C_1D_1 的距离相等，则动点 P 的轨迹所在的曲线所在的曲线是（　　）.

A. 直线　　B. 圆

C. 双曲线　　D. 抛物线

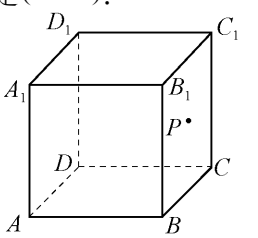


图　10-11

【变式 5】 如图 10-12 所示，正三棱锥 $S-ABC$ 中，侧面 SAB 与底 ABC 所成的二面角等于 α，动点 P 在侧面 SAB 内，$PQ\perp$ 底面 ABC，垂足为 Q，$PQ=PS\cdot\sin\alpha$，则动点 P 的轨迹为（　　）.

A. 线段　　B. 圆

C. 一段圆弧　　D. 一段抛物线

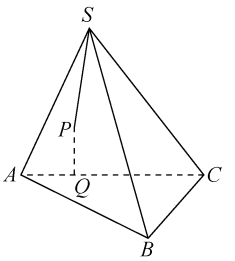


图　10-12

六、交轨法

在求动点轨迹时，有时出现求两曲线交点的轨迹问题，这类问题常常使用解方程组得到交点（含参数）的坐标，再消去参数即得所求轨迹的方程的方法，该法经常与参数法并用.

【例 10.34】 已知抛物线的方程为 $x^2=2py(p>0)$，如图 10-13 所示，过点 $M(0,p)$ 的直线 l 与抛物线相交于 A，B 两点，分别过点 A，B 作抛物线的两条切线 l_1 和 l_2，l_1 和 l_2 相交于 T.

(1)证明：直线 l_1 和 l_2 两斜率之积为定值；

(2)求点 T 的轨迹方程.

心得体会

【解析】 (1)依题意,直线 l 的斜率存在,设 l 的斜率为 k,

$A\left(x_1,\frac{x_1^2}{2p}\right),B\left(x_2,\frac{x_2^2}{2p}\right),T(x,y)$.

则 $l:y=kx+p$,由 $\begin{cases}y=kx+p\\x^2=2py\end{cases}\Rightarrow x^2-2pkx-2p^2=0$.

故 $x_1+x_2=2pk,x_1x_2=-2p^2$.

所以 $k_1=y'\Big|_{x=x_1}=\frac{x_1}{p},k_2=y'\Big|_{x=x_2}=\frac{x_2}{p}$,

$k_1k_2=\frac{x_1x_2}{p^2}x=\frac{-2p^2}{p^2}=-2$. 故直线 l_1 和 l_2 斜率之积为定值.

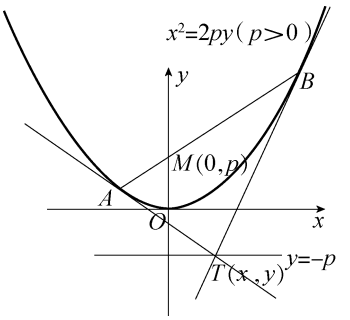


图 10-13

(2)$l_1:y-\frac{x_1^2}{2p}=\frac{x_1}{p}(x-x_1)\Rightarrow y=\frac{x_1}{p}x-\frac{x_1^2}{2p}$,同理 $l_2:y=\frac{x_2}{p}x-\frac{x_2^2}{2p}$,

$\begin{cases}y=\frac{x_1}{p}x-\frac{x_1^2}{2p}\\y=\frac{x_2}{p}x-\frac{x_2^2}{2p}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{2}\\y=\frac{x_1x_2}{2p}\end{cases}$,因为 $\begin{cases}x_1+x_2=2pk\\x_1x_2=-2p^2\end{cases}$,所以 $y=-p,x=pk$ 即 $x\in\mathbf{R}$.

则点 T 的轨迹方程为 $y=-p$.

【变式 1】 (2010·广东理,20)已知双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2,点 $P(x_1,y_1),Q(x_1,-y_1)$是双曲线上不同的两个动点,求直线 A_1P 与 A_2Q 交点的轨迹 E 的方程.

七、整体法

若探求的轨迹较复杂,可扩大考查视角,将问题中的条件及结论的各种关系看成一个整体,从整体出发运用整体思想,注重整体结构的挖掘和分析.

【例 10.35】 设点 $P(x_0,y_0)$在直线 $x=m(y\neq\pm m,0<m<1)$上,过点 P 作双曲线 $x^2-y^2=1$ 的两条切线 PA,PB,切点为 A,B,定点 M 坐标为 $\left(\frac{1}{m},0\right)$. 过点 A 作直线 $x-y=0$ 的垂线,垂足为 N,试求 $\triangle AMN$ 的重心 G 所在的轨迹方程.

【分析】 点 A 为动点,点 N 也会随之变动,点 M 为定点,点 A 在双曲线上,故依赖于双曲线方程来解答.

【解析】 如图 10-14 所示,设 $A(x_A,y_A),N(x_N,x_N)$,因为 AN 垂直直线 $y=x$,则 $\frac{y_A-x_N}{x_A-x_N}=-1,x_N=\frac{x_A+y_A}{2}$,

所以 $N\left(\frac{x_A+y_A}{2},\frac{x_A+y_A}{2}\right)$. 设 $G(x,y)$,

则 $\begin{cases}x=\frac{\frac{1}{m}+x_A+\frac{x_A+y_A}{2}}{3}\\y=\frac{y_A+\frac{x_A+y_A}{2}}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x-\frac{2}{m}=3x_A+y_A & ①\\6y=3y_A+x_A & ②\\x_A^2-y_A^2=1 & ③\end{cases}$,

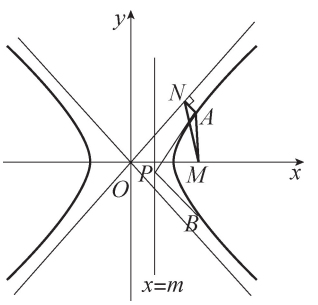


图 10-14

心得体会

利用式③，由①^2－②^2 得$\left(6x-\frac{2}{m}\right)^2-(6y)^2=8$.

即 G 点所在曲线方程为$\frac{\left(x-\frac{1}{3m}\right)^2}{2/9}-\frac{y^2}{2/9}=1$.

【评注】　本题也可用相关点法解答.

第五节　直线与圆锥曲线位置关系

考纲解读

掌握直线与圆锥曲线的位置关系，能熟练运用函数与方程、数形结合、等价转化和分类讨论思想解题.

命题趋势探究

从内容上看，直线与圆锥曲线位置关系问题是高考的热点，涉及直线与圆锥曲线关系中的求弦长、焦点弦长及弦中点、取值范围和最值等问题.

从形式上看，以解答题为主，难度较大.

从能力上看，要求考生具备数形结合、分析转化及分类讨论的能力.

预测在 2012 年高考中：

题目主要以解答题的形式出现，这类问题的综合性强，注重与一元二次方程的判别式、韦达定理、不等式相结合，重在考查学生的基本数学素质和数学能力，具有较高的区分度，关注与向量综合的探索性题目，分值基本保持在 12～14 分.

知识点精讲

一、直线 l 与圆锥曲线 C 的位置关系的判断

判断直线 l 与圆锥曲线 C 的位置关系时，通常将直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为 0）代入圆锥曲线 C 的方程 $F(x,y)=0$，消去 y（也可以消去 x）得到一个变量的一元二次方程，即$\begin{cases}Ax+By+C=0\\F(x,y)=0\end{cases}$，消去 y 后得 $ax^2+bx+c=0$.

（1）当 $a\neq0$ 时，$\Delta>0$，直线 l 与曲线 C 有两个不同的交点；$\Delta=0$，直线 l 与曲线 C 相切，即有唯一的公共点（切点）$\Delta<0$，直线 l 与曲线 C 相离.

（2）当 $a=0$ 时，即得到一个一元一次方程，则 l 与 C 相交，且只有一个交点，此时，若

心得体会

C 为双曲线，则直线 l 与双曲线的渐近线平行；若 C 为抛物线，则直线 l 与抛物线的对称轴平行.

二、圆锥曲线的弦

连接圆锥曲线上两点的线段称为圆锥曲线的弦.

直线 $l:f(x,y)=0$，曲线 $C:F(x,y)=0$，A,B 为 l 与 C 的两个不同的交点，坐标分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 是方程组 $\begin{cases}f(x,y)=0\\F(x,y)=0\end{cases}$ 的两组解，方程组消元后化为关于 x（或 y）的一元二次方程 $Ax^2+Bx+C=0(A\neq0)$. 判别式 $\Delta=B^2-4AC$，应有 $\Delta>0$，所以 x_1,x_2 是方程 $Ax^2+Bx+C=0$ 的根，由根与系数关系（韦达定理）求出 $x_1+x_2=-\dfrac{B}{A}$，$x_1x_2=\dfrac{C}{A}$，所以 A,B 两点间的距离为 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$，即弦长公式. 弦长公式也可以写成关于 y 的形式，$|AB|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|(k\neq0)$.

三、已知弦 AB 的中点，研究 AB 的斜率和方程

(1)AB 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一条弦，中点 $M(x_0,y_0)$，则 AB 的斜率为 $-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$. 运用点差法求 AB 的斜率：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$. A,B 都在椭圆上，所以 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\\\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，两式相减得 $\dfrac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，所以 $\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，即 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，故 $k_{AB}=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

(2)运用类似的方法可以推出：若 AB 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的弦，中点 $M(x_0,y_0)$，则 $k_{AB}=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$；若曲线是抛物线 $y^2=2px(p>0)$，则 $k_{AB}=\dfrac{p}{y_0}$.

题型归纳及思路提示

题型 148　直线与圆锥曲线的位置关系

思路提示：(1)直线与圆锥曲线有两个不同的公共点的判定：通常的方法是直线方程与圆锥曲线方程联立消元后得到一元二次方程，其 $\Delta>0$；另一方法就是数形结合，如直线与双曲线有两个不同的公共点，可通过判定直线的斜率与双曲线渐近线的斜率的大小得到.

(2)直线与圆锥曲线有一个公共点则直线与双曲线的一条渐近线平行，或直线与抛物线的对称轴平行，或直线与圆锥曲线相切.

心得体会

【例 10.36】 已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 与直线 $l:y=x+t$，求证：不论实数 t 为何值，直线 l 与双曲线 C 恒有两个不同的交点.

【分析】 直线 l 与双曲线 C 恒有两个不同的交点，即直线 l 的方程与双曲线 C 的方程联立消去 y，得关于 x 的一元二次方程，只需 $\Delta>0$ 即可.

【解析】 由 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{4}=1\\ y=x+t\end{cases}\Rightarrow x^2-\frac{(x+t)^2}{4}=1$，整理得 $3x^2-2tx-t^2-4=0$，$\Delta=(-2t)^2-4\times3(-t^2-4)=16t^2+48>0$，故直线 l 与双曲线 C 恒有两个不同的交点.

【评注】 双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与直线 $l:y=kx+t$，当 $|k|<\frac{b}{a}$ 时，直线 l 与双曲线 C 恒有两个不同的交点. 如本题中，$|k|=1$，$1=|k|<\frac{b}{a}=2$ 成立，因此直线 l 与双曲线 C 恒有两个不同的交点.

【变式 1】 对于抛物线 $C:y^2=4x$，我们称满足 $y_0^2<4x_0$ 的点 $M(x_0,y_0)$ 在抛物线的内部，若点 $M(x_0,y_0)$ 在抛物线的内部，则直线 $l:y_0y=2(x+x_0)$ 与抛物线 C 的位置关系是_____.

【变式 2】 (2011·四川理，10)在抛物线 $y=x^2+ax-5(a\neq0)$ 上取横坐标为 $x_1=-4$，$x_2=2$ 的两点，过这两点引一条割线，有平行于该割线的一条直线同时与抛物线和圆 $5x^2+5y^2=36$ 相切，则抛物线顶点的坐标为(　　).

A. $(-2,-9)$　　B. $(0,-5)$　　C. $(2,-9)$　　D. $(1,-6)$

【变式 3】 设抛物线 $y^2=8x$ 的准线与 x 轴交于点 Q，若过点 Q 的直线 l 与抛物线有公共点，则直线 l 的斜率的取值范围是_____.

【例 10.37】 (2008·广东理，18)如图 10-15 所示，设 $b>0$，椭圆方程为 $\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，抛物线方程为 $x^2=8(y-b)$，过点 $F(0,b+2)$ 作 x 轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为 G，已知抛物线在点 G 的切线经过椭圆的右焦点 F_1，求满足条件的椭圆方程和抛物线方程.

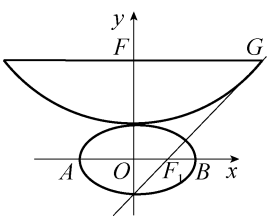


图　10-15

【分析】 过点 $G(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，$k=y'|_{x=x_0}$.

【解析】 由 $x^2=8(y-b)$，得 $y=\frac{x^2}{8}+b$，当 $y=b+2$ 时，得 $x=\pm4$，所以点 G 坐标为 $(4,b+2)$，$y'=\frac{x}{4}$，$y'|_{x=4}=1$. 过点 G 的切线方程为 $y-(b+2)=x-4$，

即 $y=x+b-2$. 令 $y=0$，得 $x=2-b$，所以点 F_1 的坐标为 $(2-b,0)$，

由椭圆标准方程得 $F_1(b,0)$，所以 $b=2-b$，即 $b=1$.

即椭圆和抛物线方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 和 $x^2=8(y-1)$.

【变式 1】 如图 10-16 所示，在平面直角坐标系 xOy 中，过 y 轴正方向上一点 $C(0,c)$ $(c>0)$ 任作一直线，与抛物线 $y=x^2$ 相交于 A,B 两点，一条垂直于 x 轴的直线分别与线段 AB 和直线 $l:y=-c$ 交于 P,Q 两点.

心得体会

(1)若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$,求$c$的值;

(2)若P为线段AB的中点,求证:QA为此抛物线的切线.

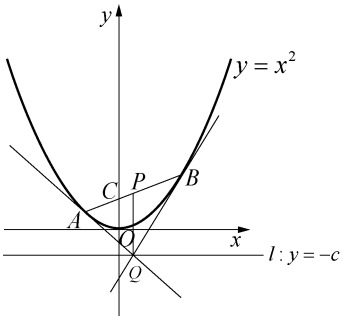


图 10-16

【变式 2】 (2010·北京东城二模理,18)已知抛物线的焦点F在y轴上,顶点在坐标原点上.抛物线上一点$A(a,4)$到准线的距离是5,过点F的直线与抛物线交于M,N两点,过M,N两点分别作抛物线的切线,这两条切线的交点为T.

(1)求抛物线的标准方程;

(2)求$\overrightarrow{FT}\cdot\overrightarrow{MN}$的值;

(3)求证:$|\overrightarrow{FT}|$是$|\overrightarrow{MF}|$和$|\overrightarrow{NF}|$的等比中项.

【变式 3】 (2008·山东理,22)如图 10-17 所示,设抛物线的方程为$x^2=2py(p>0)$,M为直线$y=-2p$上任意一点,过点M引抛物线的切线,切点分别为A,B.

(1)求证:A,M,B三点的横坐标成等差数列;

(2)已知当点M的坐标为$(2,-2p)$时,$|AB|=4\sqrt{10}$,求此时抛物线的方程;

(3)是否存在点M,使得点C关于直线AB的对称点D在抛物线$x^2=2py(p>0)$上,其中点C满足$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$($O$为坐标原点),若存在,求出所有适合题意的点$M$的坐标;若不存在,请说明理由.

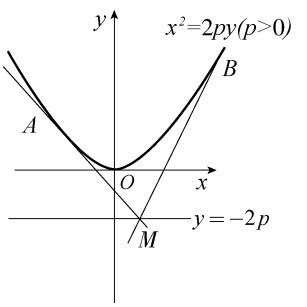


图 10-17

【例 10.38】 (2005·江西理,22)设抛物线$C:y=x^2$的焦点为F,动点P在直线$l:x-y-2=0$上运动,过P作抛物线C的两条切线PA,PB,且与抛物线C分别相切于A,B两点,求证:$\angle PFA=\angle PFB$.

【分析】 欲证明$\angle PFA=\angle PFB$,不妨证$\cos\angle PFA=\cos\angle PFB$,即证明$\dfrac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{FP}||\overrightarrow{FA}|}=\dfrac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FP}||\overrightarrow{FB}|}$.

【解析】 设点A,B的坐标分别为(x_1,x_1^2),$(x_2,x_2^2)$$(x_1\neq x_2)$.

切线AP的方程为$2x_1x-y-x_1^2=0$,

切线BP的方程为$2x_2x-y-x_2^2=0$,

解得点P的坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},x_1x_2\right)$.

$$\overrightarrow{FA}=\left(x_1,x_1^2-\frac{1}{4}\right),\overrightarrow{FP}=\left(\frac{x_1+x_2}{2},x_1x_2-\frac{1}{4}\right),\overrightarrow{FB}=\left(x_2,x_2^2-\frac{1}{4}\right).$$

由于点P在抛物线外,则$|\overrightarrow{FP}|\neq0$.

$$\cos\angle PFA=\frac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{FP}||\overrightarrow{FA}|}=\frac{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot x_1+\left(x_1^2-\frac{1}{4}\right)\left(x_1x_2-\frac{1}{4}\right)}{|\overrightarrow{FP}|\left(x_1^2+\frac{1}{4}\right)}=\frac{x_1x_2+\frac{1}{4}}{|\overrightarrow{FP}|},$$

同理有

心得体会

$$\cos\angle PFB=\frac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FP}|\,|\overrightarrow{FB}|}=\frac{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot x_2+\left(x_2^2-\frac{1}{4}\right)\left(x_1x_2-\frac{1}{4}\right)}{|\overrightarrow{FP}|\left(x_2^2+\frac{1}{4}\right)}=\frac{x_1x_2+\frac{1}{4}}{|\overrightarrow{FP}|},$$

所以$\cos\angle PFA=\cos\angle PFB$，又$\angle PFA,\angle PFB\in(0,\pi)$，故$\angle PFA=\angle PFB$.

【评注】 经研究，本题可推广到一般的抛物线和椭圆、双曲线.

(1)设抛物线$C:x^2=2py$的焦点为F，过抛物线上两点A,B作抛物线C的两条切线PA,PB，并相交于点P，则$\angle PFA=\angle PFB$.

(2)设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点为$F$，过椭圆上任意两点$A,B$作两条切线的交点为$P$，则$\angle PFA=\angle PFB$.

(3)设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一个焦点为$F$，过双曲线上任意两点$A,B$作双曲线的切线$PA,PB$，此两条切线的交点为$P$，则$\angle PFA=\angle PFB$.

下面证明关于抛物线的结论.

证：设$A\left(x_1,\frac{x_1^2}{2p}\right),B\left(x_2,\frac{x_2^2}{2p}\right)$，因为抛物线方程为$y=\frac{x^2}{2p}$，求导得$y'=\frac{x}{p}$，所以经过$A,B$的切线$PA,PB$的方程分别为$y-\frac{x_1^2}{2p}=\frac{x_1}{p}(x-x_1)$和$y-\frac{x_2^2}{2p}=\frac{x_2}{p}(x-x_2)$，

即$y=\frac{x_1}{p}x-\frac{x_1^2}{2p}$和$y=\frac{x_2}{p}x-\frac{x_2^2}{2p}$.

解得点P的坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{2p}\right)$，因此点$P$在抛物线外，所以$|\overrightarrow{PF}|\neq0$，$\overrightarrow{FA}=\left(x_1,\frac{x_1^2}{2p}-\frac{p}{2}\right)$，$\overrightarrow{FB}=\left(x_2,\frac{x_2^2}{2p}-\frac{p}{2}\right)$，$\overrightarrow{FP}=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{2p}-\frac{p}{2}\right)$.

由抛物线的定义得$|\overrightarrow{FA}|=y_1+\frac{p}{2}=\frac{x_1^2+p^2}{2p}$，

所以$\cos\angle PFA=\frac{\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FP}}{|\overrightarrow{FA}|\,|\overrightarrow{FP}|}=\frac{x_1\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+\left(\frac{x_1^2}{2p}-\frac{p}{2}\right)\left(\frac{x_1x_2}{2p}-\frac{p}{2}\right)}{\frac{x_1^2+p^2}{2p}\cdot|\overrightarrow{FP}|}$

$=\frac{x_1^3x_2+p^2x_1^2+p^2x_1x_2+p^4}{2p(x_1^2+p^2)\cdot|\overrightarrow{FP}|}=\frac{x_1x_2+p^2}{2p|\overrightarrow{FP}|}$.

这是关于x_1,x_2对称的，同理$\cos\angle PFB=\frac{x_1x_2+p^2}{2p|\overrightarrow{FP}|}$.

故$\cos\angle PFA=\cos\angle PFB$，而$\angle PFA,\angle PFB\in(0,\pi)$. 所以$\angle PFA=\angle PFB$.

椭圆与双曲线的结论同理可证.

【例 10.39】 (2009·安徽理，20)已知点$P(x_0,y_0)$在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上，$x_0=a\cos\beta,y_0=b\sin\beta\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$，直线$l_2$与直线$l_1:\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$垂直，$O$为坐标原点，直线$OP$的倾斜角为$\alpha$，直线$l_2$的倾斜角为$\gamma$.

(1)证明：点$P(x_0,y_0)$是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与直线$l_1$的唯一交点；

心得体会

(2)证明:$\tan\alpha,\tan\beta,\tan\gamma$ 构成等比数列.

【解析】 (1)因为 $x_0=a\cos\beta,y_0=b\sin\beta,0<\beta<\frac{\pi}{2}$,所以 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆在第一象限图像上的一点,

所以椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 化为 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$,$y'=\frac{b}{a}\times\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

$y'|_{x=x_0}=\frac{b}{a}\times\frac{-x_0}{\sqrt{a^2-x_0^2}}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$,所以椭圆在 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为

$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$,经整理得 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$,

即椭圆在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

又点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆上,所以点 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与直线 l_1 的唯一交点.

(2)由题可知 $k_{OP}=\frac{y_0}{x_0}=\frac{b\tan\beta}{a}=\tan\alpha$,而直线 $l_1\perp l_2$,$k_1=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}=-\frac{b\cos\beta}{a\sin\beta}$,

所以直线 l_2 的斜率 $k_2=\frac{a\tan\beta}{b}=\tan\gamma$,则 $\tan\alpha\tan\gamma=\tan^2\beta$,

所以 $\tan\alpha,\tan\beta,\tan\gamma$ 构成等比数列.

【变式 1】 已知点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上,$x_0=\frac{a}{\cos\beta}$,$y_0=b\tan\beta$,$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,直线 l_2 与直线 $l_1:\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ 垂直,O 为坐标原点,直线 OP 的倾斜角为 α,直线 l_2 的倾斜角为 γ.

(1)求证:点 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与直线 l_1 在第一象限内的唯一交点;

(2)求证:$-\tan\alpha,\sin\beta,\tan\gamma$ 构成等比数列.

【变式 2】 已知点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上,$x_0=2pt^2$,$y_0=2pt(t>0)$,直线 l_2 与直线 $l_1:y_0y=p(x+x_0)$ 垂直,O 为坐标原点,直线 OP 的倾斜角为 α,直线 l_2 的倾斜角为 γ.

(1)求证:点 $P(x_0,y_0)$ 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 与直线 l_1 的唯一交点;

(2)求证:$\frac{1}{\tan\alpha},\sqrt{2}t,-\tan\gamma$ 构成等比数列.

题型 149　中点弦问题

思路提示:直线与圆锥曲线相交所得弦中点问题,是解析几何的重要内容之一,也是高考的一个热点问题. 这类问题一般有以下 3 种类型:(1)求中点弦所在直线方程问题;(2)求弦中点的轨迹方程问题;(3)弦长为定值时,弦中点的坐标问题,其解法有点差法、设而不求法、参数法、待定系数法(即中心对称变换法)等.

心得体会

【例 10.40】 已知点 $N(1,2)$，过点 N 的直线交双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 于 A,B 两点，且 $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，求直线 AB 的方程.

【分析】 由 $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，知点 N 为线段 AB 的中点，用点差法解答.

【解析】 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$，因为 A,B 两点在双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 上，则

$$\begin{cases} x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=1 & ① \\ \\ x_2^2-\frac{y_2^2}{2}=1 & ② \end{cases}$$，由①－②得 $x_1^2-x_2^2-\frac{1}{2}(y_1^2-y_2^2)=0$，

整理得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2(x_1+x_2)}{y_1+y_2}$ ③，

因为 $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，所以 $x_1+x_2=2,y_1+y_2=4$，

代入③得，$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$，所以 $k_{AB}=1$，

所以直线 AB 的方程为 $y-2=x-1$，即 $x-y+1=0$.

【评注】 已知弦中点的坐标，求弦所在直线方程用点差法. 点差法可求出直线斜率，值得注意的是所求直线与双曲线有两个不同的交点.

对于不同曲线，有以下结论：

(1)直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于 A,B 两点，点 $M(x_0,y_0)$ 为线段 AB 的中点，则直线 l 的斜率为 $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(y_0\neq0)$.

(2)直线 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 相交于 A,B 两点，点 $M(x_0,y_0)$ 为线段 AB 的中点，则直线 l 的斜率为 $\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(y_0\neq0)$.

(3)直线 l 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 相交于 A,B 两点，点 $M(x_0,y_0)$ 为线段 AB 的中点，则直线 l 的斜率为 $\frac{p}{y_0}(y_0\neq0)$.

【变式 1】 (2010·全国Ⅱ理,21)已知斜率为 1 的直线与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 相交于 B,D 两点，且 BD 的中点为 $M(1,3)$，求 C 的离心率.

【变式 2】 (2011·江西理,20(1))$P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm a)$ 是双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点，M,N 分别是双曲线 E 的左、右顶点，直线 PM,PN 的斜率之积为 $\frac{1}{5}$，求双曲线的离心率.

【变式 3】 (2010·上海文,23)已知椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A(0,b)$，$B(0,-b)$ 和 $Q(a,0)$ 为 Γ 的 3 个顶点.

心得体会

(1)若点 M 满足$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB})$,求点 M 的坐标;

(2)设直线 $l_1:y=k_1x+p(p\neq0)$交椭圆 Γ 于 C,D 两点,交直线 $l_2:y=k_2x$ 于点 E,若 $k_1\cdot k_2=-\frac{b^2}{a^2}$,证明:$E$ 为 CD 的中点;

(3)设点 P 在椭圆 Γ 内且不在 x 轴上,如何构造作过 PQ 中点 F 的直线 l,使得 l 与椭圆 Γ 的两个交点 P_1,P_2 满足$\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$? 令 $a=10,b=5$,点 P 的坐标是$(-8,-1)$,若椭圆 Γ 上的点 P_1,P_2 满足$\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$,求点 P_1,P_2 的坐标.

【变式 4】 已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$,过点 $B(1,1)$能否作直线 l,使 l 与所给双曲线交于 Q_1,Q_2 两点,且点 B 是弦 Q_1Q_2 的中点? 如果存在,写出直线 l 的方程;如果不存在,请说明理由.

【变式 5】 (2011·江苏,18(3))如图 10-18 所示,在平面直角坐标系 xOy 中,已知椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$,过坐标原点的直线交椭圆于 P,A 两点,其中点 P 在第一象限,过 P 作 x 轴的垂线,垂足为 C,连接 AC,并延长交椭圆于点 B,设直线 PA 的斜率为 k.

求证:对任意 $k>0$,都有 $PA\perp PB$.

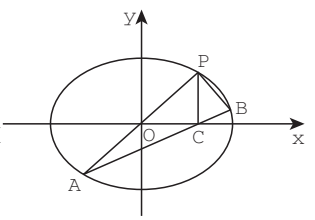


图 10-18

【例 10.41】 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,试确定 m 的取值范围,使得对于直线 $l:y=4x+m$,椭圆 C 上有两个不同的点关于这条直线对称.

【解析】 解法一:设出对称的两点及其所在的直线方程,再利用判别式 $\Delta>0$ 及中点在对称轴上求解,设椭圆 C 上关于直线 l 对称的两点为 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,其所在的直线的方程为 $y=-\frac{1}{4}x+b$,代入椭圆的方程中整理得 $13x^2-8bx+16b^2-48=0$,因为 $x_1\neq x_2$,所以 $\Delta=-192(4b^2-13)>0$,

解得$-\frac{\sqrt{13}}{2}<b<\frac{\sqrt{13}}{2}$ ①,

又因为$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4b}{13},\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+b=\frac{12b}{13}$,

而点$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$又在 $y=4x+m$ 上,

所以 $m=\frac{y_1+y_2}{2}-4\cdot\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{4b}{13}$ ②,

把①代入②得$-\frac{2\sqrt{13}}{13}<m<\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

解法二:根据点差法并结合均值不等式求出 m 的范围.

设椭圆 C 上关于直线 l 对称的两点为 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,

则有以下等式:$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$ ①　　$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$②

心得体会

$k_{PQ}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{1}{4}$ ③　　$\dfrac{y_1+y_2}{2}=4\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}+m$④

由①－②得$\dfrac{x_1^2-x_2^2}{4}+\dfrac{y_1^2-y_2^2}{3}=0$，$\dfrac{x_1+x_2}{4}+\dfrac{y_1+y_2}{3}\cdot k_{PQ}=0$，

$k_{PQ}=\dfrac{x_1+x_2}{4}\cdot\left(-\dfrac{3}{y_1+y_2}\right)$，代入③得 $3(x_1+x_2)=y_1+y_2$⑤，

把⑤代入④得 $x_1+x_2=-2m$ ⑥，

把⑥代入⑤得 $y_1+y_2=-6m$ ⑦，

①＋②得 $3(x_1^2+x_2^2)+4(y_1^2+y_2^2)=24$ ⑧，

由题意 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$，根据均值不等式得

$x_1^2+x_2^2>\dfrac{(x_1+x_2)^2}{2}$，$y_1^2+y_2^2>\dfrac{(y_1+y_2)^2}{2}$，

所以 $3(x_1^2+x_2^2)+4(y_1^2+y_2^2)>\dfrac{3}{2}(x_1+x_2)^2+2(y_1+y_2)^2$⑨，

将⑥⑦⑧代入⑨得$\dfrac{3}{2}\times4m^2+2\times36m^2<24$.

故$-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}<m<\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

解法三：椭圆 C 上存在不同的两点关于直线 l 对称，等价于存在 C 的弦被 l 垂直平分，且垂足必在椭圆 C 的内部，因此，这类问题可考虑利用交点在曲线 C 的内部建立不等式.

设椭圆 C 上关于直线 l 对称的两点为 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，弦 PQ 的中点为 $M(x_0,y_0)$，将 $P(x_1,y_2)$，$Q(x_2,y_2)$代入椭圆方程并整理得$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{3x_0}{4y_0}=-\dfrac{1}{4}$，即 $y_0=3x_0$①，

由点 M 在直线 $y=4x+m$ 上得 $y_0=4x_0+m$ ②，

由①②解得 $x_0=-m$，$y_0=-3m$.

因为 $M(-m,-3m)$在椭圆的内部，所以 $3(-m)^2+4(-3m)^2<12$.

解得$-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}<m<\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

【变式 1】 (2010·安徽理，19)如图 10-19 所示，已知椭圆 E 经过点 $A(2,3)$，对称轴为坐标轴，焦点 F_1，F_2 在 x 轴上，离心率 $e=\dfrac{1}{2}$.

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)求$\angle F_1AF_2$ 的角平分线所在直线 l 的方程；

(3)在椭圆 E 上是否存在关于直线 l 对称的相异两点？

若存在，请找出；若不存在，请说明理由.

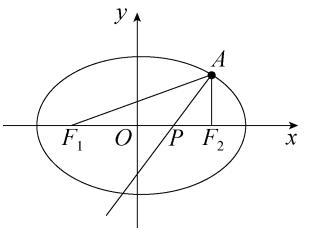


图　10-19

【变式 2】 (2005·湖北理，21)设 A，B 是椭圆 $3x^2+y^2=\lambda$ 上的两点，点 $N(1,3)$是线段 AB 的中点，试求 λ 的取值范围，并求出直线 AB 的方程.

心得体会

【例 10.42】 椭圆 $Q:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)$，过点 F 的一动直线 m 绕点 F 转动，并且交椭圆于 A,B 两点，P 为线段 AB 的中点，求点 P 的轨迹 H 的方程.

【分析】 设点 P 的坐标为 (x,y)，利用点差法求点 P 的轨迹方程，同时注意直线 AB 斜率不存在的情形.

【解析】 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(x,y)$，可得 $\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{2}\\ y=\frac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$，

将 A,B 两点坐标代入椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中得

$$\begin{cases}b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2 & ①\\ b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2 & ②\end{cases}.$$

(1)当 AB 不垂直于 x 轴时，$x_1\neq x_2$，由①－②得

$b^2(x_1-x_2)\cdot 2x+a^2(y_1-y_2)\cdot 2y=0$，

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2x}{a^2y}=\frac{y}{x-c}$，

所以 $b^2x^2+a^2y^2-b^2cx=0$ ③.

(2)当 AB 垂直于 x 轴时，点 P 即为点 $F(c,0)$ 满足方程③，故所求点 P 的轨迹 H 的方程为 $b^2x^2+a^2y^2-b^2cx=0$.

题型 150　弦长问题

思路提示：在弦长有关的问题中，一般有三类问题：(1)公式 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$；(2)与焦点相关的弦长计算，利用定义；(3)焦点弦的条数问题.

【例 10.43】 (2009·福建理，13)过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作倾斜角为 45°的直线交抛物线于 A,B 两点，若线段 AB 的长为 8，则 $p=$_____.

【解析】 设过焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 且倾斜角为 45°的直线方程为 $y=x-\frac{p}{2}$，

联立直线方程与抛物线方程，得 $\begin{cases}y=x-\frac{p}{2}\\ y^2=2px\end{cases}$，得 $x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$.

设 A,B 两点的坐标为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，

故 $|AB|=\sqrt{1+1}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(3p)^2-p^2}=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}p=4p=8$，则 $p=2$.

【评注】 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 作倾斜角为 α 的直线交抛物线于 A,B 两点，则 $|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$.

证明如下：设过焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 的直线方程为 $x=ty+\frac{p}{2}$，

心得体会

由$\begin{cases}x=ty+\dfrac{p}{2}\\ y^2=2px\end{cases}$，得 $y^2=2p\left(ty+\dfrac{p}{2}\right)$，故 $y^2-2pty-p^2=0$.

设 A,B 两点的坐标为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，故

$|AB|=\sqrt{(t^2+1)(y_1-y_2)^2}=\sqrt{t^2+1}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(2pt)^2+4p^2}$

$=2p(t^2+1)=2p\left(\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1\right)=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$.

在选择题和填空题中，如能运用公式，求解往往变得异常快捷. 本题运用公式 $|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}=\dfrac{2p}{\frac{1}{2}}=4p=8$，则 $p=2$.

【变式 1】 (2006·山东理，14)已知抛物线 $y^2=4x$，过点 $P(4,0)$ 的直线与抛物线交于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点，则 $y_1^2+y_2^2$ 的最小值是_____.

【变式 2】 点 F 为下列圆锥曲线 C 的焦点，倾斜角为 α 的直线 l 过 F 且交 C 于 A,B 两点，分别求弦 $|AB|$.

(1)$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$；

(2)$C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$；

(3)$C_3:y^2=2px(p>0)$.

【变式 3】 过双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 右焦点的直线交双曲线于 A,B 两点，若 $|AB|=4$，则这样的直线有_____条.

【变式 4】 (2011·大纲全国理，21)已知 O 为坐标原点，F 为椭圆 $C:x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 在 y 轴正半轴上的焦点，过 F 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，点 P 满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\mathbf{0}$.

(1)证明：点 P 在 C 上；

(2)设点 P 关于点 O 的对称点为 Q，证明：A,P,B,Q 四点共圆.

【例 10.44】 如图 10-20 所示，设直线 $ay=x-2$ 与抛物线 $y^2=2x$ 交于相异两点 A,B，以线段 AB 为直径作圆 H(H 为圆心). 试证抛物线顶点在圆 H 的圆周上，并求 a 的值，使圆 H 的面积最小.

【分析】 证抛物线顶点在圆周上，可通过证明 $AO\perp OB$；要使圆 H 的面积最小，即直径 $|AB|$ 最短.

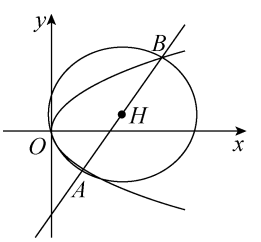


图　10-20

【解析】 (1)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}ay=x-2\\ y^2=2x\end{cases}$ 消 x，

得 $y^2-2ay-4=0$，得 $y_1+y_2=2a,y_1y_2=-4$.

因为 $y_1^2=2x_1,y_2^2=2x_2$，所以 $x_1x_2=\dfrac{y_1^2y_2^2}{4}=4$.

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=4-4=0$，

所以 $AO\perp OB$，即抛物线顶点在圆 H 的圆周上.

心得体会

(2)$|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{1+a^2}\cdot\frac{\sqrt{4a^2+16}}{1}=\sqrt{(a^2+1)(4a^2+16)}\geqslant 4$,

当且仅当 $a^2=0$ 即 $a=0$ 时取等号.

所以$(S_{圆})_{\min}=\pi\left(\frac{|AB|_{\min}}{2}\right)^2=4\pi$.

即当 $a=0$ 时,圆 H 的面积最小,且最小值为 4π.

【变式 1】 (2009·山东理,22)设椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$,是否存在以 O 为圆心的圆,使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 A,B,且$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$?若存在,写出该圆的方程,并求 $|AB|$ 的取值范围;若不存在,请说明理由.

【变式 2】 (2011·北京理,19)已知椭圆 G:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$,过点 $(m,0)$ 作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线 l 交椭圆 G 于 A,B 两点.

(1)求椭圆 G 的焦点坐标和离心率;

(2)将 $|AB|$ 表示为 m 的函数,并求 $|AB|$ 的最大值.

第六节　圆锥曲线综合

考纲解读

1. 掌握与圆锥曲线有关的最值、定值和参数范围问题.
2. 会处理动曲线(含直线)过定点的问题.
3. 会证明与曲线上的动点有关的定值问题.
4. 会按条件建立目标函数,研究变量的最值及取值范围问题,注意运用数形结合法和几何法求某些量的最值.

命题趋势探究

从内容上看,预测 2012 年高考主要考查两大类问题:一是根据条件,求出表示平面曲线的方程;二是通过方程,研究平面曲线的性质,其热点有:①以客观题的形式考查圆锥曲线的基本概念和性质;②求平面曲线的方程和轨迹;③圆锥曲线的有关元素计算、关系证明或范围确定;④涉及圆锥曲线对称变换、最值或位置关系的有关问题.

从形式上看,以解答题为主,难度较大.

从能力要求上看,要求学生具备一定的数形结合、分析问题和解决问题及运算能力.

心得体会

知识点精讲

一、定值问题

解析几何中定值问题的证明可运用函数的思想方法来解决.证明过程可总结为“变量—函数—定值”,具体操作程序如下:

(1)变量.选择适当的量为变量.

(2)函数.把要证明为定值的量表示成变量的函数.

(3)定值.化简得到的函数解析式,消去变量得到定值.

求定值问题常见的方法有两种:

(1)从特殊入手,求出定值,再证明该定值与变量无关;

(2)直接推理、计算,并在计算推理过程中消去变量,从而得到定值.

二、求最值问题常用的两种方法

(1)几何法:题中给出的条件有明显的几何特征,则考虑用几何图形性质来解决,这是几何法.

(2)代数法:题中给出的条件和结论的几何特征不明显,则可以建立目标函数,再求该函数的最值.求函数的最值常见的方法有基本不等式法、单调性法和三角换元法等,这是代数法.

三、求定值、最值等圆锥曲线综合问题的“四重视”

(1)重视定义在解题中的作用.

(2)重视平面几何知识在解题中的作用.

(3)重视根与系数的关系在解题中的作用.

(4)重视曲线的几何特征与方程的代数特征在解题中的作用.

四、求参数的取值范围

据已知条件建立等式或不等式的函数关系,再求参数的范围.

题型归纳及思路提示

题型 151　平面向量在解析几何中的应用

思路提示:(1)用向量的数量积解决有关角的问题.直角$\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,钝角$\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$,锐角$\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$(注:其中$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不共线).

(2)利用向量的坐标表示解决共线问题.

一、利用向量的数量积解决有关夹角(锐角、直角、钝角)的问题

【例 10.45】 过抛物线$x^2=2py(p>0)$的焦点F作直线交抛物线于A,B两点,O为坐标

心得体会

原点.求证:$\triangle ABO$是钝角三角形.

【分析】 证明$\triangle ABO$是钝角三角形常用的方法是利用余弦定理,但用余弦定理来解决需计算出$|OB|,|OA|,|AB|$的长,显然较复杂.因为O,A,B不共线,故我们可利用$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$来证明$\angle AOB>90°$,从而得证.

【解析】 设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,抛物线$x^2=2py(p>0)$的焦点坐标$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$.

依题意知,直线AB的斜率存在(若不存在,则A,B在原点,矛盾),设直线AB的方程为$y=kx+\frac{p}{2}$.

联立$\begin{cases}y=kx+\frac{p}{2}\\x^2=2py\end{cases}$,得$x^2-2pkx-p^2=0$,

故$x_1+x_2=2pk,x_1x_2=-p^2$.

因为A,B两点在抛物线上,所以$x_1^2=2py_1,x_2^2=2py_2$,

两式相乘得$y_1y_2=\frac{x_1^2x_2^2}{4p^2}=\frac{p^2}{4}$.

$\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1),\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2),\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-p^2+\frac{p^2}{4}=-\frac{3p^2}{4}<0$,

故$\angle AOB>90°$. 所以$\triangle ABO$为钝角三角形.

【评注】 直线l与抛物线$x^2=2py(p>0)$相交于A,B两点,则:

(1)直线l在y轴上的截距等于$2p$时,$\angle AOB=90°$.

(2)直线l在y轴上的截距大于$2p$时,$\angle AOB<90°$.

(3)直线l在y轴上的截距大于0且小于$2p$时,$\angle AOB>90°$.

【变式1】 (2005·天津理,21)抛物线C的方程为$y=-x^2$,过抛物线C上一点$P(1,-1)$作斜率为k_1,k_2的两条直线分别交抛物线C于$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$两点(P,A,B三点互不相同),且满足$k_1+k_2=0$. 求$\angle PAB$为钝角时点A的纵坐标y_1的取值范围.

【变式2】 (2006·湖北理,20)设A,B分别为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左、右顶点,$P$为直线$x=4$上不同于点$(4,0)$的任意一点,若直线$AP,BP$分别与椭圆相交于异于$A,B$的点$M,N$,证明点$B$在以$MN$为直径的圆内.

【变式3】 (2010·浙江理,21)已知$m>1$,直线$l:x-my-\frac{m^2}{2}=0$,椭圆$C:\frac{x^2}{m^2}+y^2=1$,F_1,F_2分别为椭圆C的左、右焦点.

(1)当直线l过右焦点F_2时,求直线l的方程;

(2)设直线l与椭圆C交于A,B两点,$\triangle AF_1F_2$和$\triangle BF_1F_2$的重心分别为G,H,若原点O在以线段GH为直径的圆内,求实数m的取值范围.

【例10.46】 (2008·辽宁理,20)在直角坐标系xOy中,点P到两点$(0,-\sqrt{3}),(0,\sqrt{3})$的距离之和等于4,设点$P$的轨迹为$C$,直线$y=kx+1$与$C$交于$A,B$两点.

(1)写出C的方程;

心得体会

(2)若$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,求 k 的值.

【解析】 (1)设 $P(x,y)$,由椭圆定义可知,点 P 的轨迹 C 是以$(0,-\sqrt{3})$,$(0,\sqrt{3})$为焦点,长半轴为 2 的椭圆.其短半轴 $b=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$,故曲线 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立直线与椭圆 C 的方程,得$\begin{cases}x^2+\frac{y^2}{4}=1,\\ y=kx+1.\end{cases}$

消去 y 并整理得$(k^2+4)x^2+2kx-3=0$,

故 $x_1+x_2=-\frac{2k}{k^2+4}$,$x_1x_2=-\frac{3}{k^2+4}$.

若$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,即 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

而 $y_1y_2=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1$,

于是 $x_1x_2+y_1y_2=(k^2+1)\left(-\frac{3}{k^2+4}\right)+k\left(-\frac{2k}{k^2+4}\right)+1=0$,

化简得$-4k^2+1=0$,所以 $k=\pm\frac{1}{2}$.

【评注】 本题的结论可由【例 10.45 变式 3】的【评注】中的重要结论顺利得到:由题意,$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,故有$\angle AOB=90°$,设原点 O 到直线的距离为 $|OH|=d$,则有$\frac{1}{|OH|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{5}{4}$,故可得$|OH|=d=\frac{2}{\sqrt{5}}$,又 $y=kx+1$,所以 $d=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow k^2=\frac{1}{4}\Rightarrow k=\pm\frac{1}{2}$. 利用此结论求解,可以对利用常规方法求解出的结果加以验证,从而提高解题的准确率,做到胸有成竹.

【变式 1】 (2010·陕西理,20)如图 10-21 所示,椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的顶点为 A_1,A_2,B_1,B_2,焦点为 F_1,F_2,$|A_1B_1|=\sqrt{7}$,$S_{\square B_1A_1B_2A_2}=2S_{\square B_1F_1B_2F_2}$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)设 n 为过原点的直线,l 是与 n 垂直相交于 P 点、与椭圆相交于 A,B 两点的直线,$|\overrightarrow{OP}|=1$,是否存在上述直线 l 使 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ 成立?若存在,求出直线 l 的方程;若不存在,请说明理由.

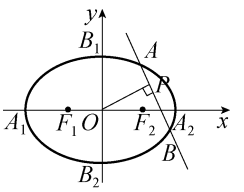


图　10-21

【变式 2】 (2007·四川理,20)设 F_1,F_2 分别是椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点,设过定点 $M(0,2)$ 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 A,B,且$\angle AOB$ 为锐角(其中 O 为坐标原点),求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

【变式 3】 (2008·福建理,21)如图 10-22 所示,椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的一个焦点是 $F(1,0)$,O 为坐标原点.设过点 F 的直线 l 交椭圆于 A,B 两点.若直线 l 绕点 F 任意转动,恒有 $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$,求 a 的取值范围.

【变式 4】 (2010·湖北理,19)已知一条曲线 C 在 y 轴右边,C 上每一点到点 $F(1,0)$的距离减去它到 y 轴的距离的差都是 1.

心得体会

(1)求曲线 C 的方程;

(2)是否存在正数 m,对于过点 $M(m,0)$ 且与曲线 C 有两个交点 A,B 的任一直线,都有 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}<0$? 若存在,求出 m 的取值范围;若不存在,请说明理由.

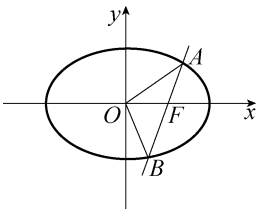


图 10-22

【变式 5】 (2007·江西理,21)过点 $B(1,0)$ 作直线交双曲线 C:$\frac{x^2}{1-\lambda}-\frac{y^2}{\lambda}=1(0<\lambda<1)$ 的右支于 M,N 两点,试确定 λ 的范围,使 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$,其中点 O 为坐标原点.

【变式 6】 (2009·北京理,19)已知双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$,设直线 l 是圆 O:$x^2+y^2=2$ 上动点 $P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq0)$ 处的切线,l 与双曲线 C 交于不同的两点 A,B,证明 $\angle AOB$ 的大小为定值.

二、利用向量的坐标表示解决共线问题

【例 10.47】 (2007·宁夏理,19)在平面直角坐标系 xOy 中,经过点 $(0,\sqrt{2})$ 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 有两个不同的交点 P,Q.

(1)求 k 的取值范围;

(2)设椭圆与 x 轴正半轴、y 轴正半轴的交点分别为 A,B,是否存在常数 k,使得向量 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线? 如果存在,求 k 值;如果不存在,请说明理由.

【分析】 将向量共线转化为坐标关系求解.

【解析】 (1)由已知条件,直线 l 的方程为 $y=kx+\sqrt{2}$,

代入椭圆方程得 $\frac{x^2}{2}+(kx+\sqrt{2})^2=1$.

整理得 $\left(\frac{1}{2}+k^2\right)x^2+2\sqrt{2}kx+1=0$ ①.

直线 l 与椭圆有两个不同的交点 P,Q 等价于

$\Delta=8k^2-4\left(\frac{1}{2}+k^2\right)=4k^2-2>0$,

解得 $k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$,即 k 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

(2)设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,则 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$,

由方程①得 $x_1+x_2=-\frac{4\sqrt{2}k}{1+2k^2}$ ②.

又 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2\sqrt{2}$ ③.

而 $A(\sqrt{2},0),B(0,1),\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{2},1)$.

所以 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线等价于 $x_1+x_2=-\sqrt{2}(y_1+y_2)$,

将②③代入上式,解得 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

心得体会

由(1)知 $k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$，故没有符合题意的常数 k.

【变式 1】 (2008·四川理，21)设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，直线 $l:x=\frac{a^2}{c}$，如图 10-23所示，M,N 是 l 上的两个动点，$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$.

(1)若 $|\overrightarrow{F_1M}|=|\overrightarrow{F_2N}|=2\sqrt{5}$，求 a,b 的值；

(2)证明：当 $|\overrightarrow{MN}|$ 取最小值时，$\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}$ 与 $\overrightarrow{F_1F_2}$ 共线.

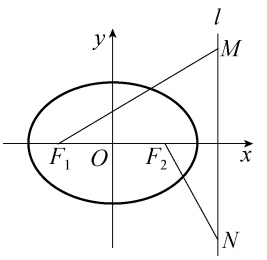


图　10-23

【例 10.48】 设 A,B 是椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上的两点，并且点 $N(-2,0)$ 满足 $\overrightarrow{NA}=\lambda\overrightarrow{NB}$，当 $\lambda\in\left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right]$ 时，求直线 AB 斜率的取值范围.

【分析】 已知 λ 的取值范围，求直线斜率范围关键在于如何用 λ 表示 k，突破口在于将 $\overrightarrow{NA}=\lambda\overrightarrow{NB}$ 转化为坐标关系.

【解析】 因为 $\overrightarrow{NA}=\lambda\overrightarrow{NB}$，所以 A,B,N 三点共线，又点 N 的坐标为 $(-2,0)$，设直线 AB 的方程为 $y=k(x+2)$，依条件知 $k\neq0$，

联立 $\begin{cases}y=k(x+2)\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，消去 x，得 $\left(\frac{y}{k}-2\right)^2+2y^2=2$.

整理得 $(2k^2+1)y^2-4ky+2k^2=0$.

根据条件可知 $\begin{cases}\Delta=(-4k)^2-4(2k^2+1)\cdot2k^2>0\\ k\neq0\end{cases}$，解得 $0<|k|<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，根据韦达定理，得 $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{4k}{1+2k^2}\\ y_1y_2=\frac{2k^2}{1+2k^2}\end{cases}$.

由 $\overrightarrow{NA}=\lambda\overrightarrow{NB}$，得 $(x_1+2,y_1)=\lambda(x_2+2,y_2)$.

所以 $\begin{cases}x_1+2=\lambda(x_2+2)\\ y_1=\lambda y_2\end{cases}$，$\begin{cases}y_1+y_2=(1+\lambda)y_2=\frac{4k}{1+2k^2}\\ y_1y_2=\lambda y_2^2=\frac{2k^2}{1+2k^2}\end{cases}$.

消去 y_2 得 $\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}=\frac{8}{1+2k^2}$. 令 $h(\lambda)=\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}=\lambda+\frac{1}{\lambda}+2,\lambda\in\left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right]$，

$h(\lambda)$ 在区间 $\left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right]$ 上为减函数，从而 $h\left(\frac{1}{3}\right)\leqslant h(\lambda)\leqslant h\left(\frac{1}{5}\right)$.

即 $\frac{16}{3}\leqslant h(\lambda)\leqslant\frac{36}{5}$. 所以 $\frac{16}{3}\leqslant\frac{8}{1+2k^2}\leqslant\frac{36}{5}$.

解得 $-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{6}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{6}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$，符合 $0<|k|<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因此直线 AB 的斜率的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{6}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{1}{2}\right]$.

心得体会

【评注】 本题在消元上有个技巧，当 $x_1=\lambda x_2$ 时消去 y 得关于 x 的一元二次方程.

$x_1+x_2=(1+\lambda)x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\lambda x_2^2=\dfrac{c}{a}$，消去 x_2 就会得 λ 与 a，b，c 之间的关系. 当 $y_1=\lambda y_2$ 时消去 x.

【变式 1】 已知 F_1，F_2 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点，直线 l_1 过点 F_1 且垂直于椭圆的长轴，动直线 l_2 垂直于直线 l_1，垂足为 D，线段 DF_2 的垂直平分线交 l_2 于点 M.

(1)求动点 M 的轨迹 C 的方程；

(2)过点 F_1 作直线交曲线 C 于两个不同的点 P 和 Q，设 $\overrightarrow{F_1P}=\lambda\overrightarrow{F_1Q}$，若 $\lambda\in[2,3]$，求 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}$ 的取值范围.

【例 10.49】 (2006·山东理，21)过点 $P(0,4)$ 的直线 l，交双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 于 A，B 两点，交 x 轴于点 Q(点 Q 与 C 的顶点不重合). 当 $\overrightarrow{PQ}=\lambda_1\overrightarrow{QA}=\lambda_2\overrightarrow{QB}$，且当 $\lambda_1+\lambda_2=-\dfrac{8}{3}$ 时，求点 Q 的坐标.

【解析】 解法一：由题意知，直线 l 的斜率 k 存在且不等于零.

设 l 的方程为 $y=kx+4(k\neq0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $Q\left(-\dfrac{4}{k},0\right)$，

因为 $\overrightarrow{PQ}=\lambda_1\overrightarrow{QA}$，所以 $\left(-\dfrac{4}{k},-4\right)=\lambda_1\left(x_1+\dfrac{4}{k},y_1\right)$，

所以 $\begin{cases}-\dfrac{4}{k}=\lambda_1\left(x_1+\dfrac{4}{k}\right)\\-4=\lambda_1y_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{4}{k\lambda_1}-\dfrac{4}{k}\\y_1=-\dfrac{4}{\lambda_1}\end{cases}$.

因为 $A(x_1,y_1)$ 在双曲线 C 上，所以 $\dfrac{16}{k^2}\left(\dfrac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\right)^2-\dfrac{16}{3\lambda_1^2}-1=0$.

所以 $16+32\lambda_1+16\lambda_1^2-\dfrac{16}{3}k^2-k^2\lambda_1^2=0$，

所以 $(16-k^2)\lambda_1^2+32\lambda_1+16-\dfrac{16}{3}k^2=0$.

同理有 $(16-k^2)\lambda_2^2+32\lambda_2+16-\dfrac{16}{3}k^2=0$.

若 $16-k^2=0$，则直线 l 过顶点，不合题意. 所以 $16-k^2\neq0$，

所以 λ_1，λ_2 是一元二次方程 $(16-k^2)\lambda^2+32\lambda+16-\dfrac{16}{3}k^2=0$ 的两根.

所以 $\lambda_1+\lambda_2=\dfrac{32}{k^2-16}=-\dfrac{8}{3}$，所以 $k^2=4$，

此时 $\Delta>0$，所以 $k=\pm2$. 故所求 Q 的坐标为 $(\pm2,0)$.

解法二：由题意知直线 l 的斜率 k 存在且不等于零，

设 l 的方程为 $y=kx+4(k\neq0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $Q\left(-\dfrac{4}{k},0\right)$.

因为 $\overrightarrow{PQ}=\lambda_1\overrightarrow{QA}=\lambda_2\overrightarrow{QB}$，

心得体会

所以$\left(-\frac{4}{k},-4\right)=\lambda\left(x_1+\frac{4}{k},y_1\right)=\lambda_2\left(x_2+\frac{4}{k},y_2\right)$.

所以$-4=\lambda_1 y_1$，故$\lambda_1=-\frac{4}{y_1}$，$\lambda_2=-\frac{4}{y_2}$，

又$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{8}{3}$，所以$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{2}{3}$，即$3(y_1+y_2)=2y_1y_2$，

将$y=kx+4$化为$x=\frac{y-4}{k}$代入$x^2-\frac{y^2}{3}=1$得$(3-k^2)y^2-24y+48-3k^2=0$，

因为$3-k^2\neq0$，否则l与渐近线平行，所以$y_1+y_2=\frac{24}{3-k^2}$，$y_1y_2=\frac{48-3k^2}{3-k^2}$.

得$3\times\frac{24}{3-k^2}=2\times\frac{48-3k^2}{3-k^2}$，所以$k=\pm2$，故点$Q$的坐标为$(\pm2,0)$.

【变式 1】 (2007·福建文，22)过点$F(1,0)$的直线交抛物线$y^2=4x$于A，B两点，交直线l：$x=-1$于点M，已知$\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$，求$\lambda_1+\lambda_2$的值.

题型 152　定点问题

思路提示：(1)直线过定点，由对称性知定点多在坐标轴上，如直线$y=kx+b$过定点$(m,0)$，即令$y=0$，$x=-\frac{b}{k}$为定值.

(2)一般曲线过定点，把曲线方程变为$f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0$($\lambda$为参数).

解方程组$\begin{cases}f_1(x,y)=0\\f_2(x,y)=0\end{cases}$，即得定点.

模型：三大圆锥曲线(椭圆、双曲线、抛物线)中的顶点直角三角形的斜边所在的直线过定点.

【例 10.50】 (2007·山东理，21)已知椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，直线$l$：$y=kx+m$与椭圆交于$A$，$B$两点($A$，$B$不是顶点)，且以$AB$为直径的圆过椭圆的右顶点.

求证：直线l过定点，并求出该定点的坐标.

【分析】 要求直线过定点，必须知道直线l：$y=kx+m$中k与m的关系.

【解析】 设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\y=kx+m\end{cases}$，

消去y得$(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

则有$\Delta=(8km)^2-4(4k^2+3)(4m^2-12)>0$，即$m^2<4k^2+3$，

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+3}\\x_1x_2=\frac{4m^2-12}{4k^2+3}\end{cases}(*).$$

因为以AB为直径的圆过右顶点$(2,0)$，所以$(x_1-2,y_1)\cdot(x_2-2,y_2)=0$，

即$x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+y_1y_2=0$，

即$x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$.

心得体会

把式(*)代入化简得 $7m^2+16km+4k^2=0$,得 $m=-2k$ 或 $m=-\frac{2k}{7}$.

(1)当 $m=-2k$ 时,$l:y=kx-2k$ 过右顶点(2,0),与题意不符,故舍去;

(2)当 $m=-\frac{2k}{7}$ 时,$l:y=kx-\frac{2k}{7}$ 过定点 $\left(\frac{2}{7},0\right)$,且满足 $m^2<4k^2+3$,符合题意.

所以 $l:y=kx+m$ 过定点 $\left(\frac{2}{7},0\right)$.

【评注】 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆交于 A,B 两点,且以 AB 为直径的圆过椭圆的右顶点,求证:直线 l 过定点,并求定点坐标.

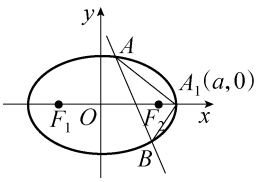


图 10-24

证:如图 10-24 所示,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+m\end{cases}$,消 y 得 $(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2m^2-a^2b^2=0$,

$\Delta=(2a^2km)^2-4(a^2k^2+b^2)(a^2m^2-a^2b^2)>0$,得 $m^2<a^2k^2+b^2$.

$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-2a^2km}{a^2k^2+b^2}\\ x_1x_2=\frac{a^2(m^2-b^2)}{a^2k^2+b^2}\end{cases}$ (*).

因为以 AB 为直径的圆过右顶点 $(a,0)$,所以 $(x_1-a,y_1)\cdot(x_2-a,y_2)=0$,

即 $x_1x_2-a(x_1+x_2)+a^2+y_1y_2=0$,

即 $x_1x_2-a(x_1+x_2)+a^2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$,

$(k^2+1)x_1x_2+(km-a)(x_1+x_2)+m^2+a^2=0$,

将式(*)代入化简得 $(m+ak)[(a^2+b^2)m+a(a^2-b^2)k]=0$.

(1)当 $m=-ak$ 时,直线 $l:y=kx-ak$ 过右顶点 $(a,0)$,不符合题意;

(2)当 $m=-\frac{a(a^2-b^2)k}{a^2+b^2}$ 时,$l:y=kx-\frac{a(a^2-b^2)k}{a^2+b^2}$,

过定点 $\left(\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2},0\right)$,且满足 $m^2<a^2k^2+b^2$,符合题意.

所以,$l:y=kx+m$ 过定点 $\left(\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2},0\right)$.

同理可证,若以 AB 为直径的圆过左顶点 $(-a,0)$,则 l 过定点 $\left(\frac{-a(a^2-b^2)}{a^2+b^2},0\right)$;

过上顶点 $(0,b)$ 时,过定点 $\left(0,\frac{b(b^2-a^2)}{a^2+b^2}\right)$;

过下顶点 $(0,-b)$ 时,过定点 $\left(0,\frac{-b(b^2-a^2)}{a^2+b^2}\right)$.

类比椭圆,对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上异于右顶点的两动点 A,B,若以 AB 为直径的圆过右顶点 $(a,0)$,则 l_{AB} 过定点 $\left(\frac{a(a^2+b^2)}{a^2-b^2},0\right)$. 同理,若该圆

心得体会

过左顶点$(-a,0)$，则l_{AB}过定点$\left(\dfrac{-a(a^2+b^2)}{a^2-b^2},0\right)$.

【变式 1】 (2010·北京丰台一模理,19)已知椭圆$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$的左顶点为A，不过点A的直线$l:y=kx+b$与椭圆交于不同的两点P,Q. 当$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$时，求$k$与$b$的关系，并证明直线$l$过定点.

【例 10.51】 (2010·四川理,20)已知定点$A(-1,0),F(2,0)$，定直线$l:x=\dfrac{1}{2}$，不在x轴上的动点P与点F的距离是它到直线l的距离的2倍，设点P的轨迹是E，过点F的直线交E于B,C两点，直线AB,AC分别交l于点M,N.

(1)求E的方程；

(2)试判断以线段MN为直径的圆是否过点F，并说明理由.

【解析】 (1)依题意，设$P(x,y)(y\neq0)$，则$\dfrac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{\left|x-\dfrac{1}{2}\right|}=2$，

化简得$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1(y\neq0)$.

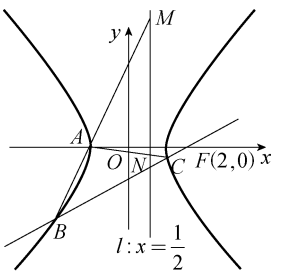


图　10-25

(2)①当直线BC不与x轴垂直时，如图10-25所示，设BC的方程为$y=k(x-2)(k\neq0)$，与双曲线方程$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$联立消去y，得$(3-k^2)x^2+4k^2x-(4k^2+3)=0$. 由题意知，$3-k^2\neq0$，且$\Delta>0$，

设$B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{-4k^2}{3-k^2},x_1x_2=\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}$，

$y_1y_2=k^2(x_1-2)(x_2-2)=k^2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]$

$=k^2\left(\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}+\dfrac{8k^2}{3-k^2}+4\right)=\dfrac{-9k^2}{k^2-3}$.

因为$x_1,x_2\neq-1$，所以直线AB的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1)$.

因此点M的坐标为$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3y_1}{2(x_1+1)}\right)$，

$\overrightarrow{FM}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3y_1}{2(x_1+1)}\right)$，同理可得$\overrightarrow{FN}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3y_2}{2(x_2+1)}\right)$，

因此$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=\dfrac{9}{4}+\dfrac{9y_1y_2}{4(x_1+1)(x_2+1)}=\dfrac{9}{4}+\dfrac{\dfrac{-81k^2}{k^2-3}}{4\left(\dfrac{-4k^2}{3-k^2}+\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}+1\right)}=0$.

②当直线BC与x轴垂直时，其方程为$x=2$，则$B(2,3),C(2,-3)$，AB的方程为$y=x+1$，因此点M的坐标为$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{FM}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，同理可得$\overrightarrow{FN}=\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$，因此$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{4}=0$.

综上，$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，即$FM\perp FN$. 故以线段$MN$为直径的圆过点$F$.

心得体会

【评注】 因为直线 BC 过点 $F(2,0)$，且 $2=\dfrac{-1\times(1+3)}{1-3}=\dfrac{-a(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$，所以可推出 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，则 $\angle MAN=\dfrac{\pi}{2}$，即以 MN 为直径的圆过左顶点 A，再由 A,F 关于直径 MN 对称，故以 MN 为直径的圆过点 $F(2,0)$.

【变式 1】 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$，直线 $l:y=kx+m$ 与双曲线交于 A,B 两点（A,B 不是左、右顶点）且以 AB 为直径的圆过双曲线的右顶点. 求证：直线 l 过定点，并求出该定点的坐标.

【变式 2】 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-y^2=1(x\geqslant 2)$，直线 l 过点 $(m,0)$ $(m>2)$ 且与双曲线 C 交于 A,B 两点，D 为 C 与 x 轴的交点，若 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，证明直线 l 过定点，并求出该定点的坐标.

【变式 3】 (2010·全国Ⅱ理，21)已知斜率为 1 的直线 l 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 相交于 B,D 两点，且 BD 的中点为 $M(1,3)$.

(1)求 C 的离心率；

(2)设 C 的右顶点为 A，右焦点为 F，$|DF|\,|BF|=17$，证明：过 A,B,D 三点的圆与 x 轴相切.

【例 10.52】 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上异于顶点的两动点 A,B 满足以 AB 为直径的圆过顶点. 求证：AB 所在的直线过定点，并求出该定点的坐标.

【分析】 要证明 l_{AB} 过定点，必须先求得其方程.

【解析】 由题意知 l_{AB} 的斜率不为 0（否则只有一个交点），故可设 $l_{AB}:x=ty+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\begin{cases}y^2=2px\\x=ty+m\end{cases}$，消 x 得 $y^2-2pty-2pm=0$，

从而 $\Delta=(-2pt)^2-4(-2pm)=4p^2t^2+8pm>0$，$pt^2+2m>0$，

$\begin{cases}y_1+y_2=2pt\\y_1y_2=-2pm\end{cases}$ (*).

因为以 AB 为直径的圆过顶点 $O(0,0)$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

即 $x_1x_2+y_1y_2=0$，也即 $\dfrac{y_1^2}{2p}\cdot\dfrac{y_2^2}{2p}+y_1y_2=0$，把式(*)代入

化简得 $m(m-2p)=0$，得 $m=0$ 或 $m=2p$.

(1)当 $m=0$ 时，$x=ty$，l_{AB} 过顶点 $O(0,0)$，与题意不符，故舍去；

(2)当 $m=2p$ 时，$x=ty+2p$，令 $y=0$，得 $x=2p$，所以 l_{AB} 过定点 $(2p,0)$，此时 $m=2p$ 满足 $pt^2+2m>0$.

综上 l_{AB} 过定点 $(2p,0)$.

【评注】 (1)①将斜率存在的直线的方程设为 $y=kx+b$，将斜率不为 0 的直线的方程设为 $x=ty+m$；②抛物线 $y^2=2px$ 中，$x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{y_1^2y_2^2}{4p^2}+y_1y_2$；

③对于过定点问题，必须引入参数，最后令参数的系数为 0. 如本题，先引入参数 t,m 之后，就剩下参数 t，直线 $x=ty+2p$ 中令参数 t 的系数 y 为 0，则直线过

心得体会

定点$(2p,0)$.

(2)抛物线$x^2=2py(p>0)$上两异于原点O的动点A,B满足$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,则$AB$所在的直线过定点$(0,2p)$;抛物线$y^2=2px(p>0)$上两异于原点$O$的动点$A,B$满足$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,则$AB$所在的直线过定点$(2p,0)$.

【变式1】 (2005·北京春理,18)如图10-26所示,O为坐标原点,直线l在x轴上的截距为$a(a>0)$且交抛物线$y^2=2px(p>0)$于$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$两点,当$a=2p$时,求$\angle MON$的大小.

【变式2】 (2005·京皖春理,23)如图10-27所示,设点A和B为抛物线$y^2=4px(p>0)$上原点以外的两动点,已知$OA\perp OB$,$OM\perp AB$于M,求点M的轨迹方程,并说明它表示什么曲线.

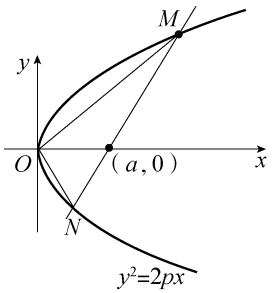


图　10-26

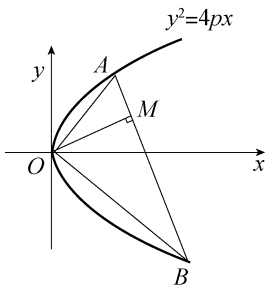


图　10-27

【例10.53】 如图10-28所示,已知定点$P(x_0,y_0)$在抛物线$y^2=2px(p>0)$上,过点P作两直线l_1,l_2分别交抛物线于A,B,且以AB为直径的圆过点P,证明直线AB过定点,并求定点坐标.

【解析】 证:设$A\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right),B\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)$,由题意知$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,

即$\left(\frac{y_1^2}{2p}-\frac{y_0^2}{2p},y_1-y_0\right)\cdot\left(\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_0^2}{2p},y_2-y_0\right)=0$.

化简得$y_1y_2=-y_0^2-y_0(y_1+y_2)-4p^2$①,

则$l_{AB}:y-y_1=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p}}\left(x-\frac{y_1^2}{2p}\right)$,

化简为$2px-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$ ②.

把①代入②得$l_{AB}:2px-(y_1+y_2)(y_0+y)-y_0^2-4p^2=0$,

令含参数y_1+y_2的系数y_0+y为0,

即$y=-y_0$,得$x=\frac{y_0^2}{2p}+2p=x_0+2p$,

从而l_{AB}过定点$(x_0+2p,-y_0)$.

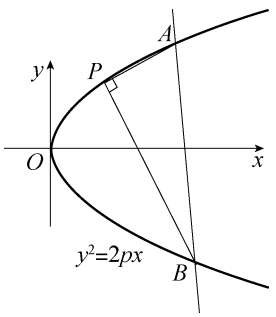


图　10-28

【评注】 当定点$P(x_0,y_0)$为顶点$(0,0)$时,l_{AB}过定点$(2p,0)$.

【变式1】 已知抛物线$y^2=4x$,过点$M(1,2)$作两直线l_1,l_2分别与抛物线交于A,B两点,且l_1,l_2的斜率k_1,k_2满足$k_1k_2=2$. 求证:直线AB过定点,并求出此定点的坐标.

【变式2】 已知抛物线$y^2=2px(p>0)$,定点$P(x_0,y_0)$在抛物线上,过P作两直线l_1,l_2

心得体会

分别与抛物线交于 A,B 两点，且 l_1,l_2 的斜率 k_1,k_2 满足 $k_1k_2=k$（k 为非零常数），求证：直线 AB 过定点，并求出此定点的坐标.

定直线：

模型：已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 外一点 $P(x_0,y_0)$，当过点 P 的动直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A,B 时，在线段 AB 上取一点 Q，满足 $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}=\frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$.

求证：点 Q 总在某定直线上，并求出该直线的方程.

证：如图 10-29 所示，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),Q(x,y)$，由题意知 $\frac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{AQ}|}=\frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{QB}|}$，

设 A 在 P,Q 之间，$\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{AQ}(\lambda>0)$，

又 Q 在 P,B 之间，故 $\overrightarrow{PB}=-\lambda\overrightarrow{BQ}$，

因为 $|\overrightarrow{PB}|>|\overrightarrow{BQ}|$，所以 $0<\lambda<1$，

由 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{AQ}$ 得 $(x_1-x_0,y_1-y_0)=\lambda(x-x_1,y-y_1)$，

$$\text{解得}\begin{cases}x_1=\dfrac{x_0+\lambda x}{1+\lambda}\\ y_1=\dfrac{y_0+\lambda y}{1+\lambda}\end{cases}.$$

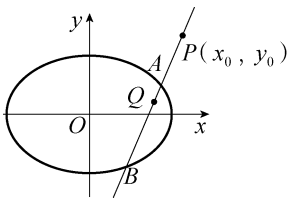


图 10-29

同理，由 $\overrightarrow{PB}=-\lambda\overrightarrow{BQ}$ 得 $(x_2-x_0,y_2-y_0)=-\lambda(x-x_2,y-y_2)$，

$$\text{解得}\begin{cases}x_2=\dfrac{x_0-\lambda x}{1-\lambda}\\ y_2=\dfrac{y_0-\lambda y}{1-\lambda}\end{cases}.$$

因为点 A 在椭圆上，所以 $\frac{\left(\frac{x_0+\lambda x}{1+\lambda}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{y_0+\lambda y}{1+\lambda}\right)^2}{b^2}=1$，

即 $\frac{(x_0+\lambda x)^2}{a^2}+\frac{(y_0+\lambda y)^2}{b^2}=(1+\lambda)^2$①.

同理，点 B 在椭圆上，得 $\frac{(x_0-\lambda x)^2}{a^2}+\frac{(y_0-\lambda y)^2}{b^2}=(1-\lambda)^2$②.

由①－②得 $\frac{2x_0\times(2\lambda x)}{a^2}+\frac{2y_0\times(2\lambda y)}{b^2}=4\lambda$，即 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

所以点 Q 在定直线 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 上.

类比椭圆，对于双曲线有点 Q 在定直线 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ 上.

再由 P,Q 的对等性知，当 P 在椭圆内，仍有上述结论，双曲线亦同.

已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，定点 $P(x_0,y_0)$ 不在抛物线上，过点 P 的动直线交抛物线于 A,B 两点，在直线 AB 上取点 Q，满足 $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}=\frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$.

求证：点 Q 在某定直线上，并求其方程.

心得体会

证：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$Q(x,y)$，由题意知 $\dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{AQ}|}=\dfrac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{QB}|}$，

设 A 在 P，Q 之间，$\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{AQ}(\lambda>0)$，又 Q 在 P，B 之间，故 $\overrightarrow{PB}=-\lambda\overrightarrow{BQ}$，因为 $|\overrightarrow{PB}|>|\overrightarrow{BQ}|$，所以 $0<\lambda<1$，由 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{AQ}$ 知 $(x_1-x_0,y_1-y_0)=\lambda(x-x_1,y-y_1)$，

解得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{x_0+\lambda x}{1+\lambda}\\ y_1=\dfrac{y_0+\lambda y}{1+\lambda}\end{cases}$，故点 A 坐标为 $\left(\dfrac{x_0+\lambda x}{1+\lambda},\dfrac{y_0+\lambda y}{1+\lambda}\right)$.

同理，由 $\overrightarrow{PB}=-\lambda\overrightarrow{BQ}$ 知 $(x_2-x_0,y_2-y_0)=-\lambda(x-x_2,y-y_2)$，

解得 $\begin{cases}x_2=\dfrac{x_0-\lambda x}{1-\lambda}\\ y_2=\dfrac{y_0-\lambda y}{1-\lambda}\end{cases}$，故点 B 坐标为 $\left(\dfrac{x_0-\lambda x}{1-\lambda},\dfrac{y_0-\lambda y}{1-\lambda}\right)$.

因为点 A 在抛物线上，所以 $\left(\dfrac{y_0+\lambda y}{1+\lambda}\right)^2=2p\left(\dfrac{x_0+\lambda x}{1+\lambda}\right)$，

$(y_0+\lambda y)^2=2p(1+\lambda)(x_0+\lambda x)$ ①，

同理 $(y_0-\lambda y)^2=2p(1-\lambda)(x_0-\lambda x)$ ②，

由①－②得 $2y_0\times(2\lambda y)=4p\lambda(x+x_0)$，则 $y_0y=p(x+x_0)$.

所以点 Q 在直线 $y_0y=p(x+x_0)$ 上.

注 三大圆锥曲线（椭圆、双曲线、抛物线）中，当定点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线上时，相应的定直线 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$，$\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$，$yy_0=p(x_0+x)$ 均为在定点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线.

【例 10.54】 （2008·安徽理，22）设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $M(\sqrt{2},1)$，且左焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）当过点 $P(4,1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 相交于两不同点 A，B 时，在线段 AB 上取点 Q，满足 $|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}||\overrightarrow{PB}|$. 证明：点 Q 总在某定直线上.

【分析】 用待定系数法求解椭圆的方程，巧妙地利用定比分点解答点 Q 的轨迹问题.

【解析】 （1）由题意知 $\begin{cases}\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\\ c^2=a^2-b^2\end{cases}$，解得 $a^2=4$，$b^2=2$，$c^2=2$，所求椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

（2）如图 10-30 所示，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$Q(x,y)$，

由题意知 $\dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{AQ}|}=\dfrac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{QB}|}$，不妨设 A 在 P，Q 之间，$\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{AQ}(\lambda>0)$，

又 Q 在 P，B 之间，故 $\overrightarrow{PB}=-\lambda\overrightarrow{BQ}$，因为 $|\overrightarrow{PB}|>|\overrightarrow{BQ}|$，所以 $0<\lambda<1$，

由 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{AQ}$ 得 $(x_1-4,y_1-1)=\lambda(x-x_1,y-y_1)$，

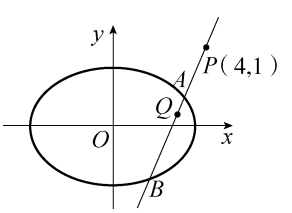


图　10-30

心得体会

解得$\begin{cases}x_1=\dfrac{4+\lambda x}{1+\lambda}\\ y_1=\dfrac{1+\lambda y}{1+\lambda}\end{cases}$；同理，由$\overrightarrow{PB}=-\lambda\overrightarrow{BQ}$，得$(x_2-4,y_2-1)=-\lambda(x-x_2,y-y_2)$，

解得$\begin{cases}x_2=\dfrac{4-\lambda x}{1-\lambda}\\ y_2=\dfrac{1-\lambda y}{1-\lambda}\end{cases}$．因为点$A$在椭圆上，所以$\dfrac{\left(\dfrac{4+\lambda x}{1+\lambda}\right)^2}{4}+\dfrac{\left(\dfrac{1+\lambda y}{1+\lambda}\right)^2}{2}=1$，

即$\dfrac{(4+\lambda x)^2}{4}+\dfrac{(1+\lambda y)^2}{2}=(1+\lambda)^2$①.

同理，由点B在椭圆上，得$\dfrac{(4-\lambda x)^2}{4}+\dfrac{(1-\lambda y)^2}{2}=(1-\lambda)^2$②.

由①－②得$\dfrac{8\times 2\lambda x}{4}+\dfrac{2\times 2\lambda y}{2}=4\lambda$，因为$\lambda\neq 0$，所以$x+\dfrac{y}{2}=1$.

所以点Q在定直线$2x+y-2=0$上.

【评注】 由模型的结论不难知动点$Q(x,y)$总在定直线$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$上，$a^2=4$，$b^2=2$，$x_0=4$，$y_0=1$，得$\dfrac{4x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$，即$2x+y-2=0$.

题型153　定值问题

思路提示：求定值问题常见的方法有两种：

(1)从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关.

(2)直接推理，计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

模型一：三大圆锥曲线中，设过焦点F且不垂直于坐标轴的弦为AB，其垂直平分线交焦点所在轴于点R，则$\dfrac{|FR|}{|AB|}=\dfrac{e}{2}$.

证：设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，如图10-31所示，作辅助线，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，易知Rt△$FMR$∽Rt△$AHB$，所以

$$\frac{|FR|}{|AB|}=\frac{|FM|}{|AH|}=\frac{\frac{||AF|-|BF||}{2}}{|x_1-x_2|}=\frac{||AF|-|BF||}{2|x_1-x_2|}\quad(*)$$

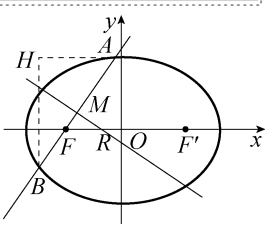


图　10-31

由定义知$|AF|+|AF'|=2a$①，

从而$|AF|-|AF'|=\dfrac{|AF|^2-|AF'|^2}{2a}=\dfrac{(x_1+c)^2+y_1^2-[(x_1-c)^2+y_1^2]}{2a}=2ex_1$②.

$\dfrac{①+②}{2}$得$|AF|=a+ex_1$③，同理$|BF|=a+ex_2$④.

③－④得$|AF|-|BF|=e(x_1-x_2)$，

代入式$(*)$得$\dfrac{|FR|}{|AB|}=\dfrac{|e(x_1-x_2)|}{2|x_1-x_2|}=\dfrac{e}{2}$.

类比椭圆，在双曲线中有$\dfrac{|FR|}{|AB|}=\dfrac{e}{2}$.

心得体会

在抛物线中，设抛物线方程为 $y^2=2px\,(p>0)$，如图 10-32 所示，作辅助线方法同椭圆中，得 $\dfrac{|FR|}{|AB|}=\dfrac{||AF|-|BF||}{2|AH|}$

$=\dfrac{||AF|-|BF||}{2||AS|-|BT||}=\dfrac{||AF|-|BF||}{2||AF|-|BF||}=\dfrac{1}{2}$.

即 $\dfrac{|FR|}{|AB|}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{e}{2}$（抛物线离心率为 1）.

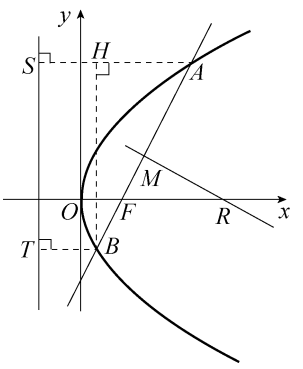


图　10-32

【例 10.55】（2010・全国Ⅱ理，12）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，过右焦点 F 且斜率为 k $(k>0)$ 的直线与 C 相交于 A,B 两点，若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则 $k=$（　　）.

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【解析】 如图 10-33 所示，不妨设 $|\overrightarrow{AF}|=3$，则 $|\overrightarrow{FB}|=1$，$|\overrightarrow{MF}|=1$，$|\overrightarrow{RF}|=\dfrac{e}{2}|AB|=2e=\sqrt{3}$，在 Rt△$FMR$ 中，$k=\tan\angle RFM$ $=\dfrac{|RM|}{|FM|}=\dfrac{\sqrt{3-1}}{1}=\sqrt{2}$. 故选 B.

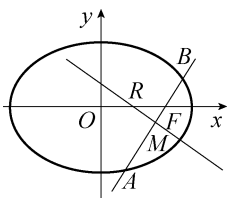


图　10-33

【评注】 若 l_{AB} 的倾斜角为 θ，且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}\,(\lambda>0)$，则 $|\cos\theta|=\dfrac{|\lambda-1|}{e(\lambda+1)}$.

【变式 1】（2009・全国Ⅱ理，11）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于 A,B 两点，若 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$，则 C 的离心率为（　　）.

A. $\dfrac{6}{5}$　　B. $\dfrac{7}{5}$　　C. $\dfrac{8}{5}$　　D. $\dfrac{9}{5}$

【变式 2】（2010・全国Ⅰ理，16）已知 F 是椭圆 C 的一个焦点，B 是短轴的一个端点，线段 BF 的延长线交 C 于点 D，且 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$，则 C 的离心率为_____.

【变式 3】（2007・重庆文，21）如图 10-34 所示，倾斜角为 α 的直线经过抛物线 $y^2=8x$ 的焦点 F，且与抛物线交于 A,B 两点.

(1)求抛物线的焦点 F 的坐标及准线 l 的方程；

(2)若 α 为锐角，作线段 AB 的垂直平分线 m 交 x 轴于点 P，证明：$|FP|-|FP|\cos2\alpha$ 为定值，并求此定值.

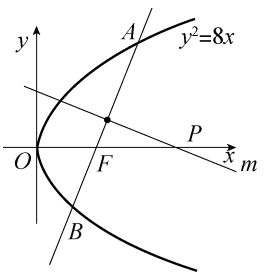


图　10-34

模型二：三大圆锥曲线中（双曲线需同支），设过焦点 F 且不平行于焦点所在坐标轴的弦为 AB，则 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}$ 为定值 $\dfrac{4}{L}$（L 为通径长）.

证：设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，如图 10-35 所示，过点 F 作 $l\perp x$ 轴于点 F，过点 A,B 分别作 AH_1,BH_2 垂直于 l 于点 H_1,H_2，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，l_{AB} 的倾斜角为 α，不妨设 $x_2<-c<x_1$，则 $|AH_1|=|AF|\cos\alpha=x_1+c$，

心得体会

又由模型一中$|AF|=a+ex_1$，

所以$e|AH_1|=e|AF|\cos\alpha=ex_1+ec=|AF|-a+ec$，

即$|AF|(1-e\cos\alpha)=a-ec$，得$|AF|=\dfrac{a-ec}{1-e\cos\alpha}$.

$\dfrac{1}{|AF|}=\dfrac{1-e\cos\alpha}{a-ec}=\dfrac{1-e\cos\alpha}{\frac{b^2}{a}}$.

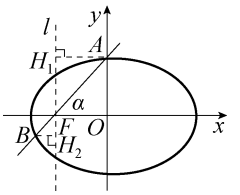


图 10-35

同理，在$\mathrm{Rt}\triangle BH_2F$中，$\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{1+e\cos\alpha}{\frac{b^2}{a}}$，

所以$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{1-e\cos\alpha}{\frac{b^2}{a}}+\dfrac{1+e\cos\alpha}{\frac{b^2}{a}}=\dfrac{2}{\frac{b^2}{a}}=\dfrac{2a}{b^2}$，为定值.

类比椭圆，在双曲线(同支)中，仍有$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2a}{b^2}$为定值.

对于抛物线$y^2=2px(p>0)$，如图10-36所示，过点A,B分别作垂线AS,BT垂直于准线l于点S,T，过F作垂直于x轴的直线交AS与BT的延长线(或反向延长线)于点H_1,H_2，在$\mathrm{Rt}\triangle AH_1F$中，$|AH_1|=|AF|\cos\alpha$ ①，

又$|AH_1|=|AS|-|SH_1|=|AF|-p$②，

将式②代入式①得$|AF|-p=|AF|\cos\alpha$，

得$|AF|=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$，所以$\dfrac{1}{|AF|}=\dfrac{1-\cos\alpha}{p}$ ③.

同理，在$\mathrm{Rt}\triangle BH_2F$中，可得$\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{1+\cos\alpha}{p}$ ④.

由③+④得，$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$，为定值.

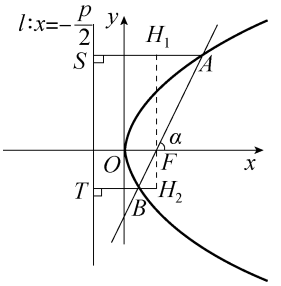


图 10-36

【评注】 本结论对于AB为通径也成立，且上述结论可统一为$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{4}{L}$($L$为通径长).

【例10.56】 (1)(2010·重庆文,13)已知过抛物线$y^2=4x$的焦点F的直线交该抛物线于A,B两点，$|AF|=2$，$|BF|=$_____.

(2)(2010·重庆理,14)已知以F为焦点的抛物线$y^2=4x$上的两点A,B满足$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则弦$AB$的中点到准线的距离为_____.

【解析】 (1)由$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}=1$，得$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{|BF|}=1$，故$|BF|=2$.

(2)如图10-37所示，因为$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，所以设$|\overrightarrow{FB}|=r$，则$|\overrightarrow{AF}|=3r$，

由$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$，知$\dfrac{1}{3r}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{2}{2}$，即$r=\dfrac{4}{3}$.

因为点M为线段AB的中点，

所以$|MN|=\dfrac{1}{2}(|AS|+|BT|)=\dfrac{1}{2}(|AF|+|BF|)$

$=\dfrac{1}{2}(r+3r)=2r=2\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$.

【变式1】 (2010·北京宣武二模理,8)如图10-38所示，抛物线$C_1:y^2=2px$和圆$C_2:$

心得体会

$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\frac{p^2}{4}$，其中 $p>0$，直线 l 经过 C_1 的焦点，依次交 C_1，C_2 于 A，B，C，D 四点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 的值为（　　）.

A. $\frac{p^2}{4}$　　B. $\frac{p^2}{3}$　　C. $\frac{p^2}{2}$　　D. p^2

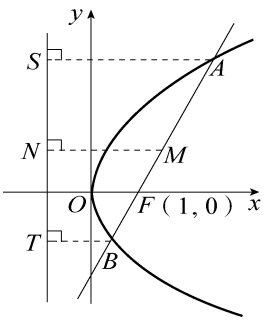


图　10-37

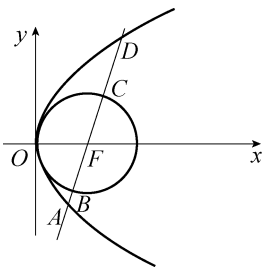


图　10-38

模型二的推广：三大曲线（椭圆、双曲线（同支）、抛物线）中，设 $P_i(i=1,2,\cdots,n,n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$ 为曲线上的动点，点 F 为曲线的焦点，且线段 $FP_1,FP_2,\cdots,FP_n$ 把圆周角 F 分成 n 等份，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{|FP_i|}$ 为定值，$\frac{2n}{L}$（L 为通径长）.

证：①对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由题意可设 $\theta_1=\angle x^+FP_1=\alpha$，

则 $\theta_i=\angle x^+FP_i=\alpha+\frac{2(i-1)\pi}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，且由模型一知

$\frac{1}{|FP_i|}=\frac{1-e\cos\theta_i}{\frac{b^2}{a}}(i=1,2,\cdots,n)$，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{|FP_i|}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1-e\cos\theta_i}{\frac{b^2}{a}}=\frac{na}{b^2}-\frac{c}{b^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\theta_i$（$*$）.

因为 $\theta_i=\alpha+\frac{2(i-1)\pi}{n}$，所以单位向量 $\frac{\overrightarrow{FP_i}}{|\overrightarrow{FP_i}|}$ 的终点均匀分布在以 F 为圆心的单位圆上，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\overrightarrow{FP_i}}{|\overrightarrow{FP_i}|}=\mathbf{0}$（$**$）.

（证明：可把 $\frac{\overrightarrow{FP_i}}{|\overrightarrow{FP_i}|}$ 逆时针旋转 $\frac{2\pi}{n}$，则式（$**$）左边不变，其右边只能为 $\mathbf{0}$）.

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\cos\theta_i,\sin\theta_i)=\mathbf{0}$，即有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\theta_i=0$，代入式（$*$）得

$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{|FP_i|}=\frac{na}{b^2}-\frac{c}{b^2}\times 0=\frac{na}{b^2}$ 为定值.

②类比椭圆，在双曲线（同支）中，仍有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{|FP_i|}=\frac{na}{b^2}$.

③对于抛物线 $y^2=2px(p>0)$，

设 $\theta_1=\angle x^+FP_1=\alpha$，则 $\theta_i=\angle x^+FP_i=\alpha+\frac{2(i-1)\pi}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，

心得体会

由模型一中知$\frac{1}{|FP_i|}=\frac{1-\cos\theta_i}{p}$，

所以$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|FP_i|}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\cos\theta_i}{p}=\frac{n}{p}-\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i$，

由①中证明知$\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i=0$，代入上式得$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|FP_i|}=\frac{n}{p}$为定值.

【评注】 上述结论可统一为$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|FP_i|}=\frac{2n}{L}$($L$为通径长).

【例 10.57】 (2007·重庆理,22)在椭圆$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$上任取三个不同的点$P_1,P_2,P_3$，使$\angle P_1FP_2=\angle P_2FP_3=\angle P_3FP_1$，其中$F$为右焦点，

求证：$\frac{1}{|FP_1|}+\frac{1}{|FP_2|}+\frac{1}{|FP_3|}$为定值，并求此定值.

【解析】 解法一：设椭圆的右顶点为A，以F为极点，AF的延长线为极轴，建立极坐标系，并设$\angle AFP_i=\theta_i\ (i=1,2,3)$，$0\leqslant\theta_i<\frac{2\pi}{3}$且$\theta_2=\theta_1+\frac{2\pi}{3}$，$\theta_3=\theta_1+\frac{4\pi}{3}$，又设点$P_i$在其右准线$l$：$x=12$上的射影为$Q_i$，因椭圆的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，从而有

$$|FP_i|=|P_iQ_i|\cdot e=\left(\frac{a^2}{c}-c-|FP_i|\cos\theta_i\right)\cdot e$$

$$=\frac{1}{2}(9-|FP_i|\cos\theta_i)\ (i=1,2,3).$$

解得$\frac{1}{|FP_i|}=\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{2}\cos\theta_i\right)(i=1,2,3)$. 因此

$$\frac{1}{|FP_1|}+\frac{1}{|FP_2|}+\frac{1}{|FP_3|}=\frac{2}{9}\left\{3+\frac{1}{2}\left[\cos\theta_1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta_1\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\theta_1\right)\right]\right\}.$$

又 $\cos\theta_1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta_1\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\theta_1\right)$

$$=\cos\theta_1-\frac{1}{2}\cos\theta_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta_1-\frac{1}{2}\cos\theta_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta_1=0.$$

故$\frac{1}{|FP_1|}+\frac{1}{|FP_2|}+\frac{1}{|FP_3|}=\frac{2}{3}$为定值.

解法二：如解法一建立极坐标系.

由$\rho=\frac{ep}{1+e\cos\theta}$，$e=\frac{1}{2}$，$p=\frac{a^2}{c}-c=9$，则$\rho=\frac{\frac{9}{2}}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}$，

故$|F_1P|=\frac{\frac{9}{2}}{1+\frac{1}{2}\cos\theta_1}$，$|F_2P|=\frac{\frac{9}{2}}{1+\frac{1}{2}\cos\left(\theta_1+\frac{2\pi}{3}\right)}$，

$|F_3P|=\frac{\frac{9}{2}}{1+\frac{1}{2}\cos\left(\theta_1+\frac{4\pi}{3}\right)}$，因此

心得体会

$$\frac{1}{|FP_1|}+\frac{1}{|FP_2|}+\frac{1}{|FP_3|}=\frac{2}{9}\left[1+\frac{1}{2}\cos\theta_1+1+\frac{1}{2}\cos\left(\theta_1+\frac{2\pi}{3}\right)+1+\frac{1}{2}\cos\left(\theta_1+\frac{4\pi}{3}\right)\right]=\frac{2}{3}$$为定值.

【评注】 对于与定点(焦点)距离有关的问题,利用极坐标可使问题得到简化.同时本题得到的结论$\frac{1}{|FP_1|}+\frac{1}{|FP_2|}+\frac{1}{|FP_3|}=\frac{2}{3}$满足$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|FP_i|}=\frac{na}{b^2}$.

模型三:三大圆锥曲线(椭圆、双曲线、抛物线)中,曲线上的一定点P与曲线上的两动点A,B满足直线PA与直线PB的斜率互为相反数,则直线AB的斜率为定值.

证明:①对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.设$P(x_0,y_0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

令$x_0=a\cos\theta$,$y_0=b\sin\theta$,$A(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$,$B(a\cos\beta,b\sin\beta)$.

则$k_{AB}=\frac{b\sin\alpha-b\sin\beta}{a\cos\alpha-a\cos\beta}=\frac{b}{a}\cdot\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=-\frac{b}{a}\cot\frac{\alpha+\beta}{2}$(*).

同理,$k_{PA}=-\frac{b}{a}\cot\frac{\alpha+\theta}{2}$,$k_{PB}=-\frac{b}{a}\cot\frac{\theta+\beta}{2}$.

而$k_{PA}+k_{PB}=0$,得$-\frac{b}{a}\cot\frac{\alpha+\theta}{2}-\frac{b}{a}\cot\frac{\theta+\beta}{2}=0$,

所以$\cot\frac{\alpha+\theta}{2}+\cot\frac{\theta+\beta}{2}=0$,得$\frac{1}{\tan\frac{\alpha+\theta}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{\theta+\beta}{2}}=0$

$\Rightarrow\tan\frac{\alpha+\theta}{2}+\tan\frac{\theta+\beta}{2}=0$,即$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\theta\right)=0$

$\Rightarrow\tan\frac{\alpha+\beta}{2}+\tan\theta=0\Rightarrow\cot\frac{\alpha+\beta}{2}+\cot\theta=0$,

所以$\cot\frac{\alpha+\beta}{2}=-\cot\theta$,代入式(*)得

$k_{AB}=-\frac{b}{a}(-\cot\theta)=\frac{b}{a}\cot\theta=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$,为定值.

由于$x_0y_0\neq0$,所以上述所有三角运算均有意义.

②对于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$,设$P(x_0,y_0)$为$P(a\sec\theta,b\tan\theta)$,$A(a\sec\alpha,b\tan\alpha)$,$B(a\sec\beta,b\tan\beta)$,则$k_{AB}=\frac{b\tan\alpha-b\tan\beta}{a\sec\alpha-a\sec\beta}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\cos\beta-\cos\alpha}$

$=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin(\alpha-\beta)}{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$(*).

同理,$k_{PA}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\frac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\theta+\alpha}{2}}$,$k_{PB}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\frac{\theta-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}$,

心得体会

而 $k_{PA}+k_{PB}=0$，即 $\frac{b}{a}\left(\frac{\cos\frac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\theta+\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{\theta-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}\right)=0$，

所以 $\frac{\cos\frac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\theta+\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{\theta-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}=0$，$\sin\frac{\theta+\beta}{2}\cos\frac{\theta-\alpha}{2}+\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\cos\frac{\theta-\beta}{2}=0$.

即 $\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\theta+\beta+\theta-\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta+\beta-(\theta-\alpha)}{2}\right)\right]+$

$\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\theta+\alpha+\theta-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta+\alpha-(\theta-\beta)}{2}\right)\right]=0$

$\Rightarrow\sin\left(\theta+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\left(\theta+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0$

$\Rightarrow\sin\left(\theta-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\theta+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0$

$\Rightarrow 2\sin\frac{\theta-\frac{\alpha-\beta}{2}+\theta+\frac{\alpha-\beta}{2}}{2}\cos\frac{\theta-\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(\theta+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0$

$\Rightarrow\sin\theta\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0\Rightarrow\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=-\frac{1}{\sin\theta}$，代入式(*)得

$k_{AB}=\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right)=-\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$，为定值.

由于 $y_0\neq 0$，所以上述所以三角函数运算均成立.

③对于抛物线 $y^2=2px(p>0)$，设 $P(x_0,y_0)$，$A\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right)$，$B\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)$

(y_0,y_1,y_2 两两均不相等)，则 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{2p}-\frac{y_2^2}{2p}}=\frac{2p}{y_1+y_2}$(*).

同理，$k_{PA}=\frac{2p}{y_0+y_1}$，$k_{PB}=\frac{2p}{y_0+y_2}$，

又 $k_{PA}+k_{PB}=0$，得 $\frac{2p}{y_0+y_1}+\frac{2p}{y_0+y_2}=0$，即 $\frac{1}{y_0+y_1}+\frac{1}{y_0+y_2}=0$，

故 $y_0+y_1+y_0+y_2=0$，得 $y_1+y_2=-2y_0$，代入式(*)得

$k_{AB}=\frac{2p}{-2y_0}=-\frac{p}{y_0}$.

【例 10.58】 (2009·辽宁理，20)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$A$ 为椭圆 C 上的点，其坐标为 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$，$E,F$ 是椭圆 C 上的两动点，如果直线 AE 的斜率与 AF 的斜率互为相反数，证明：直线 EF 的斜率为定值，并求出该定值.

【分析】 要求直线 EF 的斜率，必须知道 E,F 的坐标.

【解析】 设直线 AE 的方程为 $y=k(x-1)+\frac{3}{2}$，$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=k(x-1)+\frac{3}{2}\end{cases}$，

心得体会

消 y 得 $(4k^2+3)x^2+(12k-8k^2)x+4\left(\frac{3}{2}-k\right)^2-12=0$，

则 $x_E=\frac{4\left(\frac{3}{2}-k\right)^2-12}{(4k^2+3)x_A}=\frac{(3-2k)^2-12}{4k^2+3}$ ①，

又直线 AF 的斜率与 AF 的斜率互为相反数，故以上 k 用 $-k$ 代替得

$x_F=\frac{(3+2k)^2-12}{4k^2+3}$ ②，

所以

$$k_{EF}=\frac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=\frac{-k(x_F-1)+\frac{3}{2}-\left[k(x_E-1)+\frac{3}{2}\right]}{x_F-x_E}=\frac{-k(x_F+x_E)+2k}{x_F-x_E},$$

把①，②两式代入上式，得 $k_{EF}=\frac{1}{2}$.

【变式 1】 已知 A,B,C 是长轴为 4，焦点在 x 轴上的椭圆上的三点，点 A 是长轴的一个顶点，BC 过椭圆的中心 O，且 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$|\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{AC}|$.

(1)求椭圆的方程；

(2)如果椭圆上的两点 P,Q，使得 $\angle PCQ$ 的平分线垂直于 OA，问是否总存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{AB}$？说明理由.

【变式 2】 已知椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的内接 $\triangle PAB$ 中，点 P 坐标为 $(\sqrt{3},1)$，PA 与 PB 的倾斜角互补，求证：直线 AB 的斜率为定值，并求之.

【变式 3】 已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 上点 $P(2,3)$，过 P 作两条直线 PA,PB，满足直线 PA 与 PB 倾斜角互补，求直线 AB 的斜率.

【变式 4】 (2004·北京理，17)如图 10-39 所示，过抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 上一定点 $P(x_0,y_0)$ $(y_0\neq0)$，作两条直线分别交抛物线于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

(1)求该抛物线上纵坐标为 $\frac{p}{2}$ 的点到焦点 F 的距离；

(2)当 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补时，求 $\frac{y_1+y_2}{y_0}$ 的值，并证明直线 AB 的斜率是非零常数.

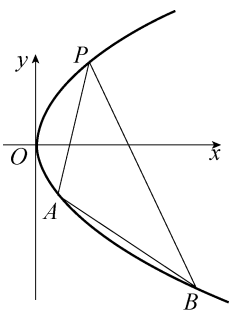


图　10-39

模型四：已知曲线 $C:\frac{x^2}{s}+\frac{y^2}{t}=1(st\neq0)$，$P$ 是 C 上异于顶点的动点，A,B 是关于原点中心对称的两顶点. 若直线 PA,PB 分别交同一坐标轴于 M,N(非 A,B 两点)，则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 为定值.

【例 10.59】 如图 10-40 所示，已知圆 O 的半径是 a $(a>0)$，圆中有两条互相垂直的直径 AB 和 CD，P 是圆周上任意一点(不在 AB,CD 上)，直线 AP,BP 分别交直线 CD 于 M,N，证明 $|\overrightarrow{OM}|\,|\overrightarrow{ON}|=a^2$.

【解析】 证：因为 $\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{AP}$，所以 $\overrightarrow{BN}\perp\overrightarrow{AM}$，从而 $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{ON})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM})=0$，

心得体会

即$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$,

即$-a^2+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$.

所以$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=|\overrightarrow{OM}|\,|\overrightarrow{ON}|\cos0=|\overrightarrow{OM}|\,|\overrightarrow{ON}|=a^2$,得证.

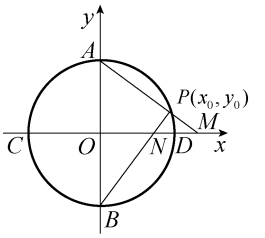


图 10-40

【例 10.60】 如图 10-41 所示,已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的上、下顶点分别为$A,B$,点$P$是椭圆上异于顶点的任意一点,直线$AP,BP$分别交$x$轴于$M,N$,证明:$|\overrightarrow{OM}|\,|\overrightarrow{ON}|=a^2$.

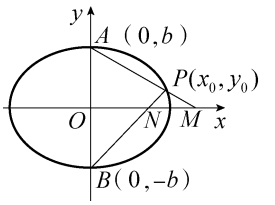


图 10-41

【解析】 证:设$P(x_0,y_0)$,则$x_0y_0\neq0$,$M(m,0)$,$N(n,0)$,

则$\overrightarrow{AP}/\!/\overrightarrow{AM}$,即$(x_0,y_0-b)/\!/(m,-b)$.

所以$m(y_0-b)=-bx_0$,得$m=\frac{-bx_0}{y_0-b}$.

同理由$\overrightarrow{BP}/\!/\overrightarrow{BN}$,得$n=\frac{bx_0}{y_0+b}$.

所以$|\overrightarrow{OM}|\,|\overrightarrow{ON}|=mn=\frac{-b^2x_0^2}{y_0^2-b^2}=\frac{x_0^2}{1-\frac{y_0^2}{b^2}}=\frac{x_0^2}{\frac{x_0^2}{a^2}}=a^2$.

【变式 1】 如图 10-42 所示,已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$上、下顶点分别为$A,B$,点$P$是椭圆上异于顶点的任意一点,直线$AP,BP$分别交$x$轴于$M,N$. 证明:$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}$为定值,并求之.

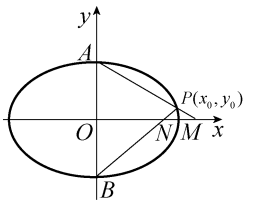


图 10-42

【例 10.61】 如图 10-43 所示,已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$左、右顶点分别为$A,B$,点$P$是双曲线异于顶点的任意一点,直线$AP,BP$分别交$y$轴于$M,N$,证明:$|\overrightarrow{OM}|\,|\overrightarrow{ON}|=b^2$.

证:设$P(x_0,y_0)$,$y_0\neq0$,$M(0,m)$,$N(0,n)$,

$A(-a,0)$,$B(a,0)$,则$\overrightarrow{AP}/\!/\overrightarrow{AM}$,

即$(x_0+a,y_0)/\!/(a,m)$,

所以$m(x_0+a)=ay_0$,即$m=\frac{ay_0}{x_0+a}$.

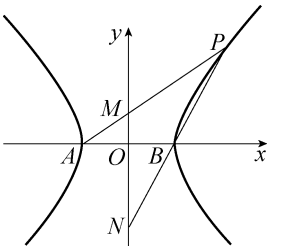


图 10-43

同理,由$\overrightarrow{BP}/\!/\overrightarrow{BN}$,得$n=\frac{-ay_0}{x_0-a}$.

所以,$|\overrightarrow{OM}|\,|\overrightarrow{ON}|=|mn|=\left|\frac{ay_0}{x_0+a}\cdot\frac{-ay_0}{x_0-a}\right|=\frac{a^2y_0^2}{x_0^2-a^2}=\frac{y_0^2}{\frac{x_0^2}{a^2}-1}=\frac{y_0^2}{\frac{y_0^2}{b^2}}=b^2$.

【变式 1】 (2009·江西理,21)已知双曲线$\frac{x^2}{2b^2}-\frac{y^2}{25b^2}=1\,(b>0)$的左、右顶点为$B,D$,在双曲线上任取一点$Q(x_0,y_0)\,(y_0\neq0)$,直线$QB,QD$分别交$y$轴于$M,N$两点,求证:以$MN$为直径的圆过两定点.

心得体会

【例 10.62】 如图 10-44 所示，已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，动直线 l 过定点 $Q(q,0)$，且 l 与抛物线交于 A,B 两点，AM 垂直于 x 轴于 M，BN 垂直于 x 轴于 N，AM' 垂直于 y 轴于 M'，BN' 垂直于 y 轴于 N'，

证明：$|\overrightarrow{OM}|\,|\overrightarrow{ON}|=q^2$，$|\overrightarrow{OM'}|\,|\overrightarrow{ON'}|=2p|q|$.

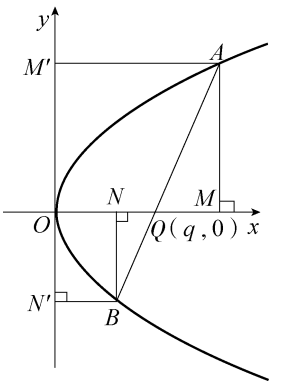


图　10-44

【解析】 证：由题意知直线 l 的斜率非零，故可设直线 l：$x=ty+q$ $(t\in\mathbf{R})$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y^2=2px\\x=ty+q\end{cases}$，得 $y^2-2pty-2pq=0$.

所以 $|\overrightarrow{OM'}|\,|\overrightarrow{ON'}|=|y_1y_2|=2p|q|$，

$$|\overrightarrow{OM'}|\,|\overrightarrow{ON'}|=|x_1x_2|=\left|\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}\right|=\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\frac{4p^2q^2}{4p^2}=q^2.$$

题型 154　最值问题

思路提示：有两种求解方法：一是几何方法，即利用几何性质结合图形直观求解；二是建立目标函数，通过求函数的最值求解.

【例 10.63】 设椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 M 是椭圆上任意一点，点 A 的坐标为 $(2,1)$，求 $|MF_1|+|MA|$ 的最大值和最小值.

【分析】 本题若设 $M(x,y)$，建立目标函数 $|MA|+|MF_1|=f(x,y)$，则会作茧自缚. 但是注意到 F_1 为椭圆左焦点，联想到椭圆定义及三角形中边的关系不等式时，问题就容易获解.

【解析】 如图 10-45 所示，因为 M 在椭圆上，所以有 $|MF_1|+|MF_2|=2a=10$.

令 $Z=|MF_1|+|MA|$，得 $Z=10+|MA|-|MF_2|$.

当 M,A,F_2 三点不共线时，有

$-|AF_2|<|MA|-|MF_2|<|AF_2|$，

当 M 落在 F_2A 的延长线时，$|MA|-|MF_2|=-|F_2A|$，

当 M 落在 AF_2 的延长线时，$|MA|-|MF_2|=|F_2A|$.

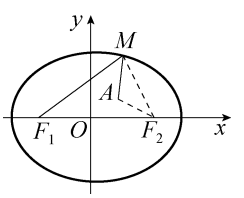


图　10-45

所以 $Z_{\max}=10+|F_2A|=10+\sqrt{(2-3)^2+(1-0)^2}=10+\sqrt{2}$，

$Z_{\min}=10-|F_2A|=10-\sqrt{2}$.

【评注】 这里利用椭圆定义、三角形两边之差小于或等于（注意等号成立的条件）第三边，使与曲线有关的最值转化为直线段间的最值. 应明确这里不能用 $|F_1M|+|AM|\geqslant|F_1A|=\sqrt{26}$，求得 $|F_1M|+|AM|\geqslant|F_1A|$ 的最小值 $\sqrt{26}$，原因是取不到等号，如果要取到等号，那么 M 必须在线段 F_1A 上，但这是不可能的.

【变式 1】 如图 10-46 所示，已知点 P 是抛物线 $y^2=4x$ 上的点，设点 P 到此抛物线的准线的距离为 d_1，到直线 l：$x+2y-12=0$ 的距离为 d_2，求 d_1+d_2 的最小值.

【变式 2】 （2009·辽宁理，16）如图 10-47 所示，已知点 F 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左焦点，点 A 坐标为 $(1,4)$，P 是双曲线右支上的动点，则 $|PF|+|PA|$ 的最小值

心得体会

为_____.

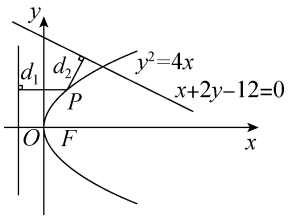


图 10-46

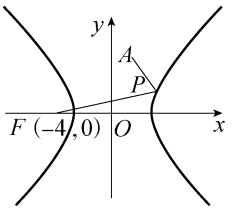


图 10-47

【变式 3】 (2011·广东理,19(2))已知点 P 为双曲线 $L:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 上的动点,$M\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$,$F(\sqrt{5},0)$. 求$\big||MP|-|FP|\big|$的最大值及此时点 P 的坐标.

【变式 4】 (2011·广东文,21(2))在平面直角坐标系 xOy 中,已知 E 的方程是 $y^2=4x+4$ 或$\begin{cases}x<-1\\y=0\end{cases}$. 已知 $T(1,-1)$,设 H 是 E 上动点,求 $|HO|+|HT|$ 的最小值,并给出此时点 H 的坐标.

【例 10.64】 (2009·重庆理,20)已知椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$,点 M 是椭圆上的动点,若 C,D 的坐标分别是$(0,-\sqrt{3})$,$(0,\sqrt{3})$,求 $|MC|\,|MD|$ 的最大值.

【分析】 求积的最大值,由"和为定值积有最大值"知,必须找出和为定值.

【解析】 由题设知 C,D 是椭圆的上、下焦点,故由椭圆的定义知

$|MC|+|MD|=2\sqrt{4}=4$.

所以$|MC|\,|MD|\leqslant\left(\frac{|MC|+|MD|}{2}\right)^2=\left(\frac{4}{2}\right)^2=4$.

当且仅当 $|MC|=|MD|$ 时取等号,即 M 为左、右顶点时取等号.

所以,当 M 为左、右顶点时,$|MC|\cdot|MD|$ 的最大值为 4.

【评注】 本题运用均值不等式求最值,但要注意使用均值不等式的条件:一正,二定,三相等,四同时. 积为定值时,和最小 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ $(a,b>0)$;和为定值时,积最大 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ $(a,b>0)$,取等号的条件均为 $a=b$.

【变式 1】 (2006·全国Ⅰ,理 20)已知椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 在第一象限部分为曲线 C,动点 P 在 C 上,C 在点 P 处的切线与 x,y 轴的交点分别为 A,B,且向量$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,求 $|\overrightarrow{OM}|$ 的最小值.

【变式 2】 (2010·广东文,21)已知曲线 $C:y=nx^2$,点 $P_n(x_n,y_n)$ $(x_n>0,y_n>0)$是曲线 C_n 上的点 $(n=1,2,\cdots)$.

(1)试写出曲线 C_n 在点 P_n 处的切线 l_n 的方程,并求出 l_n 与 y 轴的交点 Q_n 的坐标;

(2)若原点 $O(0,0)$ 到 l_n 的距离与线段 P_nQ_n 的长度之比取到最大值,试求点 P_n 的坐标 (x_n,y_n);

(3)设 m 与 k 为两个给定的不同的正整数,x_n 与 y_n 是满足(2)中条件的点 P_n

心得体会

的坐标.

证明：$\sum_{n=1}^{s}\left|\sqrt{\frac{(m+1)x_n}{2}}-\sqrt{(k+1)y_n}\right|<\left|\sqrt{ms}-\sqrt{ks}\right|(s=1,2,\cdots)$.

【变式 3】 (2011·山东理,22)已知动直线 l 与椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 交于 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 两个不同点,且$\triangle OPQ$的面积 $S_{\triangle OPQ}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,其中 O 为坐标原点.

(1)证明:$x_1^2+x_2^2$和 $y_1^2+y_2^2$均为定值;

(2)设线段 PQ 的中点为 M,求$|OM||PQ|$的最大值;

(3)椭圆 C 上是否存在三点 D,E,G,使得 $S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=\frac{\sqrt{6}}{2}$? 若存在,判断$\triangle DEG$的形状;若不存在,请说明理由.

【例 10.65】 (2009·陕西理,21)已知双曲线$\frac{y^2}{4}-x^2=1$,如图 10-48 所示,P 是双曲线上一点,A,B 两点在双曲线的两条渐近线上,且分别位于第一、二象限,若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$,$\lambda\in\left[\frac{1}{3},2\right]$,求$\triangle AOB$的面积的取值范围.

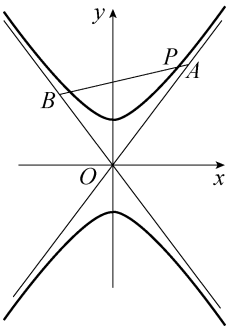


图　10-48

【分析】 由图 10-48 可知,$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB$,从而只要知道 A,B 两点的坐标即可.

【解析】 设 $A(m,2m),B(-n,2n)(m,n>0),P(x,y)$,

由$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$知点 P 坐标为$\left(\frac{m-\lambda n}{1+\lambda},\frac{2m+2\lambda n}{1+\lambda}\right)$,

又 P 在双曲线上,所以$\frac{\left(\frac{2m+2\lambda n}{1+\lambda}\right)^2}{4}-\frac{\left(\frac{m-\lambda n}{1+\lambda}\right)^2}{1}=1\Rightarrow$

$$mn=\frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda}=\frac{\lambda+\frac{1}{\lambda}+2}{4}.$$

设$\angle AOB=2\theta$,因为 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2$,所以 $\tan\theta=\frac{1}{2}$,

$$\sin2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5},$$

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}m\times\sqrt{5}n\times\frac{4}{5}=2mn=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+1$,又 $\lambda\in\left[\frac{1}{3},2\right]$,

当 $\lambda=1$ 时,$S_{\triangle AOB}$取最小值为 2;

当 $\lambda=\frac{1}{3}$时,$S_{\triangle AOB}$取最大值为$\frac{8}{3}$.

所以 $S_{\triangle AOB}\in\left[2,\frac{8}{3}\right]$.

【评注】 本题建立目标函数,即$\triangle AOB$的面积与λ的函数关系$S(\lambda)=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+1$,利

心得体会

用函数的单调性来求解.

【变式 1】 已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，A，B 是抛物线上的两动点，且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$ $(\lambda>0)$，过 A，B 两点分别作抛物线的切线，设其交点为 M.

(1)证明：$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 为定值；

(2)求 $\triangle ABM$ 的面积的最小值.

【例 10.66】 (2008·全国Ⅱ理，21)设椭圆中心在坐标原点，$A(2,0)$，$B(0,1)$ 是它的两个顶点，直线 $y=kx(k>0)$ 与椭圆交于 E，F 两点，求四边形 $AEBF$ 面积的最大值.

【分析】 将四边形 $AEBF$ 分割为两个三角形来求面积.

【解析】 设 $E(x_0,y_0)$，$F(-x_0,-y_0)$，$x_0,y_0>0$，由题意知椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

如图 10-49 所示，$S_{四边形AEBF}=S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}|OA|\,|y_0-(-y_0)|+$

$\frac{1}{2}|OB|\,|x_0-(-x_0)|=2y_0+x_0$，又 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$

即 $x_0^2+4y_0^2=4$，$4=x_0^2+4y_0^2\geqslant 4x_0y_0$

(当 $x_0=2y_0$ 时等号成立).

所以 $S_{四边形AEBF}^2=(x_0+2y_0)^2=x_0^2+4x_0y_0+4y_0^2\leqslant 4+x_0^2+(2y_0)^2=8$，

即 $S_{四边形AEBF}\leqslant 2\sqrt{2}$，当且仅当 $x_0=2y_0$ 时取等号.

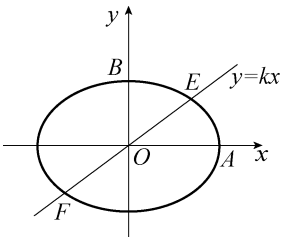


图 10-49

另解：设 $x_0=2\cos\theta$，$y_0=\sin\theta$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $S_{四边形AEBF}=2\cos\theta+\sin\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 2\sqrt{2}$.

故四边形 $AEBF$ 的面积的最大值为 $2\sqrt{2}$.

【例 10.67】 (2009·全国Ⅰ理，21)如图 10-50 所示，已知抛物线 $E:y^2=x$ 与圆 $M:(x-4)^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 相交于 A，B，C，D 四点.

(1)求 r 的取值范围；

(2)当四边形 $ABCD$ 的面积最大时，求对角线 AC，BD 的交点 P 的坐标.

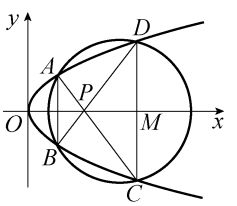


图 10-50

【解析】 (1)将 $y^2=x$ 代入 $(x-4)^2+y^2=r^2$

并化简得 $x^2-7x+16-r^2=0$ ①.

因为 E 与 M 有四个交点的充要条件是方程①有两个不等的正根 x_1，x_2，

由此得 $\begin{cases}\Delta=(-7)^2-4(16-r^2)>0\\ x_1+x_2=7>0\\ x_1x_2=16-r^2>0\end{cases}$，解得 $\frac{15}{4}<r^2<16$.

又 $r>0$，所以 r 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{15}}{2},4\right)$.

(2)不妨设 E 与 M 的四个交点坐标分别为 $A(x_1,\sqrt{x_1})$，$B(x_1,-\sqrt{x_1})$，

心得体会

$C(x_2,-\sqrt{x_2})$，$D(x_2,\sqrt{x_2})$，则直线 AC，BD 的方程分别为

$y-\sqrt{x_1}=\dfrac{-\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$，$y+\sqrt{x_1}=\dfrac{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$.

解得点 P 的坐标为 $(\sqrt{x_1x_2},0)$.

设 $t=\sqrt{x_1x_2}$，由 $t=\sqrt{16-r^2}$ 及(1)知 $0<t<\dfrac{7}{2}$. 由于四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，因而其面积 $S=\dfrac{1}{2}(2\sqrt{x_1}+2\sqrt{x_2})\cdot|x_2-x_1|$.

即 $S^2=(x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2})\cdot[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$.

将 $x_1+x_2=7$，$\sqrt{x_1x_2}=t$ 代入上式，并令 $f(t)=S^2$，得

$f(t)=(7+2t)^2\cdot(7-2t)\left(0<t<\dfrac{7}{2}\right)$. 求导数得 $f'(t)=-2(2t+7)(6t-7)$.

令 $f'(t)=0$，解得 $t=\dfrac{7}{6}$，$t=-\dfrac{7}{2}$(舍去). 显然当 $0<t<\dfrac{7}{6}$ 时，$f'(t)>0$，

当 $\dfrac{7}{6}<t<\dfrac{7}{2}$ 时，$f'(t)<0$. 故当且仅当 $t=\dfrac{7}{6}$ 时，$f(t)$ 有最大值，即四边形 $ABCD$ 的面积最大.

故所求的点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{7}{6},0\right)$.

【评注】 本题主要有两个考查点：一个是考查将曲线与曲线的交点问题转化为二次方程的根的个数问题，是较基本的问题；另一个是考查四边形 $ABCD$ 的面积最大值问题，是本题的核心点. 要注意本题中表面上求点的坐标，实质上是求四边形 $ABCD$ 面积的最大值，而且在求目标函数最值的过程中，利用导数判断函数单调性的方法，从而使本题的综合性大大提高.

【变式 1】 (2011·湖南文，21)已知平面内一动点 P 到点 $F(1,0)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离的差等于 1.

(1)求动点 P 的轨迹 C 的方程；

(2)过点 F 作两条斜率存在且互相垂直的直线 l_1，l_2，设 l_1 与轨迹 C 相交于点 A，B，l_2 与轨迹 C 相交于点 D，E，求 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EB}$ 的最小值.

第十一章　算法初步

考纲解读

1. 了解算法的含义和思想.
2. 理解程序框图的3种基本逻辑结构:顺序、条件分支、循环.
3. 理解几种基本算法语句——输入、输出、赋值、条件和循环语句的含义.

命题趋势探究

预测在2012年高考中,本章知识仍为考查的热点,内容以程序框图为主.从形式上看,以选择题和填空题为主,以实际问题为背景,侧重知识应用能力的考查,要求考生具备一定的逻辑推理能力.

本专题主要考查算法的逻辑结构,要求能够写出程序的运行结果、指明算法的功能、补充程序框图、求输入参量,并常将算法与其他版块知识(尤其是与数列)进行综合考查.一般来说,有关算法的试题属容易题目,分值稳定在5分.

知识点精讲

一、算法与程序框图

1.算法

算法通常是指可以用计算机来解决的某一类问题的程序或步骤,这些程序或步骤必须是确定的和能执行的,而且能够在有限步之内完成.

2. 程序框图

(1)定义:程序框图又称流程图,是一种用程序框、流程线及文字说明来表示算法的图形.

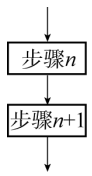
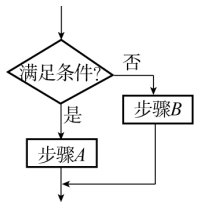
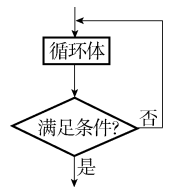
(2)说明:在程序框图中一个或几个程序框的组合表示算法中的一个步骤;带有方向的流程线将程序框连接起来,表示算法步骤的执行顺序.

3.3种基本逻辑结构

程序框图有3种基本的逻辑结构,如表11-1所示.

心得体会

表　11-1

名称 内容	顺序结构	条件结构	循环结构
定义	顺序结构由若干个依次执行的步骤组成，是任何一个算法都离不开的基本结构	算法的流程根据条件是否成立有不同的流向，条件结构就是处理这种过程的结构	从某处开始，按照一定的条件反复执行某些步骤，反复执行的步骤称为循环体
程序框图			

二、基本算法语句

1. 3 种语句的一般格式和功能

3 种基本算法语句的一般格式和功能如表 11-2 所示.

表　11-2

语句	一般格式	功能
输入语句	INPUT“提示内容”;变量	输入信息
输出语句	PRINT“提示内容”;表达式	输出结果
赋值语句	变量＝表达式	将表达式的值赋给变量

2. 条件语句

(1)算法中的条件结构由条件语句来表达.

(2)条件语句的格式及框图如图 11-1 和图 11-2 所示.

①IF—THEN 格式

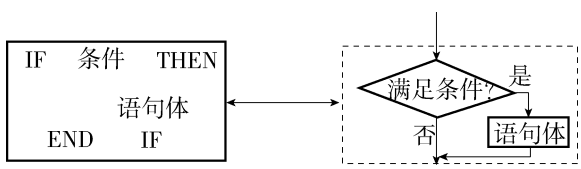


图　11-1

②IF—THEN—ELSE 格式

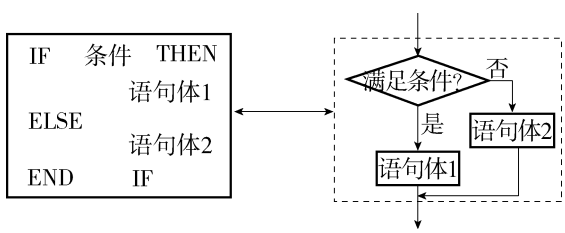


图　11-2

心得体会

3. 循环语句

(1)算法中的循环结构由循环语句来实现.

(2)循环语句的形式及框图如图 11-3 和图 11-4 所示.

①UNTIL 语句

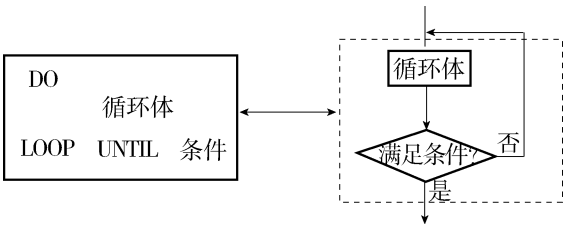


图 11-3

②WHILE 语句

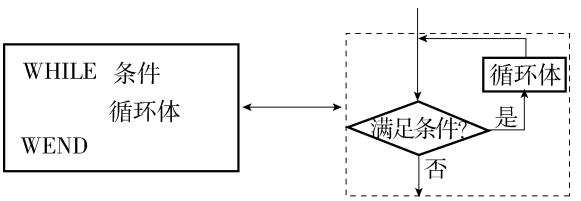


图 11-4

(3)WHILE 语句与 UNTIL 语句之间的区别与联系如表 11-3 所示.

表 11-3

	WHILE 语句	UNTIL 语句
区别	执行循环体前测试条件,当条件为真时执行循环体,当条件为假时终止循环,可能不执行循环体	执行循环体后测试语句条件,当条件为假时执行循环体,当条件为真时终止循环,最少执行一次循环体
联系	可以相互转换,LOOP UNTIL(条件)相当于 WHILE(反条件)	

三、算法案例

1. 辗转相除法

辗转相除法又叫欧几里得算法,是一种求最大公约数的古老而有效的算法,其步骤如下:

(1)用两数中较大的数除以较小的数,求商和余数;

(2)以除数和余数中较大的数除以较小的数;

(3)重复上述两步,直到余数为 0;

(4)则较小的数是两数的最大公约数.

2. 更相减损术

更相减损术是我国古代数学专著《九章算术》中介绍的一种求两数最大公约数的算法,其基本过程为:对于任意给定的两个正整数,以大数减小数,接着把所得的差与较小的数比较,并以大数减小数,继续该操作,直到所得的数相等为止,则这个数(等数)就是所求的最大公约数.

心得体会

3. 秦九韶算法

秦九韶算法是我国南宋数学家秦九韶在他的代表作《数书九章》中提出的一种用于计算一元 n 次多项式的值的方法.

4. 进位制

进位制是人们为了计数和运算方便而约定的记数系统,“满 k 进 1”就是 k 进制,k 进制的基数是 k.

题型归纳及思路提示

题型 155　已知流程框图,求输出结果

思路提示:分析条件结构,确定最后一步运算.

【例 11.1】 (2010·全国新课标理,7(文,8))如果执行如图 11-5 所示的框图,输入 $N=5$,则输出的数等于(　　).

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{6}{5}$　　D. $\frac{5}{6}$

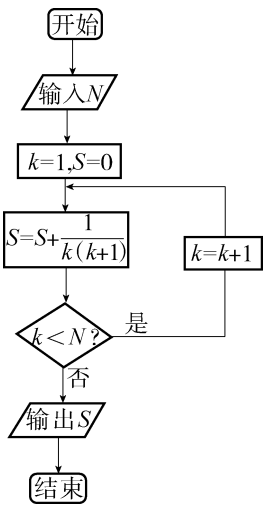


图　11-5

【分析】 解决这类算法问题时,一般有两种思路:一是把人看作计算机,程序执行哪一步,我们就计算哪一步,一直到程序终止,这类方法往往适用于步骤比较简单、循环次数不十分多的程序;

另一种思路是分析程序的原理,了解程序实质要完成的目标,将其还原为数学模型,从而对数学模型进行求解.

【解析】 解法一:$S=0$,$k=1$,$S=0+\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$,$1<5$,是→$k=2$,$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}=\frac{2}{3}$,$2<5$,是→$k=3$,$S=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\times4}=\frac{3}{4}$,$3<5$,是→$k=4$,$S=\frac{3}{4}+\frac{1}{4\times5}=\frac{4}{5}$,$4<5$,是→$k=5$,$S=\frac{4}{5}+\frac{1}{5\times6}=\frac{5}{6}$,$5<5$,否,程序结束.

解法二:本题实质上是求解 $\sum\limits_{k=1}^{5}\frac{1}{k(k+1)}$,故

$S=0+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{5\times6}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. 故选 D.

【变式 1】 (2010·沈阳监测理,2)执行如图 11-6 所示的程序框图,则输出的结果 S 是_____.

【变式 2】 (2010·天津河西区调查)如图 11-7 所示,该程序框图的输出结果是_____.

【变式 3】 (2007·山东理,10)阅读如图 11-8 所示的流程框图,若输入的 n 是 100,则输出的变量 S 和 T 的值分别是(　　).

A. 2500,2500　　B. 2550,2550　　C. 2500,2550　　D. 2550,2500

【变式 4】 (2011·课标全国理,3)执行如图 11-9 所示的程序框图,如果输入的 N 是 6,

心得体会

则输出的 p 是(　　).

A. 120　　B. 720　　C. 1440　　D. 5040

【变式 5】 (2011·浙江理,12)若某程序框图如图 11-10 所示,则该程序运行后输出的 k 的值是_____.

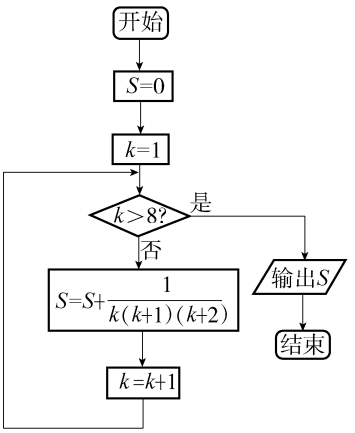


图 11-6

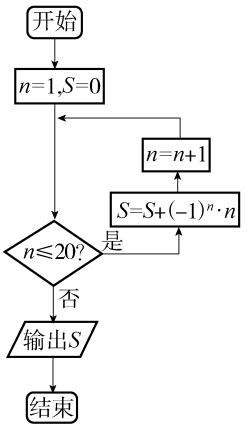


图 11-7

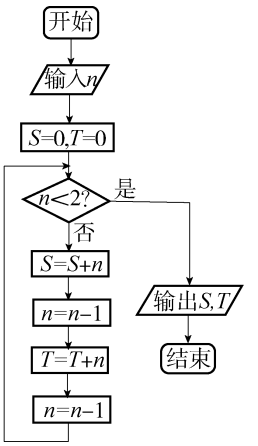


图 11-8

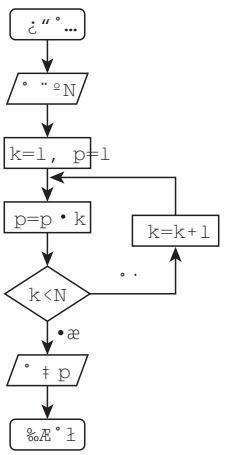


图 11-9

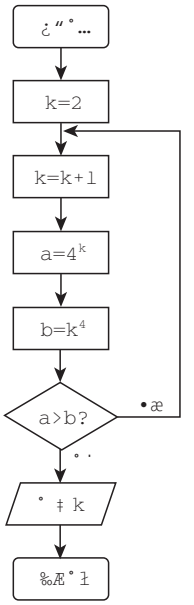


图 11-10

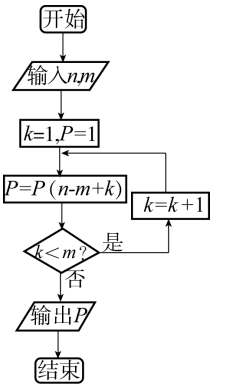


图 11-11

【例 11.2】 (2010·辽宁文,5)如果执行如图 11-11 所示的流程框图,输入 $n=6, m=4$,那么输出的 P 等于(　　)

A. 720　　B. 360　　C. 240　　D. 120

【解析】 $k=1, P=1\times(6-4+1)=3, 1<4\rightarrow k=2, P=3\times(6-4+2)=12, 2<4\rightarrow k=3, P=12\times(6-4+3)=60, 3<4\rightarrow k=4, P=60\times(6-4+4)=360, 4=4 \xrightarrow{\text{程序结束}}$输出 $P=360$. 故选 B.

【变式 1】 (2010·辽宁理,4)如果执行如图 11-11 所示的程序框图,输入正整数 n, m,

满足 $n \geqslant m$，那么输出的 P 等于(　　).

A. C_n^{m-1}　　B. A_n^{m-1}　　C. C_n^m　　D. A_n^m

【变式 2】 (2010·天津文,3)阅读图 11-12 所示的流程框图,则输出 S 的值为 (　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 3

【变式 3】 (2010·安徽文,13(理,14))如图 11-13 所示,流程框图(算法流程图)的输出值 $x=$_____.

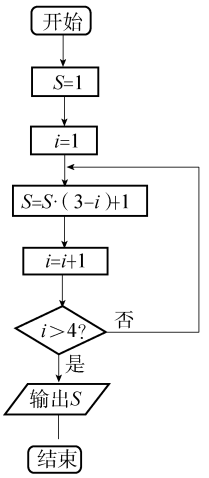


图　11-12

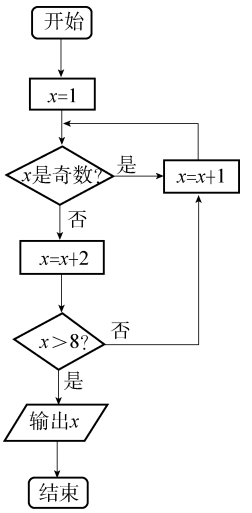


图 11-13

【变式 4】 (2011·辽宁理,6)执行如图 11-14 所示的程序框图,如果输入的 n 是 4,则输出的 p 是(　　).

A. 8　　B. 5　　C. 3　　D. 2

【变式 5】 (2011·安徽理,11)如图 11-15 所示,程序框图(算法流程图)的输出结果是_____.

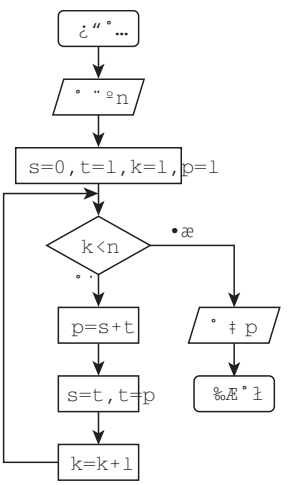


图　11-14

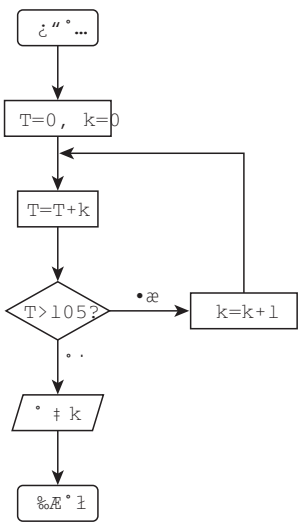


图　11-15

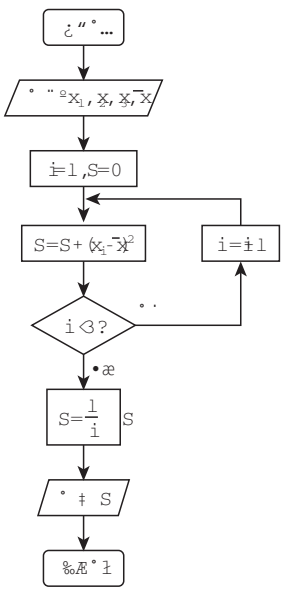


图　11-16

心得体会

【变式 6】 (2011·湖南理,13)若执行如图 11-16 所示的框图,输入 $x_1=1, x_2=2, x_3=3$, $\bar{x}=2$,则输出的数等于_____.

题型 156　根据条件,填充不完整的流程图

思路提示:程序框图缺失的不同,会导致不同的解决方法,如果缺少循环条件,那么程序主体是可以被理解的,因此转化为数学模型,然后根据初始值和输出值来计算循环了多少次从而得到循环条件;如果缺少循环主体中的一环,那么就要理解程序的目的是什么,然后补充起来.

【例 11.3】 (2010·北京文,9)已知函数 $y=\begin{cases}\log_2 x(x\geqslant 2)\\ 2-x(x<2)\end{cases}$,如图11-17所示,表示的是给定 x 的值,求其对应的函数值 y 的程序框图. ①处应填写_____;②处应填写_____.

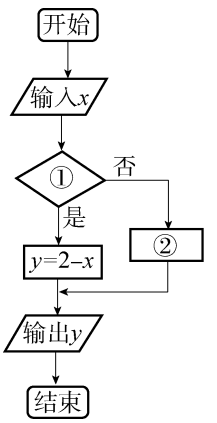


图　11-17

【解析】 依题意,①处应填写 $x<2$?; ②处应填写 $y=\log_2 x$.

【变式 1】 (2010·陕西文,5)如图 11-18 所示是求 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ 的乘积 S 的程序框图,图中空白框中应填入的内容为(　　).

A. $S=S*(n+1)$　　B. $S=S*x_{n+1}$

C. $S=S*n$　　D. $S=S*x_n$

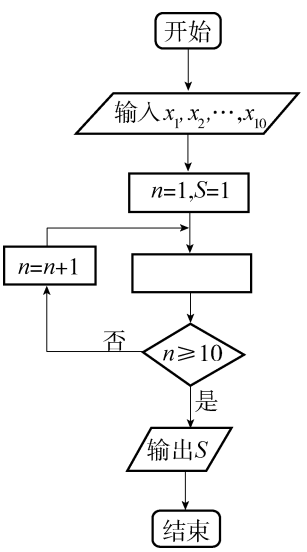


图　11-18

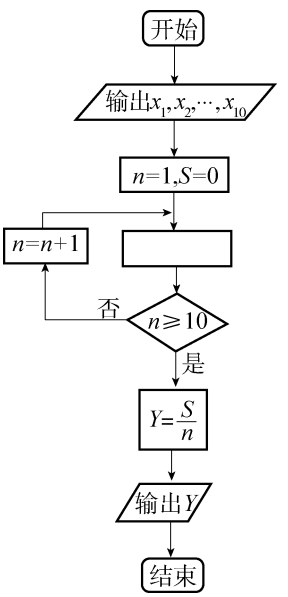


图　11-19

【变式 2】 (2010·陕西理,6)如图 11-19 所示是求样本 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ 平均数 $\bar{x}$ 的程序框图,图中空白框中应填入的内容为(　　).

A. $S=S+x_n$　　B. $S=S+\dfrac{x_n}{n}$　　C. $S=S+n$　　D. $S=S+\dfrac{1}{n}$

【例 11.4】 (2010·山东青岛质检,8)如图 11-20 所示的程序框图,输出的 S 是 126,则①应为_____.

A. $n\leqslant 5$?　　B. $n\leqslant 6$?　　C. $n\leqslant 7$?　　D. $n\leqslant 8$?

心得体会

【解析】 $S=0+2^1+2^2+\cdots+2^n=126\Rightarrow\frac{2(1-2^n)}{1-2}=126\Rightarrow n=6$，所以根据流程图模拟分析，填入选择框的条件为 $n\leqslant 6?$. 故选 B.

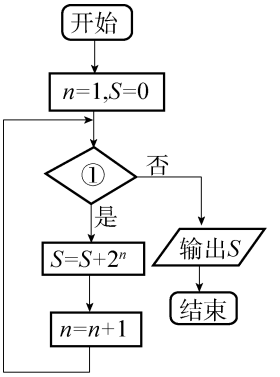


图　11-20

【变式 1】 (2010・浙江嘉兴测试，2)一个算法的程序框图如图 11-21所示，若该程序的输出结果为 $\frac{5}{6}$，则判断框中应填入的条件是(　　).

A. $i<5?$　　B. $i<6?$

C. $i\geqslant 5?$　　D. $i\geqslant 6?$

【变式 2】 (2010・广州测试一，4)阅读如图 11-22 所示的程序框图，若输出的 S 的值等于 16，那么在程序框图中的判断框内应填写的条件是(　　).

A. $i>5?$　　B. $i>6?$　　C. $i>7?$　　D. $i>8?$

【变式 3】 阅读如图 11-22 所示的程序框图，若在程序框图中的判断框内填写的条件是 $i>m?$，试问正整数 m 的最小值为何值时，输出的 S 的值超过 1000?

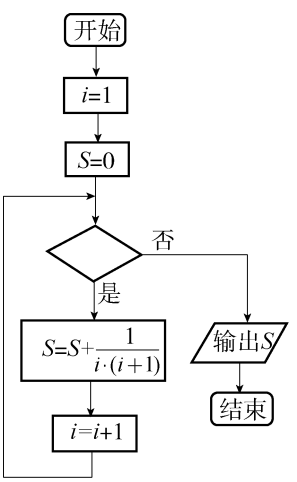


图　11-21

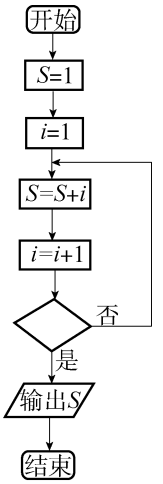


图　11-22

【例 11.5】 (2010・浙江理，2(文，4))某程序框图如图 11-23 所示，若输出 $S=57$，则判断框内为(　　).

A. $k>4?$　　B. $k>5?$　　C. $k>6?$　　D. $k>7?$

【解析】 如表 11-4 所示，根据模拟分析，判断框内的条件为 $k>4?$. 故选 A.

表　11-4

	$k(k=1)$	$S(S=1)$	条件
第 1 次	2	$2\times1+2=4$	否
第 2 次	3	$2\times4+3=11$	否
第 3 次	4	$2\times11+4=26$	否
第 4 次	5	$2\times26+5=57$	是

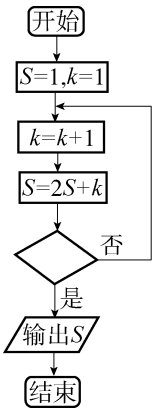


图　11-23

心得体会

【变式 1】 某程序框图如图 11-23 所示，若判断框内填入 $k>m$?，试问正整数 m 最小为何值时，程序输出的 S 值超过 1000?

【变式 2】 (2010·天津理，4)阅读如图 11-24 所示的程序框图，若输出 S 的值为 -7，则判断框内应填写(　　).

A. $i<3$?　　B. $i<4$?　　C. $i<5$?　　D. $i<6$?

【变式 3】 阅读如图 11-24 所示的程序框图，若判断框内的条件为 $i<m$?，当正整数 m 的最小值为何值时，输出 S 的值小于 -1000?

【变式 4】 设：$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\frac{1}{7}}}}}}=\frac{m}{n}$，如图 11-25 所示是计算分数 $\frac{m}{n}$ 中分子 m 和分母 n 的程序流程，试填入流程框图中所缺部分.

①_____；②_____.

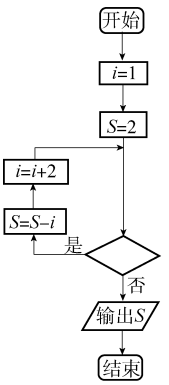


图　11-24

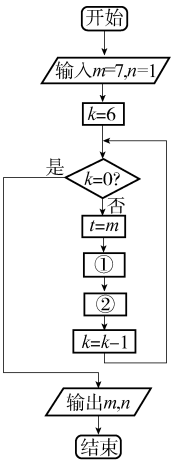


图　11-25

题型 157　求输入参量

【例 11.6】 (1)执行如图 11-26 所示的程序框图，若输出的 n 为 4，则输入 P 的取值范围为(　　).

A. $(0.75,0.875)$　　B. $(0.75,0.875]$

C. $[0.75,0.875)$　　D. $[0.75,0.875]$

(2)执行如图 11-26 所示的程序框图，若输出的 n 为 4，则输入 P 可能为(　　).

A. 0.7　　B. 0.75　　C. 0.8　　D. 0.9

(3)(2008·山东理，13(文，14))执行如图 11-26 所示的程序框图，若 $P=0.8$，则输出 $n=$_____.

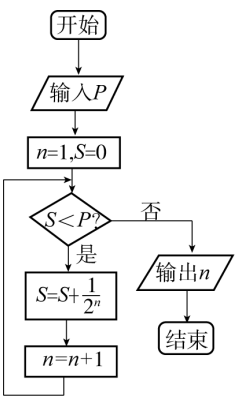


图　11-26

【解析】 (1)产生“$n=2$”的条件为“$P>0$”；产生“$n=3$”的条件为“$P>\frac{1}{2}$”；产生“$n=4$”的条件为“$P>\frac{3}{4}$”；产生“$n=5$”的条

心得体会

件为“$P>\frac{7}{8}$”. 输出“$n=4$”的条件为产生“$n=4$”的条件，而不产生“$n=5$”，即 $P>\frac{3}{4}$且 $P\leqslant\frac{7}{8}$. 故输入 P 的取值范围为 $(0.75,0.875]$. 故选 B.

(2)由(1)得，若输出 $n=4$，则 $P\in(0.75,0.875]$，故选 C.

(3)依题意 $P=0.8$，如表 11-5 所示，则输出 $n=4$.

表　11-5

	P	$S<P$?	$S(S=0)$	$n(n=1)$
第 1 次	0.8	是	$\frac{1}{2}$	2
第 2 次	0.8	是	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$	3
第 3 次	0.8	是	$\frac{3}{4}+\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}$	4
第 4 次	0.8	否		

【变式 1】 (2010・丰台一模理，13)在如图 11-27 所示的程序框图中，若输出 i 的值是 4，则输入 x 的取值范围是_____.

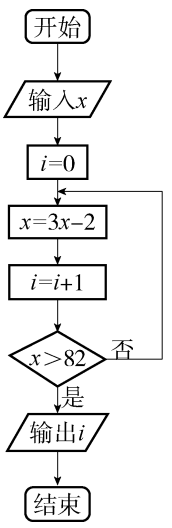


图　11-27

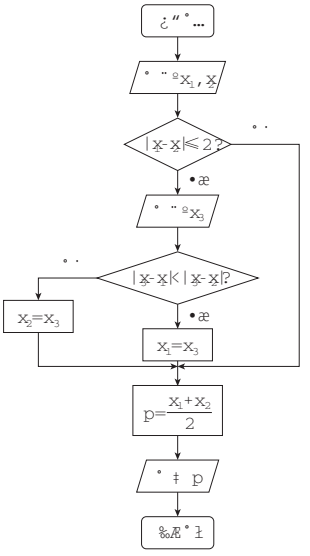


图　11-28

【变式 2】 (2011・陕西理，8)如图 11-28 所示，x_1，x_2，x_3 为某次考试三个评阅人对同一道题的独立评分，p 为该题的最终得分. 当 $x_1=6$，$x_2=9$，$p=8.5$ 时，x_3 等于(　　).

A. 11　　B. 10　　C. 8　　D. 7

题型 158　算法综合

思路提示：本题型是程序框图与其他知识的综合，它不仅要求学生能正确掌握程序框图，还要求学生对综合知识有较深的理解，是算法的难点. 与程序框图进行综合的主要有函数、数列、三角、概率、统计、实际问题等，是高考命题的亮点.

【例 11.7】 (2009・广东)随机抽取某产品 n 件，测得其长度分别为 a_1，a_2，…，a_n，则如

心得体会

图 11-29所示的程序框图输出的 $S=$_____，S 表示的样本的数字特征是_____.

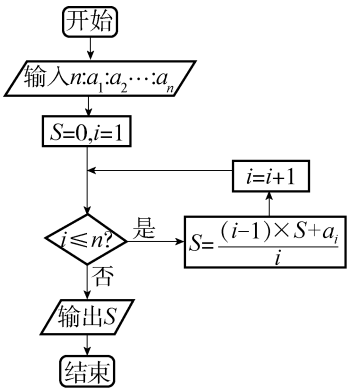


图 11-29

【解析】 本题是程序框图与统计的综合，根据框图可知输出的 $S=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$S$ 表示的样本的数字特征是平均值(或数学期望).

【变式 1】 (2010·广东文,13)某城市缺水问题比较突出，为了制定节水管理办法，对全市居民某年的月均用水量进行了抽样调查，其中 4 位居民的月均用水量分别为 x_1,x_2,x_3,x_4(单位：吨). 根据如图 11-30 所示的程序框图，若 x_1,x_2,x_3,x_4 分别为 1,1.5,1.5,2，则输出的结果 S 为_____.

【变式 2】 (2010·广东理,13)某城市缺水问题比较突出，为了制定节水管理办法，对全市居民某年的月均用水量进行了抽样调查，其中 n 位居民的月均用水量分别为 $x_1,\cdots,x_n$(单位：吨)，根据如图 11-31 所示的程序框图，若 $n=2$，且 x_1,x_2 分别为 1,2，则输出的结果 S 为_____.

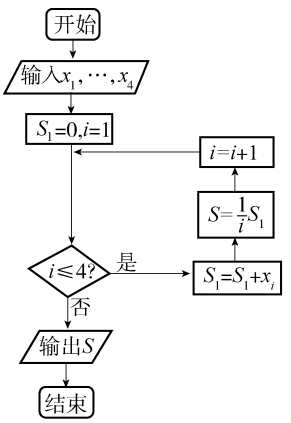


图 11-30

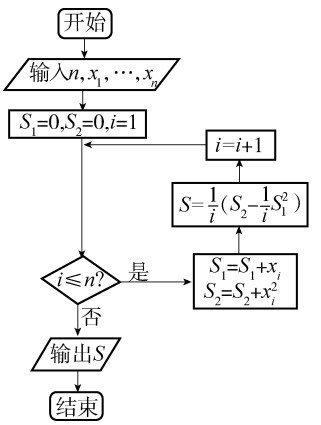


图 11-31

【例 11.8】 (2009·汕头一模)在可行域内任取一点，规则如图 11-32 所示(即程序框图)，则能输出数对 (x,y) 的概率为(　　).

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{8}$

【解析】 本题是几何概型与算法的综合，如图 11-33 所示，可行域 $\begin{cases}-\sqrt{2}\leqslant x+y\leqslant\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\leqslant x-y\leqslant\sqrt{2}\end{cases}$ 的面积为 4，即 $\mu(\Omega)=4$，圆 $x^2+y^2=1$ 的面积为 π，即 $\mu(A)=\pi$，故能输出数对 (x,y) 的概率为 $P(A)=\dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\dfrac{\pi}{4}$. 故选 C.

【变式 1】 定义函数 CONRND(a,b) 是区间 (a,b) 内的任何一个实数的随机数函数，如图 11-34所示的程序框图可用来估计 π 的值，现在输入 N 的值为 100，结果 m 的输出值为 21，因此可估计 π 的近似值为_____.

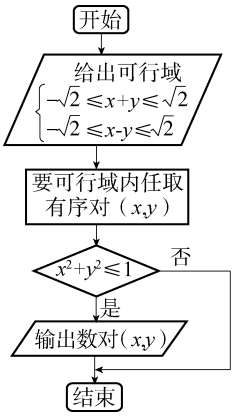


图　11-32

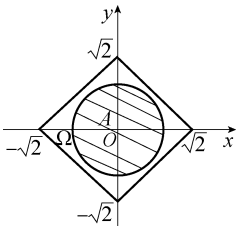


图　11-33

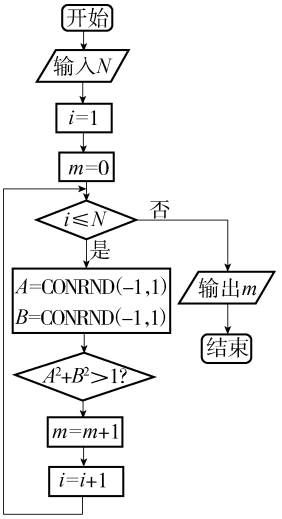


图　11-34

【例 11.9】 如图 11-35 所示是一个算法的流程图，则输出 S 的值是_____.

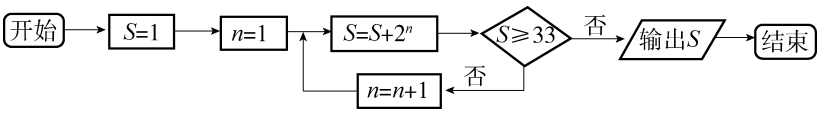


图　11-35

【解析】 $S=1+2^1+2^2+\cdots+2^n\geqslant33\Rightarrow\dfrac{1-2^{n+1}}{1-2}\geqslant33\Rightarrow n\geqslant\log_2 34-1$，又因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n\geqslant5$，则 $S=1+2^1+\cdots+2^5=\dfrac{1-2^6}{1-2}=63$.

【评注】 假设本题改为问输出 n 的值是多少，则答案为 5.

【变式 1】 (2011・江西理，13)如图 11-36 所示是某算法的程序框图，则程序运行后输出的结果是_____.

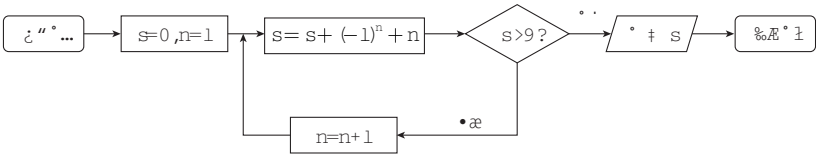


图　11-36

【变式 2】 阅读如图 11-37 所示的程序框图，若输入 $n=100$，则输出的 $a_i=$_____，$S_i=$_____.

【变式 3】 (2010・福建文，6(理，5))阅读如图 11-38 所示的程序框图，运行相应的程序，输出的 i 值等于(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【变式 4】 (2010・山东理，13)执行如图 11-39 所示的程序框图，若输入 $x=10$，则输出 y 的值为_____.

心得体会

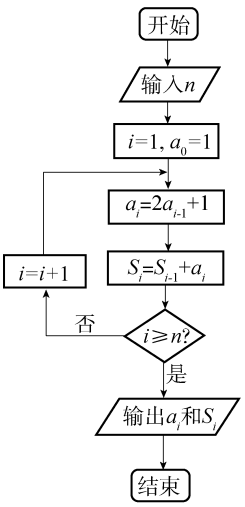


图 11-37

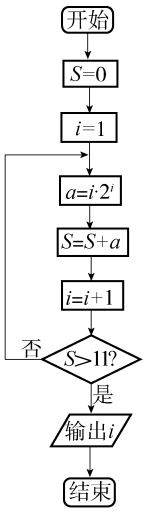


图 11-38

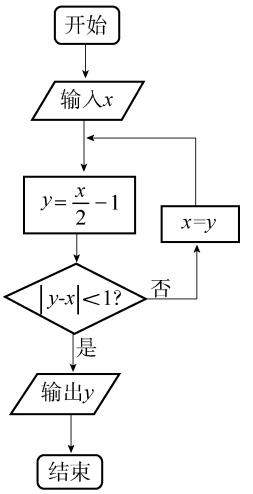


图 11-39

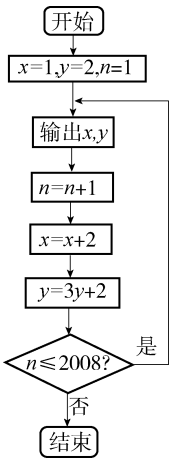


图 11-40

【例 11.10】 根据如图 11-40 所示的程序框图，将输出的 x,y 值依次记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots,x_{2008}$；$y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots,y_{2008}$.

(1)求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；

(2)写出 y_1,y_2,y_3,y_4，由此猜想出数列 $\{y_n\}$ 的一个通项公式 y_n，并证明你的结论；

(3)求 $z_n=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\ (n\in\mathbf{N}^*,n\leqslant 2008)$.

【解析】 (1)$x_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，有 $x_n=x_{n-1}+2$，所以 $x_n=x_1+2(n-1)=2n-1$，显然当 $n=1$ 时，$x_1=1$ 也满足通项公式.

综上，数列 $\{x_n\}$ 的通项公式为 $x_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $1\leqslant n\leqslant 2008)$.

(2)如表 11-6 所示，根据模拟分析，得 $y_1=2,y_2=8,y_3=26,y_4=80$，猜想 $y_n=3^n-1(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $1\leqslant n\leqslant 2008)$.

证明：当 $k=1$ 时，$y_1=3^1-1=2$，显然满足通项公式；

表 11-6

	x	y	n	$n\leqslant 2008$
第 1 次	1	2	1	是
第 2 次	3	8	2	是
第 3 次	5	26	3	是
第 4 次	7	80	4	是

当 $n=k$ 时$(k\geqslant 2)$，假设 $y_k=3^k-1$ 恒成立，当 $n=k+1$ 时，$y_{n+1}=3y_k+2=3(3^k-1)+2=3^{k+1}-1$，所以 $n=k+1$ 时，命题也成立.

综上，当 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $1\leqslant n\leqslant 2008$ 时，$y_n=3^n-1$.

(3)$x_ny_n=(2n-1)(3^n-1)=(2n-1)\cdot 3^n-(2n-1)$，因为 $z_n=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\ (n\in\mathbf{N}^*,n\leqslant 2008)$，所以 $z_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)(3^i-1)=\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)\cdot 3^i-\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)=\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)\cdot 3^i-n^2$.

心得体会

设 $T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)\cdot 3^i=1\times 3^1+3\times 3^2+\cdots+(2n-1)\times 3^n$　①

$3T_n=1\times 3^2+3\times 3^3+\cdots+(2n-1)\times 3^{n+1}$　②

由①－②得：$-2T_n=1\times 3^1+2\times 3^2+\cdots+2\times 3^n-(2n-1)\times 3^{n+1}$

$=3+2\cdot\dfrac{9(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\times 3^{n+1}=-2(n-1)\times 3^{n+1}-6$，

得 $T_n=(n-1)\times 3^{n+1}+3$.

所以 $z_n=(n-1)\times 3^{n+1}+3-n^2\ (n\in\mathbf{N}^*,n\leqslant 2008)$.

【变式 1】 (2010·安徽皖北协作区联考)已知数列$\{a_n\}$满足如图 11-41所示的流程图.

(1)写出数列$\{a_n\}$的一个递推关系式；

(2)证明：数列$\{a_{n+1}-3a_n\}$是等比数列，并求出$\{a_n\}$的通项公式；

(3)求数列$\{n(a_n+3^{n-1})\}$的前 n 项和 T_n.

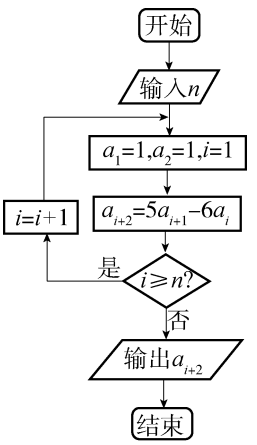


图　11-41

【变式 2】 如图 11-42 所示是一个计算机装置示意图，J_1，J_2 是数据入口，C 是计算机结果的出口，计算过程是由 J_1，J_2 分别输入自然数 m 和 n，经过计算后得自然数由 C 输出，此种计算机装置完成的计算满足以下 3 个性质：

①若 J_1，J_2 分别输入 1，则输出结果为 1；

②若 J_1 输入任何固定自然数不变，J_2 输入自然数增大 1，则输出结果比原来大 2；

③若 J_2 输入 1，J_1 输入自然数增大 1，则输出结果为原来的 2 倍.

试问：

(1)若 J_1 输入 1，J_2 输入自然数 n，输出结果为多少？

(2)若 J_2 输入 1，J_1 输入自然数 m，输出结果为多少？

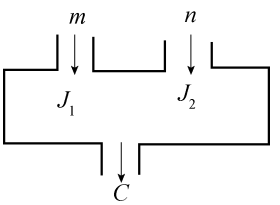


图　11-42

【变式 3】 在平面直角坐标系中，重复执行如下算法，可得到图 11-43中的雪花状图形.

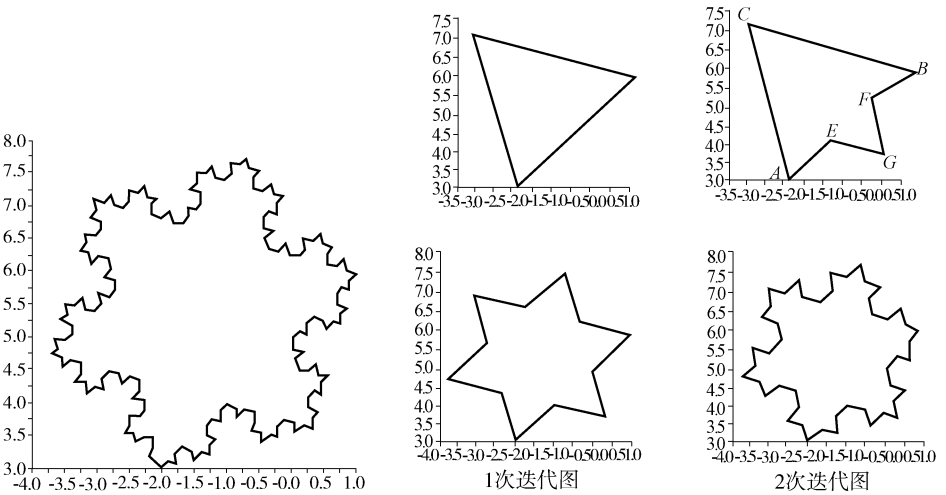


图　11-43

心得体会

算法：

S1. 给定两个不同坐标的点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，计算以 AB 为一边的正 $\triangle ABC$ 的顶点 C（各顶点按逆时针顺序排列）的坐标为：

$$C\left(\frac{x_1+x_2+\sqrt{3}(y_1-y_2)}{2},\frac{-\sqrt{3}(x_1-x_2)+y_1+y_2}{2}\right).$$

S2. 依次计算线段 AB 上的两个三等分点坐标

$$E\left(\frac{2x_1+x_2}{3},\frac{2y_1+y_2}{3}\right),F\left(\frac{x_1+2x_2}{3},\frac{y_1+2y_2}{3}\right),$$

再计算正 $\triangle EGF$ 的第 3 个顶点 G 的坐标（各顶点按逆时针顺序排列）. 依次连结线段 AE、EG、GF、FB（并擦除线段 EF）. 其中，A，E，G，F，B 均称为图形顶点.

S3. 对线段 BC 和 CA 重复步骤 S1、S2 的操作，得到的图形称为雪花 1 次迭代图.

S4. 对雪花 1 次迭代图中所有相邻顶点形成的线段依次（按逆时针顺序排列）执行步骤 S2 的操作，所得到的图形称为雪花 2 次迭代图，同法依次操作得到雪花 n 次迭代图（$n\in\mathbf{N}^*$）.

完成下列相关问题：

(1)步骤 S1、S2 中，若已知两个点的坐标为 $A(-2,3)$，$B(1,6)$，求点 C 和点 G 的坐标；

(2)设雪花 n 次迭代图中顶点 A 与 B 之间（含 A 和 B）的顶点个数为 a_n（$n\in\mathbf{N}^*$），求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3)执行上述算法可以得到雪花图形，那么请阅读下面程序框图，若 $A(-2,3)$，$B(1,6)$，画出主程序执行后所得图形简图，并计算此图形面积.

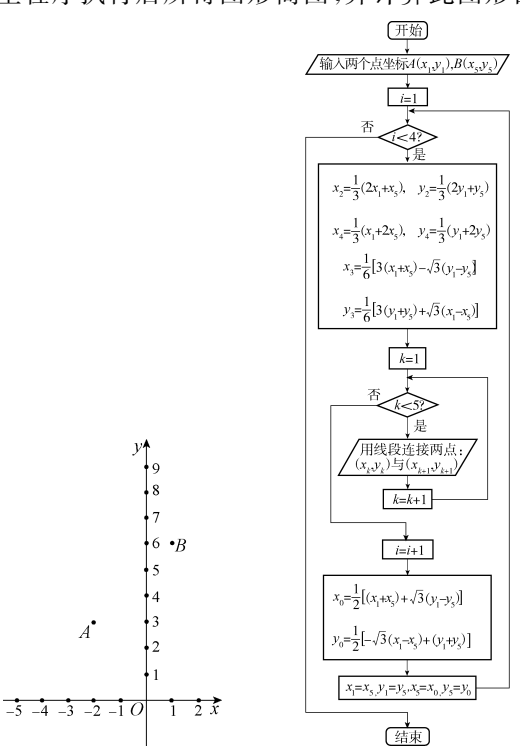


图　11-44

第十二章　计数原理

第一节　计数原理与简单排列组合问题

考纲解读

1. 理解分类加法计数原理和分步乘法计数原理.
2. 会用分类加法计数原理或分步乘法计数原理分析和解决一些简单的实际问题.
3. 理解排列、组合的概念.
4. 能用计数原理推导排列数,组合数公式.

命题趋势探究

1. 本节为高考必考内容,一般有1～2道选择题或填空题.
2. 题目主要以实际应用题形式出现.
3. 试题的解法具有多样性,一般根据计数重复或遗漏来设计错误选项,可通过正向(分类相加)和反向(总数减去对立数)互相检验,也可通过排除法筛选正确选项.

知识点精讲

一、基本概念

1. 分类加法计数原理

完成一件事{①有 n 类方法 ②任两类无公共方法(互斥) ③每类中每法可单独完成这件事}

共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同方法.如图12-1所示.

心得体会

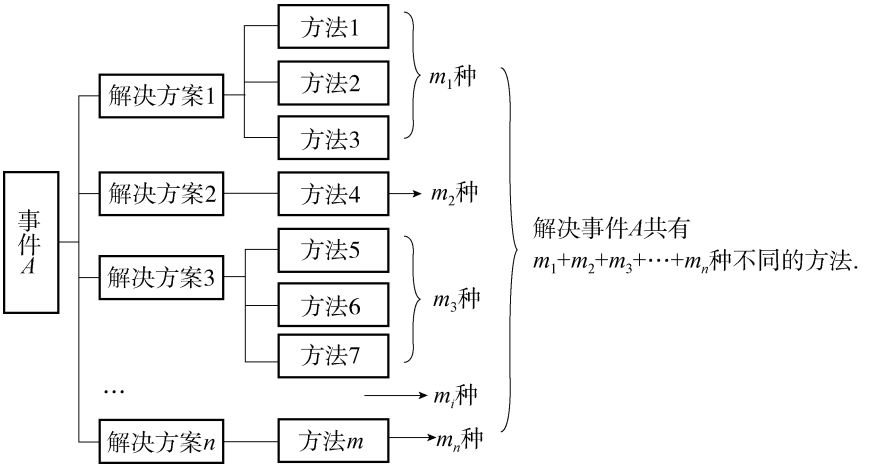


图 12-1

2. 分步乘法计数原理

完成一件事$\begin{cases}①\text{必须走完 } n \text{ 步,才能完成任务}\\②\text{前一步怎么走对后一步怎么走无影响(独立)}\end{cases}$

共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同方法. 如图 12-2 所示.

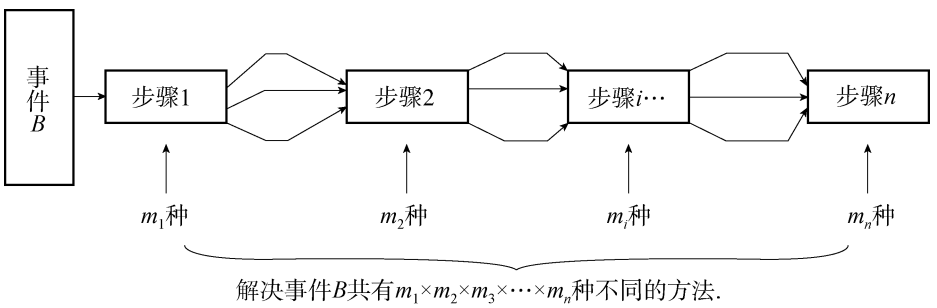


图 12-2

注 两个原理及其区别.

分类计数原理和“分类”有关,如果完成某件事情有 n 类办法,这 n 类办法之间是互斥的,那么求完成这件事情的方法总数时,就用分类加法计数原理.

分步计数原理和“分步”有关,是针对“分步完成”的问题. 如果完成某件事情有 n 个步骤,而这几个步骤缺一不可,且互不影响(独立)当且仅当依次完成这 n 个步骤后,这件事情才算完成,那么求完成这件事情的方法总数时,就用分步乘法计数原理.

当然,在解决实际问题时,并不一定是单一的应用分类计数原理或分步计数原理,有时可能同时用到两个计数原理. 即分类时,每类的方法可能运用分步完成,而分步后,每步的方法数可能会采取分类的思想求方法数,对于同一事件,我们可以做不同的处理,从而得到不同的解法(但方法数相同),这也是检验排列组合问题的很好方法.

3. 排列与排列数

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个(不同)元素,按照一定的顺序排成一列,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列,共有 A_n^m 种方法.

心得体会

$A_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$($m$ 个连续正整数之积，n 为最大数)，

$A_n^n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$．　$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

规定 $0!=1$，为的是使 $A_n^n=\dfrac{n!}{(n-n)!}=n!$ 成立.

注 排列数公式的两种不同表达形式本质一样，但作用常有不同，$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$常用于具体数字计算；而在进行字母化简或证明时则多用 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

4. 组合与组合数

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$个(不同)元素，并成一组，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合，共有 C_n^m 种方法.

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

注 同样，公式 $C_n^m=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$ 常用于具体数字计算，$C_n^m=\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$常用于化简或证明.

注 (1)可重排列与无重排列的区别

例如：用 1,2,3,4,5 可排成多少个$\begin{cases}\text{可有重复数字的四位数}——5\times5\times5\times5=5^4\\ \text{无重复数字的四位数}——5\times4\times3\times2=A_5^4\end{cases}$.

区别：

不可重复排列：用过的数字不可再用，用一个少一个.

可重复排列：用过的数字还可再用，每次可用数字不减少.

再例如：4 封不同的信，全部投入到 5 个信箱.

①任意投——投过的信箱可再投入——$5\times5\times5\times5=5^4$.

②每箱至多一信——投过的信箱不可再投入——$5\times4\times3\times2=A_5^4$.

(2)排列和组合的区别

组合：取出的元素地位平等，没有不同去向和分工.

排列：取出的元素地位不同，去向、分工或职位不同.

注 排列、组合都是研究事物在某种给定的模式下所有可能的配置的数目问题，它们之间的主要区别在于是否要考虑选出元素的先后顺序，不需要考虑顺序的是组合问题，需要考虑顺序的是排列问题. 排列是在组合的基础上对入选的元素进行排队，因此，分析解决排列组合综合问题的基本思维是“先组合，后排列”. 例如：从 10 个人中抽出 4 人参加某项活动有 C_{10}^4 种方案；从 10 个人中抽出 4 人分别参加 4 项活动有 A_{10}^4 种方案.

(3)一切排列数、组合数、阶乘及它们展开式的因数都是正整数.

常见的有 $0!=1!=1$，$2!=2$，$3!=6$，$4!=24$，$5!=120$，$6!=720$，

$C_n^0=C_n^n=1$，$C_n^1=C_n^{n-1}=n$，$C_n^2=C_n^{n-2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$，$A_n^1=n$，$A_n^2=n(n-1)$等.

(4)公式(性质).

①$n!=n(n-1)!=n(n-1)\cdot(n-2)!$.

心得体会

②$C_n^m=C_n^{n-m}$，如 $C_{100}^{98}=C_{100}^2=\frac{100\times99}{2}$.

③$C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$，如 $C_9^3+C_9^4=C_{10}^4$（口诀：相邻组合数相加，加一元（$n\to n+1$）取大（$m+1>m$，取 $m+1$））.

④$C_m^m+C_{m+1}^m+C_{m+2}^m+\cdots+C_n^m=C_{n+1}^{m+1}$.

题型归纳及思路提示

题型 159　分类计数原理与分步计数原理

【例 12.1】 有一项活动，需在 3 名老师、8 名男生和 5 名女生中选人参加.

（1）若只需 1 人参加，有多少种不同选法？

（2）若需老师、男生、女生各 1 人参加，有多少种不同选法？

（3）若需 1 名老师和 1 名学生参加，有多少种不同选法？

【解析】 （1）有 3 类选人的办法：3 名老师中选 1 人，有 3 种方法；8 名男生中选 1 人，有 8 种方法；5 名女生中选 1 人，有 5 种方法；由分类计数原理，共有 3＋8 ＋5 ＝16（种）选法.

（2）分 3 步选人：第 1 步选老师，有 3 种方法；第 2 步选男生，有 8 种方法；第 3 步选女生，有 5 种方法. 由分步计数原理，共有 3×8×5 ＝120（种）选法.

（3）可分两类，每一类又分两步. 第 1 类：选 1 名老师和 1 名男生，因有两步，故有 3×8 ＝ 24（种）选法；第 2 类，选 1 名老师和 1 名女生，有两步，故有 3×5 ＝ 15 种选法. 再由分类计数原理，共有 24 ＋ 15 ＝ 39（种）选法.

【评注】 在解决实际问题时，并不一定是单一地应用分类计数原理或分步计数原理，有时可能同时用到两个计数原理. 即分类时，每类的方法可能运用分步完成，而分步后，每步的方法数可能会采取分类的思想求取.

【例 12.2】 （1）若 5 名学生争夺 3 项体育比赛的冠军（每名学生参赛项目不限），则冠军获得者有_____种不同情况（每个项目没有并列冠军）.

（2）5 名学生从 3 项体育项目中选择参赛，若每一名学生只能参加一项，则有_____种不同的参赛方法.

【分析】 正确理解问题完成的标志，（1）即把 3 个冠军名额全部分给 5 个学生（可以一名学生夺取多个冠军）；（2）即为 5 名学生都报完比赛项目（可以多名学生报一个项目）.

【解析】 （1）第 1 个名额的去向有 5 种，第 2 个名额和第 3 个名额同样各有 5 个可能去向，故冠军获得者共有 $5\times5\times5=5^3$（种）不同的情况.

（2）第一位学生报项目的方法有 3 种，同样，其他每一位学生都有 3 种报取项目的选择方法，根据分步计数原理，故应有 $3\times3\times3\times3\times3=3^5$（种）不同的参赛方法.

【变式 1】 将 3 封信投到 4 个邮箱，最多的投法有_____种.

【变式 2】 由数字 1，2，3，4，5 可以组成_____个三位数（各位上的数字允许重复）.

【例 12.3】 同室 4 人各写一张贺卡，先集中起来，然后每人从中拿一张别人送出的贺卡，

心得体会

则 4 张贺卡的不同的分配方式有(　　).

A. 6 种　　B. 9 种　　C. 11 种　　D. 23 种

【分析】 将同室 4 人分别记为 a,b,c,d,然后利用 4 个取卡的情况分步来确定.

【解析】 解法一:第 1 步:4 个人中的任意一人(例如 a)取一张,则由题意知共有 3 种取法;第 2 步:由第一人取走的贺卡的供卡人取,也有 3 种取法;第 3 步:由剩余的两人中的任一人取,只有 1 种取法;第 4 步:最后一人取,只有 1 种取法,由分步计数原理,共有 $3\times3\times1\times1=9$(种).

解法二:设 4 张贺卡分别记为 A,B,C,D. 由题意,某人(不妨设 A 卡的供卡人)取卡的情况有 3 种,据此将卡的不同分配方式分为 3 类,对于每一类,其他人依次取卡分步进行,为了避免重复或遗漏现象,我们用"树图"表示如下:设 a,b,c,d 代表 4 个人,A,B,C,D 分别代表这 4 个人写的贺卡,则有如图 12-3 所示的树状图. 故选 B.

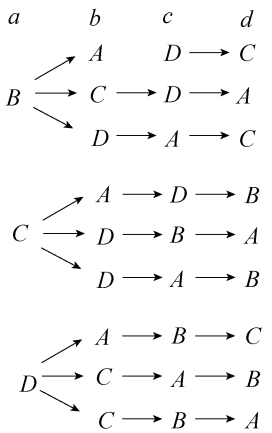


图　12-3

所以共有 9 种不同的分配方式. 故选 B.

【评注】 本例提供的第一种解法用了分步计数原理,关键是要弄清楚分步时每步的顺序,例如 a 先取走 C 卡,则下一步应由 c 取,否则任由 b,c,d 中一人取,就很难断定是有 3 种还是有 2 种取法了.

第二种解法可以看作两个原理的交替应用,用树图表示一目了然,便于分析计数,避免了重复或遗漏. 在以后的学习中,用树图来直观地分析问题是常用的,请同学们重视.

【变式 1】 3 个人踢毽子,互相传递,每人每次只能踢一下,由甲开始踢,经过 5 次传递后,毽子又被踢回给甲,则不同的传递方式共有(　　).

A. 6 种　　B. 8 种　　C. 10 种　　D. 16 种

【例 12.4】 某外语组有 10 人,每人至少会英语、法语中的一门,其中 7 人会英语,5 人会法语. 从中选会英语和法语的各一人派往两地参加会议,有多少种不同的方法?

【分析】 对于较为复杂的分类与分步问题,应做到不重不漏,本题应抓住公共元素的处理方法.

【解析】 由集合知识,既会英语又会法语的有 $7+5-10=2$(人),仅会英语的有 $7-2=$

心得体会

5(人),仅会法语的有 5－2 ＝3(人).易知此题的任务就是派遣适合条件的两人.

解法一:按仅会英语的 5 人的派遣情况分成两类:

第 1 类:仅会英语的 5 人中有 1 人选中,则有 5 种方法,而会法语的则有 5 种方法,从而由分步计数原理,有 5×5 种方法.

第 2 类:仅会英语的 5 人中没有人被选中,则会英语的必须从既会英语又会法语的 2 人中选,从而有 2 种选法,而会法语的只能从两种语言均会的剩余 1 人或仅会法语的 3 人中选,共有 1＋3 ＝ 4(种),由分步计数原理得,此时共有 2×4 种方法.

由分类计数原理,共有 5×5＋2×4＝33(种)方法.

解法二:按仅会法语的 3 人的选派情况分成以下两类:

第 1 类:仅会法语的 3 人恰被选中 1 人,则由分步计数原理,共有 3×7 种方法.

第 2 类:仅会法语的 3 人均未被选中,则由分步计数原理得,共有 2×6 种方法.

从而由分类计数原理,共有 3×7＋2×6＝33(种)方法.

解法三:按既会英语又会法语的 2 人的选派情况分成 3 类:

第 1 类:2 人均未被选派,则有 3×5 种方法.

第 2 类:2 人均被选派,则有 2 种方法.

第 3 类:2 人中恰有 1 人被选派,则又分为两类.

若另一人只会英语,则有 2×5 种方法,

若另一人只会法语,则有 2×3 种方法,

由分类计数原理得,共有 3×5＋2＋2×5＋2×3＝33(种)方法.

【评注】 在应用分类和分步计数原理解决较复杂的问题时应注意:

(1)认真审题,分析题目的条件、结论,特别要理解题目中所讲的“事情”,即任务是什么,完成这件事情的含义和标准是什么.

(2)明确完成这件事情是分类还是分步,还是既要分类又要分步,并搞清分类或分步的具体标准是什么.

(3)注意两个原理的实质:分类用分类计数原理(即加法),分步用分步计数原理(即乘法).

题型 160　排列数与组合数的推导、化简和计算

思路提示:能用性质用性质;推导、证明和化简约分用阶乘,计算用乘积展开式.

【例 12.5】 (1)证明:$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}(n,m\in\mathbf{N}^*,m\leqslant n)$.

(2)已知 $m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $m\leqslant n$.证明:①$C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n!}{m!\ (n-m)!}$;

②$C_n^m=C_n^{n-m}$;

③$C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$;

④$C_m^m+C_{m+1}^m+\cdots+C_{m+n}^m=C_{m+n+1}^{m+1}$.

【解析】 (1)A_n^m 为从 n 个($n\in\mathbf{N}^*$)不同元素中取出 m($m\leqslant n,m\in\mathbf{N}^*$)个(不同)元素按照一定顺序排成一列的不同排列的个数(即排列数).

心得体会

如表 12-1 所示，需要 m 步完成排列任务.

表　12-1

位置 1	位置 2	……	位置 m
n 种方法	$n-1$ 种方法	……	$n-m+1$ 种方法

第 1 步(为位置 1 选择一个元素)有 n 种选法，

第 2 步(为位置 2 选择一个元素)有 $n-1$ 种选法，

……

第 m 步(为位置 m 选择一个元素)有 $n-m+1$ 种选法，

依分步计数原理，得 $A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$

$=n(n-1)\cdots(n-m+1)\dfrac{(n-m)\cdots(3\cdot2\cdot1)}{(n-m)\cdots(3\cdot2\cdot1)}=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

(2)①C_n^m 为从 n 个不同元素中任取 m 个(不同)元素并成一组的不同组合的个数(即组合数). 当 $m>0$ 时，从 n 个不同元素中取 m 个(不同)元素按照一定的顺序排成一列，可以分成两步完成，第 1 步从 n 个不同元素中任取 m 个元素并成一组，第 2 步把取出的 m 个元素按照一定的顺序排成一列，依分步乘法原理得 $A_n^m=C_n^m\cdot A_m^m$，即 $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}$，又 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，$A_m^m=m!$，

故 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!\ (n-m)!}$. 当 $m=0$，$C_n^0=1$，$\dfrac{n!}{0!\cdot n!}=1$，$C_n^0=\dfrac{n!}{0!\cdot n!}$也成立.

②$C_n^{n-m}=\dfrac{n!}{(n-m)!\ [n-(n-m)]!}=\dfrac{n!}{m!\ (n-m)!}$，故 $C_n^m=C_n^{n-m}$.

③$C_n^m+C_n^{m+1}=\dfrac{n!}{m!\ (n-m)!}+\dfrac{n!}{(m+1)!\ (n-m-1)!}=\dfrac{(m+1)n!}{(m+1)!\ (n-m)!}$

$+\dfrac{(n-m)n!}{(m+1)!\ (n-m)!}=\dfrac{(n+1)!}{(m+1)!\ (n-m)!}=C_{n+1}^{m+1}$.

④$C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}\Rightarrow C_n^m=C_{n+1}^{m+1}-C_n^{m+1}(*)$，

在式(*)中，令 $n=m+1$，则 $C_{m+1}^m=C_{m+2}^{m+1}-C_{m+1}^{m+1}(1)$，

同理令 $n=m+2$，$C_{m+2}^m=C_{m+3}^{m+1}-C_{m+2}^{m+1}(2)$，…，$C_{m+n}^m=C_{m+n+1}^{m+1}-C_{m+n}^{m+1}(n)$，

又 $C_m^m=C_{m+1}^{m+1}(n+1)$，$(1)+(2)+\cdots+(n)+(n+1)\Rightarrow$

$C_m^m+C_{m+1}^m+\cdots+C_{m+n}^m=C_{m+n+1}^{m+1}$.

【评注】 ④的求和应用：$C_2^2+C_3^2+\cdots+C_{100}^2=C_{101}^3$，$C_{10}^3+C_{11}^3+\cdots+C_{20}^3=C_3^3+C_4^3+\cdots+C_{20}^3-(C_3^3+C_4^3+\cdots+C_9^3)=C_{21}^4-C_{10}^4$.

【变式 1】 (2008·上海理，12)组合数 $C_n^r(n>r\geqslant1,n,r\in\mathbf{Z})$恒等于(　　).

A. $\dfrac{r+1}{n+1}C_{n-1}^{r-1}$　　B. $(n+1)(r+1)C_{n-1}^{r-1}$

C. nrC_{n-1}^{r-1}　　D. $\dfrac{n}{r}C_{n-1}^{r-1}$

【例 12.6】 (1)乘积 $m(m+1)(m+2)\cdots(m+20)$可表示为(　　).

A. A_m^{20}　　B. A_m^{21}　　C. A_{m+20}^{20}　　D. A_{m+20}^{21}

(2)式子$\dfrac{m(m+1)(m+2)\cdots(m+20)}{20!}$可表示为(　　).

心得体会

A. A_{m+20}^{20}　　B. C_{m+20}^{20}　　C. $21C_{m+20}^{20}$　　D. $21C_{m+20}^{21}$

【解析】 (1)原式$=(m+20)(m+19)\cdots[(m+20)-21+1]=A_{m+20}^{21}$，也可以观察，一共有 21 个连续的正整数的积，可直接表示为 A_{m+20}^{21}. 故选 D.

(2)原式$=\dfrac{A_{m+20}^{21}}{20!}=21\dfrac{A_{m+20}^{21}}{21!}=21C_{m+20}^{21}$. 故选 D.

【评注】 公式 $A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$ 的构成特点是：公式右边第一个因数是 n，其后每个因数都比它前面一个因数少 1，最后一个因数是 $n-m+1$，共有 m 个因数相乘，组合数 C_n^m 公式也有相似特点.

使用时要注意三个问题：第一个因数是什么、最后一个因数是什么、一共有多少个连续相乘的正整数，防止我们在“n”，“m”比较复杂时用错公式.

应用公式时，要注意正用、逆用和活用等.

题型 161　基本计数原理和简单排列组合问题的结合

思路提示：要注意可重排列与不可重排列的区别；加法(分类相加)与减法(扩大后范围减去扩进来的范围)；不重与不漏.

【例 12.7】 如图 12-4 所示，电路中共有 13 个开关(电阻略)，每个开关可任选“开”或“关”一种状态，且互相独立.

(1)灯亮，有多少种整体状况；

(2)灯灭，有多少种整体状况.

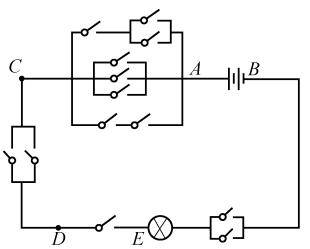


图　12-4

【分析】 每个开关有“开”或“关”两种状况，逐个确定这 13 个开关的“开”、“关”状态共有 $2^{13}=8192$(个)整体状态，只要求出(1)与(2)中一值，用减法即可求出另一值.

【解析】 (1)灯亮，第 1 步 A 通到 C，第 2 步 C 通到 D，第 3 步 D 通到 E，第 4 步 E 通到 B，算出每步方法数，再相乘得整体通(即灯亮)方法数.

第 1 步：先算 A 到 C 不通方法数，即上、中、下 3 路都不通，

上路不通$=2^3-$上路通$=2^3-(2^2-1)=5$，

中路不通$=1$，

下路不通$=2^2-1=3$.

故 A 到 C 不通数为 $5\times1\times3=15$.

A 到 C 通$=2^7-15=113$，

C 到 D 通$=2^2-1=3$，

D 到 E 通$=1$，

E 到 B 通$=2^2-1=3$.

故灯亮即 4 步都通，整体状况有 $113\times3\times1\times3=1017$(种).

(2)灯不亮有 $2^{13}-1017=8192-1017=7175$(种).

【评注】 串联求通：把各段通数相乘，得总通数，串联求不通：先求通，再用减法，得串联不通数，并联求通：先求不通数，再用减法，得并联通数，并联不通：把各支路不通数相乘.

【变式 1】 n 个元素的集合有多少个非空真子集，多少个三元子集？

心得体会

【变式 2】 如图 12-5 所示，马从点 A 按“马走日”到 B，至少走_____步，如此步数有_____种不同的走法.

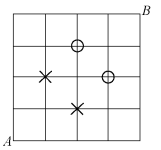


图　12-5

【变式 3】 直线方程 $Ax+By=0$，从 1，2，3，4，5 这 5 个数中每次取两个不同的数作 A 和 B，共可确定(　　)条直线.

A. 20　　B. 19　　C. 18　　D. 16

【变式 4】 (2008・广东理，12)一个 n 棱锥的所有顶点共可确定_____条直线，这些直线可确定_____对异面直线.

【变式 5】 (2008・安徽安庆)如图 12-6 所示为 2008 北京奥运会会徽主体“中国印”，它由 4 个互不连通的色块(即红块)构成，用 3 条线段将 4 色块两两连接(如同架桥)共有(　　)种连接方法.

图　12-6

A. 16　　B. 12　　C. 8　　D. 20

【例 12.8】 如图 12-7 所示，有 4 种不同颜色供选，要求 A，B，C，D，E 每块一种颜色，相邻两块不同色，共有多少种染色方法？

【解析】 记 4 种颜色为 1，2，3，4，可从任一块染起. 如先染 A 有 4 种方法，B 与 A 相邻，A，B 不同色，B 有 3 种方法，E 与 A，B 都相邻，E 有 2 种方法. 不妨设此时如图 12-8 所示.

$\begin{cases} C\text{“4”}-D\text{“3”} \\ C\text{“1”}-D\text{“4”“3”} \end{cases}$ ⇒“C，D”有 3 种方法. 据分步计数原理，

故共有 $4\times3\times2\times3=72$(种)染色方法.

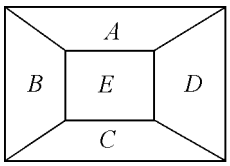


图　12-7

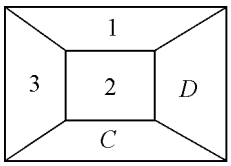


图　12-8

【变式 1】 3 种颜色染图 12-9，要求每块染一种颜色且相邻不同色.

(1)共有多少种方法？(2)每种颜色染两块有多少种方法？

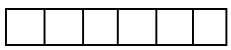


图　12-9

【变式 2】 (2010・天津理，10)如图 12-10 所示，用 4 种不同颜色给图中 A，B，C，D，E，F 共 6 个点染色，要求每个点染 1 种颜色，且图中每条线段的两个端点不同色，则不同的染色方法共有(　　)种.

A. 288　　B. 264　　C. 240　　D. 168

【变式 3】 (2008・全国理，12)如图 12-11 所示，一个环形花坛，分为 A，B，C，D4 块，现有 4 种不同的花供选择，要求在每块里种一种花，且相邻两块种不同的花，则不同的种法共有(　　)种.

A. 96　　B. 84　　C. 60　　D. 48

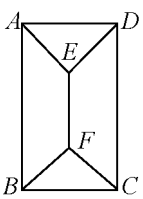


图　12-10

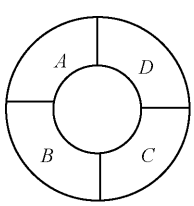


图　12-11

心得体会

【变式 4】(2008·重庆理,16)某人有 4 种颜色的灯泡(每种颜色的灯泡足够多),要在图 12-12 中的 6 个点 A,B,C,A_1,B_1,C_1 上各装 1 个灯泡,要求同一条线段的两个端点的灯泡不同色,则每种颜色的灯泡都至少用 1 个的安装方法共有_____种.

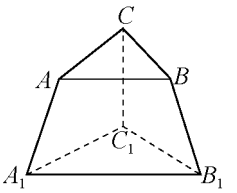


图 12-12

【变式 5】用 4 种不同的颜色为正方体的六个面着色,要求有公共棱的两个面不同色,则共有(　　)种不同的着色方法.

A. 24　　B. 48　　C. 72　　D. 96

【变式 6】用红、黄、蓝三色之一去涂图 12-13 中标号为 1～9 的 9 个小正方形,使任意有公共边的小正方形不同色,且标号为 3、5、7 的方块同色,则共有_____种不同涂色方法.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

图 12-13

【变式 7】(2008·湖南联考)正五边形 $ABCDE$,5 个顶点各染红、黄、绿三色之一,相邻顶点不同色,共有_____种不同染法.

【变式 8】用 1～9 填如图 12-14 所示的"9 宫图",每格一数,不同格不同数,其中"3","4"已填好,要求每行从左到右,每列从上到下都递增,共有_____种不同填格方法.

3	4	

图 12-14

【例 12.9】某市汽车牌照由前面 2 个英文字母(不可重复)和后面 4 个数字(可重复)组成,最多可有多少个牌照?

【解析】任务:第 1 步,确定前面 2 个英文字母 $26\times25=A_{26}^2$;

第 2 步,确定后面 4 个数字 $10\times10\times10\times10=10^4$.

所以最多可有 $26\times25\times10^4=6.5\times10^6$(个)牌照.

【变式 1】(2010·湖北文,6)现有 6 名同学听取同时进行的 5 个课外知识讲座,每个同学可自由选择其中一个讲座,不同的选法有(　　)种.

A. 5^6　　B. 6^5

C. $\dfrac{5\times6\times5\times4\times3\times2}{2}$　　D. $6\times5\times4\times3\times2$

【变式 2】(2007·福建文,12)某通信公司推出一组手机号码,号码的前 7 位固定,从×××××××0000 到×××××××9999 共 10000 个号码.公司规定,凡卡号的后 4 位带有数字 4 或 7 的一律作为优惠卡,则这组号码中优惠卡有(　　)个.

A. 2000　　B. 4096　　C. 5904　　D. 8320

【变式 3】3 封不同的信任意投入到 4 个不同的信箱,随意投的投法数和每箱至多 1 信的投法数依次为(　　).

A. $3^4;A_4^3$　　B. $4^3;A_4^3$　　C. $3^4;4^3$　　D. $A_4^3;4^3$

【变式 4】(2010·湖南理,7)用 4 个数字(只含 0 和 1)排成一个四位数字表示一个信息,则与信息 0110 至多有两个对应位置上的数字相同的信息有(　　)个.

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 15

【变式 5】(2008·吉林模考)由 0,1,2,3 这 4 个数字组成的四位数中有重复数字的四位数有(　　)个.

A. 192　　B. 182　　C. 174　　D. 274

【变式 6】(2011·北京理,12)用数字 2,3 组成四位数,且数字 2,3 至少都出现一次,这

心得体会

样的四位数共有_____个.(用数字作答)

【例 12.10】 (2006·全国理,12)设集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$,选择 I 的两个非空子集 A 与 B,要使 B 中最小的元素大于 A 中最大的元素,则 A 与 B 不同的选择方法共有(　　)种.

A. 50　　B. 49　　C. 48　　D. 47

【分析】 关键在于选择分类的依据,选择 $A\cup B$ 的元素个数 x 为分类依据为最佳选择,显然,依题意 $x=2,3,4,5$.

【解析】 $x=2$ 有 C_5^2 种选法,

$x=3$ 有 $2\times C_5^3$ 种选法,

$x=4$ 有 $3\times C_5^4$ 种选法,

$x=5$ 有 $4\times C_5^5$ 种选法,

故不同的选择方法共有 $C_5^2+C_5^3\times 2+C_5^4\times 3+C_5^5\times 4=49$. 故选 B.

【变式 1】 $I=\{1,2,3,4,5,6\}$,A,B 是 I 的两个子集,A 中有 3 个元素,B 中至少有两个元素,且 B 中所有的元素不大于 A 中的最小元素,这样的 A,B 有_____组.

【变式 2】 (2010·上海理,14)$I=\{1,2,3,4\}$,从 I 中取出 4 个不同的子集,满足条件①其中必有 $\varnothing$ 和 I;②4 个子集中的任意两个子集 A 与 B,必有 $A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$. 则这 4 个子集共有_____种选法.

第二节　排列问题

考纲解读

理解排列的意义,掌握排列数公式,并能用它们解决一些简单的应用问题.

命题趋势探究

预测 2012 年高考有关排列的试题,主要以选择题和填空题的形式出现,大多数试题难度与教材相当,主要涉及特元特位、捆绑、插空和定序问题等.本专题的考查以基本概念和方法为主,难度中等.

知识点精讲

一、特殊元素、特殊位置问题

排列时,某个(或某些)元素一定在(或一定不在)某个(或某些)位置.

二、相邻问题

某些元素作为一个整体在排列中不能分开.

心得体会

三、不相邻问题

某些元素在排列时互不相邻.

四、定序问题

某些元素在排列时相对顺序保持不变.

五、其他排列

双排列和有相同元素的排列等.

题型归纳及思路提示

题型 162　特殊元素或特殊位置的排列问题

思路提示:(1)加法:①把全部特殊位置上的元素排好;②剩余位置由剩余元素排列.

(2)减法:①取消某些"不能"的限制去排列;②减去因此而扩进的方法数.

注 对于有特殊元素或特殊位置的排列问题,一般采用直接法,即先排特殊元素或特殊位置,有时也采用间接法.通常有以下途径:

① 以元素为主体,即先满足特殊元素的要求,再考虑其他元素.

② 以位置为主体,即先满足特殊位置的要求,再考虑其他位置.

③ 先不考虑附加条件,计算出排列或组合数,再减去不合要求的排列组合数.

【例 12.11】 7 个人排成一排.

(1)甲在左端,乙不在右端的排列有多少个?

(2)甲不在左端,乙不在右端的排列有多少个?

(3)甲在两端,乙不在中间的排列有多少个?

(4)甲不在左端,乙不在右端,丙不在中间的排列有多少个?

(5)甲、乙都不在两端的排列有多少个?

【解析】 (1)左端定甲,右端(去掉甲、乙)A_5^1,剩余 5 元任排 A_5^5,共 $A_5^1A_5^5=600$(种)排法.

(2)加法:以左端分类:$\boxed{乙\square\square\square\square\square\square}+\boxed{5\text{ 选 }1\text{ 人}\square\square\square\square\text{非乙}}$

$A_6^6+C_5^1A_5^1A_5^5=3720$.

减法:$A_7^2-\boxed{甲\square\square\square\square\square\square}-\boxed{\square\square\square\square\square\square乙}+\boxed{甲\square\square\square\square\square乙}$

$A_7^7-2A_6^6+A_5^5=3720\Rightarrow 3720$(种)排法.

(3)先定甲位 C_2^1,再定中间位 C_5^1,共 $C_2^1A_5^1A_5^5=1200$(种)排法.

(4)解法一:宜用减法 $\boxed{7\text{ 人全排}}-\boxed{甲在左或乙在右或丙在中间}$

设 A_1 表示甲坐左端,A_2 表示乙坐右端,A_3 表示丙坐中间.

$card$(甲不在左端,乙不在左右端,丙不在中间)$=A_7^7-card(A_1\cup A_2\cup A_3)=A_7^7-(card(A_1)+card(A_2)+card(A_3)-card(A_1\cap A_2)-card(A_2\cap A_3)-card(A_1\cap A_3)+card((A_1\cap A_2)\cap A_3))=A_7^7-3A_6^6+3A_5^5-A_4^4=3216$(种)排法(见容斥原理).

心得体会

解法二：甲不排左端，乙不排右端－甲不排左端，乙不排右端，且丙在中间的情形，$3720-A_5^5-C_4^1C_4^1A_4^4=3216$ 种.

(5)第 1 步先排“特位”——两端 A_5^2；第 2 步排中间 A_5^5，故共有 $A_5^2A_5^5=2400$(种)排法.

【评注】 (1)第(2)与(4)题减法用到 $card(\complement_U A)=card(U)-card(A)$，其中 $card(A)$表示有限集合 A 中元素的个数.

(2)容斥原理：$A=A_1\cup A_2\cup A_3$，$card(A)=card(A_1)+card(A_2)+card(A_3)-card(A_1\cap A_2)-card(A_2\cap A_3)-card(A_1\cap A_3)+card(A_1\cap A_2\cap A_3)$.

【变式 1】 0～9 共 10 个数字，可组成多少个无重复数字的：

(1)四位数；

(2)五位偶数；

(3)五位奇数；

(4)五位数且是 25 的倍数；

(5)大于或等于 30000 的五位数；

(6)在无重复数字的五位数中，50124 从大到小排第几；

(7)五位数中大于 23014 小于 43987 的数的个数.

【变式 2】 (2010·襄樊市调研)某班要从 6 名同学中选出 4 人参加校运动会 4×100 米接力比赛，其中甲、乙两名运动员必须入选，且甲、乙中必有一个跑第一棒，则共有(　　)种不同的安排方法.

A. 24　　B. 72　　C. 144　　D. 360

【变式 3】 (2009·广东理，7)广州亚运会组委会要从小张、小李、小赵、小罗、小王 5 名志愿者中选派 4 人分别从事翻译、导游、礼仪、司机 4 项不同工作，其中小张和小赵只能从事前两项工作，其余 3 人均能从事这 4 项工作，则共有(　　)种选派方案.

A. 36　　B. 12　　C. 18　　D. 48

【变式 4】 在 1，2，3，4，5 的排列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 中满足 $a_1<a_2>a_3,a_3<a_4>a_5$ 的排列有(　　)个.

A. 10　　B. 12　　C. 14　　D. 16

【变式 5】 (2008·辽宁理，9)一生产过程有 4 道工序，每道工序需要 1 人照看，现从甲、乙、丙等 6 人中安排 4 人分别照看每一道工序，第 1 道工序只能从甲、乙中安排 1 人，第 4 道工序只能从甲、丙中安排 1 人，则共有(　　)种安排方法.

A. 24　　B. 36　　C. 48　　D. 72

题型 163　元素相邻排列问题

思路提示：先把排在一起的元素(m 个)捆绑成一个板块(有 A_m^m 种方法)，再把此板块当作一个大元素与其他元素进行排列.

注 对于元素相邻排列问题，通常采用捆绑法，即可以把相邻元素看作一个整体，再参与其他元素的排列.

【例 12.12】 7 个人排成一排.

(1)甲、乙、丙排在一起，共有多少种排法？

心得体会

(2)甲、乙相邻,且丙、丁相邻,有多少种排法?

(3)甲、乙、丙排在一起,且都不在两端,有多少种排法?

(4)甲、乙、丙排在一起,且甲在两端,有多少种排法?

(5)甲、乙之间恰有 2 人的排法有多少?

(6)甲、乙之间是丙的排法有多少?

【解析】 (1)甲、乙、丙板块(A_3^3 种排法)与其余 4 人排列,共 $A_3^3A_5^5=720$(种)排法.

(2)甲、乙板块(A_2^2 种方法),丙、丁板块板块(A_2^2 种方法)与其他 3 人排列,共 $A_2^2A_2^2A_5^5=480$(种)排法.

(3)甲、乙、丙板块(A_3^3 种方法),与其余 4 人排列,板块不在两端,共 $A_3^3C_3^1A_4^4=432$(种)排法.

(4)如图 12-15 所示,甲在两端(A_2^1 种方法),乙、丙板块(A_2^2 种方法)与甲相邻,共 $A_2^1A_2^2A_4^4=96$(种)排法.

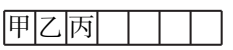


图 12-15

(5)如图 12-16 所示,先作出甲×××乙板块($A_2^2A_5^2$ 种方法),与其余 3 个元素排列,共 $A_2^2A_5^2A_4^4=960$(种)排法.

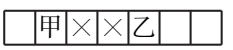


图 12-16

(6)如图 12-17 所示,先作出甲丙乙板块(A_2^2 种方法),与其他 4 个元素排列,共 $A_2^2A_5^5=240$(种)排法.

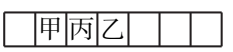


图 12-17

【评注】 关键在于板块的形成.

【变式 1】 一排 8 个车位,停 5 辆不同车,每车位至多停 1 车.

(1)停车 5 位相邻有多少停法?

(2)不停车的 3 个空位相邻有多少停法?

(3)一共有多少停法?

【变式 2】 (2010·重庆理,9)某单位安排 7 人在 10 月 1 日~10 月 7 日值班,每天安排一人,每人安排一天.若 7 位员工中,甲、乙排在相邻两天,丙不排在 10 月 1 日,丁不排在 10 月 7 日,则共有(　　)种不同的安排方案.

A. 504　　B. 960　　C. 1008　　D. 1108

【变式 3】 (2006·天津文,16)用 0,1,2,3,4 组成无重复数字的五位数,其中 1,2 相邻的偶数有_____个(用数字作答).

【变式 4】 (2008·安徽巢湖)用 0,1,2,3,4 这 5 个数字组成无重复数字的五位数,其中一个偶数夹在两个奇数之间,这样的五位数有(　　)个.

A. 48　　B. 12　　C. 36　　D. 28

【变式 5】 (2008·甘肃联考)某次文艺汇演要将 A,B,C,D,E,F 这 6 个不同节目排成一个节目单(如图 12-18 所示),如果 A,B 两个节目要相邻,且都不排在第 3 个位置,则共有(　　)种节目单的不同排序方式.

心得体会

序号	1	2	3	4	5	6
节目						

图　12-18

A. 192　　B. 96　　C. 108　　D. 144

【变式 6】（2008・浙江理，16）用 1，2，3，4，5，6 组成无重复数字的六位数，要求任意两个相邻数字的奇偶性不同，且 1 和 2 相邻，共有_____个这样的六位数（用数字作答）.

题型 164　元素不相邻排列问题

思路提示：(1)m 个元素在 n 个不同元素中插空，先把 n 个元素排好，有 A_n^n 种排法.

(2)n 个元素有 $n+1$ 个空.

(3)共有 $A_n^n A_{n+1}^m$ 种排法.

注 对于元素不相邻的排列，通常采用插空档的方法，即先考虑不受限制的元素的排列，再将不相邻的元素插在前面元素排列的空档中.

【例 12.13】 7 个人排成一排.

(1)甲、乙、丙互不相邻，共有多少种排法？

(2)甲、乙相邻，丙、丁不相邻，有多少种排法？

(3)甲不与乙相邻，丙不与乙相邻，有多少种排法？

【解析】 (1)共有 $A_4^4 A_5^3 = 1440$(种)排法.

(2)甲乙板块(A_2^2)与戊、己、庚共 4 个元素排列，丙、丁在 5 个空中插空，共 $A_2^2 A_4^4 A_5^2 = 960$(种)排法.

(3)甲、丙可相邻也可不相邻，分两类：甲、乙、丙互不相邻，有 $A_4^4 A_5^3 = 1440$(种)排法.

甲、丙相邻成板块(A_2^2)与乙在其余 4 人中插空 $A_2^2 A_4^4 A_5^2 = 960$，共 $1440+960=2400$(种)排法.

【评注】 捆绑与插空同时发生时，先捆后插. 如与特位（某元不在某位）问题结合宜用减法.

【变式 1】 7 人一排，A，B 不相邻，C，D 不相邻，有多少排法？

【变式 2】 一排 8 个车位，5 辆不同车停入，一位至多一车.

(1)空车位互不相邻有多少停车法？

(2)恰有两个车位相邻有多少停车法？

【变式 3】（2010・四川理，10）用 1，2，3，4，5，6 组成的没有重复数字的六位偶数中，1 与 3 都不与 5 相邻的有(　　)个.

A. 72　　B. 96　　C. 108　　D. 144

【变式 4】（2009・四川文，11）2 男 3 女共 5 个同学站成一排，男生甲不站两端，3 女中有且只有 2 女相邻，则有(　　)种不同的排法.

A. 60　　B. 48　　C. 42　　D. 36

【变式 5】（2009・高三冲刺）某电影院第一排共有 9 个座位，现有 3 名观众来就坐.

若 3 名观众互不相邻，共有_____种坐法；若 3 名观众互不相邻，且要求每

心得体会

人左、右都至多有两个空位，共有_____种不同坐法(用数字作答).

【变式 6】 (2008·东北月考)在一条南北方向的步行街上同侧有 8 块广告牌，广告牌的底色可红可蓝，要求相邻两块广告牌底色不都为红色，则有(　　)种不同的配色方案.

A. 55　　B. 56　　C. 46　　D. 47

【变式 7】 (2008·湖北荆州一模)某仪器显示屏上每个指示灯均能显示红光和蓝光两种颜色，已知一排 8 个指示灯，每次显示其中 4 个，且恰有 3 只是相邻的，此一排 8 只指示灯可显示_____个不同信号.

【变式 8】 8 人排成一排照相，A,B,C 互不相邻，D,E 也互不相邻，共有_____种排法.

【变式 9】 (2008·黄冈一模)由 0,1,2,3,4,5 这 6 个数字可以组成_____个无重复数字且 2,3 不相邻的六位数(用数字作答).

题型 165　元素定序问题

思路提示：先排好非定序元素，从而为定序元素留下空位，定序元素在留下空位中找到位置.

注 解决元素定序问题的常用方法有虑它法、只选不排法和全排消序法 3 种.

【例 12.14】 4 男 3 女坐成一排，且 4 男不等高，4 男自左往右按从高到矮的顺序排列，有多少种不同的排法？

【解析】 解法一：(定序问题虑它法)先排列 3 女，剩余 4 个位置供 4 男按高矮顺序排列，故为 $A_7^3\cdot 1$ 种.

解法二：(定序问题只选不排法)先选定 4 男的位置，有 C_7^4 种方法，3 女可以任意排，4 男的顺序确定，其排列方法只有 1 种，故有 $C_7^4A_3^3$ 种.

解法三：(定序问题全排消序法)先全排列，再消除因 4 男有序造成的影响，故有 $\frac{A_7^7}{A_4^4}$ 种.

【例 12.15】 7 人一排，甲在乙左侧，乙在丙左侧(可相邻也可不相邻)，共有多少种排法？

【分析】 见思路提示.

【解析】 任选一种排法，如图 12-19 所示，先排 7−3=4(个)元素(A_7^4)，给甲、乙、丙留下 3 个空位. 甲、乙、丙的位置自然(唯一)确定，故有 $A_7^4=840$(种)排法.

甲	×	×	乙	×	丙	×

图　12-19

【变式 1】 用 0～9 这 10 个数字排成一个五位数，无重复数字，各有多少种排法？

(1)百位数字＞十位数字＞个位数字；

(2)百位数字＜十位数字＞个位数字.

【变式 2】 7 人身高各不同，排成一排，要使中间第 4 位最高，两侧依次降低，共多少种排法？

【变式 3】 晚会原有节目单由 7 个节目组成，现要加入 3 个不同的节目，且不改变原节目顺序，3 个节目有多少种插法？

【变式 4】 三位数中，如 123 叫严格递增数，如 530 叫严格递减数，这两种统称为严格单

心得体会

调数.则严格单调三位数共有多少个?

【变式 5】(2008·海南)甲、乙、丙三名志愿者安排在周一至周五的五天中参加某项志愿者活动,要求每人参加一天,每天至多一人,且甲排在其他两位的前面,共有(　　)种安排方法.

A. 20　　B. 30　　C. 40　　D. 60

【变式 6】(2006·湖北理,14)某工程队有 6 项工程需要单独完成,其中工程乙必须在工程甲完成后才能进行,工程丙必须在工程乙完成后才能进行,工程丁在工程丙完成后立即进行,则共有_____种安排这 6 项工程的顺序的方案(用数字作答).

【变式 7】(2010·湖北赤壁质检)某车队有 7 辆车,现要调出 4 辆,再按一定顺序出去执行任务,要求甲、乙两车必须参加,且甲车在乙车前面开出,则不同的调度方案共有_____种(用数字作答).

【变式 8】(2008·北京朝阳一模)某市春晚原有 10 个节目,导演最后决定添加 3 个与"抗冰救灾"有关的节目,但是救灾节目不排在第一个,也不排在最后一个,并且已经排好的 10 个节目顺序不变,则该晚会共有_____种节目顺序单(用数字作答).

【变式 9】1,2,3,4,5,6 的一个排列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 满足 $a_1<a_3<a_5$,且 $a_1\neq1$,$a_3\neq3$,$a_5\neq5$ 的排列有_____个(用数字作答).

题型 166　其他排列:双排列、同元素的排列

思路提示:(1)双排列,把特殊元素、特殊位置先排好,再排其他元素.

(2)有相同元素的排列,先排好相同元素,再排其他元素.

【例 12.16】8 人排两排,前后两排各 4 人,成 2×4 方阵.

(1)甲、乙不同排有多少排法?

(2)甲、乙同排有多少排法?

(3)甲、乙同排相邻或前后相邻有多少排法?

(4)甲、乙不在两端有多少排法?

(5)任意排有多少排法?

【解析】(1)甲选一位 A_8^1,乙选一位 A_4^1,其他 6 人在 6 位任排,共 $A_8^1A_4^1A_6^6=23040$(种)排法.

(2)甲、乙先选一排 A_2^1,再各选一位 $A_4^1A_3^1=A_4^2$,共 $A_2^1A_4^2A_6^6=17280$(种)排法(或 $A_8^1A_3^1A_6^6$).

(3)同排相邻,选一排 A_2^1. 捆绑 A_2^2 $\boxed{\times}\boxed{甲}\boxed{乙}\boxed{\times}$.

捆绑后选一位 A_3^1,共 $A_2^1A_2^2A_3^1A_6^6=8640$(种)排法;

前后相邻,选一列 A_4^1,捆绑 A_2^2,共 $A_4^1A_2^2A_6^6=5760$(种)排法.

故共 $A_2^1A_2^2A_3^1A_6^6+A_4^1A_2^2A_6^6=14400$(种)排法.

(4)甲、乙在 6 位中选位 $A_6^1A_5^1=A_6^2$,共 $A_6^2A_6^6=21600$(种)排法.

(5)$A_8^8=40320$.

【变式 1】(2008·福建仙游二模)有两排座位,前排 11 个座位,后排 12 个座位.现安排 2 人就坐,前排中间 3 位不能坐,且此 2 人不能左右相邻,共有(　　)种坐法.

A. 234　　B. 346　　C. 350　　D. 363

心得体会

【变式 2】 (2010·浙江理,17)有 4 位同学在同一天的上、下午参加“身高与体重”、“立定跳远”、“肺活量”、“握力”和“台阶”5 个项目的测试,每位同学上、下午各测试一个项目,且不重复.若上午不测“握力”项目,下午不测“台阶”项目,其余项目上、下午都各测试 1 人.则不同的安排方式有_____种(用数字作答).

【例 12.17】 3 个“1”、2 个“2”、1 个“3”排成一行,共有_____种不同排法(用数字作答).

【解析】 举例:1 2 1 1 2 3,则$\begin{cases}\text{“1”占 1,3,4 位}\\ \text{“2”占 2,5 位}\\ \text{“3”占 6 位}\end{cases}$

第 1 步确定“1”所占 3 位——C_6^3,

第 2 步确定“2”所占 2 位——C_3^2,

第 3 步确定“3”所占 1 位——C_1^1,

故共 $C_6^3C_3^2=60$ 种排法.

【变式 1】 如图 12-20 所示为一个 4×5 长方形表,一个“兵”从 A 走到 B,每步向左或向右或向上行一格,最少_____步该“兵”由 A 走到 B.按这样的步数从 A 走到 B 共有_____种走法(用数字作答).

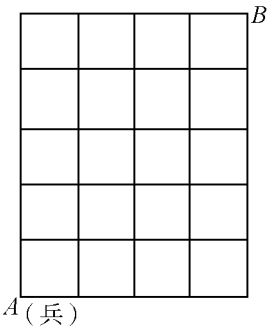


图 12-20

【变式 2】 (2008·湖南岳阳一模)一个五位数由数字 0,1,1,2,3 构成,这样的五位数有_____个(用数字作答).

【变式 3】 (2008·广东六校联考)把“good”的字母顺序写错有_____种写法(用数字作答).

第三节 组合问题

考纲解读

理解组合的意义,掌握组合数公式,并能用它们解决一些简单的应用问题.

命题趋势探究

预测 2012 年高考,有关组合的试题主要以选择题和填空题的形式出现,大多数试题难度与教材相当,主要涉及单纯组合题、分选问题、选排问题、分组问题和分配问题。

题型分类

1. 单纯组合题

心得体会

2. 分选问题和选排问题

①分选问题：几个集合按要求各选出若干元素并成一组的方法数.

②选排问题：分选后的元素按要求再进行排列的排列数.

3. 分组问题和分配问题

①分组问题：把一个集合中的元素按要求分成若干组的方法数.

②分配问题：把一个集合中的元素按要求分到几个去处的方法数.

题型归纳及思路提示

题型 167　单纯组合应用问题

思路提示：把所给问题解释为从 n 个不同元素中取 m 个元素，确定唯一的集合数可分类相加、分步相乘，也可总数减去不同对立数.

【例 12.18】 课外活动小组共 13 人，其中男生 8 人，女生 5 人，并且男、女生各指定一名队长. 现从中选 5 人主持某项活动，依下列条件各有多少种选法？

(1)只有一名女生当选；

(2)两队长当选；

(3)至少有一名队长当选；

(4)至多有两名女生当选；

(5)既要有队长，又要有女生当选.

【分析】 注意理解组合与排列问题的不同——取出的元素有无顺序.

【解析】 (1)1 名女生，4 名男生，故共有 $C_5^1C_8^4=350$(种).

(2)只需从剩余的 11 人中选择 3 人即可，故有 $C_{11}^3=165$(种).

(3)解法一：(直接法)至少有一名队长含有两类：只有一名队长和两名队长. 故共有 $C_2^1C_{11}^4+C_2^2C_{11}^3=825$(种).

解法二：(间接法)采用排除法：$C_{13}^5-C_{11}^5=825$(种).

(4)至多有两名女生含有 3 类情形：有两名女生、只有一名女生、没有女生. 故选法为 $C_5^2C_8^3+C_5^1C_7^4+C_8^5=791$(种).

(5)解法一：(直接法)分两类：①女队长当选，故有 C_{12}^4 种；②男队长当选，故至少需要另外 4 名女生中的一名，故有 $C_4^1C_7^3+C_4^2C_7^2+C_4^3C_7^1+C_4^4$ 种. 综上可知，选法有 $C_{12}^4+C_4^1C_7^3+C_4^2C_7^2+C_4^3C_7^1+C_4^4=790$(种).

解法二：(间接法)分两类：①女队长当选，故有 C_{12}^4 种；②男队长当选，故需另外的 4 名女生中的至少一名. 若另外的 4 人全部是男生，则有 C_7^4 种方法，故男队长当选，且至少有一名女生(且为非女队长)的方法有 $1\cdot(C_{11}^4-C_7^4)$ 种，故共有 $C_{12}^4+(C_{11}^4-C_7^4)=790$(种).

【变式 1】 (2009·高考二轮专题测试)某单位要邀请 10 位教师中的 6 人参加一个研讨会，10 人中甲、乙不能都去，共有(　　)种邀请方法.

A. 84　　B. 98　　C. 112　　D. 140

【变式 2】 (江苏启东中学高三综测二)在平面直角坐标系中，x 轴正半轴上有 5 个点，y

心得体会

轴正半轴上有3个点，将x轴上5个点和y轴上3个点连成15条线段，这些线段在第一象限最多有(　　)个交点.

A. 30　　B. 35　　C. 20　　D. 15

【变式3】 若$x\in A$，则有$\frac{1}{x}\in A$，就称A为有伙伴关系的集合，集合$M=\left\{-1,1,2,\frac{1}{3},\frac{1}{2},3,4\right\}$，则$M$的非空子集中，具有伙伴关系的集合有(　　)个.

A. 15　　B. 16　　C. 2^8　　D. 2^5

【变式4】 (2007·黄冈秋季高三期末)$\angle AOB$的边OA上有$A_1,A_2,A_3,A_4$4个点，OB边上有$B_1,B_2,B_3,B_4,B_5$5个点，共9个点，连接线段A_iB_j($1\leqslant i\leqslant 4,1\leqslant j\leqslant 5$)，若其中两条线段不相交，则称之为和睦线对，则共有和睦线(　　)对.

A. 60　　B. 30　　C. 120　　D. 160

【变式5】 (2008·山东实验中学高三第三次测试)在四面体的顶点和各棱中点共10个点中选4个点不共面，共有(　　)种不同取法.

A. 150　　B. 147　　C. 141　　D. 142

【变式6】 在坐标平面上有一个质点从原点出发，沿x轴跳动，每次向正方向或负方向跳动一个单位，若经5次跳动质点落在(3,0)处，质点共有_____种跳法. 若经过m次跳动质点落在$(n,0)$处，$m\geqslant n,m\geqslant 1,n\geqslant 0$且$m+n$为偶数，则质点共有_____种跳法.

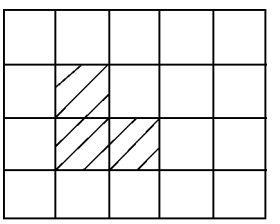


图　12-21

【变式7】 (2008·天津联考)在4×5的长方形(如图12-21所示)中，有3个格连成一个“L”形图案共有(　　)个.

A. 16　　B. 32　　C. 48　　D. 64

题型168　分选问题和选排问题

思路提示：两个集合A,B，$card(A)=n_1$，$card(B)=n_2$.

A选m_1，B选m_2，共$C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}$种方法；选排为选出再排列.

【例12.19】 6女4男选出4个.

(1)女选2，男选2有多少种选法？再安排4个不同的工作，有多少方法？

(2)至少1女有多少种选法？

(3)至多3男有多少种选法？

(4)男女都有，有多少种选法？

(5)选男甲不选女A,B，有多少种选法？

【解析】 (1)女选2，男选2有$C_6^2C_4^2=90$种选法，再安排4个不同的工作有$C_6^2C_4^2A_4^4=2160$(种)方法.

(2)加法：$C_6^1C_4^3+C_6^2C_4^2+C_6^3C_4^1+C_6^4=209$；减法：$C_{10}^4-C_4^4=209$.

(3)减法：$C_{10}^4-C_4^4=209$.

(4)加法：$C_6^1C_4^3+C_6^2C_4^2+C_6^3C_4^1=194$. 减法：$C_{10}^4-C_6^4-C_4^4=194$.

(5)从10−3=7人中选3人，$C_7^3=35$.

【评注】 (1)有“至多”、“至少”常用减法.

心得体会

(2)“正品”、“次品”,“白球”、“黑球”,属同一类问题.

【变式 1】 有 7 名翻译,4 人会英语,4 人会日语,从中选 2 名英语翻译和 2 名日语翻译,共多少种选法?

【变式 2】 有 9 名水手,6 人会左舵位,6 人会右舵位,现选 3 名右舵手和 3 名左舵手分坐于 6 个舵位,共有多少种安排方法?

【变式 3】 (2008·北京宣武高三统练)从 1～10 这 10 个数字中任取 4 个数,其中第二大的数字是 7 的取法有(　　)种.

A. 18　　B. 20　　C. 45　　D. 84

【变式 4】 (2009·全国Ⅰ理,5)甲组 5 男 3 女,乙组 6 男 2 女,两组各选 2 人,则选出的 4 人中恰有 1 女,共有(　　)种选法.

A. 150　　B. 180　　C. 300　　D. 345

【变式 5】 (2009·陕西文,9)从 1,2,3,4,5,6,7 这 7 个数字中任取两个奇数和两个偶数,组成无重复数字的四位数,其中有(　　)个奇数.

A. 432　　B. 288　　C. 216　　D. 108

【变式 6】 (2006·北京理,3)在由 1,2,3,4,5 这 5 个数字组成的没有重复数字的三位数中,各位数字之和为奇数的有(　　)个.

A. 36　　B. 24　　C. 18　　D. 6

【变式 7】 (2009·天津理,16)由数字 0,1,2,3,4,5,6 组成的没有重复数字的四位数中,个、十、百 3 位数字之和为偶数的有_____个(用数字作答).

【变式 8】 (2008·天津文,16)有 4 张分别标有 1,2,3,4 的红色卡片和 4 张分别标有 1,2,3,4 的蓝色卡片,从这 8 张卡片中取出 4 张卡片排成一行,如果取出的 4 张卡片的所标数字之和为 10,则共有_____种不同排法(用数字作答).

【变式 9】 (2006·山东理,9)已知集合 $A=\{5\}$,$B=\{1,2\}$,$C=\{1,3,4\}$,从这 3 个集合中各取一个元素构成空间直角坐标系的一个点的坐标 (x,y,z),共可确定(　　)个点的坐标.

A. 33　　B. 34　　C. 35　　D. 36

【变式 10】 5 名乒乓球运动员,有 2 名老队员和 3 名新队员,从中选出 3 人排成 1,2,3 号参加团体比赛,则其中至少一名老队员,且 1,2 号至少一名新队员,有_____种排法(用数字作答).

题型 169　平均分组问题和分配问题

思路提示:分组定义:把一个非空有限集 A 按要求分成若干个互相没有公共元素的非空子集的并集.

①分组三原则:一组一组地分出来(与顺序无关);

②有若干组为只含单一元素的集合,不去管它们,分出其他组即可;

③由若干(m 个)元素不为 1 的组,且元素个数相同,把①②的结果除以 A_m^m.

分配定义:把一个非空有限集 A 按要求分到若干个去处,每个去处分配元素至少为 1.

心得体会

分配四类型：

①各分配去向分配数依次确定

去向	1	2	3	…	m
分配元素(个)	n_1	n_2	n_3	…	n_m

逐方向分配即可，共有分配数 $N=C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3}\cdots C_{n_m}^{n_m}$

(额配法)

②各分配方向名额不确定先把 A 按要求分成若干组(分组问题)，再把每组打包成一个元素，在 m 各分配方向上排列(组排法).

③信箱问题.3 封不同信任意投入 4 信箱，共有 4^3 种投法.

④相同元素的分配问题——不定方程组的个数——隔板问题.

$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_m=n\\ x_1,x_2,\cdots,x_m\in\mathbf{N}^*\\ m,n\in\mathbf{N}^*,m\leqslant n\end{cases}$，共有 C_{n-1}^{m-1} 组不同的解.

【例 12.20】 有编号为 1,2,3,4 的 4 张不同的卡片，按照下列方法处理，各有几种分法？

(1)甲得 2 张，乙得 2 张；

(2)平均分成 2 堆，每堆 2 张；

(3)平均分给甲、乙两人(每人 2 张).

【解析】 (1)解法一：甲先拿 2 张卡片，有 $C_4^2=6$(种)方法；乙再拿时，只有从剩余的两张卡片中取两张，有 $C_2^2=1$(种)方法，由分步计数原理，所求的方法有 $C_4^2C_2^2=6$(种).

(2)把这 4 张不同的卡片平均分给甲、乙两人，每人 2 张，相当于把 4 张不同的卡片平均分成两堆后，再把每次分得的两堆分给甲、乙两人，设平均分两堆的方法有 x 种，则 xA_2^2 是将 4 张不同的卡片平均分给甲、乙两人的分法，由(1)知 $C_4^2C_2^2=xA_2^2$. 所以 $x=\dfrac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}=3$，故有 3 种分法.

(3)解法一：由(2)可知分组方法有 $\dfrac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}=3$(种)，则再分配给甲、乙两人，共有 A_2^2 种方法，由分步计数原理得，共有 $\dfrac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}A_2^2=6$(种)分法.

解法二：分两步，甲先选，有 C_4^2 种方法；乙再选，有 C_2^2 种方法. 故共有 $C_4^2C_2^2=6$(种)分法.

【评注】 通过第(1)和(2)问的铺垫，第(3)问再对平均分组问题加深理解.

【例 12.21】 按以下要求分配 6 本不同的书，各有几种方法？

(1)平均分配给甲、乙、丙 3 人，每人 2 本；

(2)平均分成 3 份，每份 2 本；

(3)分成 3 份，一份 1 本，一份 2 本，一份 3 本；

(4)甲、乙、丙 3 人中，一人得 1 本，一人得 2 本，一人得 3 本；

(5)分成 3 份，一份 4 本，另两份各 1 本；

(6)甲、乙、丙 3 人中，一人得 4 本，另外两个人每人得 1 本；

心得体会

(7)分给甲、乙、丙3人，每人至少1本.

【解析】(1)解法一：(分步计数原理)因为要分给甲、乙、丙3人，可分3步完成，先从6本书中选择2本分给甲，其方法有C_6^2(种)；再从余下的4本书中选2本分给乙，其方法有C_4^2(种)；最后的两本分给丙，方法有C_2^2(种).由分步计数原理，故所求的分配方法有$C_6^2C_4^2C_2^2=90$(种).

解法二：(定序问题全排消序法)把分配给甲、乙、丙的3堆书看成无序排列(分到每个人的两本书是无序的)即定序问题，故考虑使用定序问题全排消序法求解，共有$\frac{A_6^6}{A_2^2A_2^2A_2^2}$种分法.

解法三：(先(平均)分组后分配法)把6本书平均分成3份，每份2本的方法有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}$种，再分配给3个人的方法有$A_3^3$种，故有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}A_3^3=C_6^2C_4^2C_2^2$种.

(2)把6本不同的书分成3堆，每堆2本，与把6本不同的书分给甲、乙、丙3人，每人2本的区别在于，后者相当于把6本不同的书，平均分成3堆后，再把每次分得的3堆书分给甲、乙、丙3个人.因此，设把6本不同的书，平均分成3堆的方法有x种，那么把6本不同的书分给甲、乙、丙3人每人2本的分法就应有xA_3^3种，可知$xA_3^3=C_6^2C_4^2C_2^2$，从而$x=\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$(种).

(3)因为是不均匀分组问题，可以分为3个步骤完成，先在6本书中任取一本，作为一堆，有C_6^1种取法；再从余下的5本书中任取2本，作为一堆，有C_5^2种取法；然后从余下的3本书中取3本作为一堆，有C_3^3种取法，故共有分法$C_6^1C_5^2C_3^3=60$(种).

(4)组排可以利用先选后排的步骤完成，第1步，方法有$C_6^1C_5^2C_3^3=60$(种)；第2步，其分配方法有A_3^3种，故所求的不同分法共有$C_6^1C_5^2C_3^3A_3^3=360$(种).

(5)部分均分问题，解法一：从中取4本作为一堆的方法有C_6^4种，剩余2本分成两堆的方法只有1种，从而应有$C_6^4\cdot1=15$(种)方法.

解法二：分3步，第1步，从6本书中取4本，有C_6^4种方法；第2步，从剩余2本书中取1本，有C_2^1种方法；第3步，从剩余1本书中取1本，有C_1^1种方法，由分步计数原理，共有$C_6^4C_2^1C_1^1$种方法，但是其中每堆都是1本的两堆是不计算顺序的，故得6本书分成3堆，每堆4本，另两堆各l本的分法有$\frac{C_6^4C_2^1C_1^1}{A_2^2}=15$(种).

(6)组排部分均分问题，可以采用先分组后分配的步骤方法，共有$\frac{C_6^4C_2^1C_1^1}{A_2^2}A_3^3=90$(种)，也可以转化视角，即先从6本书中选4本看作一个元素，再与其余2本作全排列，故共有$C_6^4A_3^3=90$(种).

(7)组排解法一：(分类讨论)因为分给甲、乙、丙3人，每人至少1本有3种情况：

①甲、乙、丙每人2本，有$C_6^2C_4^2C_2^2$种分法；

②甲、乙、丙3人，一人1本，一人2本，一人3本，有$C_6^1C_5^2C_3^3A_3^3=360$(种)分法；

③甲、乙、丙3人，一人4本，其余两人一人1本，有$C_6^4A_3^3$(种)分法，所以不同的分法有$C_6^2C_4^2C_2^2+C_6^1C_5^2C_3^3A_3^3+C_6^4A_3^3=540$(种).

解法二：(间接法)

心得体会

①6 本书全部分给 3 人中的 1 个人，有 C_3^1 种方法；

②6 本书全部分给 3 人中的 2 人，且每人至少 1 本，则有 $C_3^2(2^6-C_2^1)$ 种方法；

③6 本书全部分给甲、乙、丙 3 人，不管是否每人至少 1 本，则共有 3^6 种方法；

由上可知，6 本书全部分给甲、乙、丙 3 人，每人至少 1 本，应有 $3^6-[C_3^1+C_3^2(2^6-C_2^1)]=540$(种)方法.

【评注】 解决分配问题的关键是区分是否与顺序有关，对于平均分组要注意顺序，按先分组再分配的原则去计算. 平均分组与非平均分组、无序分组与有序分组是组合问题的常见题型，解决此类问题的关键是正确判断分组是平均分组还是非平均分组，无序平均分组要除以平均组数的阶乘数，还要充分考虑是否与顺序有关；有序分组要在无序分组的基础上乘以分组数的阶乘数.

【变式 1】 3 名医生和 6 名护士分配到 3 所学校为学生体检，每校分配 1 名医生和 2 名护士，不同的分配方法共有(　　).

A. 90 种　　B. 180 种　　C. 270 种　　D. 540 种

【变式 2】 6 人分成 3 组，各有多少种方法？

(1)一组 3 人，一组 2 人，一组 1 人；

(2)第 1 组 3 人，第 2 组 2 人，第 3 组 1 人；

(3)平均分成 3 组；

(4)第 1 组 2 人，第 2 组 2 人，第 3 组 2 人；

(5)任意分成 3 组.

【变式 3】 9 人分成 5 组，共有多少种分法？

【变式 4】 8 个球队中有甲、乙两个强队，现把 8 队平均分成两组，各有多少种分法？

(1)甲、乙不在同组；

(2)甲、乙在同组.

【变式 5】 (2008·湖北随州高三模拟)把 4 名男乒乓球选手和 4 名女乒乓球选手同时平均分成两组，进行混合双打比赛，共有_____种不同分配方法(混合双打时一男一女对一男一女，用数字作答).

【变式 6】 (2011·大纲全国理，7)某同学有同样的画册 2 本，同样的集邮册 3 本，从中取出 4 本赠送给 4 位朋友，每位朋友 1 本，则不同的赠送方法共有(　　).

A. 4 种　　B. 10 种　　C. 18 种　　D. 20 种

【例 12.22】 9 个人分到 3 个单位，下面各有多少种分配方法.

(1)甲单位 2 人，乙单位 3 人，丙单位 4 人；

(2)一个单位 2 人，一个单位 3 人，一个单位 4 人；

(3)每个单位 3 人；

(4)两个单位各 2 人，一个单位 5 人.

【解析】 (1)额配先分组 $C_9^2C_7^3C_4^4=C_9^2C_7^3$，分配去向明确不用排列，共 $C_9^2C_7^3=1260$(种)方法.

(2)组排先分组 $C_9^2C_7^3$，3 组在 3 个单位排列，共 $C_9^2C_7^3A_3^3=7560$(种)方法.

(3)额配先分组 $\frac{C_9^3C_6^3C_3^3}{A_3^3}=\frac{C_9^3C_6^3}{A_3^3}$，再排列，共 $\frac{C_9^3C_6^3C_3^3}{A_3^3}A_3^3=C_9^3C_6^3=1680$(种)方法.

(4)组排先分组 $\frac{C_9^2C_7^2C_5^5}{A_2^2}=\frac{C_9^2C_7^2}{A_2^2}$，再排列，共 $\frac{C_9^2C_7^2C_5^5}{A_2^2}A_3^3=\frac{C_9^2C_7^2}{A_2^2}A_3^3=2268$(种)方法.

心得体会

【变式 1】 6 个不同的小球放入 5 个小盒，下面各有多少种放法.

(1)每盒至少 1 球；

(2)恰有 1 盒空；

(3)任意分.

【变式 2】 (2006·湖南理,6)某外商计划在 4 个候选城市投资 3 个不同项目，且在同一城市投资的项目不超过 2 个，则该外商共有(　　)种投资方案.

A. 16　　B. 36

C. 42　　D. 60

【变式 3】 (2006·天津理,5)将 4 个颜色互不相同的球全部放入编号为 1 和 2 的两个盒子中，使得放入每个盒子里的球的个数不小于该盒的编号，共有(　　)种放球方法.

A. 10　　B. 12

C. 36　　D. 52

【变式 4】 (2007·陕西理,16)安排 3 人到 6 所学校任教，每校至多 2 人，共有_____种分配方案(用数字作答).

【变式 5】 (2009·高考二轮冲刺)某小组 4 人负责周一至周五的值日，每天只安排一人，每人至少一天，共有(　　)种安排方法.

A. 480　　B. 300

C. 240　　D. 120

【变式 6】 (2008·河北正定中学高三月考)甲、乙、丙、丁 4 个公司承包 8 项工程，甲承包 3 项，乙承包 1 项，丙、丁各承包 2 项，共有(　　)种不同的承包方案.

A. 3360　　B. 2240

C. 1680　　D. 1120

【变式 7】 把 20 个相同的小球放入 6 个盒中.

(1)每盒至少 1 球有多少种方法？

(2)每盒至少 2 球有多少种方法？

(3)随便放(即可有若干盒中无球)有多少种方法？

【变式 8】 (2008·安徽怀远)将 4 个相同的白球，5 个相同的黑球，6 个相同的红球放入 4 个不同的盒中的 3 个中，使 4 盒中 1 盒空，其他盒球色齐全，共有_____种不同方法(用数字作答).

第四节　二项式定理

考纲解读

1. 能用计数原理证明二项式定理.
2. 会用二项式定理解决与二项式展开式有关的简单问题.

心得体会

命题趋势探究

1. 本节内容为高考必考内容，常以一道选择题或填空题出现.
2. 考查内容主要为求展开式中特定项的系数或确定具有某些条件的项及系数和有关的问题.
3. 逐个写出展开式中各项及对展开式中某项进行化简(系数与幂分离)为考试重点.

知识点精讲

一、二项式定理

$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^na^0b^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

展开式具有以下特点：

(1)项数：共有 $n+1$ 项.

(2)系数：依次为组合数 $C_n^0,C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^n$.

(3)每一项的次数是一样的，即为 n 次，展开式依 a 的降幂排列、b 的升幂排列展开.

特别地，$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$.

二、二项展开式的通项(第 $r+1$ 项)

二项展开式的通项为 $T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r(r=0,1,2,3,\cdots,n)$. 其中 C_n^r 叫 T_{r+1} 的二项式系数.

令变量(常用 x)取 1，可得 T_{r+1} 的系数.

T_{r+1} 中变量 x 的幂指数的形式 $\frac{1}{x^m}=x^{-m}$，$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$，$\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$.

注 (1)通项公式主要用于求二项展开式的指数、满足条件的项或系数及展开式的某一项或系数. 在应用通项公式时要注意以下几点：

①分清 $C_n^ka^{n-k}b^k$ 是第 $k+1$ 项，而不是第 k 项；

②在通项公式 $T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$ 中，含有 T_{r+1},C_n^r,a,b,r,n 这 6 个参数，只有 a,b,r,n 是独立的，在未知 r,n 的情况下利用通项公式解题，一般都需要先将通项公式转化为方程组求 n 和 r.

(2)二项式系数与项的系数的区别.

二项展开式“项的系数”与二项展开式的“二项式系数”是两个不同的概念，审题时，必须认真加以区别. 二项式系数仅指 $C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^n$ 而言，不包括字母 a,b 所表示的式子中的系数. 例如：$(2+x)^n$ 的展开式中，含有 x^r 的项应该是 $T_{r+1}=C_n^r2^{n-r}x^r$，其中 C_n^r 叫作该项的二项式系数，而 x^r 的系数应该是 $C_n^r2^{n-r}$(即含 x^r 项的系数).

(3)二项式系数的性质.

①在二项展开式中，与首末两端“等距离”的两项的二项式系数相等，即 $C_n^0=C_n^n,C_n^1=$

心得体会

C_n^{n-1}，$C_n^2=C_n^{n-2}$，…，$C_n^r=C_n^{n-r}$.

②二项展开式中的中间项的二项式系数最大.

如果二项式的幂指数 n 是偶数，中间项是第 $\frac{n}{2}+1$ 项，其二项式系数 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 最大；

如果二项式的幂指数 n 是奇数，中间项有两项，即为第 $\frac{n+1}{2}$ 项和第 $\frac{n+1}{2}+1$ 项，它们的二项式系数 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ 和 $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 相等并且最大.

三、系数和

(1)二项式系数和 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$.

奇数项二项式系数和等于偶数项二项式系数和，即 $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$.

(2)求系数和，令 $x=1$；变号系数和，令 $x=-1$；求常数项，令 $x=0$.

四、二项式系数的函数特征

C_n^0，C_n^1，…，C_n^r，…，C_n^n($r=0,1,2,\cdots,n$)作为 r 的函数，以 $r=\frac{n}{2}$ 为界，左递增，右递减.并具有对称性，即 $C_n^r=C_n^{n-r}$，其最大值：n 为偶数中间一项最大，为 $C_n^{\frac{n}{2}}$；n 为奇数相邻两项最大，$C_n^{\frac{n-1}{2}}=C_n^{\frac{n+1}{2}}$.

题型归纳及思路提示

题型 170　证明二项式定理

【例 12.23】 用计数原理证明：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$ ($n\in\mathbf{N}^*$，$r=0,1,2,\cdots,n$).

【解析】 $(a+b)^n=\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\cdots\cdot(a+b)}_{n个}$，其展开式的通项为 $A_ra^{n-r}b^r$，是由 n 个 $(a+b)$ 中的 $(n-r)$ 个 $(a+b)$ 中每一个取 a，r 个 $(a+b)$ 中每一个取 b 相乘取得的，这样的取法(只需从 r 个 $(a+b)$ 中取 b，自然剩余 $(n-r)$ 个 $(a+b)$ 中取 a)共有 C_n^r 种，即 $A_r=C_n^r$($r=0,1,2,\cdots,n$).

故 $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$.

【变式 1】 (2008·浙江理，4)在 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ 的展开式中，x 的系数为(　　).

A. -15　　B. 85

C. -120　　D. 274

题型 171　T_{r+1} 的系数与 x 幂指数的确定

思路提示：(1)在 T_{r+1} 中，令 $x=1$ 得 T_{r+1} 的系数.

(2)把 T_{r+1} 写成 $T_{r+1}=ax^n$ 的形式.

心得体会

【例 12.24】 $\left(\frac{a}{x}-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$展开式中 x^3 的系数为$\frac{9}{4}$，则 $a=$_____.

【解析】 $T_{r+1}=C_9^r\left(\frac{a}{x}\right)^{9-r}\left(-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^r$，令 $x=1$ 得系数为 $C_9^r a^{9-r}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^r$，

x 的幂$=\left(\frac{1}{x}\right)^{9-r}(\sqrt{x})^r=x^{-(9-r)}\cdot x^{\frac{r}{2}}=x^{\frac{3r}{2}-9}\Rightarrow$

$T_{r+1}=C_9^r a^{9-r}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^r x^{\frac{3r}{2}-9}$，由展开式中 x^3 的系数为$\frac{9}{4}$，

得$\begin{cases}\frac{3r}{2}-9=3\\ C_9^r a^{9-r}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^r=3\end{cases}$，由$\frac{3r}{2}-9=3$，得 $r=8$，

$C_9^8 a^{9-8}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^8=\frac{9}{4}\Rightarrow a=4$.

【变式 1】 (2011·湖北理，11)$\left(x-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 的展开式中含 x^{15} 的项的系数为_____(用数字作答).

【变式 2】 $\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^n$ 展开式中存在常数项，则 n 的最小值为_____.

【变式 3】 (2011·浙江理，13)设二项式$\left(x-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^6$ $(a>0)$的展开式中的系数为 A，常数项为 B，若 $B=4A$，则 a 的值为_____.

【变式 4】 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ 的第 3 项和第 2 项系数之比为 11∶2，求展开式中有理项有多少个?

【变式 5】 $(1-x^2)(1+x)^{10}$展开式中，x^5 的系数为_____.

【变式 6】 (2010·全国理，5)$(1+2\sqrt{x})^3(1-\sqrt[3]{x})^5$ 展开式中 x 的系数为(　　).

A. 4　　B. -2

C. 2　　D. 4

【变式 7】 (2010·安徽理，12)$\left(\frac{x}{\sqrt{y}}-\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式中 x^3 的系数为_____(用数字作答).

【变式 8】 (2010·湖北理，11)$(x+\sqrt[4]{3}y)^{20}$展开式中系数为有理数的项共有_____项.

【变式 9】 (2009·全国Ⅰ文，13)$(x-y)^{10}$展开式中 x^3y^7 与 x^7y^3 的系数和为_____(用数字作答).

【变式 10】 (2009·北京理，6)$(1+\sqrt{2})^5=a+b\sqrt{2}$($a$，$b$ 为有理数)，则 $a+b=$(　　).

A. 45　　B. 55

C. 70　　D. 80

【例 12.25】 (1)(2008·江西理，8)$(1+\sqrt[3]{x})^6\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{10}$ 展开式中的常数项为_____(用数字作答).

心得体会

(2)(2005·湖北理,14)$\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^5$的展开式中整理后的常数项为_____(用数字作答).

【解析】(1)两个二项式的通项分别为$T_{i+1}=C_6^i x^{\frac{i}{3}}$ $(0\leqslant i\leqslant 6)$,$S_{j+1}=C_{10}^j x^{-\frac{j}{4}}$ $(0\leqslant j\leqslant 10)$,$T_{i+1}\cdot S_{j+1}=C_6^i x^{\frac{i}{3}}C_{10}^j x^{-\frac{j}{4}}$ $(0\leqslant i\leqslant 6,0\leqslant j\leqslant 10)$,当$\frac{i}{3}-\frac{j}{4}=0$时,即$4i=3j$,有3种情况:$i=j=0$;$i=3,j=4$;$i=6,j=8$;因此常数项为$1+C_6^3C_{10}^4+C_6^6C_{10}^8=4246$.

(2)解法一:将$\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$看作整体,$\left[\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{2}\right]^5=C_5^r\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^{5-r}\cdot(\sqrt{2})^r$,展开式中的常数项,令$5-r=0$,当$5-r=0$时,即$r=5$,$C_5^5(\sqrt{2})^5=4\sqrt{2}$,当$5-r=2$时,即$r=3$,$C_5^3C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^1(\sqrt{2})^3=20\sqrt{2}$,当$5-r=4$时,即$r=1$,$C_5^1C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2(\sqrt{2})^1=\frac{15\sqrt{2}}{2}$,则展开式中的常数项为$4\sqrt{2}+20\sqrt{2}+\frac{15\sqrt{2}}{2}=\frac{63\sqrt{2}}{2}$.

解法二:$\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^5=\left(\frac{x^2+2\sqrt{2}x+2}{2x}\right)^5=\frac{(x+\sqrt{2})^{10}}{2^5x^5}$,

展开式中的常数项为$T_{5+1}=\frac{C_{10}^5x^5(\sqrt{2})^5}{2^5x^5}=\frac{63\sqrt{2}}{2}$.

【评注】在(2)的解法二中,不妨设$x>0$,$\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^5=\left[\left(\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2\right]^5=\left(\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^{10}$,常数项为$C_{10}^5\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^5\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^5=\frac{63\sqrt{2}}{2}$,此解法更简捷.

【变式1】在$(x^2+4x+2)^5$的展开式中,x的系数为_____(用数字作答).

【变式2】(2008·辽宁理,15)已知$(1+x+x^2)\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^n$的展开式中没有常数项,$n\in\mathbf{N}^*$,且$2\leqslant n\leqslant 8$,则$n=$_____.

题型172　二项式定理中的系数和

思路提示:(1)二项式系数和为$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$.

(2)令$x=1$,得系数和.

(3)构成二项式展开式.

【例12.26】已知$(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_7x^7$.求:

(1)$a_1+a_2+\cdots+a_7$;

(2)$a_1+a_3+a_5+a_7$;

(3)$a_0+a_2+a_4+a_6$;

(4)$|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_7|$.

【解析】令$x=1$,则$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7=-1$①;

令$x=-1$,则$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7=3^7$②.

(1)因为$a_0=C_7^0=1$,所以$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=-2$.

心得体会

(2)((①—②)÷2 得 $a_1+a_3+a_5+a_7=-\dfrac{-1-7^3}{2}=-1094$.

(3)((①+②)÷2 得 $a_0+a_2+a_4+a_6=\dfrac{-1+3^7}{2}=1093$.

(4)解法一:因为展开式中,a_0,a_2,a_4,a_6 大于零,而 a_1,a_3,a_5,a_7 小于零,所以 $|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_7|=(a_0+a_2+a_4+a_6)-(a_1+a_3+a_5+a_7)$,由(2)(3)可知,其值为 2187.

解法二:$|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_7|$ 即为展开式 $(1+2x)^7$ 中各项的系数和,故只需要令 $x=1$ 即可得 $|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_7|$ 的值等于 $3^7=2187$.

【评注】 求关于展开式中系数和问题,往往根据展开式的特点赋给其中字母一些特殊的数值,如 1,−1 等,此即赋值法.

【例 12.27】 已知二项展开式 $\left(2x+\sqrt{3}\right)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$,则 $(a_0+a_2+a_4)^2-(a_1+a_3)^2=$_____.

【分析】 $(a_0+a_2+a_4)^2-(a_1+a_3)^2=(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4)(a_0-a_1+a_2-a_3+a_4)$,

在 $\left(2x+\sqrt{3}\right)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$ 中,

令 $x=1$,$\left(2x+\sqrt{3}\right)^4=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4$;

令 $x=-1$,$\left(-2+\sqrt{3}\right)^4=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4$.

【解析】 $(a_0+a_2+a_4)^2-(a_1+a_3)^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^4\left(-2+\sqrt{3}\right)^4=\left[\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)\right]^4$
$=(3-4)^4=1$.

【变式 1】 (2009,陕西理,6)若 $(1-2x)^{2009}=a_0+a_1+\cdots+a_{2009}x^{2009}(x\in\mathbf{R})$,则 $\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_{2009}}{2^{2009}}$ 的值为(　　).

A. 2　　B. 0

C. −1　　D. −2

【变式 2】 $\left(5x-\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的系数和比二项式系数和多 240,则 $n=$_____,其奇数项二项式系数和为_____.

【变式 3】 (1)数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,求 $a_1C_n^0+a_2C_n^1+a_3C_n^2+\cdots+a_{n+1}C_n^n$;

(2)数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,公比为 q,求 $a_1C_n^0+a_2C_n^1+a_3C_n^2+\cdots+a_{n+1}C_n^n$.

【变式 4】 n 是正奇数,$M=8^n$,$N=7^n+C_n^17^{n-1}+C_n^27^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}7^1$,$M$ 和 N 被 9 除后的余数分别为(　　).

A. 5 和 4　　B. 6 和 5

C. 7 和 6　　D. 8 和 7

【变式 5】 (2010·江西理,6)$\left(2-\sqrt{x}\right)^8$ 展开式中不含 x^4 项的系数和为(　　).

A. −1　　B. 0

C. 1　　D. 2

题型 173　二项式展开式的二项式系数与系数的最值

思路提示:(1)二项式系数的最大值(见知识点精讲).

(2)系数最值:最大系数满足 $a_{k-1}\leqslant a_k$ 且 $a_k\geqslant a_{k+1}$.

心得体会

【例 12.28】 $(a+b)^n$ 展开式中：

(1)只有第 7 项的二项式系数最大，则 $n=$_____；

(2)第 7 项二项式系数取最大值，$n=$_____.

【分析】 只有一项的二项式系数最大⇒n 是偶数.

有两项二项式系数最大⇒n 是奇数.

【解析】 (1)$T_{r+1}=C_n^r a^{n-r}b^r$ 只有 T_{6+1} 二项式系数最大，n 为偶数，最大值为 $C_n^{\frac{n}{2}}=C_n^6$，

$\frac{n}{2}=6$，得 $n=12$.

(2)当 n 为偶数时，$n=12$；n 为奇数时，最大二项式系数为 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ 和 $C_n^{\frac{n+1}{2}}\Rightarrow\frac{n-1}{2}=6$

或 $\frac{n+1}{2}=6\Rightarrow n=13$ 或 $n=11$. 所以 $n=11,12,13$.

【变式 1】 求 $(1-x)^{10}$ 展开式的系数最大项和最小项.

【变式 2】 求 $(1+2x)^{11}$ 展开式中二项式系数最大项数和系数最大项数.

【变式 3】 (2011·课标全国理，8)$\left(x+\frac{a}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中各项系数的和为 2，则该展开式中常数项为(　　).

A. -40　　B. -20

C. 20　　D. 40

题型 174　二项式定理的综合应用

【例 12.29】 证明：$(1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 能被 2^{n+1} 整除.

【解析】 因为 $(1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n}=(4+2\sqrt{3})^n+(4-2\sqrt{3})^n$

$=2^n[(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n]$，所以只需证明 $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ 能被 2 整除，

而 $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=[C_n^0 2^n(\sqrt{3})^0+C_n^1 2^{n-1}(\sqrt{3})^1+\cdots+C_n^n 2^0(\sqrt{3})^n]+$

$[C_n^0 2^n(-\sqrt{3})^0+C_n^1 2^{n-1}(-\sqrt{3})^1+\cdots+C_n^n 2^0(-\sqrt{3})^n]=2[2^n+C_n^2 2^{n-2}(\sqrt{3})^2+$

$C_n^4 2^{n-4}(\sqrt{3})^4+\cdots]$ 显然能被 2 整除，因此，$(1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 能被 2^{n+1} 整除.

【变式 1】 若 $n\in\mathbf{N}^*$，证明：$3^{2n+3}-24n+37$ 能被 64 整除.

【例 12.30】 (1)求证：$2^n\geqslant 2n+2$ $(n\in\mathbf{N},n\geqslant 3)$.

(2)求证：$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ $(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

【解析】 (1)因为 $2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n$，又 $n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^*$，所以 $(1+1)^n$ 展开式至少有 4 项，即 $2^n=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n\geqslant C_n^0+C_n^1+C_n^{n-1}+C_n^n=1+n+n+1=2n+2$. 证毕.

(2)首先 $n\geqslant 2$，显然有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{n}C_n^1+\frac{1}{n^2}C_n^2+\cdots+\frac{1}{n^n}C_n^n=1+1+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n^n}<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}$

$+\cdots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+$

心得体会

$\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=3-\frac{1}{n}<3$；同时$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{n}C_n^1+\cdots+\frac{1}{n^n}C_n^n>1+\frac{1}{n}C_n^1=2$（至少有3项）.故$n\geqslant 2$有$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

【变式1】 $a,b\in\mathbf{R},a+b\geqslant 0,n\in\mathbf{N}^*$，求证：$\frac{a^n+b^n}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$.

【变式2】 求证：$(2n+1)^n\geqslant(2n)^n+(2n-1)^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

【变式3】 对于$n\in\mathbf{N}^*$，求证：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

第十三章　概率与统计

第一节　概率及其计算

考纲解读

1. 了解随机事件发生的不确定性和频率的稳定性、概率的意义、频率与概率的区别.
2. 了解两个互斥事件的概率的加法公式.
3. 理解古典概型及其概率计算公式.
4. 了解随机数的意义，能运用模拟方法估计概率.
5. 了解几何概型的意义.

命题趋势探究

1. 本部分为高考必考内容，在选择题、填空题和解答题中都有渗透.
2. 命题设置以两种概型的概率计算及互斥、对立事件的概率公式为核心内容，题型及分值稳定，难度中等或中等以下.

知识点精讲

一、必然事件、不可能事件、随机事件

在一定条件下：

①必然要发生的事件叫必然事件；

②一定不发生的事件叫不可能事件；

③可能发生也可能不发生的事件叫随机事件.

二、概率

在相同条件下，做 n 次重复试验，事件 A 发生 m 次，测得 A 发生的频率为 $\frac{m}{n}$，在大量重复试验中，A 发生的频率在某个常数附近摆动，这个确定的常数叫作 A 的概率，记作 $P(A)$ $(0\leqslant P(A)\leqslant 1)$. 对于必然事件 A，$P(A)=1$；对于不可能事件 A，$P(A)=0$.

心得体会

三、基本事件和基本事件空间

在一次试验中，不可能再分的事件，称为基本事件；所有基本事件组成的集合称为基本事件空间.

四、两个基本概型的概率公式——除法

1. 古典概型

条件$\begin{cases}\text{基本事件空间含有有限个基本事件}\\ \text{每个基本事件发生的可能性相同}\end{cases}$

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}=\frac{card(A)}{card(I)}$$

2. 几何概型

条件：每个事件都可以看作某几何区域 Ω 的子集 A，A 的几何度量（长度、面积或体积）记为 μ_A.

$$P(A)=\frac{\mu_A}{\mu_\Omega}$$

五、互斥事件的概率——加法和减法

1. 互斥事件

在一次试验中不能同时发生的事件称为互斥事件. A,B 互斥$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

2. 对立

A,B 互斥，且其中必有一个发生，称 A,B 对立，记作 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$. $P(\overline{A})=1-P(A)$. A,B 互斥$\nLeftrightarrow A,B$ 对立.

六、条件概率与独立重复试验

(1)在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率叫作 A 发生时 B 发生的条件概率，记作 $P(B|A)$，条件概率公式为 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

(2)若 $P(B|A)=P(B)$，即 $P(AB)=P(A)P(B)$，称 A 与 B 为相互独立事件. A 与 B 相互独立即 A 发生与否对 B 的发生与否无影响，反之亦然. 即 A,B 相互独立则有公式 $P(AB)=P(A)P(B)$.

(3)在 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次独立重复试验中，事件 A 发生 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 次的概率记作 $P_n(k)$，记 A 在其中一次试验中发生的概率为 $P(A)=p$，则 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

题型归纳及思路提示

题型 175　古典概型

思路提示：①确定古典概型的条件，求出 $card(A)$，$card(I)$；②计算 $P(A)=\dfrac{card(A)}{card(I)}$.

心得体会

【例 13.1】 (2008·山东理,7)在某地的奥运火炬传递活动中,有编号 1,2,3,…,18 的 18 名火炬手,若从中任选 3 人,则选出的 3 名火炬手的编号能组成以 3 为公差的等差数列的概率为(　　).

A. $\frac{1}{51}$　　B. $\frac{1}{68}$　　C. $\frac{1}{306}$　　D. $\frac{1}{408}$

【解析】 18 人任选 3 人的不同选法是等可能事件. $card(I)=C_{18}^{3}=\frac{18\times17\times16}{3\times2\times1}$,

A:选出 3 人,其编号为以 3 为公差的等差数列 1,4,7;2,5,8;…;12,15,18.

$card(A)=12$,则 $P(A)=\frac{12}{1}\times\frac{6}{18\times17\times16}=\frac{1}{68}$. 故选 B.

【变式 1】 (2010·安徽文,10)甲从正方形四个顶点中任意选择两个顶点连成直线,乙也从该正方形四个顶点中任意选择两个顶点连成直线,则所得的两条直线相互垂直的概率是(　　).

A. $\frac{3}{18}$　　B. $\frac{4}{18}$　　C. $\frac{5}{18}$　　D. $\frac{6}{18}$

【变式 2】 (2007·四川理,12)已知一组抛物线 $y=\frac{1}{2}ax^2+bx+1$,其中 a 为 2,4,6,8 中任取的一个数,b 为 1,3,5,7 中任取的一个数,从这些抛物线中任意抽取两条,它们在与直线 $x=1$ 交点处的切线相互平行的概率是(　　).

A. $\frac{1}{12}$　　B. $\frac{7}{60}$　　C. $\frac{6}{25}$　　D. $\frac{5}{25}$

【变式 3】 (2006·江苏,10)如图 13-1 所示,有 1 个信号源和 5 个接收器,若接收器和信号源在同一个串联线路中,就能收到信号,将左、右两端各 6 个接线点各均分为 3 组,并各自两两用导线连接,则这 5 个接收器能同时收到信号源的概率为(　　).

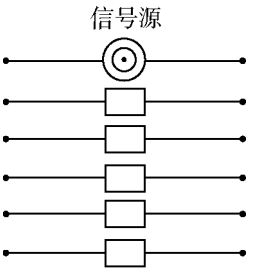


图　13-1

A. $\frac{4}{45}$　　B. $\frac{1}{36}$

C. $\frac{4}{15}$　　D. $\frac{8}{15}$

【变式 4】 (2007·湖北理,9)连抛两次骰子的点数分别为 m,n,向量 $\boldsymbol{a}=(m,n)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$的概率为(　　).

A. $\frac{5}{12}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{7}{12}$　　D. $\frac{5}{6}$

【变式 5】 (2007·福建理,12)如图 13-2 所示,3 行 3 列的方阵中有 9 个数 $a_{ij}(i=1,2,3,j=1,2,3)$,从中任取三个数,则至少有两个数位于同行或同列的概率是(　　).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
图　13-2

A. $\frac{3}{7}$　　B. $\frac{4}{7}$　　C. $\frac{1}{14}$　　D. $\frac{13}{14}$

【变式 6】 (2008·江西理,11)电子钟一天显示的时间从 00:00～23:59,每一时间都由 4 个数字组成,则一天中任取一时刻显示的四个数字之和为 23 的概率为(　　).

心得体会

A. $\frac{1}{180}$　　B. $\frac{1}{288}$　　C. $\frac{1}{360}$　　D. $\frac{1}{480}$

【变式 7】 (2008·陕西文,18)一个口袋中装有大小相同的 2 个红球,3 个黑球和 4 个白球,从口袋中一次摸出一个球,摸出的球不再放回.

(1)连续摸球 2 次,求第一次摸出黑球,第二次摸出白球的概率.

(2)如果摸出红球,则停止摸球,求摸球次数不超过 3 次的概率.

【变式 8】 (2010·福建文,18)设平面向量 $\boldsymbol{a}_m=(m,1)$,$\boldsymbol{b}_n=(2,n)$,其中 $m,n\in\{1,2,3,4\}$.

(1)请列出有序数组 (m,n) 的所有可能结果;

(2)若"使得 $\boldsymbol{a}_m\perp(\boldsymbol{a}_m-\boldsymbol{b}_n)$ 成立的"为事件 A,求事件 A 发生的概率.

【变式 9】 (2011·福建理,13)盒中装有形状、大小完全相同的 5 个球,其中红色球 3 个,黄色球 2 个.若从中随机取出 2 个球,则所取出的 2 个球颜色不同的概率等于_____.

【变式 10】 (2011·陕西理,10)甲乙两人一起去游"2011 西安世园会",他们约定,各自独立地从 1 到 6 号景点中任选 4 个进行游览,每个景点参观 1 小时,则最后一小时他们同在一个景点的概率是(　　).

A. $\frac{1}{36}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{5}{36}$　　D. $\frac{1}{6}$

题型 176　几何概型的计算

思路提示:①确定为几何概型图示 Ω,A;②计算 μ_Ω,μ_A,求出 $P(A)=\frac{\mu_A}{\mu_\Omega}$.

【例 13.2】 (2008·江苏,6)在平面直角坐标系中,设 $D=\{(x,y)\mid|x|\leqslant2,|y|\leqslant2\}$,$E=\{(x,y)\mid\sqrt{x^2+y^2}\leqslant1\}$,向 D 中随机投一点 P,P 落在 E 中的概率为_____.

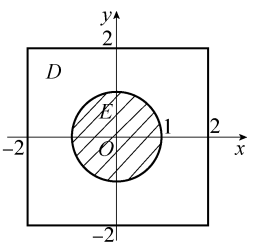
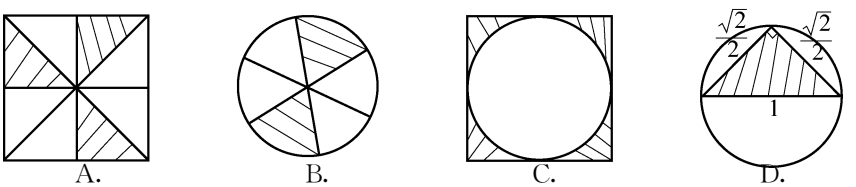


图　13-3

【解析】 在平面直角坐标系中分别作出 D 和 E 的区域.如图 13-3 所示为几何概型,$\mu_\Omega=\mu_D=4\times4=16$,$\mu_A=\mu_E=\pi$,故 $P(A)=\frac{\pi}{16}$.

【变式 1】 选项 A,B,C,D 分别表示 4 个游戏盘,各正方形边长和圆的直径均为 1,撒一粒黄豆落在盘中阴影部分即可中奖,小明希望中奖,他应选择的游戏盘为(　　).



【变式 2】 (2011·福建理,4)如图 13-4 所示,矩形 $ABCD$ 中,点 E 为边 CD 的中点,若在矩形 $ABCD$ 内部随机取一个点 Q,则点 Q 取自△ABE 内部的概率等于(　　).

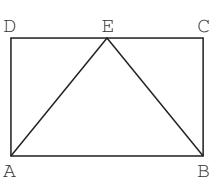


图　13-4

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

心得体会

【变式 3】（2011·江西理，12）小波通过做游戏的方式来确定周末活动，他随机地往单位圆内投掷一点，若此点到圆心的距离大于$\frac{1}{2}$，则周末去看电影；若此点到圆心的距离小于$\frac{1}{4}$，则去打篮球；否则，在家看书，则小波周末不在家看书的概率为_____.

【变式 4】$A=[2,\log_2 t]$，$B=\{x\mid x^2-14x+24\leqslant 0\}$，$x,t\in\mathbf{R}$，$A\subseteq B$.

（1）定义区间$[a,b]$的长度为$b-a$，A 的长度为 3，则 $t=$_____.

（2）某函数 $f(x)$的值域为 B，且 $f(x)\in A$ 的概率不小于 0.6，则 $t\in$_____.

【变式 5】（2008·山东邹平）在一个长为 π，宽为 2 的矩形 $OABC$ 中，曲线 $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$与 x 轴围成阴影（如图 13-5 所示）向矩形 $OABC$ 内随机投一点 P，则 P 落在阴影部分的概率为（　　）.

A. $\frac{1}{\pi}$　　B. $\frac{2}{\pi}$　　C. $\frac{3}{\pi}$　　D. $\frac{4}{\pi}$

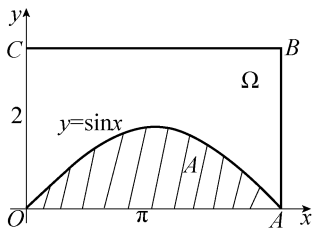


图　13-5

【变式 6】（2008·宁夏银川）已知 $f(x)=-x^2+ax-b$，$a,b\in[0,4]$，则 $f(1)>0$ 的概率为_____.

【变式 7】（2008·江苏南通）$A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid ax+b\cdot 2^x-1<0,0\leqslant a\leqslant 2,1\leqslant b\leqslant 3\}$.

（1）若 $a,b\in\mathbf{N}$，求 $A\cap B\neq\varnothing$的概率；

（2）若 $a,b\in\mathbf{R}$，求 $A\cap B=\varnothing$的概率.

第二节　概率与概率分布

考纲解读

1. 理解取有限个值的离散型随机变量及其分布列的概念，了解分布列对于刻画随机现象的重要性.
2. 理解超几何分布及其推导过程，并能进行简单的应用.
3. 了解条件概率和两个事件相互独立的概念，理解 n 次独立重复试验的模型及二项分布，并能解决一些简单的实际问题.
4. 理解取有限个值的离散型变量均值、方差的概念，能计算简单离散型随见变量的均值、方差、并能解决一些实际问题.
5. 利用实际问题的直方图，了解正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义.

心得体会

命题趋势探究

1. 高考命题中，该部分命题形式有选择题、填空题，但更多的是解答题.
2. 命题主要以随机变量分布列为主体，计算离散型随机变量的期望和方差，其中二项分布为重要考点，难度中等以下.
3. 如有关于正态分布的考题则为一道小题.

知识点精讲

一、离散型随机变量的分布列的性质

如表 13-1 所示，有以下结论：

表　13-1

ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	…	ξ_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

(1) $p_i \geqslant 0\ (1 \leqslant i \leqslant n)$，$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$.

(2) $E\xi$ 表示 ξ 的期望：$E\xi=\xi_1 p_1+\xi_2 p_2+\cdots+\xi_n p_n$（$E\xi$ 表示 ξ 的平均水平）.

(3) $D\xi$ 表示 ξ 的方差：$D\xi=(\xi_1-E\xi)^2 p_1+(\xi_2-E\xi)^2 p_2+\cdots+(\xi_n-E\xi)^2 p_n$

（$D\xi$ 表示 ξ 取值的波动性，$D\xi$ 越大，ξ 取值的波动性越大）.

(4) 二项分布：若 $P(\xi_n)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\ (k=0,1,2,\cdots,n,0<p<1)$，称 ξ 服从参数为 n，p 的二项分布，记作 $\xi \sim B(n,p)$，此时有公式 $E\xi=np$，$D\xi=np(1-p)$.

(5) 超几何分布：总数为 N 的两类物品，其中一类为 M 件，从 N 中取 n 件恰含 M 中的 m 件，$m=0,1,2,\cdots,M$，$P(\xi=m)=\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$，称 ξ 服从参数为 N，M，n 的超几何分布，记作 $\xi \sim H(n,M,N)$，此时有公式 $E\xi=\dfrac{nM}{N}$.

(6) η 与 ξ 是两个随机变量，且 $\eta=a\xi+b$，则有公式 $E\eta=aE\xi+b$，$D\eta=a^2 D\xi$.

(7) 若 y 和 ξ 是两个相互独立的随机变量，$E(\xi+y)=E\xi+Ey$.

二、正态分布

(1) 若 X 是连续型随机变量，且其概率密度曲线表达式为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbf{R}$$

其中，μ，σ 是参数，且 $\sigma>0$，$-\infty<\mu<+\infty$.

其图像如图 13-6 所示，且有以下性质.

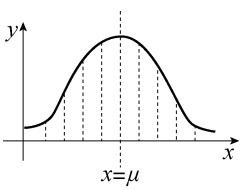


图　13-6

①曲线在 x 轴的上方，并且关于直线 $x=\mu$ 对称.

心得体会

②曲线在 $x=\mu$ 处取得最高点，并由此处向左右两边延伸时逐渐降低，呈现“中间高，两边低”的形状.

③曲线的形状由参数 σ 确定，σ 越大，曲线越“矮胖”；σ 越小，曲线越“高瘦”.

④$f(x)$图像与 x 轴之间的面积为 1.

(2)$E\xi=\mu$，$D\xi=\sigma^2$，记 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$.

当 $\mu=0$，$\sigma=1$(时)，ξ 服从标准正态分布，即 $\xi\sim N(0,1)$.

(3)$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 ξ 在 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$，$(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$，$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$上取值的概率分别为 68.3%，95.4%，99.7%，这叫作正态分布的 3σ 原则.

题型归纳及思路提示

题型 177　概率的计算

【例 13.3】 (2010·安徽理，15)甲罐中有 5 个红球、2 个白球和 3 个黑球，乙罐中有 4 个红球、3 个白球和 3 个黑球. 先从甲罐中随机取出一球放入乙罐，分别以 A_1，A_2，A_3 表示由甲罐中取出的球是红球、白球和黑球的事件，再从乙罐中随机取出一球，以 B 表示从乙罐中取出的球是红球的事件，则下列结论中正确的是_____.

(1)$P(B)=\frac{2}{5}$.

(2)$P(B|A_1)=\frac{5}{11}$.

(3)事件 B 与事件 A_1 相互独立.

(4)A_1，A_2，A_3 两两互斥.

(5)$P(B)$值不能确定，因为它与 A_1，A_2，A_3 中究竟哪一个发生有关.

【解析】 (1)$P(B)=\frac{5}{10}\times\frac{5}{11}+\frac{5}{10}\times\frac{4}{11}=\frac{9}{22}$，即 $P(B)$值确定，但 $P(B)\neq\frac{2}{5}$，故(1)和(5)错误.

(2)$P(B|A_1)=\frac{P(A_1B)}{P(A_1)}=\frac{\frac{5}{10}\times\frac{5}{11}}{\frac{5}{10}}=\frac{5}{11}$，故(2)正确.

(3)A_1 发生与否对 B 明显有影响，故(3)错，也可由公式否定，$P(A_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{9}{22}$，$P(A_1\cap B)=\frac{5}{10}\times\frac{5}{11}=\frac{5}{22}$，$P(A_1\cap B)\neq P(A_1)P(B)\Rightarrow$故(3)错误.

(4)明显正确. 故填(2)、(4).

【变式 1】 甲、乙、丙射手击中目标的概率分别为 0.6，0.7，0.8，求：

(1)甲、乙、丙 3 人各射击一次，恰一人击中目标的概率；

(2)3 人各射击一次，至少一次击中目标的概率；

(3)每人射击 3 次，甲、乙、丙击中次数依次为 1，2，3 次的概率(甲、乙、丙每次

心得体会

击中目标与否相互独立).

【变式 2】 甲、乙下棋,单场甲胜的概率为 0.6(不同场次胜负相互独立),求:

(1)3 局 2 胜制,乙胜的概率;

(2)5 局 3 胜制,甲胜的概率;

(3)5 局 3 胜制,至多 4 局一方胜出的概率.

【变式 3】 (2010·江西理,11)一位国王的铸币大臣在每箱 100 枚的硬币中各掺入了一枚劣币,国王怀疑大臣作弊,他用两种方法来检测,方法一:在 10 箱中各任意抽取一枚;方法二:在 5 箱各任意抽取两枚. 国王用方法一、二能发现至少一枚劣币的概率分别记为 p_1,p_2,则(　　).

A. $p_1=p_2$　　B. $p_1<p_2$

C. $p_1>p_2$　　D. 以上三种情况都有可能

【变式 4】 (2009·全国Ⅰ文,20)甲、乙二人进行一次围棋比赛,约定先胜 3 局者获得这次比赛的胜利,比赛结束. 假设在一局中,甲获胜的概率为 0.6,乙获胜的概率为 0.4,各局比赛结果相互独立. 已知前 2 局中,甲、乙各胜 1 局.

(1)求再赛 2 局结束这次比赛的概率;(2)求甲获得这次比赛胜利的概率.

【变式 5】 (2008·湖南文,16)甲乙丙三人参加一家公司的招聘面试,面试合格者可正式签约. 甲表示只要面试合格就签约,乙、丙则约定:两人面试都合格就一同签约,否则两人都不签约. 设每人面试合格的概率都是$\frac{1}{2}$,且面试是否合格互不影响. 求:(1)至少一人面试合格的概率;(2)没人签约的概率.

【变式 6】 四枚不同的金属纪念币 A、B、C、D,投掷时,A、B 两枚正面向上的概率均为$\frac{1}{2}$,另两枚 C、D(假设为非均匀硬币)正面向上的概率均为 $a(0<a<1)$这四枚纪念币同时投掷一次,设 ξ 表示出现正面向上的枚数.

(1)若 A、B 出现一正一反与 C、D 出现两正的概率相等,求 a 的值;

(2)求 ξ 的分布列及数学期望(用 a 表示);

(3)若有 2 枚纪念币出现正面向上的概率最大,求 a 的取值范围.

【变式 7】 (2011·辽宁理,5)从 1,2,3,4,5 中任取 2 个不同的数,事件 A="取到的两个数之和为偶数",事件 B="取到的 2 个数均为偶数",则 $P(B|A)=$(　　).

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{2}$

【变式 8】 (2011·湖南理,15)如图 13-7 所示,$EFGH$ 是以 O 为圆心,半径为 1 的圆的内接正方形. 将一颗豆子随机地扔到该圆内,用 A 表示事件"豆子落在正方形 $EFGH$ 内",B 表示事件"豆子落在扇形 OHE(阴影部分)内",则(1)$P(A)=$_____;(2)$P(B|A)=$_____.

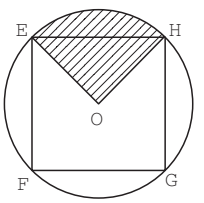


图　13-7

题型 178　离散型随机变量的数学期望与方差

【例 13.4】 (2007·浙江理,15)随机变量 ξ 的分布如表 13-2 所示,其中 a,b,c 成等差数

列，$E\xi=\frac{1}{3}$，则 $D\xi=$ _____.

表　13-2

ξ	-1	0	1
p	a	b	c

【分析】 $P(\xi=-1)+P(\xi=0)+P(\xi=1)=1$，

$E\xi=(-1)\cdot P(\xi=-1)+0\cdot P(\xi=0)+1\cdot P(\xi=1)$.

【解析】 $\begin{cases}a+b+c=1\\2b=a+c\\-a+c=\frac{1}{3}\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=\frac{1}{6}\\b=\frac{1}{3}\\c=\frac{1}{2}\end{cases}$，

$$D\xi=\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2\times a+\left(0-\frac{1}{3}\right)^2\times b+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\times c$$

$$=\frac{16}{9}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{9}.$$

【变式 1】 (2011·浙江理，15)某毕业生参加人才招聘会，分别向甲、乙、丙三个公司投递了个人简历.假定该毕业生得到甲公司面试的概率为$\frac{2}{3}$，得到乙、丙两公司面试的概率均为 p，且三个公司是否让其面试是相互独立的.记 X 为该毕业生得到面试的公司个数.若 $P(X=0)=\frac{1}{12}$，则随机变量 X 的数学期望 $E(X)=$ _____.

【变式 2】 (2011·上海理，9)马老师从课本上抄录一个随机变量 ξ 的概率分布律如表 13-3所示：

表　13-3

x	1	2	3
$P(\xi=x)$	?	!	?

请小牛同学计算 ξ 的数学期望.尽管“!”处完全无法看清，且两个“?”处字迹模糊，但能断定这两个“?”处的数值相同.据此，小牛给出了正确答案 $E\xi=$ _____.

【变式 3】 (2008·湖北理，17)袋中有 20 个大小相同的球，其中记上 0 号有 10 个，记上 n 号有 n 个($n=1,2,3,4$)，现在从袋中任取一球，ξ 表示取球的标号.

(1)求 ξ 的分布列、期望和方差；

(2)若 $\eta=a\xi+b$，$E\eta=1$，$D\eta=11$，求 a，b 的值.

【变式 4】 (2011·天津理，16)学校游园活动有这样一个游戏项目：甲箱子里装有 3 个白球、2 个黑球，乙箱子里装有 1 个白球、2 个黑球，这些球除颜色外完全相同.每次游戏从这两个箱子里各随机摸出 2 个球，若摸出的白球不少于 2 个，则获奖.(每次游戏结束后将球放回原箱)

(1)求在一次游戏中，①游戏摸出 3 个白球的概率；②获奖的概率.

(2)求在 2 次游戏中获奖次数 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

心得体会

【变式 5】 (2011·重庆理,17)某市公租房的房源位于 A、B、C 三个片区.设每位申请人只申请其中一个片区的房源,且申请其中任一个片区的房源是等可能的.求该市的任 4 位申请人中:

(1)恰有 2 人申请 A 片区房源的概率;

(2)申请的房源所在片区的个数 ξ 的分布列和期望.

【变式 6】 (2011·大纲全国理,18)根据以往统计资料,某地车主购买甲种保险的概率为 0.5,购买乙种保险但不购买甲种保险的概率为 0.3.设各车主购买保险相互独立.

(1)求该地 1 位车主至少购买甲、乙两种保险中的 1 种的概率;

(2)X 表示该地的 100 位车主中,甲、乙两种保险都不购买的车主数.求 X 的期望.

【变式 7】 (2008·山东理,18)甲、乙两队参加奥运知识竞赛,每队 3 人,每人回答一个问题,答对者为本队赢得 1 分,答错者得零分,假设甲队中每人答对的概率均为 $\frac{2}{3}$,乙队 3 人答对的概率分别为 $\frac{2}{3}$,$\frac{2}{3}$,$\frac{1}{2}$,各人回答正确与否相互独立,用 ξ 表示甲队的总得分.

(1)求随机变量 ξ 的分布列和数学期望;

(2)用 A 表示"甲、乙两队总得分之和等于 3"这一事件,用 B 表示"甲队总得分大于乙队总得分"这一事件,求 $P(AB)$.

【变式 8】 (2011·安徽理,20)工作人员需进入核电站完成某项具有高辐射危险的任务,每次只派一个人进去,且每个人只派一次,工作时间不超过 10 分钟,如果前一个人 10 分钟内不能完成任务则撤出,再派下一个人.现在一共只有甲、乙、丙三个人可派,他们各自能完成任务的概率分别 p_1、p_2、p_3,假设 p_1、p_2、p_3 互不相等,且假定各人能否完成任务的事件相互独立.

(1)如果按甲在先,乙次之,丙最后的顺序派人,求任务能被完成的概率.若改变三个人被派出的先后顺序,任务能被完成的概率是否发生变化?

(2)若按某指定顺序派人,这三个人各自能完成任务的概率依次为 q_1,q_2,q_3,其中 q_1,q_2,q_3 是 p_1,p_2,p_3 的一个排列,求所需要派出人员数目 X 的分布列和均值(数学期望)$E(X)$;

(3)假定 $1>p_1>p_2>p_3$,试分析以怎样的先后顺序派出人员,可使所需派出的人员数目的均值(数学期望)达到最小.

【变式 9】 (2011·江西理,16)某饮料公司招聘了一名员工,现对其进行一项测试,以便确定工资级别.公司准备了两种不同的饮料共 8 杯,其颜色完全相同,并且其中 4 杯为 A 饮料,另外 4 杯为 B 饮料,公司要求此员工一一品尝后,从 8 杯饮料中选出 4 杯 A 饮料.若 4 杯都选对,则月工资定为 3500 元;若 4 杯选对 3 杯,则月工资定为 2800 元;否则月工资定为 2100 元.令 X 表示此人选对 A 饮料的杯数.假设此人对 A 和 B 两种饮料没有鉴别能力.

(1)求 X 的分布列;

(2)求此员工月工资的期望.

心得体会

题型 179　正态分布

思路提示：(1)正态分布概率密度曲线：①曲线在 x 轴的上方，并且关于直线 $x=\mu$ 对称；②曲线在 $x=\mu$ 时处于最高点，并由此处向左、右两边延伸时逐渐降低，呈现“中间高，两边低”的形状；③曲线的形状由参数 σ 确定，σ 越大，曲线越“矮胖”；σ 越小，曲线越“高瘦”.

(2)3σ 原则：正态变量在区间 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$，$(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$，$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 内，取值的概率分别是 68.3%，95.4%，99.7%.

【例 13.5】 如图 13-8 所示为正态分布 $N(0,1)$ 密度曲线图，则 ①$\frac{1}{2}-\Phi(-a)$，②$\Phi(-a)$，③$\Phi(a)-\frac{1}{2}$，④$\frac{1}{2}[\Phi(a)-\Phi(-a)]$ 中能表示图中阴影部分面积的个数为(　　).

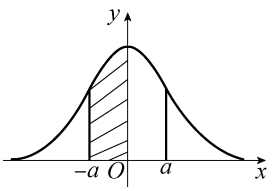


图　13-8

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

【解析】 $S_{阴影}=P(-a\leqslant x\leqslant 0)=P(x\leqslant 0)-P(x\leqslant -a)=\frac{1}{2}-\Phi(-a)$，故①正确；

②若成立，则 $S_{阴影}=\frac{1}{2}-\Phi(-a)=\Phi(-a)\Rightarrow\frac{1}{4}=\Phi(-a)$，不一定成立，故②不正确；

③$\Phi(a)-\frac{1}{2}=P(x\leqslant a)-P(x\leqslant 0)=P(0\leqslant x\leqslant a)$，由对称性成立，则 $P(0\leqslant x\leqslant a=P(-a\leqslant x\leqslant 0))$，故③成立，③正确；

④$\frac{1}{2}[\Phi(a)-\Phi(-a)]=\frac{1}{2}[P(x\leqslant a)-P(x\leqslant -a)]$

$=\frac{1}{2}P(-a<x\leqslant a)=\frac{1}{2}\times 2\times S_{阴影}=S_{阴影}$ 成立，④正确. 故选 C.

【变式 1】 (2009·厦门)随机变量 $\xi\sim N(2,9)$，$P(\xi\geqslant c+1)=P(\xi\leqslant c-1)$，$c=$(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【变式 2】 (2011·湖北理，5)已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，且 $P(\xi<4)=0.8$，则 $P(0<\xi<2)=$(　　).

A. 0.6　　B. 0.4　　C. 0.3　　D. 0.2

【例 13.6】 某自动打包机打包商品每包重 Xkg，$X\sim N(100,1.2^2)$，共 1500 包. 求：

(1)$X\in(100-1.2,100+1.2)$，X 有多少包？

(2)$X\in(100-2\times 1.2,100+2\times 1.2)$，$X$ 有多少包？

(3)$X\in(100-3\times 1.2,100+3\times 1.2)$，$X$ 有多少包？

【解析】 $\mu=100$，$\sigma=1.2$，所给区间为 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$，$(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$，$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$，由正态分布 3$\sigma$ 原则有：

(1)1500×0.683=1025(包).

(2)1500×0.954=1431(包).

(3)1500×0.997=1496(包).

心得体会

【变式 1】 (2008·安徽理,10)两个正态分布 $N_1(\mu_1,\sigma_1^2)$,$N_2(\mu_2,\sigma_2^2)$ $(\sigma_1>0,\sigma_2>0)$的密度函数图像如图 13-9 所示,则有(　　).

A. $\mu_1<\mu_2,\sigma_1<\sigma_2$

B. $\mu_1<\mu_2,\sigma_1>\sigma_2$

C. $\mu_1>\mu_2,\sigma_1<\sigma_2$

D. $\mu_1>\mu_2,\sigma_1>\sigma_2$

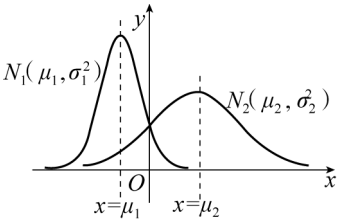


图　13-9

【变式 2】 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0,1)$,$P(\xi>1)=p$,则 $P(-1<\xi<0)$ 等于(　　).

A. $\frac{1}{2}p$　　B. $1-p$

C. $1-2p$　　D. $\frac{1}{2}-p$

【变式 3】 (2007·安徽理,10)以 $\Phi(x)$ 表示标准正态总体在区间 $(-\infty,x)$ 内取值的概率,若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,则概率 $P(|\xi-\mu|<\sigma)$ 等于(　　).

A. $\Phi(\mu+\sigma)-\Phi(\mu-\sigma)$　　B. $\Phi(1)-\Phi(-1)$

C. $\Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)$　　D. $2\Phi(\mu+\sigma)$

第三节　统计与统计案例

考纲解读

1. 理解随机抽样的必要性和重要性.
2. 会用简单随机抽样方法从总体中抽取样本;了解分层抽样和系统抽样方法.
3. 了解分布的意义和作用,会列频率分布表,会画出频率分布直方图、频率折线图、茎叶图,理解它们各自的特点.
4. 理解样本数据标准差的意义和作用,会计算数据标准差.
5. 能从样本的频率分布估计总体分布,会用样本的基本数字特征估计总体的基本数字特征,理解用样本估计总体的思想.
6. 会用随机抽样的基本方法和样本估计总体的思想解决一些简单的实际问题.
7. 会作两个有关联变量的数据的散点图,会利用散点图认识变量间的相关关系.
8. 了解最小二乘法的思想,能根据给出的线性回归方程系数公式建立线性回归方程.
9. 了解常见的统计方法,并能应用这些方法解决一些实际问题.

(1)独立性检验

了解独立性检验(只要求 2×2 列联表)的基本思想、方法及其简单应用.

(2)回归分析

了解回归的基本思想、方法及简单应用.

心得体会

命题趋势探究

1. 本节内容是高考必考内容，以选择题、填空题为多，文科考题中在解答题中常有涉及.
2. 命题内容为：①3 种抽样(以分层抽样为多)；②频率分布表和频率分布直方图的制作、识图及运用. ①②常有结合趋向，考题难度中下.
3. 统计案例为新增内容，考查考生解决实际问题的能力.

知识点精讲

一、抽样方法

3 种抽样方式的对比如表 13-4 所示.

表　13-4

类别	共同点	各自特点	相互关系	使用范围
简单随机抽样	每个个体被抽到的机会均等，总体 N，样本 n，每个个体被抽到的概率 $P=\frac{n}{N}$	从总体中随机逐个抽取	—	总体中的个体个数较少
系统抽样		总体均分几段， 每段 T 个， 第 1 段随机取 a_1， 第 2 段取 a_1+T， 第 3 段取 a_1+2T， …	第 1 段 简单随机抽样	总体中的个体个数较多
分层抽样		将总体分成 n 层， 每层按比例抽取	每层按简单随机抽样或系统抽样	总体由差异明显的几部分组成

二、样本分析

(1)①样本平均 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$；②方差 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$；

三、频率分布直方图的解读

(1)频率分布直方图的绘制.

①由频率分布表求出每组频数 n_i；②求出每组频率 $P_i=\frac{n_i}{n}$(n 为样本容量)；③列出样本频率分布表；④画出样本频率分布直方图，直方图横坐标表示各组分组情况，纵坐标为每组频率与组距的比值，各长方形面积即为各组频率，长方形面积总和为 1.

(2)样本估计总体

心得体会

步骤：总体→抽取样本→频率分布表→频率分布直方图→估计总体概率分布.

样本容量越大，估计越精细，样本容量无限增大，直方图无限趋近概率分布密度曲线.

(3)用$\overline{X}$估计总体期望EX，用s^2估计总体方差，$s=\sqrt{s^2}$估计总体标准差.

公式：$\overline{aX+b}=a\overline{X}+b$，$s^2(aX+b)=a^2s^2(X)$.

四、线性回归

线性回归是研究不具备确定的函数关系的两个变量之间的关系——相关关系的方法.

对于一组具有线性相关关系的数据$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\cdots(x_n,y_n)$，

其回归方程$\hat{y}=b\hat{x}+a$的求法为$\begin{cases}\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\\ \hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^2-n\bar{x}^2)}.\end{cases}$

其中，$\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$\bar{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$，$(\bar{x},\bar{y})$称为样本点的中心.

步骤：画散点图，如散点图中的点基本分布在一条直线附近，则这条直线叫这两个变量的回归直线，直线斜率$k>0$，称两个变量正相关；$k<0$，称两个变量负相关.

五、独立性

独立性检验是判断两个分类变量是否存在相关关系的案例分析方法. 步骤为列出2×2列联表(如表13-5所示)，求出$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，并判断：

表 13-5

条件A / 条件B	A_1	A_2	合计
B_1	a	c	$a+c$
B_2	b	d	$b+d$
合计	$a+b$	$c+d$	$n=a+b+c+d$

若$\chi^2>10.828$，有99.9%把握称A取A_1或A_2对B取B_1，B_2有关系；

若$\chi^2>6.635$，有99%把握称A取A_1或A_2对B取B_1，B_2有关系；

若$\chi^2>3.841$，有95%把握称A取A_1或A_2对B取B_1，B_2有关系.

题型归纳及思路提示

题型180　抽样

思路提示：见知识点精讲.

【例13.7】　(2008·广东理，3)某校共有2000名学生，各年级男、女生人数如表13-6所示，已知在全校学生中任取一名，抽到二年级女生的概率为0.19，现用分层抽样的

心得体会

方法，在全校抽取 64 名学生，则应在三年级抽取的学生人数为(　　).

表　13-6

	一年级	二年级	三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	z

A. 12　　B. 16　　C. 18　　D. 24

【解析】 依题意：$\frac{x}{2000}=0.19\Rightarrow x=380$，

$$\Rightarrow y+z=2000-(373+377+380+370)=500,$$

依分层抽样原理有 $\frac{64}{2000}=\frac{t}{500}\Rightarrow t=16$(人). 故选 B.

【变式 1】 (2011・湖北文，11)某市有大型超市 200 家、中型超市 400 家、小型超市 1400 家，为掌握各类超市的营业情况，现按分层抽样方法抽取一个容量为 100 的样本，应抽取中型超市_____家.

【变式 2】 (2011・山东文，13)某高校甲、乙、丙、丁四个专业分别有 150、150、400、300 名学生，为了解学生的就业倾向，用分层抽样的方法从该校这四个专业共抽取 40 名学生进行调查，应在丙专业抽取的学生人数为_____.

【变式 3】 (2008・广东汕头)某企业三月中旬生产 A，B，C 三种产品共 3000 件，根据分层抽样的结果，企业统计员制作了统计表格，如表 13-7 所示，由于不小心，表格中有关 A，C 产品的数据被污染看不清楚，统计员记得 A 产品的样本容量比 C 产品的样本容量多 10，由此可得 C 产品的数量为_____件.

表　13-7

产品类别	A	B	C
产品数量(件)		1300	
样品容量(件)		130	

【变式 4】 (2010・安徽文，14)某地居民 100000 户，其中普通家庭 99000 户，高收入家庭 1000 户，从普通家庭中以简单随机抽样方式抽取 990 户，从高收入家庭中以简单随机抽样方式抽取 100 户进行调查，发现共有 120 户家庭拥有 3 套或 3 套以上住房，其中普通家庭 50 户，高收入家庭 70 户，依据这些数据并结合所掌握的统计知识，你认为该地拥有 3 套或 3 套以上住房的家庭所占比例的合理估计是_____.

【变式 5】 (2009・广东文，12)某单位 200 名职工的年龄分布情况如图 13-10 所示，现要从中抽取 40 名职工作样本，用系统抽样法，将全体职工随机按 1～200 编号，并按编号顺序平均分为 40 组(1～5 号，6～10 号，…，196～200 号). 若第 5 组抽出的号码为 22，则第 8 组抽出的号码应是_____，若用分层抽样方法，则 40 岁以下年龄段应抽取_____人.

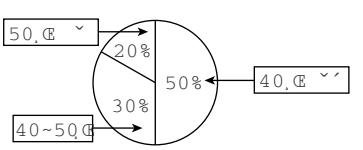


图　13-10

心得体会

题型 181　样本分析

【例 13.8】 已知样本 $X:\begin{matrix}10&8&8&10&13&8&10&12&11&7\\8&9&11&9&12&9&10&11&12&12\end{matrix}$，则：

(1)$\overline{X}=$_____；(2)$s^2(X)=$_____；

(3)0.3 为下列(　　)组的频率.

A. 5.5～7.5　　B. 7.5～9.5　　C. 9.5～11.5　　D. 11.5～13.5

【解析】 (1)取 $Y=X-10:\left.\begin{matrix}0&-2&-2&0&3&-2&0&2&1&-3\\-2&-1&1&-1&2&-1&0&1&2&2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overline{Y}=0$，

$s^2(Y)=2.8\Rightarrow(1)\overline{X}=\overline{Y+10}=\overline{Y}+10=10$；

(2)$s^2(X)=s^2(Y)=2.8$；

(3)只有选项 C 含有 6 个元素，$\frac{6}{20}=0.3$. 故选 C.

甲	十位数字	乙
8 7 2	7	8
6	8	2 8
2	9	1 5
个位数字		个位数字

图　13-11

【变式 1】 (2008・山东潍坊)甲、乙两同学在 5 次体育测试中的成绩如图 13-11 所示，则有(　　).

A. $\overline{X_{甲}}<\overline{X_{乙}}$，乙比甲稳定

B. $\overline{X_{甲}}>\overline{X_{乙}}$，甲比乙稳定

C. $\overline{X_{甲}}>\overline{X_{乙}}$，乙比甲稳定

D. $\overline{X_{甲}}<\overline{X_{乙}}$，甲比乙稳定

【变式 2】 (2011・北京理，17)茎叶图(如图 13-12 所示)，记录了甲、乙两组各四位同学的植树棵数，乙组记录中有一个数据模糊，无法确认，在图中以 X 表示.

(1)如果 $X=8$，求乙组同学植树棵树的平均数和方差；

(2)如果 $X=9$，分别从甲、乙两组中随机选取一名同学，求这两名同学植树总棵数 Y 的分布列和数学期望.

(注：方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$，其中 $\bar{x}$ 为 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 的平均数.)

… Ø		Ø
9 9	0	X 8 9
1 1	1	0

图　13-12

【变式 3】 为检测某种产品的质量，抽取了一个容量为 100 的样本，数据的分组数如下：

[10.75,10.85),3；[10.85,10.95),9；[10.95,11.05),13；

[11.05,11.15),16；[11.15,11.25),26；[11.25,11.35),20；

[11.35,11.45),7；[11.45,11.55),4；[11.55,11.65),2.

(1)列出频率分布表(含累积频率)；

(2)画出频率分布直方图以及频率分布折线图；

(3)据上述图表，估计数据在[10.95,11.15)范围内的可能性为百分之几；

(4)数据小于 11.20 的可能性是百分之几?

【变式 4】 现有 10 个数，其平均数为 3，且这 10 个数的平方和为 100，则这 10 个数的标准差为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

心得体会

【变式 5】(2009・上海理,17)在发生某公共卫生事件期间,有专业机构认为该事件在一段时间内没有发生大规模群体感染的标志为“连续 10 天,每天新增疑似病例不超过 7 人”. 根据过去 10 天甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据,一定符合该标志的是(　　).

A. 甲地:总体均值为 3,中位数为 4

B. 乙地:总体均值为 1,总体方差大于 0

C. 丙地:中位数为 2,众数为 3

D. 丁地:总体均值为 2,总体方差为 3

【变式 6】(2011・福建理,19)某产品按行业生产标准分成 8 个等级,等级系数 X 依次为 1,2,…,8,其中 $X\geqslant 5$ 为标准 A,$X\geqslant 3$ 为标准 B,已知甲厂执行标准 A 生产该产品,产品的零售价为 6 元/件;乙厂执行标准 B 生产该产品,产品的零售价为 4 元/件,假定甲、乙两厂的产品都符合相应的执行标准

(1)已知甲厂产品的等级系数 X_1 的概率分布列如下表所示:

X_1	5	6	7	8
P	0.4	a	b	0.1

且 X_1 的数字期望 $E(X_1)=6$,求 a,b 的值;

(2)为分析乙厂产品的等级系数 X_2,从该厂生产的产品中随机抽取 30 件,相应的等级系数组成一个样本,数据如下:

3　5　3　3　8　5　5　6　3　4

6　3　4　7　5　3　4　8　5　3

8　3　4　3　4　4　7　5　6　7

用这个样本的频率分布估计总体分布,将频率视为概率,求等级系数 X_2 的数学期望;

(3)在(1)、(2)的条件下,若以“性价比”为判断标准,则哪个工厂的产品更具可购买性? 说明理由.

注:①产品的“性价比”$=\dfrac{\text{产品的等级系数的数学期望}}{\text{产品的零售价}}$;

②“性价比”大的产品更具可购买性.

【变式 7】(2011・辽宁理,19)某农场计划种植某种新作物,为此对这种作物的两个品种(分别称为品种甲和品种乙)进行田间试验. 选取两大块地,每大块地分成 n 小块地,在总共 $2n$ 小块地中,随机选 n 小块地种植品种甲,另外 n 小块地种植品种乙.

(1)假设 $n=4$,在第一大块地中,种植品种甲的小块地的数目记为 X,求 X 的分布列和数学期望;

(2)试验时每大块地分成 8 小块,即 $n=8$,试验结束后得到品种甲和品种乙在各小块地上的每公顷产量(单位:kg/hm^2)如下表:

品种甲	403	397	390	404	388	400	412	406
品种乙	419	403	412	418	408	423	400	413

分别求品种甲和品种乙的每公顷产量的样本平均数和样本方差;根据试验结

心得体会

果，你认为应该种植哪一品种？

附：样本数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的样本方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$，其中 $\overline{x}$ 为样本平均数.

题型 182　频率分布直方图的解读

【例 13.9】（2007·山东理，8）某班 50 名同学在一次百米测试中的成绩全部介于 13 秒与 19 秒之间，将测试结果按如下方式分成 6 组：

第 1 组，成绩大于 13 秒且小于 14 秒；

第 2 组，成绩大于 14 秒且小于 15 秒；

……

第 6 组，成绩大于等于 18 秒且小于 19 秒. 如图 13-13 是由上述分组方法得到的频率分布直方图，

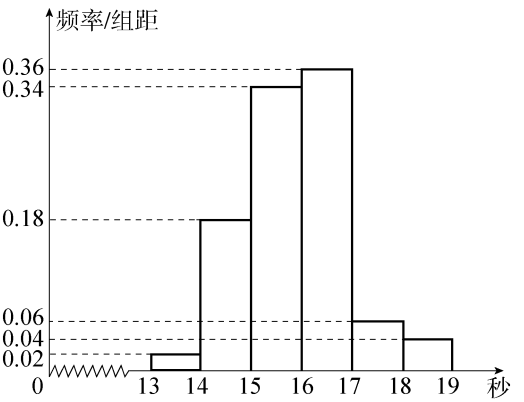


图　13-13

设成绩小于 17 秒的学生占全班总人数的百分比为 x，成绩大于等于 15 秒且小于 17 秒的学生人数为 y，则从频率分布直方图中可分析出 x 和 y 分别为（　　）.

A. 0.9，35　　B. 0.9，45

C. 0.1，35　　D. 0.1，45

【解析】 $x=P(t<17)=1-P(17\leqslant t\leqslant 19)=1-0.06\times 1-0.04\times 1=0.9$，

$y=50P(15\leqslant t\leqslant 17)=50\times(0.34+0.36)=35$. 故选 A.

【变式 1】（2006·重庆理，6）为了了解某地区高三学生的身体状况，抽查了该地区 100 名 17.5～18 岁的男生体重（千克），得到频率分布直方图（如图 13-14 所示）. 由图知这 100 名学生在 $[56.5, 64.5)$ 的学生人数为（　　）.

A. 20　　B. 30　　C. 40　　D. 50

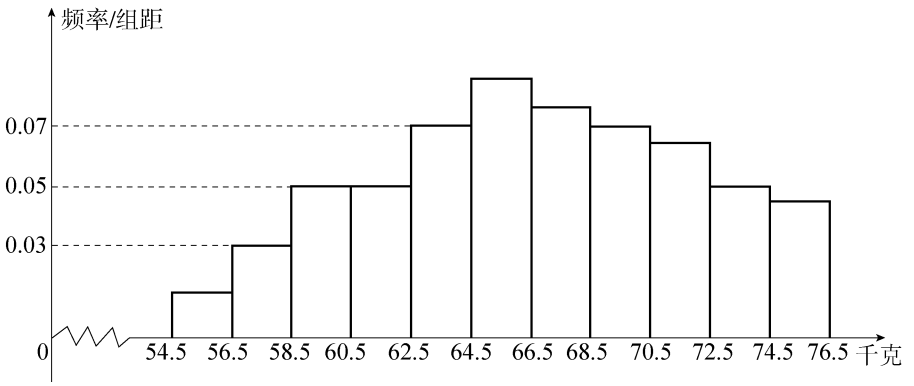


图　13-14

心得体会

【变式 2】(2009·江苏无锡)为了了解高三学生的身体状况,抽取调查了部分学生的体重,得频率分布直方图(如图13-15所示),已知图中从左到右的前 3 个小组的频率之比为 1∶2∶3,第 2 小组的频数为 12,则抽取的男生人数是_____.

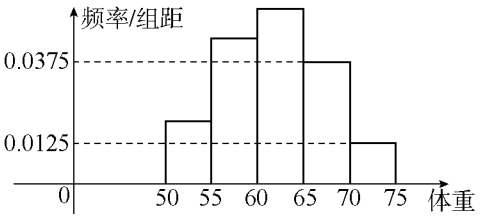


图　13-15

【变式 3】(2011·课标全国理,19)某种产品的质量以其质量指标值衡量,质量指标值越大表明质量越好,且质量指标值大于或等于 102 的产品为优质品.现用两种新配方(分别成为 A 配方和 B 配方)做试验,各生产了 100 件这样的产品,并测量了每件产品的质量指标值,得到了下面试验结果.

A 配方的频数分布表

指标值分组	[90,94)	[94,98)	[98,102)	[102,106)	[106,110)
频数	8	20	42	22	8

B 配方的频数分布表

指标值分组	[90,94)	[94,98)	[98,102)	[102,106)	[106,110)
频数	4	12	42	32	10

(1)分别估计用 A 配方,B 配方生产的产品的优质品率;

(2)已知用 B 配方生产的一件产品的利润 y(单位:元)

$$y=\begin{cases}-2, & t<94,\\ 2, & 94\leqslant t<102,\\ 4, & t\geqslant 102.\end{cases}$$

与其质量指标值 t 的关系式为 $y=$ 从用 B 配方生产的产品中任取一件,其利润记为 X(单位:元),求 X 的分布列及数学期望(以试验结果中质量指标值落入各组的频率作为一件产品的质量指标值落入相应组的概率).

【变式 4】(2011·天津文,15)编号分别为 $A_1,A_2,\cdots,A_{16}$ 的 16 名篮球运动员在某次训练比赛中的得分记录如下:

运动员编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
得分	15	35	21	28	25	36	18	34
运动员编号	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
得分	17	26	25	33	22	12	31	38

(1)将得分在对应区间内的人数填入相应的空格.

区间	[10,20)	[20,30)	[30,40]
人数			

心得体会

(2)从得分在区间[20,30)内的运动员中随机抽取2人,

①用运动员编号列出所有可能的抽取结果;

②求这2人得分之和大于50的概率.

【变式5】 甲、乙、丙三名运动员在某次测试中各射击20次,三人测试成绩的频率分布条形图分别如图13-16(1),(2),(3)报培育,若$S_{甲}$,$S_{乙}$,$S_{丙}$分别表示他们测试成绩的标准差,则(　　).

A. $S_{甲}<S_{乙}<S_{丙}$　B. $S_{甲}<S_{丙}<S_{乙}$　C. $S_{乙}<S_{甲}<S_{丙}$　D. $S_{丙}<S_{甲}<S_{乙}$

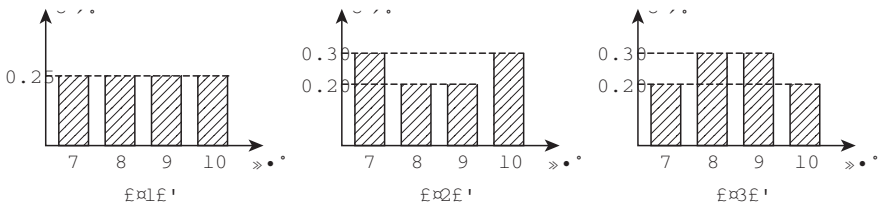


图　13-16

题型183　线性回归方程

【例13.10】 (2007·广东理,8)如表13-8所示,其中提供了某厂节能降耗技术改造后生产甲产品过程中记录的产量x(吨)与相应的生产耗能y(吨)标准煤的几组对照数据.

表　13-8

x	3	4	5	6
y	2.5	3	4	4.5

(1)请画出表示数据的散点图;

(2)请根据上表提供的数据,用最小二乘法求出y关于x的线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$;

(3)已知该厂技改前生产100吨甲产品的生产耗能为90吨标准煤,试根据(2)求得的回归方程,预测生产100吨甲产品耗能比技改前节省多少吨标准煤.

(参考数值:$3\times2.5+4\times3+5\times4+6\times4.5=66.5$).

【解析】 (1)由题设所给数据,可得散点图(如图13-17所示)上的点基本在一条直线附近,数据正相关,存在回归方程.

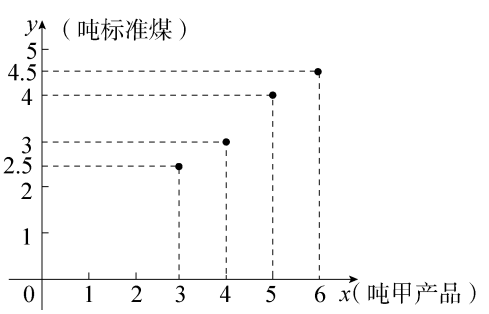


图　13-17

心得体会

表　13-9

x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$y_i-\bar{y}$	y_i
3	−1.5	2.25	1.5	−1	2.5
4	−0.5	0.25	0.25	−0.5	3
5	0.5	0.25	0.25	0.5	4
6	1.5	2.25	1.5	1	4.5
$\bar{x}=4.5$		$\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2=5$	$\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=3.5$		$\bar{y}=3.5$

(2)由表 13-9，$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{3.5}{5}=0.7$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=3.5$，即 x，y 的回归方程为 $\hat{y}=3.5+0.7x$.

(3)由(2)的回归方程及技改前生产 100 吨甲产品的生产能耗，得节省的生产耗能为 $90-(0.7\times100+0.35)=19.65$(吨标准煤).

【变式 1】 (2011·山东理，7)某产品的广告费用 x 与销售额 y 的统计数据如表 13-10 所示：

表　13-10

广告费用 x(万元)	4	2	3	5
销售额 y(万元)	49	26	39	54

根据上表可得回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中的 $\hat{b}$ 为 9.4，据此模型预报广告费用为 6 万元时销售额为(　　).

A. 63.6 万元　　B. 65.5 万元　　C. 67.7 万元　　D. 72.0 万元

【变式 2】 (2011·辽宁理，14)调查了某地若干户家庭的年收入 x(单位：万元)和年饮食支出 y(单位：万元)，调查显示年收入 x 与年饮食支出 y 具有线性相关关系，并由调查数据得到 y 对 x 的回归直线方程：$\hat{y}=0.254x+0.321$. 由回归直线方程可知，家庭年收入每增加 1 万元，年饮食支出平均增加 _____ 万元.

【变式 3】 (2011·陕西理，9)设 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n) 是变量 x 和 y 的 n 个样本点，直线 l 是由这些样本点通过最小二乘法得到的线性回归直线(如图 13-18 所示)，以下结论中正确的是(　　).

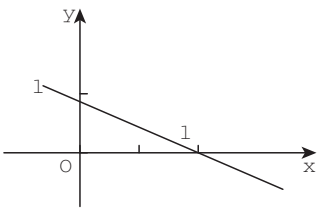


图　13-18

A. x 和 y 的相关系数为直线 l 的斜率

B. x 和 y 的相关系数在 0 到 1 之间

C. 当 n 为偶数时，分布在 l 两侧的样本点的个数一定相同

D. 直线 l 过点 $(\bar{x},\bar{y})$

【变式 4】 (2011·江西文，8)为了解儿子身高与其父亲身高的关系，随机抽取 5 对父子的身高数据如下：

心得体会

父亲身高 x(cm)	174	176	176	176	178
儿子身高 y(cm)	175	175	176	177	177

则 y 对 x 的线性回归方程为(　　).

A. $y=x-1$　　B. $y=x+1$　　C. $y=88+\frac{1}{2}x$　　D. $y=176$

【变式 5】 (2011·广东理,13)某数学老师身高 176cm,他爷爷,父亲,儿子的身高分别是 173cm,170cm,和 182cm,因儿子的身高与父亲的身高有关,该老师用线性回归分析的方法预测他孙子的身高是_____cm.

题型 184　独立性检验

【例 13.11】 (2010·课标全国理,19)为调查某地区老年人是否需要志愿者提供帮助,用简单随机抽样方式调查了 500 位老人,结果如表 13-11 所示.

表　13-11

性别 / 是否需要志愿者	男	女
需要	40	30
不需要	160	270

(1)估计该地区老年人中,需要志愿者提供帮助的老年人比例;

(2)能否有 99%的把握认为该地区的老年人是否需要志愿者帮助与性别有关?

(3)根据(2)的结论,能否提出更好的调查方法来估计该地区老年人中,需要志愿者提供帮助的老年人比例?说明理由.

【解析】 (1)调查的 500 位老年人中,有 70 位需要志愿者提供帮助,因此该地区老年人中,需要帮助的老年人的比例的估计值为 $\frac{70}{500}=\frac{14}{100}$.

(2)列出 2×2 列表(如表 13-12 所示)

表　13-12

性别 / 是否需要	男	女	合计
需要	40	30	70
不需要	160	270	430
合计	200	300	500

$$K^2=\frac{500\times(40\times270-30\times160)^2}{200\times300\times70\times430}\approx9.967,$$

由于 $9.967>6.635$,所以有 99%的把握认为该地区的老年人是否需要志愿者帮助与性别有关.

(3)由(2)的结论知,该地区老年人是否需要帮助与性别有关,并且从样本数据能看出,该地区男性老年人与女性老年人中需要帮助的比例有明显差异,因此在调查中,先确定该地区老年人中男、女的比例,再把老年人分成男、女两层并采用分层抽样方法比采用简单随机抽样方法更好.

心得体会

【变式 1】 为比较注射 A，B 两种药物产生的皮肤疱疹的面积，选 200 只家兔做试验，将这 200 只家兔随机地分成两组，每组 100 只，其中一组注射药物 A，另一组注射药物 B. 表 13-13 和表 13-14 分别是注射药物 A 和药物 B 后皮肤疱疹面积的频率分布（疱疹面积单位：mm^2）.

表　13-13

疱疹面积	[60,65)	[65,70)	[70,75)	[75,80)
频数	30	40	20	10

表　13-14

疱疹面积	[60,65)	[65,70)	[70,75)	[75,80)	[80,85)
频数	10	25	20	30	15

(1)完成图 13-18 和图 13-19 所示的分别注射药物 A 和 B 后皮肤疱疹面积的频率分布直方图，并比较注射两种药物后疱疹面积的中位数大小；

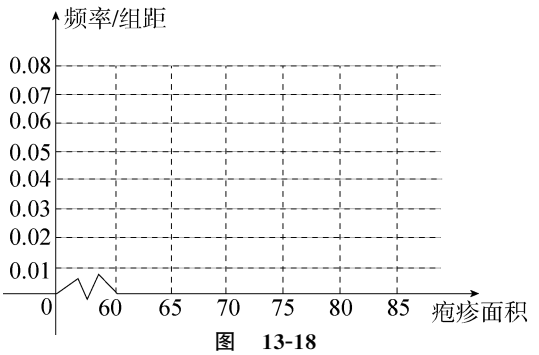


图　13-18

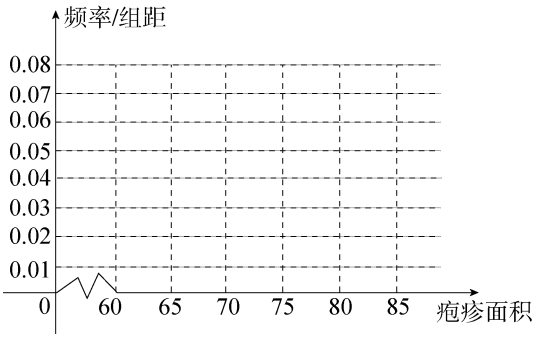


图　13-19

(2)完成表 13-15 所示的 2×2 列联表，并回答能否有 99.9%的把握认为注射药物 A 后的疱疹面积与注射药物 B 的疱疹面积有差异.

表　13-15

	疱疹面积小于 $70mm^2$	疱疹面积不小于 $70mm^2$	合计
注射药物 A	$a=$	$b=$	
注射药物 B	$c=$	$d=$	
合计			

心得体会

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.010
k	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

【变式 2】 (2011·湖南理,4)通过随机询问 110 名性别不同的大学生是否爱好某项运动,得到如下的列联表(如表 13-16 所示).

表 13-16

	男	女	总计
爱好	$a=40$	$b=20$	60
不爱好	$c=20$	$d=30$	50
总计	60	50	$(n)110$

由 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 算得，$K^2=\dfrac{110\times(40\times30-20\times20)^2}{60\times50\times60\times50}\approx7.8$.

参照表 13-17,得到的正确结论是(　　).

A. 在犯错误的概率不超过 0.1%的前提下,认为“爱好该项运动与性别有关”

B. 在犯错误的概率不超过 0.1%的前提下,认为“爱好该项运动与性别无关”

C. 有 99%以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”

D. 有 99%以上的把握认为“爱好该项运动与性别无关”

表 13-17

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

第十四章　推理与证明

第一节　合情推理与演绎推理

考纲解读

1. 了解合情推理的含义，能利用归纳和类比进行简单的推理，了解合情推理在数学发现中的作用
2. 了解演绎推理的重要性，掌握其基本模式，并能进行一些简单的推理.
3. 了解合情推理和演绎推理的联系和差异.

命题趋势探究

作为新课标新增加的内容，主要考查归纳推理和类比推理，在选择题、填空题和解答题中均有渗透. 主要题型结构为：根据条件，归纳、猜想一个结论，然后证明该结论.

知识点精讲

1. 合情推理

合情推理含归纳推理和类比推理两种基本推理方法.

(1)归纳推理：根据某类事物的部分对象具有的某些特征，推出该类事物的全部对象都具有这种特征的推理，是“部分到整体，个别到一般”的推理，属不完全归纳推理.

(2)类比推理：两类对象具有某些类似特征和其中一类对象的某些已知特征，推出另一类对象也具有相似特征的推理，是“特殊到特殊”的推理.

2. 演绎推理

演绎推理就是根据一般性的真命题(或逻辑规则)导出特殊性命题为真的推理. 常用的演绎推理规则有：假言推理；三段论推理；传递性关系推理和完全归纳推理. 特别是“三段论”推理，其模式为：

(1)大前提——已知的一般结论.

(2)小前提——所研究的特殊情况.

(3)结论——根据一般结论，对特殊情况做出判断如下.

心得体会

①若 $S\in M$，则 S 有性质 P；②检验，$S'\in M$；③故 S' 具有性质 P.

题型归纳及思路提示

题型 185　归纳猜想

思路提示：举出足够多的特例，归纳出一般结论.

【例 14.1】（2008·湖北理，15）观察下列等式：

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^6=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n^2,$$

……

$$\sum_{i=1}^{n} i^k=a_{k+1}n^{k+1}+a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+a_{k-2}n^{k-2}+\cdots+a_1n+a_0.$$

可以推测当 $k\geqslant 2\ (k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$a_{k+1}=\dfrac{1}{k+1}$，$a_k=\dfrac{1}{2}$，$a_{k-1}=$____，$a_{k-2}=$____.

【解析】

k	a_{k-1}	a_{k-2}	
$k=2$	$a_1=\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{12}$	$a_0=0$	
$k=3$	$a_2=\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{12}$	$a_1=0$	
$k=4$	$a_3=\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{12}$	$a_2=0$	$\Rightarrow a_{k-1}=\dfrac{k}{12}$，$a_{k-2}=0$.
$k=5$	$a_4=\dfrac{5}{12}$	$a_3=0$	
$k=6$	$a_5=\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{12}$	$a_4=0$	

【变式 1】 观察 $\sqrt{7}+\sqrt{15}<2\sqrt{11}$，$\sqrt{5.5}+\sqrt{16.5}<2\sqrt{11}$，$\sqrt{3-\sqrt{3}}+\sqrt{19+\sqrt{3}}<2\sqrt{11}$，…，试归纳出 $\sqrt{a}+\sqrt{b}<2\sqrt{11}$ 的一个条件_____（考虑一下如何证明）.

【变式 2】 观察下列两组三角恒等式，请各归纳出一个一般三角恒等式，并思考一下如何证明？

（1）$\sin^2 15^\circ+\sin^2 75^\circ+\sin^2 135^\circ=\dfrac{3}{2}$，$\sin^2 30^\circ+\sin^2 90^\circ+\sin^2 150^\circ=\dfrac{3}{2}$，

$\sin^2 45^\circ+\sin^2 105^\circ+\sin^2 165^\circ=\dfrac{3}{2}$，$\sin^2 60^\circ+\sin^2 120^\circ+\sin^2 180^\circ=\dfrac{3}{2}$.

心得体会

(2)$\sin^2 10°+\sin 10°\sin 50°+\sin^2 50°=\frac{3}{4}$，$\sin^2 15°+\sin 15°\sin 45°+\sin^2 45°=\frac{3}{4}$，

$\sin^2 20°+\sin 20°\sin 40°+\sin^2 40°=\frac{3}{4}$，$\sin^2 25°+\sin 25°\sin 35°+\sin^2 35°=\frac{3}{4}$.

【变式 3】 $f_0(x)=\cos x$，$f_1(x)=f_0'(x)$，$f_2(x)=f_1'(x)$，…，$f_{n+1}(x)=f_n'(x)(n\in\mathbf{N})$，则 $f_{2010}(x)=$(　　).

A. $-\sin x$　　B. $-\cos x$　　C. $\sin x$　　D. $\cos x$

【变式 4】 (2009·上海春，3)以下是面点师一个工作环节的数学模型：

如图 14-1 所示，在数轴上取闭区间[0，1]，对折(1 与 0 两点重合)后再均匀地拉成一个单位长线段(原来的$\frac{3}{4}$和$\frac{1}{4}$变为$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$变为 1 等)算一次操作，重复操作，第 n 次操作后变为 1 的点有_____个.

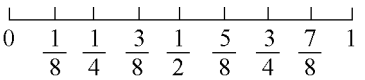


图　14-1

【变式 5】 (2011·山东理，15)设函数 $f(x)=\frac{x}{x+2}(x>0)$，观察：

$$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{x+2},$$

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{x}{3x+4},$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{x}{7x+8},$$

$$f_4(x)=f(f_3(x))=\frac{x}{15x+16},$$

……

根据以上事实，由归纳推理可得：

当 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$ 时，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))=$_____.

【变式 6】 n 个自然数按规律排成下表：

0　3→4　7→8　11…

↓　↑　↓　↑　↓　↑

1→2　5→6　9→10

依此规律，从 2002→2004，箭头方向应为(　　).

A. ↓→　　B. →↑

C. ↑→　　D. →↓

1	2	3	1	2	3	4
1	2	2	1	2	3	3
1	1	1	1	2	2	2
			1	1	1	1

图　14-2

【变式 7】 观察如图 14-2 所示的 3×3，4×4 图中，数字规律，在 10×10 图中，100 个数字的总和为_____.

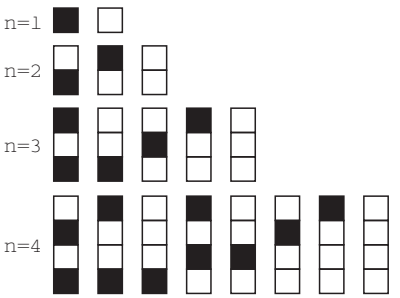
【变式 8】 (2011·江西理，7)观察下列各式：$5^5=3125$，$5^6=15625$，$5^7=78125$，…，则 5^{2011} 的末四位数字为(　　).

A. 3125　　B. 5625

C. 0625　　D. 8125

心得体会

【变式 9】（2011·湖北理，15）给 n 个自上而下相连的正方形着黑色或白色. 当 $n\leqslant 4$ 时，在所有不同的着色方案中，黑色正方形互不相邻的着色方案如下图所示：



由此推断，当 $n=6$ 时，黑色正方形互不相邻的着色方案共有_____种，至少有两个黑色正方形相邻的着色方案共有_____种（结果用数值表示）.

【变式 10】（2011·陕西理，13）观察下列等式

$$1=1$$
$$2+3+4=9$$
$$3+4+5+6+7=25$$
$$4+5+6+7+8+9+10=49$$
$$\cdots\cdots$$

照此规律，第 n 个等式为_____.

题型 186　类比推理

思路提示：抓住类比推理中两类对象的类似特征，并且吃透其中一类对象的已知特征的本质，实现类比的转化.

【例 14.2】 已知正三角形内切圆半径是高的 $\frac{1}{3}$，把这个结论类比到正四面体，类似的结论应该是_____.

【解析】 正三角形内切圆和正四面体内切球这两类对象的相似特征为“正三角形内切圆圆心到正三角形三边等距，正四面体内切球球心到正四面体四个面等距”，这就是类比转化的条件所在，如图 14-3 所示，由性质知正三角形内切圆圆心 O_1 也是正三角形的垂心，O_1 在 BC 边的高 AD 上，连接 O_1A，O_1B，O_1C，$\triangle O_1AB\cong\triangle O_1BC\cong\triangle O_1AC$，$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle O_1BC}\Rightarrow\frac{1}{2}BC\cdot AD=3\times\frac{1}{2}BC\cdot O_1D\Rightarrow O_1D=\frac{1}{3}AD$. 如图 14-4 所示，类比正四面体 $ABCD$ 内切球球心 O_2 在四面体的高 AH 上，连接 O_2A，O_2B，O_2C，O_2D，$O_2-ADC\cong O_2-ABC\cong O_2-ABD\cong O_2-BCD$，$V_{A-BCD}=4V_{O_2-BCD}$，$\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AH=4\times\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot O_2H\Rightarrow O_2H=\frac{1}{4}AH$. 故类似的结论为：正四面体内切球半径是高的 $\frac{1}{4}$.

心得体会

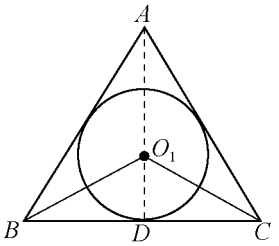


图　14-3

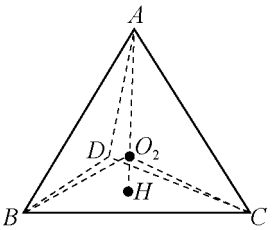


图　14-4

【变式 1】　设 P 为△ABC 内一点，△ABC 三边上的高为 h_A，h_B，h_C，P 到三边的距离为 l_A，l_B，l_C，则有 $\frac{l_A}{h_A}+\frac{l_B}{h_B}+\frac{l_C}{h_C}=$_____.

类比到空间，设 P 是四面体 $ABCD$ 内一点，四顶点到对面的距离分别为 h_A，h_B，h_C，h_D，点 P 到四个面的距离为 l_A，l_B，l_C，l_D，则有_____.

【变式 2】　平面直角坐标系中，直线的一般方程为 $Ax+By+C=0\,(A^2+B^2>0)$，圆心在 $C(x_0,y_0)$，半径为 $r>0$ 的圆的方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，类比到空间直角坐标系内平面的一般方程为①_____，球心在 $C(x_0,y_0,z_0)$，半径为 $r>0$ 的球面的方程为②_____.

【变式 3】　(1)已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，则数列 $\{b_n\}$ 为_____数列；

(2)正项等比数列 $\{a_n\}$ 与(1)类比的写出一个结论，试证明之.

【变式 4】　在△ABC 中，$\angle C=90°$，则 $\cos^2A+\cos^2B=1$，用类比推理猜想三棱锥的性质，并证明之.

【变式 5】　已知△ABC 的三边长为 a，b，c，内切圆半径为 r，则△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{r}{2}(a+b+c)$，类比三棱锥 $A-BCD$ 内切球半径为 R，则三棱锥的体积 $V_{A-BCD}=$_____.

【变式 6】　在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 中，F_1 与 F_2 为 C 的两个焦点，P 为 C 上动点，过 F_2 作 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分线的垂线，则垂足的轨迹是一个圆. 类比椭圆的这一命题，写出一个关于双曲线的命题.

第二节　直接证明和间接证明

考纲解读

1. 了解直接证明的两种基本方法——分析法和综合法；了解分析法和综合法的思考过程、特点.
2. 了解间接证明的一种基本方法——反证法；了解反证法的思考过程、特点.

心得体会

命题趋势探究

作为新课标的新知识点，该部分内容多作为数学方法隐含在许多题中.作为证明方法，一定要抓住证题模式，确保证明的严密性.

知识点精讲

1. 直接法

直接法包括综合法和分析法.

(1)综合法：从已知条件和结论出发，以演绎推理中的“三段论”规则为工具，推出未知结论，其模式为 $A\Rightarrow B$，$B\Rightarrow C$，$C\Rightarrow D\Rightarrow$“$A\Rightarrow D$ 成立”.

(2)分析法：从欲证结论出发，对结论进行等价变形，建立未知结论和已知“条件，结论”的因果关系，其模式为：欲证 D 成立即证 C 成立，即证 B 成立，即要 A 成立，因 A 成立故 D 成立.

2. 间接法　分类讨论法(肯定或排除)

间接法即反证法，就是证明欲证命题的等价命题——逆否命题.其模式为：欲证若 p 则 q，等价证 $\neg q$ 则 $\neg p$，可设 q 不成立，推出 p 不成立或与某已成立的结论矛盾⇒设 q 不成立为错，故 q 成立.

题型归纳及思路提示

题型 187　综合法与分析法证明

【例 14.3】 试证明对一切 $\alpha\in\mathbf{R}$，$\sin^2\alpha+\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)+\sin^2(60^\circ-\alpha)=\frac{3}{4}$.

【证明】 因为 $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$，$\sin^2(60^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}[1-\cos(120^\circ-2\alpha)]$，

又 $\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}\{[\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)+\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)]$

$-[\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)-\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)]\}=\frac{1}{2}\cos(2\alpha-60^\circ)-\frac{1}{2}\cos60^\circ$.

故 $\sin^2\alpha+\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)+\sin^2(60^\circ-\alpha)$

$=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)+\frac{1}{2}[1-\cos(120^\circ-2\alpha)]+\frac{1}{2}\cos(2\alpha-60^\circ)-\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos120^\circ\cos2\alpha+\sin120^\circ\sin2\alpha-\cos2\alpha\cos60^\circ-\sin2\alpha\sin60^\circ)$

$=\frac{3}{4}$.

【变式 1】 (2008·福建理，22)已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$.

心得体会

(1)求 $f(x)$的单调区间;

(2)记 $f(x)$在区间$[0,n]$ $(n\in\mathbf{N}^*)$上的最小值为 b_n,令 $a_n=\ln(1+n)-b_n$.

①对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,不等式 $\sqrt{a_n}<\sqrt{a_{n+2}}-\dfrac{c}{\sqrt{a_{n+2}}}$ 恒成立,求实数 c 的取值范围;

②求证:$\dfrac{a_2}{a_1}+\dfrac{a_1a_3}{a_2a_4}+\cdots+\dfrac{a_1a_3\cdots a_{2n-1}}{a_2a_4\cdots a_{2n}}<\sqrt{2a_n+1}-1$.

【变式 2】 (2008·浙江宁波十校联考)在数列$\{a_n\}$中,$a_1=a_2=3$ 且数列$\{a_n+a_{n+1}\}$和数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$分别是公比为 2 和-1 的等比数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)当 k 为正奇数时,求证:$\dfrac{1}{a_k}+\dfrac{1}{a_{k+1}}<\dfrac{3}{2^{k+1}}$;

(3)当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,求证:$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n-1}}+\dfrac{1}{a_{2n}}<1$.

【例 14.4】 给定实数 a,$a\neq0$ 且 $a\neq1$,设函数 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}\left(x\in\mathbf{R},\text{且 }x\neq\dfrac{1}{a}\right)$. 求证:经过该函数图像上任意两个不同点的直线不平行于 x 轴.

【解析】 用反证法.假设命题不成立,即图像上存在两点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,过 AB 的直线平行于 x 轴,则有 $y_1=y_2$ $(x_1\neq x_2)$,即$\dfrac{x_1-1}{ax_1-1}=\dfrac{x_2-1}{ax_2-1}$,

故$(x_1-1)(ax_2-1)=(x_2-1)(ax_1-1)$,

即 $ax_1x_2-ax_2-x_1+1=ax_1x_2-ax_1-x_2+1$,

即 $a(x_1-x_2)-(x_1-x_2)=0\Rightarrow(a-1)(x_1-x_2)=0$,

因为 $x_1\neq x_2$,故 $x_1-x_2\neq0$,即 $a-1=0$,即 $a=1$,与已知矛盾,

故假设不成立,欲证命题成立.

【变式 1】 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$,$a+b+c>0$,$ab+bc+ac>0$,$abc>0$,求证:$a>0$,$b>0$,$c>0$.

【变式 2】 用反证法证明命题"三角形内角中至少有一个不大于 60°的角"时,假设正确的是(　　).

A. 假设三内角都不大于 60°　　B. 假设三内角都大于 60°

C. 假设三内角至多有一个大于 60°　　D. 假设三内角至多有两个大于 60°

【变式 3】 (2009·江苏无锡)设函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 且 $f(1)=-\dfrac{a}{2}$,$3a>2c>2b$.

求证:(1)$a>0$,且$-3<\dfrac{b}{a}<-\dfrac{3}{4}$;

(2)函数 $f(x)$在$(0,2)$中至少有一个零点;

(3)设 x_1,x_2 是 $f(x)$的两个零点,则$\sqrt{2}\leqslant|x_1-x_2|<\dfrac{\sqrt{57}}{4}$.

【变式 4】 在$\triangle ABC$中,$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$ 成等差数列,其对边分别为 a,b,c.

求证:$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{3}{a+b+c}$.

【变式 5】 (2008·江苏南通)如果 $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}>a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$,则 a,b 满足的条件是_____.

心得体会

【变式 6】 $a>0,b>0,a\neq b,n\in\mathbf{N}^*,n>1,k\in\mathbf{N}^*,k\leqslant n$.

求证：$a^n+b^n>a^kb^{n-k}+b^ka^{n-k}$.

第三节　数学归纳法

考纲解读

了解数学归纳法的原理，能用数学归纳法证明一些简单的数学命题.

命题趋势探究

数学归纳法是高考的一个新热点，常与不完全归纳法相结合，形成“观察—归纳—猜想—证明”的热门考点.

知识点精讲

1. 定义

数学归纳法也叫完全归纳法，可用来证明某些与自然数有关的数学命题，其直观模型为“多米诺骨牌”.

2. 数学归纳法的证题格式

数学归纳法的证题格式为：

(1)先证当 $n=n_0$(n_0 为某一个初始自然数，常取 $n_0=1$)时命题成立(第一块“多米诺骨牌”倒下).

(2)假设 $n=k$ ($k\geqslant n_0$)时命题成立，并在此前提下可以推出 $n=k+1$ 时命题也成立(每次倒下的骨牌具有“前倒推后倒”的功能).

(3)由(1)(2)，命题对一切 $n\geqslant n_0$ 的自然数恒成立.

数学归纳法的完成，(1)，(2)，(3)步缺一不可.

题型归纳及思路提示

题型 188　数学归纳法的完善

【例 14.5】 用数学归纳法证明 $1+a+a^2+\cdots+a^{n+1}=\dfrac{1-a^{n+2}}{1-a}$ ($a\neq1,n\in\mathbf{N}^*$)，在验证 $n=1$时等式成立时，等式左边的项应为(　　).

A. 1　　B. $1+a$

C. $1+a+a^2$　　D. $1+a+a^2+a^4$

心得体会

【解析】 $n=1$，左边$=1+a+\cdots+a^{1+1}=1+a+a^2$. 故选 C.

【评注】 正确认识 $1+a+a^2+\cdots+a^{n+1}$ 的意义：以 1 为首项，a^{n+1} 为末项，指数逐项加 1.

【变式 1】 用数学归纳法证明 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$ 时，从 $n=k$ 到 $n=k+1$，左边要添加的项为(　　).

A. $\frac{1}{2k+1}$　　B. $\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k+4}$

C. $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$　　D. $-\frac{1}{2k+2}$

【变式 2】 用数学归纳法证明不等式 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{1}{3}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 时，由 $n=k$ 推导 $n=k+1$，不等式左边应增加的式子为_____.

题型 189　证明恒等式

【例 14.6】 用数学归纳法证明：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\ (n\in\mathbf{N}^*).$$

【解析】 ①$n=1$ 时，左边$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，右边$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，左边$=$右边.

②假设当 $n=k$ 时，等式成立，即 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+k}$，则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{(k+1)+(k+1)}\\
&=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\\
&=\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)\\
&=\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)+k}+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}=\text{右边}.
\end{aligned}$$

故 $n=k+1$ 时等式也成立.

由①，②得，$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.

【变式 1】 证明：$1+a+a^2+\cdots+a^{n+1}=\frac{1-a^{n+2}}{1-a}$ $(n\in\mathbf{N}^*,a\neq1)$.

题型 190　整除问题

【例 14.7】 证明当 n 为正奇数时，x^n+y^n 能被 $x+y$ 整除.

【解析】 ①当 $n=1$ 时，x^1+y^1 能被 $x+y$ 整除.

②假设 $n=2k-1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 时，$x^{2k-1}+y^{2k-1}$ 能被 $x+y$ 整除，

即 $x^{2k-1}+y^{2k-1}=m(x+y)$（m 为整式），则 $x^{2k-1}=m(x+y)-y^{2k-1}$.

当 $n=2(k+1)-1=2k+1$ 时，

心得体会

$x^{2k+1}+y^{2k+1}=x^{2k-1}\cdot x^2+y^{2k+1}=[m(x+y)-y^{2k-1}]x^2+y^{2k+1}$

$=mx^2(x+y)-y^{2k-1}(x^2-y^2)=(x+y)[mx^2+y^{2k-1}(y-x)]$.

因为 $mx^2+y^{2k-1}(y-x)$ 是整式，所以 $x^{2k+1}+y^{2k+1}$ 能被 $(x+y)$ 整除.

由①，②知，当 n 为正奇数时，x^n+y^n 能被 $x+y$ 整除.

题型 191　不等式证明

【例 14.8】 用数学归纳法证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$.

【解析】 ①$n=2$ 时，左边$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$，右边$=2$，左边小于右边.

②假设当 $n=k(k\geqslant 2,k\in\mathbf{N}^*)$ 时，不等式成立，即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}<k$，

则当 $n=k+1$ 时，左边$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$

$$<k+\underbrace{\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}}_{2^k\text{个}}$$

$$<k+\frac{2^k}{2^k}=k+1=\text{右边},$$

即 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}<k+1$ 也成立.

由①，②知，对一切 $n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2$，$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n$ 成立.

【变式 1】 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{1}{3}$.

题型 192　递推公式导出$\{a_n\}$通项公式的猜证及有关问题的证明

【例 14.9】 (2008·辽宁理，21)在数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 中，$a_1=2,b_1=4$，且 a_n,b_n,a_{n+1} 成等差数列，b_n,a_{n+1},b_{n+1} 成等比数列.

(1)求 a_2,a_3,a_4,b_2,b_3,b_4，猜想 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式，并证明之.

(2)证明：$\frac{1}{a_1+b_1}+\frac{1}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{1}{a_n+b_n}<\frac{5}{12}$.

【解析】 (1)$a_2=6,a_3=12,a_4=20;b_2=9,b_3=16,b_4=25$，

猜得 $a_n=n(n+1),b_n=(n+1)^2$.

①$n=1$ 时，$a_1=1\times 2=2,b_1=(1+1)^2=4$ 成立.

②设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$a_k=k(k+1),b_k=(k+1)^2$，

依题意，$a_k+a_{k+1}=2b_k$，则 $a_{k+1}=2b_k-a_k$

$=2(k+1)^2-k(k+1)=(k+1)[(k+1)+1]$，

$b_kb_{k+1}=a_{k+1}^2\Rightarrow(1+k)^2b_{k+1}=(k+1)^2(k+2)^2$，则 $b_{k+1}=[(k+1)+1]^2$.

由①，②知，$a_n=n(n+1),b_n=(n+1)^2$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.

(2)$a_n+b_n=n(n+1)+(n+1)^2=(n+1)(2n+1)>2n(n+1)$，

$\frac{1}{a_1+b_1}=\frac{1}{6},\frac{1}{a_2+b_2}<\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\times 3},\cdots,\frac{1}{a_n+b_n}<\frac{1}{2}\times\frac{1}{n(n+1)}$.

心得体会

$$\frac{1}{a_1+b_1}+\frac{1}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{1}{a_n+b_n}<\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}.$$

【评注】 (1)不能用数学归纳法证明,原因是:右边为常数,左边前面$\frac{1}{a_1+b_1}$固定,后面通项加正数.

(2)不能从$\frac{1}{a_1+b_1}<\frac{1}{1}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)$开始,否则无法证明.

【变式 1】 (2006·陕西理,22)已知函数 $f(x)=x^3-x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$,存在 $x_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$f(x_0)=x_0$.

(1)证明:函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是单调增函数;

(2)设 $x_1=0$,$y_1=\frac{1}{2}$,$x_{n+1}=f(x_n)$,$y_{n+1}=f(y_n)(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明:$x_n<x_{n+1}<x_0<y_{n+1}<y_n$.

【变式 2】 已知数列$\{a_n\}$中,S_n 表示其前 n 项和,$a_1=1$,当 $n\geqslant2$ 时,a_n,S_n,$S_n-\frac{1}{2}$成等比数列.

(1)求 a_2,a_3,a_4,猜想$\{a_n\}$的通项公式;

(2)证明(1)的结论.

【变式 3】 (2008·天津南开)设 $f(x)$满足 $2f(x)-f(\frac{1}{x})=4x-\frac{2}{x}+1$,数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足 $a_1=1$,$a_{n+1}-2a_n=f(n)$,$b_n=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)求数列$\{b_n\}$的通项公式;

(3)试比较 $2a_n$ 和 b_n 的大小,并证明结论.

第十五章　复数

考纲解读

1. 理解复数的基本概念.
2. 理解复数相等的充要条件.
3. 了解复数的代数表示法及其几何意义.
4. 会进行复数代数形式的四则运算.
5. 了解复数代数形式的加、减运算的几何意义.

命题趋势探究

复数的代数运算、代数表示及几何意义是高考的必考内容,题型为选择题与填空题,考题难度为低档.

知识点精讲

一、基本概念

(1)i 叫虚数单位,满足 $i^2=-1$,当 $k\in\mathbf{Z}$ 时,$i^{4k}=1$,$i^{4k+1}=i$,$i^{4k+2}=-1$,$i^{4k+3}=-i$.

(2)形如 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的数叫复数,记作 $a+bi\in\mathbf{C}$.

①复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 与复平面上的点 $z(a,b)$ 一一对应.

a 叫 z 的实部,b 叫 z 的虚部;$b=0\Leftrightarrow z\in\mathbf{R}$,$z$ 点组成实轴;$b\neq0$,z 叫虚数;$b\neq0$ 且 $a=0$,z 叫纯虚数,纯虚数对应点组成虚轴(不含原点).

②两个复数 $a+bi,c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ 相等$\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$(两复数对应同一点).

二、基本运算、性质

1. 复数运算

(1)$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$.

(2)$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

$\begin{cases}(a+bi)\cdot(a-bi)=z\cdot\bar{z}=a^2+b^2=|z|^2\text{(注意}|z|^2\neq z^2\text{)}\\z+\bar{z}=2a\in\mathbf{R}\end{cases}$.

心得体会

其中 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，叫 z 的模；$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$ 是 $z=a+b\mathrm{i}$ 的共轭复数 $(a,b\in\mathbf{R})$.

(3) $\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\dfrac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)\mathrm{i}}{c^2+d^2}$ $(c^2+d^2\neq0)$.

实数的全部运算律(加法和乘法的交换律、结合律、分配律及整数指数幂运算法则)都适用于复数.

2. 复数的几何意义

如图 15-1 所示，复数的几何意义为：

(1) $z=a+b\mathrm{i}=\overrightarrow{OZ}(a,b\in\mathbf{R})$，$|z_1-z_2|=|\overrightarrow{z_2z_1}|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$，

$|z|=|\overrightarrow{OZ}|=\sqrt{a^2+b^2}$.

(2) $\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}=z_1+z_2$，$\overrightarrow{Z_1Z_2}=\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}=z_1-z_2$.

$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$(三角不等式：三角形边的不等关系推广).

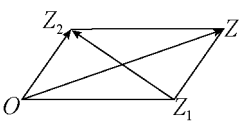


图　15-1

题型归纳及思路提示

题型 193　复数的概念、代数运算和两个复数相等的条件

【例 15.1】 (2008·山东理，2)设复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$，$z+\bar{z}=4$，$z\bar{z}=8$，则 $\dfrac{\bar{z}}{z}=$(　　).

A. i　　B. $-\mathrm{i}$　　C. ±1　　D. $\pm\mathrm{i}$

【解析】 设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，

由 $z+\bar{z}=4$，$z\bar{z}=8$，得

$$\begin{cases}a+b\mathrm{i}+a-b\mathrm{i}=2a=4\\(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2=8\end{cases}$$，解得 $\begin{cases}a=2\\b=\pm2\end{cases}$.

$$\Rightarrow\frac{\bar{z}}{z}=\frac{\bar{z}^2}{z\bar{z}}=\frac{(a-b\mathrm{i})^2}{a^2+b^2}=\frac{(2\pm2\mathrm{i})^2}{8}=\frac{\pm8\mathrm{i}}{8}=\pm\mathrm{i}.$$ 故选 D.

【变式 1】 (2008·宁夏、海南理，2)已知复数 $z=1-\mathrm{i}$，则 $\dfrac{z^2-2z}{z-1}=$(　　).

A. $2\mathrm{i}$　　B. $-2\mathrm{i}$　　C. 2　　D. -2

【变式 2】 (2008·天津理，1)i 是虚数单位，$\dfrac{\mathrm{i}^3(\mathrm{i}+1)}{\mathrm{i}-1}=$(　　).

A. -1　　B. 1　　C. $-\mathrm{i}$　　D. i

【变式 3】 (2008·辽宁理，4)$\dfrac{1}{-2+\mathrm{i}}+\dfrac{1}{1-2\mathrm{i}}$ 的虚部为(　　).

A. $\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$　　B. $\dfrac{1}{5}$　　C. $-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$　　D. $-\dfrac{1}{5}$

【变式 4】 (2008·浙江理，1)$a\in\mathbf{R}$，$\dfrac{a-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 是纯虚数，则 $a=$(　　).

A. 1　　B. -1　　C. $\sqrt{2}$　　D. $-\sqrt{2}$

【变式 5】 (2008·全国Ⅱ理，2)$a,b\in\mathbf{R}$，且 $b\neq0$，复数 $(a+b\mathrm{i})^3\in\mathbf{R}$，则(　　).

A. $b^2=3a^2$　　B. $a^2=3b^2$　　C. $b^2=9a^2$　　D. $a^2=9b^2$

心得体会

【变式 6】（2006·广东理，2）复数 z 满足 $z^2+2=0$，则 $z^3=$（　　）.

A. $\pm 2\sqrt{2}\mathrm{i}$　　B. $-2\sqrt{2}\mathrm{i}$　　C. $-2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}\mathrm{i}$

【变式 7】$\sin 2\theta-1+\mathrm{i}(\sqrt{2}\cos\theta+1)$ 是纯虚数，则 $\theta=$（　　）.

A. $2k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$　　B. $2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$

C. $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$　　D. $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$

【变式 8】（2008·江苏，3）$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $a+b=$_____.

【例 15.2】（2011·大纲全国理，1）复数 $z=1+\mathrm{i}$，$\bar{z}$ 为 z 的共轭复数，则 $z\bar{z}-z-1$ 等于（　　）.

A. $-2\mathrm{i}$　　B. $-\mathrm{i}$　　C. i　　D. $2\mathrm{i}$

【解析】$z\bar{z}-z-1=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})-1=1-\mathrm{i}^2-1-\mathrm{i}-1=-\mathrm{i}$. 故选 B.

【变式 1】（2011·课标全国理，1）复数 $\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ 的共轭复数是（　　）.

A. $-\frac{3}{5}\mathrm{i}$　　B. $\frac{3}{5}\mathrm{i}$　　C. $-\mathrm{i}$　　D. i

【变式 2】（2011·江苏，3）设复数 i 满足 $\mathrm{i}(z+1)=-3+2\mathrm{i}$（i 为虚数单位），则 z 的实部是_____.

【变式 3】（2011·湖南理，1）若 $a,b\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位，且 $(a+\mathrm{i})\mathrm{i}=b+\mathrm{i}$，则（　　）.

A. $a=1,b=1$　　B. $a=-1,b=1$

C. $a=-1,b=-1$　　D. $a=1,b=-1$

【变式 4】（2011·江西文，1）若 $(x-\mathrm{i})\mathrm{i}=y+2\mathrm{i}$，$y\in\mathbf{R}$，则复数 $x+y\mathrm{i}$ 等于（　　）.

A. $-2-\mathrm{i}$　　B. $2+\mathrm{i}$　　C. $1-2\mathrm{i}$　　D. $1+2\mathrm{i}$

【变式 5】（2011·上海理，19）已知复数 z_1 满足 $(z_1-2)(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$（i 为虚数单位），复数 z_2 的虚部为 2，且 z_1z_2 是实数，求 z_2.

【变式 6】（2011·北京理，2）复数 $\frac{\mathrm{i}-2}{1+2\mathrm{i}}=$（　　）.

A. i　　B. $-\mathrm{i}$　　C. $-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$

【变式 7】（2011·重庆理，1）复数 $\frac{\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4}{1-\mathrm{i}}$ 等于（　　）.

A. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

【变式 8】（2011·湖北理，1）i 为虚数单位，则 $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2011}$ 等于（　　）.

A. $-\mathrm{i}$　　B. -1　　C. i　　D. 1

题型 194　复数的几何意义

思路提示：结合复数的几何意义，运用数形结合的思想，可把复数、解析几何有机地结合在一起.

【例 15.3】（2007·辽宁理，5）已知 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$，则复数 $z=(\cos\theta+\sin\theta)+$

i(sinθ−cosθ)在复平面上的对应点在(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【解析】 解法一:赋值法. 在 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ 取特殊值 $\theta=\pi\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=-1\\ \sin\theta=0\end{cases}$,

则 $z=-1+\mathrm{i}$ 在复平面上的对应点在第二象限.

解法二:图解法.

$\cos\theta+\sin\theta=0$,$\tan\theta=-1$,把复平面分成两块,

一块 $\cos\theta+\sin\theta>0$,另一块 $\cos\theta+\sin\theta<0$;

$\sin\theta-\cos\theta=0$,$\tan\theta=1$,把复平面分成两块,

一块 $\sin\theta-\cos\theta>0$,另一块 $\sin\theta-\cos\theta<0$.

依图 15-2 所示,z 的实部 $\cos\theta+\sin\theta<0$,

虚部 $\sin\theta-\cos\theta>0$.

则复数 z 在复平面上的对应点在第二象限.

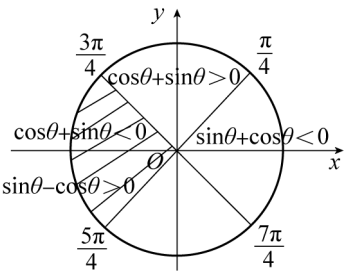


图　15-2

解法三:$\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$,$\theta+\frac{\pi}{4}\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$,$\theta-\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

则 $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)<0$,$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)>0$,故 $z=(\cos\theta+\sin\theta)+\mathrm{i}(\sin\theta-\cos\theta)$ 在复平面上对应的点在第二象限. 故选 B.

【评注】 解法一便捷,判断 $\cos\theta+\sin\theta>0$(或<0)取一个 θ 值验证即可.

【变式 1】 (2008·广东理,1)$0<a<2$,$z=a+\mathrm{i}$,$|z|$ 的取值范围为(　　).

A. $(1,\sqrt{3})$　　B. $(1,\sqrt{5})$　　C. $(1,3)$　　D. $(1,5)$

【变式 2】 (2011·辽宁理,1)a 为正实数,i 为虚数单位,$\left|\frac{a+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right|=2$,则 a 等于(　　).

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

【变式 3】 (2008·上海春,16)已知 $z\in\mathbf{C}$,且 $|z-2-2\mathrm{i}|=1$,则 $|z+2-2\mathrm{i}|$ 的最小值为(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【变式 4】 设 z 是复数,$w=z+\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$,$-1<w<2$.

(1)求 $|z|$ 及 z 的实部的取值范围;

(2)若 $u=\frac{1-z}{1+z}$,分析 u 是否为纯虚数,并说明理由;

(3)求 $w-u^2$ 的最小值.

第十六章　选讲内容

第一节　几何证明选讲(选修 4-1)

考纲解读

1. 了解平行线截割定理,会证明并应用直角三角形射影定理.
2. 会证明并应用圆周角定理、圆的切线的判定定理及性质定理.
3. 会证明并应用相交弦定理,圆内接四边形的性质定理与判定定理、切割线定理.
4. 了解平行投影的含义、通过圆柱与平面的位置关系了解平行投影;会证平面与圆柱面的截线是椭圆(特殊情形是圆).

命题趋势探究

主要考查圆周角定理、圆的切线的判定定理与性质定理以及圆内接四边形的性质.

知识点精讲

一、平行截割定理

1. 平行线等分线段定理及其推论

(1)定理:如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等,那么在任一条(与这组平行线相交的)直线上截得的线段也相等.

(2)推论:经过梯形一腰的中点而平行于底边的直线平分另一腰.

2. 平行截割定理及其推论

(1)定理:两条直线与一组平行线相交,它们被这组平行线截得的对应线段成比例.

(2)推论:平行于三角形一边的直线截其他两边,截得的三角形与原三角形的对应边成比例.

二、相似三角形

1. 相似三角形的判定

(1)判定定理:

心得体会

a. 两角对应相等的两个三角形相似.

b. 两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似.

c. 三边对应成比例的两个三角形相似.

(2)推论:平行于三角形一边的直线和其他两边相交,所构成的三角形与原三角形相似.

(3)直角三角形相似的特殊判定:斜边与一条直角边对应成比例的两个直角三角形相似.

2. 相似三角形的性质

相似三角形对应线段的比等于相似比,面积比等于相似比的平方.

3. 直角三角形射影定理

直角三角形一条直角边的平方等于该直角边在斜边上的射影与斜边的乘积,斜边上的高的平方等于两条直角边在斜边上的射影的乘积.

三、圆的切线

1. 切线的性质及判定

(1)切线的性质定理:圆的切线垂直于经过切点的半径.

(2)切线的判定定理:经过半径的外端且与这条半径垂直的直线是圆的切线.

2. 切线长定理

从圆外一点引圆的两条切线长相等.

四、相交弦定理

圆的两条相交弦,被交点分成的两段的积相等.

五、切割线定理

从圆外一点引圆的一条割线与一条切线,切线长是这点到割线与圆的两个交点的线段长的等比中项.

六、圆内接四边形

1. 圆内接四边形性质定理

圆内接四边形对角互补.

2. 圆内接四边形判定定理

(1)如果四边形的对角互补,则此四边形内接于圆.

(2)若两点在一条线段同侧且对该线段张角相等,则此两点与线段两个端点共圆,特别地,对定线段张角为直角的点共圆.

心得体会

题型归纳及思路提示

题型 195　圆和直角三角形中长度与角的计算

思路提示：同圆中同弧上的圆周角相等(直径上圆周角为直角)；直线 l 切圆于点 $T\Leftrightarrow OT\perp l$；若 NT_1，NT_2 切圆于 T_1 和 $T_2\Rightarrow NT_1=NT_2$；弦切角 $\angle ATM$ 等于 $\overset{\frown}{AT}$ 上的圆周角 $\angle ABT$(如图 16-1 所示).

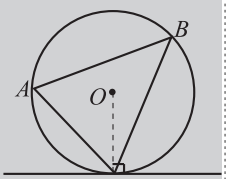


图　16-1

【例 16.1】 如图 16-2 所示，AB 为圆 O 的直径，MN 切圆 O 于点 C，$AD\perp MN$ 于 D，$BE\perp MN$ 于 E，BE 交圆 O 于 F，$AD=3$，$BE=7$. 求：

(1)圆 O 的半径；

(2)DE 的长.

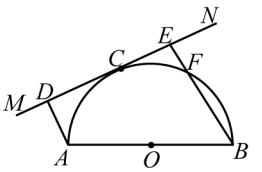


图　16-2

【解析】 (1)连接 OC，

$$\left.\begin{array}{l}MN\text{ 切圆 }O\text{ 于点 }C,OC\perp MN\\AD\perp MN,BE\perp MN\end{array}\right\}\Rightarrow AD\parallel OC\parallel BE,$$

$AO=BO\Rightarrow OC$ 为梯形 $ABED$ 的中位线.

故半径 $OC=\dfrac{1}{2}(AD+BE)=\dfrac{1}{2}\times(3+7)=5$.

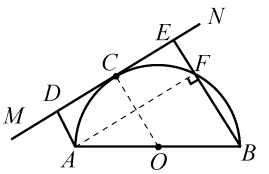


图　16-3

(2)如图 16-3 所示，连接 AF，因为 AB 为直径，所以 $\angle AFB=90°$，所以 $DE=AF$，又在 Rt$\triangle ABF$ 中，

$AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=\sqrt{10^2-4^2}=2\sqrt{21}$. 所以 $DE=2\sqrt{21}$.

【变式 1】 在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle C=72°$，圆 O 过 A，B 两点，与 BC 切于点 B，与 AC 交于点 D，连接 BD，$BC=\sqrt{5}-1$，则 $AC=$_____.

【变式 2】 (广东惠州一模)如图 16-4 所示，EB，EC 是圆 O 的两切线，B，C 为切点，A，D 是圆 O 上两点，$\angle E=46°$，$\angle DCF=32°$，则 $\angle A=$_____.

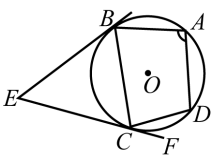


图　16-4

【变式 3】 (2008·广东珠海)如图 16-5 所示，PA 切圆 O 于 A，PCB 为圆 O 的割线且不过圆心 O，$\angle BPA=30°$，$PA=2\sqrt{3}$，$PC=1$，则圆 O 的半径为_____.

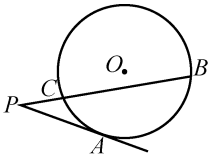


图　16-5

【变式 4】 (2008·广东深圳)如图 16-6 所示，PT 为圆 O 的切线，T 为切点，PA 交圆 O 于 A，B 两点，$\angle TPA$ 的角平分线交 TA，TB 于 D，E，$PT=2$，$PB=\sqrt{3}$，则 $PA=$_____，$\dfrac{TE}{AD}=$_____.

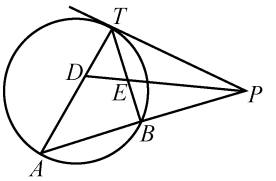


图　16-6

【变式 5】 (2011·北京理，5)如图 16-7 所示，AD，AE，BC 分别与圆 O 切于点 D，E，F，延长 AF 与圆 O 交于另一点 G，给出下列三个结论：①$AD+AE=AB+BC+CA$；②$AF\cdot AG=AD\cdot AE$；③$\triangle AFB\backsim\triangle ADG$. 其中正确结论的序号

心得体会

是(　　).

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. ①②③

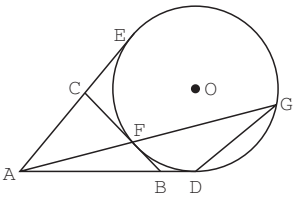


图　16-7

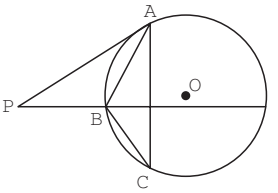


图　16-8

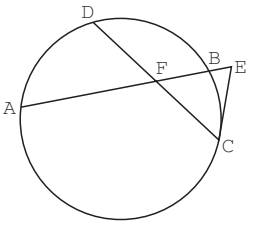


图　16-9

【变式 6】 (2011・广东理,15)如图 16-8 所示,过圆 O 外一点 P 分别作圆的切线和割线交圆于 A,B 两点,且 $PB=7$,C 是圆上一点使得 $BC=5$,$\angle BAC=\angle APB$,则 $AB=$_____.

【变式 7】 (2011・天津理,12)如图 16-9 所示,已知圆中两条弦 AB 与 CD 相交于点 F,E 是 AB 延长线上一点,且 $DF=CF=\sqrt{2}$,$AF:FB:BE=4:2:1$. 若 CE 与圆相切,则线段 CE 的长为_____.

题型 196　证明题

【例 16.2】 (2008・江苏苏、锡、常、镇二模)如图 16-10 所示,圆 O 外一点 P,PA 切圆 O 于 A,点 M 为 AP 的中点,MBC 为圆 O 的割线. 求证:$\angle MCP=\angle MPB$.

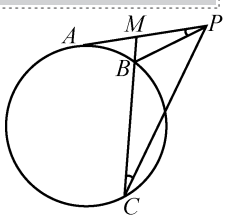


图　16-10

【分析】 若 $\angle MCP=\angle MPB$,必有 $\triangle MPB\backsim\triangle MCP$.

【解析】 证:由切割线定理,得 $\left.\begin{matrix}MA^2=MB\cdot MC\\MA=MP\end{matrix}\right\}\Rightarrow MP^2=MB\cdot MC$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{MP}{MB}=\dfrac{MC}{MP}\\\angle PMB=\angle CMP\end{cases}\Rightarrow\triangle MPB\backsim\triangle MCP$$

$\Rightarrow\angle MPB=\angle MCP$.

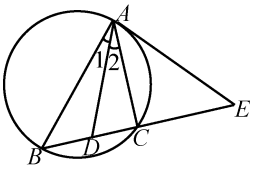


图　16-11

【变式 1】 (2008・江苏,21)如图 16-11 所示,$\triangle ABC$ 外接圆的切线 AE 与 BC 延长线交于点 E,$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 D. 求证:$ED^2=EC\cdot EB$.

【变式 2】 (2008・宁夏、海南,22)如图 16-12 所示,过圆 O 外一点 M 作圆的一条切线,切点为 A,过点 A 作直线 AP 垂直于直线 OM,垂足为 P.

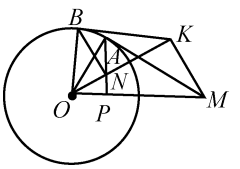


图　16-12

(1)证明:$OM\cdot OP=OA^2$;

(2)N 为线段 AP 上一点,直线 NB 垂直于直线 ON,且交圆 O 于点 B,过 B 点的切线交直线 ON 于 K.

证明:$\angle OKM=90^\circ$.

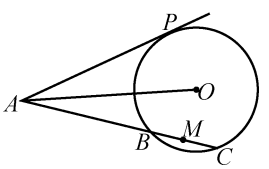


图　16-13

【变式 3】 (2007・宁夏、海南,22)如图 16-13 所示,已知 AP 是圆 O 的切线,P 为切点,AC 是圆 O 的割线,与圆 O 交于 B,C 两点,圆心 O 在 $\angle PAC$ 的内部,点 M 是 BC 的中点.

(1)证明:A,P,O,M 四点共圆;

心得体会

(2)求$\angle OAM+\angle APM$的大小.

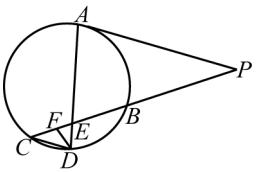


图 16-14

【变式 4】 (2009·江苏,无锡)如图 16-14 所示,已知 PA 与圆 O 相切,A 为切点,PBC 为割线,弦 $CD/\!/AP$,AD,BC 相交于点 E,F 为 CE 上一点,且 $DE^2=EF\cdot EC$.

(1)求证:$\angle P=\angle EDF$;

(2)求证:$CE\cdot EB=EF\cdot EP$;

(3)若 $CE:EB=3:2$,$DE=6$,$EF=4$,求 PA 的长.

题型 197 空间图形问题转化为平面问题

【例 16.3】 从球外一点引球的切线,则(　　).

A. 可以引无数条切线,所有切点组成球的一个大圆

B. 可以引无数条切线,所有切点组成球的一个小圆

C. 只可以引两条切线,两切点的连线过球心

D. 只可以引两条切线,两切点的连线不过球心

【解析】 如图 16-15 所示,圆 O 为球的大圆,PT_1、PT_2 为圆 O 的两条切线,把圆 O 以 PO 为旋转轴,旋转得球 O,因为 $OT_1>O_1T_1$,所以切点 T_1 随之旋转为球 O 的一个小圆. 故选 B.

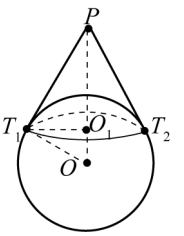


图 16-15

【变式 1】 若平面 α 与球 O 相切,切点为 M,则(　　).

A. 经过点 M 的直线都与球 O 相切

B. 不经过点 M 的直线都与球 O 相离

C. 平面 α 内不经过点 M 的直线有可能与球 O 相切

D. 平面 α 内经过点 M 的直线都与球 O 相切

【变式 2】 已知球的半径 $R=6$,过球外一点 P 作球的切线长为 8,则点 P 到球面上任一点 Q 的最短距离为(　　).

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【变式 3】 将一个圆柱形水杯(内有半杯水)倾斜成母线与桌面成 60°时,杯内的水平面(水不溢出)呈椭圆形,则该椭圆的离心率为(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

第二节　坐标系与参数方程(选修 4-4)

考纲解读

1. 理解坐标系的作用.
2. 了解在直角坐标系伸缩变换作用下平面图形的变化情况.
3. 能在极坐标中用极坐标表示点的位置,理解在极坐标系和平面直角坐标系中表示点的位置的区别,能进行极坐标和直角坐标的互化.

心得体会

4. 能在极坐标系中给出简单图形(如过极点的直线、过极点或圆心在极点的圆)的方程. 通过比较这些图形在极坐标和平面直角坐标系中的方程,理解用方程表示平面图形时选择适当坐标系的意义.
5. 了解柱坐标系、球坐标系中表示空间中的点的位置的方法,并与空间直角坐标系中表示点的位置方法相比较,了解它们的区别.
6. 了解参数方程,了解参数的意义.
7. 能选择适当的参数写出直线、圆和圆锥曲线的参数方程.
8. 掌握参数方程化普通方程的方法.

命题趋势探究

本章是新课标新增内容,属选考内容,在高考中可能有所体现.

参数方程是解析几何、平面向量、三角函数、圆锥曲线与方程等知识的综合应用和进一步深化,是研究曲线的工具,值得特别关注.

知识点精讲

一、极坐标系

在平面上取一个定点 O,由点 O 出发的一条射线 Ox、一个长度单位及计算角度的正方向(通常取逆时针方向),合称为一个极坐标系. 点 O 称为极点,Ox 称为极轴. 平面上任一点 M 的位置可以由线段 OM 的长度 ρ 和从 Ox 到 OM 的角度 θ 来刻画(如图 16-16 和图 16-17 所示).

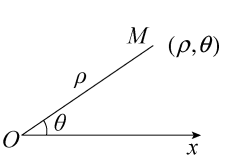


图　16-16

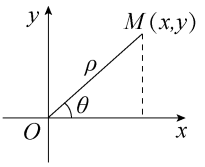


图　16-17

这两个实数组成的有序实数对 (ρ,θ) 称为点 M 的极坐标. ρ 称为极径,θ 称为极角.

二、极坐标与直角坐标的互化

设 M 为平面上的一点,其直角坐标为 (x,y),极坐标为 (ρ,θ),由图 16-16 和图 16-17 可知,下面的关系式成立:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \rho^2=x^2+y^2 \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq 0) \end{cases}$$

(上式对 $\rho<0$ 也成立).

心得体会

三、极坐标的几何意义

$\rho=r$——表示以 O 为圆心，r 为半径的圆；

$\theta=\theta_0$——表示过原点(极点)倾斜角为 θ_0 的直线，$\theta=\theta_0\ (\rho\geqslant 0)$ 为射线；

$\rho=2a\cos\theta$——表示以 $(a,0)$ 为圆心过 O 点的圆.

(可化直角坐标：$\rho^2=2a\rho\cos\theta\Rightarrow x^2+y^2=2ax\Rightarrow (x-a)^2+y^2=a^2$.)

四、直线的参数方程

直线的参数方程可以从其普通方程转化而来，设直线的点斜式方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，其中 $k=\tan\alpha$(α 为直线的倾斜角)，代入点斜式方程：$y-y_0=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x-x_0)\ (\alpha\neq\dfrac{\pi}{2})$，即 $\dfrac{x-x_0}{\cos\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\sin\alpha}$.

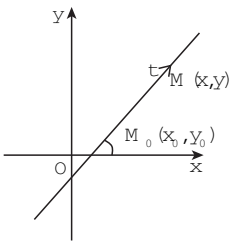


图 16-18

记上式的比值为 t，整理后得 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$，$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时也成立，故直线的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数，α 为倾斜角，直线上定点 $M_0(x_0,y_0)$，动点 $M(x,y)$，t 为 $\overrightarrow{M_0M}$ 的数量，向上向右为正(如图 16-18)).

五、圆的参数方程

若圆心在点 $M(x_0,y_0)$，半径为 r，则圆的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+r\cos\theta\\ y=y_0+r\sin\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$.

六、椭圆的参数方程

椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$).

七、双曲线的参数方程

双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\sec\theta\\ y=b\tan\theta\end{cases}(\theta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z})$.

八、抛物线的参数方程

抛物线 $y^2=2px$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=2pt^2\\ y=2pt\end{cases}$ (t 为参数，参数 t 的几何意义是抛物线上的点与抛物线的顶点连线的斜率的倒数).

题型归纳及思路提示

题型 198　参数方程化普通方程

思路提示：代入消参、加减消参、平方和或差消参.

心得体会

【例 16.4】 (2008·福建理,14)若直线 $3x+4y+m=0$ 与圆 $\begin{cases}x=1+\cos\theta\\y=-2+\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)没有公共点,则实数 m 的取值范围是_____.

【解析】 将圆的参数方程 $\begin{cases}x=1+\cos\theta\\y=-2+\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)化为普通方程 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$,圆心 $(1,-2)$,半径 $r=1$. 直线与圆无公共点,则圆心到直线的距离大于半径,$d=\dfrac{|3-8+m|}{5}>1\Rightarrow|m-5|>5$,即 m 的范围是 $(-\infty,0)\cup(10,+\infty)$.

【变式 1】 (2007·广东理,13)在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t+3\\y=3-t\end{cases}$(参数 $t\in\mathbf{R}$),圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta+2\end{cases}$(参数 $\theta\in[0,2\pi]$),则圆 C 的圆心坐标为_____,圆心到直线 l 的距离为_____.

【变式 2】 (2008·宁夏、海南理,23)已知曲线 $C_1:\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),

曲线 $C_2:\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t-\sqrt{2}\\y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数).

(1)指出 C_1,C_2 各是什么曲线,并说明 C_1 与 C_2 公共点的个数;

(2)若把 C_1,C_2 上各点的纵坐标都压缩为原来的一半,分别得到曲线 C_1',C_2',写出 C_1',C_2'的参数方程. C_1'与 C_2'公共点的个数和 C_1 与 C_2 公共点的个数是否相同?说明理由.

【变式 3】 椭圆 $C:\begin{cases}x=4\cos\alpha\\y=2\sqrt{3}\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数)上一点 P,O 为坐标原点,直线 OP 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$,求点 P 的坐标.

【变式 4】 参数方程 $\begin{cases}x=\sin\theta+\cos\theta\\y=\sin\theta\cos\theta\end{cases}$($\theta$ 是参数)的普通方程是_____.

【例 16.5】 (2008·广东惠州一模)已知动圆 $C:x^2+y^2-2ax\cos\theta-2by\sin\theta=0$($a$,$b$ 是正常数,$a\neq b$,θ 是参数),则圆心的轨迹是_____.

【解析】 由动圆 $C:x^2+y^2-2ax\cos\theta-2by\sin\theta=0$ 得 $(x-a\cos\theta)^2+(y-b\sin\theta)^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$. 圆心坐标为 $(a\cos\theta,b\sin\theta)$($\theta$ 为参数),设 $x=a\cos\theta$,$y=b\sin\theta$,则 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$,即 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 为所求轨迹方程,所以圆心的轨迹是椭圆.

【变式 1】 方程 $\begin{cases}x=3t^2+2\\y=t^2-1\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 5)$表示的曲线是(　　).

A. 线段　　B. 双曲线的一支

C. 圆弧　　D. 射线

【变式 2】 (2010·课标全国理,23)已知直线 $C_1:\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数),$C_2:\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$

心得体会

(θ 为参数).

(1)当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时,求 C_1 与 C_2 的交点坐标;

(2)过坐标原点 O 作 C_1 的垂线,垂足为 A,P 为 OA 的中点. 当 α 变化时,求点 P 轨迹的参数方程,并指出它是什么曲线.

题型 199　普通方程化参数方程

【例 16.6】 (2008·江苏,21)在平面直角坐标系 xOy 中,设 $P(x,y)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上的一个动点,求 $S=x+y$ 的最大值.

【分析】 利用椭圆的参数方程,建立 x,y 与参数 θ 的关系,运用三角函数最值的求解,求解 $x+y$ 的最大值.

【解析】 点 $P(x,y)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上的一个动点,则 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数),

$\theta\in[0,2\pi]$,$x+y=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$,$\theta\in[0,2\pi]$.

故 $(x+y)_{\max}=2$.

【变式 1】 已知抛物线 $C:y^2=4ax$ 上动点 Q 处的法线交 x 轴、y 轴于 R,S,过 R,S 分别作 x 轴、y 轴的垂线 l_1,l_2,$l_1\cap l_2=P$,求点 P 的轨迹方程.

【变式 2】 (2009·宁夏石嘴山)已知点 $P(x,y)$ 是圆 $x^2+y^2-2y=0$ 上的动点.

(1)求 $2x+y$ 的取值范围;

(2)若 $x+y+a\geqslant 0$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

【变式 3】 (2009·江苏无锡)直线 l 过 $P(1,1)$,倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

(1)写出 l 的参数方程;

(2)l 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于两点 A,B,求点 P 到 A,B 两点的距离之积.

题型 200　极坐标方程化直角坐标方程

【例 16.7】 (2008·广东理,13)已知曲线 C_1,C_2 的极坐标分别为 $\rho\cos\theta=3$,$\rho=4\cos\theta\left(\rho\geqslant 0,0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)$,则曲线 C_1 与 C_2 交点的极坐标为_____.

【解析】 $C_1:x=3$,$C_2:\rho^2=4\rho\cos\theta$,$x^2+y^2=4x$ $\left(\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right),\rho\geqslant 0\right)$(圆在第一象限的部限). 联立 C_1 与 C_2 的方程,由 $\begin{cases}x=3\\ x^2+y^2=4x\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3\\ y=\pm\sqrt{3}\end{cases}$,因为交点在第一象限,所以曲线 C_1 与 C_2 的交点为$(3,\sqrt{3})$,极坐标为$(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$.

【变式 1】 (2007·海南、宁夏,22)圆 O_1 和圆 O_2 的极坐标方程分别为 $\rho=4\cos\theta$,$\rho=-4\sin\theta$.

(1)把圆 O_1 和圆 O_2 的极坐标方程分别化为直角坐标方程;

(2)求经过圆 O_1 和圆 O_2 交点的直线的直角坐标方程.

【变式 2】 已知一个圆的极坐标方程是 $\rho=5\sqrt{3}\cos\theta-5\sin\theta$,求此圆的圆心和半径.

心得体会

【变式 3】（2010·江苏，21(3)）在极坐标系中，已知圆 $\rho=2\cos\theta$ 与直线 $3\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta+a=0$ 相切，求实数 a 的值.

【例 16.8】（2010·北京理，5）极坐标方程 $(\rho-1)(\theta-\pi)=0(\rho\geqslant 0)$ 表示的图形是（　　）.

A. 两个圆　　B. 两条直线

C. 一个圆和一条射线　　D. 一条直线和一条射线

【分析】 将极坐标方程化为直角坐标方程.

【解析】 因为 $(\rho-1)(\theta-\pi)=0(\rho\geqslant 0)$，所以 $\rho=1$ 或 $\theta=\pi(\rho\geqslant 0)$.

$\rho=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1$，得 $x^2+y^2=1$，表示圆心在原点的单位圆；$\theta=\pi(\rho\geqslant 0)$ 表示 x 轴的负半轴，是一条射线. 故选 C.

【变式 1】（2010·湖南理，3）极坐标方程 $\rho=\cos\theta$ 和参数方程 $\begin{cases}x=-1-t\\y=2+3t\end{cases}$（$t$ 为参数）所表示的图形分别是（　　）.

A. 圆、直线　　B. 直线、圆

C. 圆、圆　　D. 直线、直线

【变式 2】（2009·江苏无锡）极坐标方程 $\rho=\sin\theta+2\cos\theta$ 所表示的曲线的直角坐标方程是_____.

【变式 3】（2010·福建福州）在极坐标系中，点 $P\left(2,-\frac{\pi}{6}\right)$ 到直线 $l:\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=1$ 的距离是_____.

第三节　不等式选讲（选修 4-5）

考纲解读

1. 了解绝对值的几何意义，会利用绝对值的定义解不等式，利用绝对值不等式证明不等式和求最值.
2. 了解柯西不等式及其几何意义，会用它来证明不等式和求最值.
3. 了解均值不等式，会用它来证明不等式和求最值.
4. 会用综合法、分析法、反证法及数学归纳法证明不等式.

命题趋势探究

本节内容为新课标新增内容，是高考选考内容. 题型以含绝对值的不等式的解法和证明为重要考点，不等式的应用为次重考点，不等式证明放在一般位置，难度为中档.

心得体会

知识点精讲

一、不等式的性质

1. 同向合成

(1)$a>b,b>c\Rightarrow a>c$;

(2)$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$;

(3)$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

(合成后为必要条件)

2. 同解变形

(1)$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$;

(2)$a>b\Leftrightarrow c>0,ac>bc\Leftrightarrow c<0,ac<bc$;

(3)$a>b>0\Leftrightarrow\frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0\Leftrightarrow\sqrt{a}>\sqrt{b}>0$.

(变形后为充要条件)

3. 作差比较法

$a>b\Leftrightarrow a-b>0,a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

二、含绝对值的不等式

1. $a>0,|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a;|x|>a\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$

2. $|a|>|b|\Leftrightarrow a^2>b^2$

3. 零点分段讨论

三、基本不等式

1. $a^2+b^2\geqslant 2ab$(等号成立条件为 $a=b$)

2. $a>0,b>0,\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(等号成立条件为 $a=b$);$a>0,b>0,c>0,\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$(当且仅当$a=b=c$ 时取等号)

3. 柯西不等式

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$(当且仅当 $ad=bc$ 时取等号). ①几何意义:$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow|ac+bd|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$.

②推广:$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$. 等号成立当且仅当向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 共线.

四、不等式的证明

1. 作差比较法

心得体会

2. 综合法——同向合成

3. 分析法，逆推法

4. 数学归纳法

题型归纳及思路提示

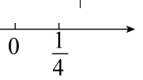
题型 201　含绝对值的不等式

【例 16.9】 (2008·广东理，14)已知 $a\in\mathbf{R}$，关于 x 的方程 $x^2+x+\left|a-\frac{1}{4}\right|+|a|=0$ 有实根，求 a 的取值范围.

【分析】 由 $\Delta\geqslant 0$ 得含绝对值的不等式.

【解析】 方程 $x^2+x+\left|a-\frac{1}{4}\right|+|a|=0$ 有实根，$\Delta=1-4\left(\left|a-\frac{1}{4}\right|+|a|\right)\geqslant 0\Rightarrow$ $\left|a-\frac{1}{4}\right|+|a|\leqslant\frac{1}{4}$.

(1)求出绝对值的零点，$\left|a-\frac{1}{4}\right|=0$，$a=\frac{1}{4}$；$|a|=0$，$a=0$.

(2)数轴标根， 

(3)分段讨论：①$\begin{cases}a<0\\-\left(a-\frac{1}{4}\right)-a\leqslant\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow$无解.

②$\begin{cases}0\leqslant a<\frac{1}{4}\\-\left(a-\frac{1}{4}\right)+a\leqslant\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow a\in\left[0,\frac{1}{4}\right)$.

③$\begin{cases}a\geqslant\frac{1}{4}\\a-\frac{1}{4}+a\leqslant\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$.

综上可得，$a\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$.

【变式 1】 (2011·山东理，4)不等式 $|x-5|+|x+3|\geqslant 10$ 的解集是(　　).

A. $[-5,7]$　　B. $[-4,6]$

C. $(-\infty,-5]\cup[7,+\infty)$　　D. $(-\infty,-4]\cup[6,+\infty)$

【变式 2】 (2011·辽宁理，24)已知函数 $f(x)=|x-2|-|x-5|$.

(1) 证明：$-3\leqslant f(x)\leqslant 3$；

(2)求不等式 $f(x)\geqslant x^2-8x+15$ 的解集.

【变式 3】 (2011·课标全国理，24)设函数 $f(x)=|x-a|+3x$，其中 $a>0$.

(1)当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant 3x+2$ 的解集；

(2)若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $\{x|x\leqslant -1\}$，求 a 的值.

心得体会

【变式 4】 (2011·陕西理,15(A))若关于 x 的不等式 $|a|\geqslant|x+1|+|x-2|$ 存在实数解,则实数 a 的取值范围是_____.

题型 202 不等式的证明

【例 16.10】 (2011·安徽理,19)(1)设 $x\geqslant1,y\geqslant1$,证明 $x+y+\frac{1}{xy}\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy$;

(2)$1<a\leqslant b\leqslant c$,证明 $\log_a b+\log_b c+\log_c a\leqslant\log_b a+\log_c b+\log_a c$.

【解析】 (1)$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy-x-y-\frac{1}{xy}=\frac{1}{xy}[x^2y^2-1-(x+y)(xy-1)]=$

$\frac{1}{xy}(xy-1)(x-1)(y-1)$,因为 $x\geqslant1,y\geqslant1$,所以 $xy-1\geqslant0,x-1\geqslant0$,

$y-1\geqslant0$,所以$\frac{1}{xy}(xy-1)(x-1)(y-1)\geqslant0\Rightarrow x+y+\frac{1}{xy}\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy$.

(2)令 $\log_a b=x\geqslant1,\log_b c=y\geqslant1$,则 $\log_b a=\frac{1}{x},\log_c b=\frac{1}{y},xy=\log_a b\cdot\log_b c=$

$\frac{\lg b}{\lg a}\cdot\frac{\lg c}{\lg b}=\frac{\lg c}{\lg a}=\log_a c$,得 $\log_c a=\frac{1}{xy}$. 原不等式等价于证明:$x\geqslant1,y\geqslant1$ 时,$x+$

$y+\frac{1}{xy}\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy$,由(1)问过程可知此不等式成立,故 $\log_a b+\log_b c+\log_c a$

$\leqslant\log_b a+\log_c b+\log_a c$.

【变式 1】 已知 $n\in\mathbf{N}^+,n>1$,证明:$\log_{n+1}n\cdot\log_{n+1}(n+2)<1$.

【变式 2】 已知 3 个正数 x_1,x_2,x_3,且 $x_1+x_2+x_3=1$.

求证:$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\left(1+\frac{1}{x_3}\right)\geqslant64$.

【例 16.11】 已知 $a+b+c=1,a>0,b>0,c>0$.

求证:$\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}\leqslant3\sqrt{2}$.

【解析】 由柯西不等式有$(\sqrt{3a+1}\cdot1+\sqrt{3b+1}\cdot1+\sqrt{3c+1}\cdot1)^2\leqslant$

$(3a+1+3b+1+3c+1)\cdot(1+1+1)=18$.

当且仅当 $\sqrt{3a+1}=\sqrt{3b+1}=\sqrt{3c+1}$,

即 $a=b=c=\frac{1}{3}$时等号成立. 故 $\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}\leqslant3\sqrt{2}$.

【变式 1】 (2008·江苏盐城)已知 $a>0,b>0,c>0,a\cos^2\theta+b\sin^2\theta<c$.

求证:$\sqrt{a}\cos^2\theta+\sqrt{b}\sin^2\theta<\sqrt{c}$.

【变式 2】 已知 $a>0,b>0,c>0$. 求证:$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geqslant\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$.

题型 203 一般综合法和分析法(含比较法)

【例 16.12】 已知正数 a,b,c 互不相等,求证:$a^4+b^4+c^4>a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2>abc(a+b+c)$.

【解析】 证明:正数 $a\neq b,a^4+b^4>2a^2b^2,a^2b^2+a^2c^2>2a^2bc$;

同理可得 $a^4+c^4>2a^2c^2,b^2c^2+a^2c^2>2c^2ab;b^4+c^4>2b^2c^2,a^2b^2+b^2c^2>2b^2ac$.

故 $a^4+b^4+c^4>a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2,a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2>abc(a+b+c)$.

【变式 1】 已知 $a>b>0,x=\sqrt{a+b}-\sqrt{a},y=\sqrt{a}-\sqrt{a-b}$,试比较 x,y 的大小.

心得体会

题型 204　数学归纳法

【例 16.13】 已知 $n\in\mathbf{N}^*$，$n>1$，求证：$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$.

【解析】 解法一：放缩法. $\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\right]^2$

$=\frac{4^2\cdot6^2\cdots(2n)^2}{3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdots(2n-1)^2}$

$>\frac{3\cdot5\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)(2n+1)}{3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdots(2n-1)^2}=\frac{2n+1}{3}$.

$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{3}}>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$.

解法二：数学归纳法.

①$n=2$ 时，左边$=\frac{4}{3}=\sqrt{\frac{64}{36}}$，右边$=\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{\frac{45}{36}}$，左边$>$右边.

②假设当 $n=k(k\geqslant2)$ 时，$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)>\frac{\sqrt{2k+1}}{2}$，

当 $n=k+1$ 时，

左边$=\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)>\frac{\sqrt{2k+1}}{2}\cdot\frac{2k+2}{2k+1}$.

即证$\frac{\sqrt{2k+1}(2k+2)}{2(2k+1)}>\frac{\sqrt{2(k+1)+1}}{2}$，即证$\frac{(2k+1)(2k+2)^2}{(2k+1)^2}>2k+3$.

即证$(2k+2)^2>(2k+1)(2k+3)$，即证 $4k^2+8k+4>4k^2+8k+3$(*)

式(*)成立⇒当 $n=k+1$ 时，左边$>$右边.

由①，②得，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant2$，

都有$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$.

【变式 1】 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，求证 $|\sin nx|\leqslant n|\sin x|$.