

连续系统的频域分析

本章提要

本章讨论周期信号的分解——傅里叶级数、非周期信号的分解——傅里叶变换和傅里叶变换的性质；以这些内容为基础，介绍信号的功率谱与能量谱，以及信号采样与采样定理；讨论系统函数、无失真传输系统、低通滤波器和调制与解调等系统频域分析的内容。

3.1 引言

分析线性系统的基本任务是求系统对输入信号的响应。输入信号可能是多种多样的，甚至是很复杂的。因此，为了便于系统响应的求解，也为了有统一的分析方法以适合各种各样的输入信号，可先把输入信号表示为一系列简单的基本信号的线性组合。如果系统对基本信号的响应是已知的，或者其求解十分方便，就可在求得系统对这一系列基本信号的响应之后，利用叠加原理得到系统对整个输入信号的总响应。这一思想是分析线性系统的基础。在第 2 章中已经看到，线性系统的时域分析，实际上是把输入信号 $f(t)$ 分解成一系列冲激信号，即

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

也就是说，把单位冲激信号 $\delta(t - \tau)$ 作为基元信号。若已知系统对 $\delta(t - \tau)$ 的响应为 $h(t - \tau)$ ，则该系统对输入信号 $f(t)$ 的响应为

$$y_t(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

线性系统时域分析法的优点是：直接获得信号随时间变化的波形，直观反映波形的特性；便于获得系统的动态性能指标。其缺点是：计算复杂（微积分运算），不能直接获得系统的频率特性。因此，为了计算方便，便于对系统的频率特性分析，必须寻求其他方法。

基本信号的选择不是唯一的，除单位冲激信号 $\delta(t)$ 外，单位阶跃信号 $\epsilon(t)$ 、单位三角函数 $\sin \omega t$ 和 $\cos \omega t$ 、单位复指数信号 $e^{j\omega t}$ 等都可作为基本信号。由于三角函数是单频信号，根据欧拉公式，复指数信号表示为

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

可见,复指数信号也是单频信号。当然,三角函数 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 也可以用复指数信号来表示,即

$$\begin{aligned}\sin\omega t &= \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \\ \cos\omega t &= \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\end{aligned}$$

因此,若选择三角函数或复指数作为基本信号,意味着把输入信号在频率域上分解。利用这种分解方法来分析信号和系统,称为系统的频域分析。

频域分析法不但简化了对系统响应的求解(代数运算),而且揭示了信号与系统的频率特性,使人们对信号与系统的性质有更进一步的理解,为人们提供了在频域上分析、设计系统的另一条途径。例如,音调的高低正是声音信号频率特征的表露;电视频道的划分是由电视信号的频率特性决定的;电子技术中广泛使用的各种滤波器,其特性主要是在频域上描述和计算的。

如前所述,把信号表示成某种基本信号的线性组合,是分析线性系统的基点。那么,任意信号如何分解成基本信号呢?这是分析信号和系统时必须首先解决的问题。

3.2 正交函数的概念

3.2.1 函数的正交定义

对于任意两个实函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$,若满足关系式

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt = 0 \quad (3.1)$$

则称函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在时间区间 $[t_1, t_2]$ 正交。

如果 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是复函数, $f_1^*(t)$ 和 $f_2^*(t)$ 分别为它们的共轭函数,若满足关系式

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2^*(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} f_1^*(t)f_2(t)dt = 0 \quad (3.2)$$

则称复函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在时间区间 $[t_1, t_2]$ 正交。

3.2.2 函数的正交集

实函数集合 $\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$ 中如果存在

$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t)f_j(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K, & i = j \end{cases} \quad (3.3)$$

则称此实函数集合为在时间区间 $[t_1, t_2]$ 的正交函数集合。如果 $K=1$,则称此实函数集合为归一化正交函数集合。

同理,复函数集合 $\{w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t)\}$ 中如果存在

$$\int_{t_1}^{t_2} w_i(t)w_j(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K, & i = j \end{cases} \quad (3.4)$$

则称此复函数集合为在时间区间 $[t_1, t_2]$ 的正交函数集。

如果在正交实函数集合 $\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$ 之外,不再存在函数 $x(t)$,且此函数满足关系式:

$$0 < \int_{t_1}^{t_2} [x(t)]^2 dt < \infty \quad (3.5)$$

和条件

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) f_i(t) dt = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

则称此实函数集合为在时间区间 $[t_1, t_2]$ 的完备正交实函数集或闭合正交实函数集。一般完备正交实函数集包含无穷多个函数。

例如,正交实函数集合 $\{\sin n\omega_0 t, n=1, 2, \dots, \infty\}$ 虽然包含无穷多个函数,但它不是完备正交实函数集,因为还存在 $\{\cos n\omega_0 t, n=1, 2, \dots, \infty\}$ 与之正交。而 $\{\cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t, n=1, 2, \dots, \infty\}$ 是完备正交实函数集。

至于完备正交复函数集的定义,与完备正交实函数集的定义类似。

如果在复函数集合 $\{w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t)\}$ 之外,不再存在函数 $x(t)$,且此函数满足关系式

$$0 < \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt < \infty$$

和条件

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) w_i^*(t) dt = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

则称此复函数集合为在时间区间 $[t_1, t_2]$ 的完备正交复函数集。

例如, $\{e^{jn\omega_0 t}, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 就是在区间 $\left[0, \frac{2\pi}{\omega_0}\right]$ 内的完备正交复函数集。

例 3.1 试判断在区间 $\left[0, \frac{2\pi}{\omega_0}\right]$ 内,① $\sin\omega_0 t$ 和 $\cos\omega_0 t$ 是否正交;② $\cos n\omega_0 t$ 和 $\cos m\omega_0 t$ 是否正交(n, m 均为整数)。

解: ① 因为

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \sin\omega_0 t \cos\omega_0 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \sin 2\omega_0 t dt = 0$$

所以, $\sin\omega_0 t$ 和 $\cos\omega_0 t$ 在区间 $\left[0, \frac{2\pi}{\omega_0}\right]$ 内正交。

② 因为

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} [\cos(n-m)\omega_0 t + \cos(n+m)\omega_0 t] dt \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{T}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

所以,当 $n \neq m$ 时, $\cos n\omega_0 t$ 和 $\cos m\omega_0 t$ 在区间 $\left[0, \frac{2\pi}{\omega_0}\right]$ 内正交。同理, $\{\sin n\omega_0 t, n=1, 2, \dots, \infty\}$ 也是在区间 $\left[0, \frac{2\pi}{\omega_0}\right]$ 内的正交函数集。

正交函数(信号)在电子工程和通信工程中应用广泛。

3.3 周期信号的分解——傅里叶级数

将任意周期信号在三角函数或复指数函数组成的完备正交函数集 $\{\cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t, n=1, 2, \dots, \infty\}$ 或 $\{e^{jn\omega_0 t}, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty\}$ 内分解而得到的级数统称为傅里叶级数(Fourier series, FS)。

早在 18 世纪,人们就注意到用三角函数表示周期信号的可能性。例如,俄国数学家欧拉(Euler)曾用三角函数的组合描述弦的振动。1807 年,法国科学家傅里叶(Fourier)把三角函数用于热传导的研究,进而断言:任何周期信号都可以用三角函数表示。他的研究成果当时并未得到广泛的承认。例如,著名数学家拉格朗日(Lagrange)认为只有连续的周期信号才能用三角函数表示,因为三角函数本身是连续的。他认为,具有不连续点的周期信号,例如周期性的方波,是不能用三角函数表示的。狄里赫利(Dirichlet)于 1829 年导出了傅里叶级数的收敛条件,证明了虽然并非如傅里叶原来所断言的那样,任何周期信号都可以用三角函数表示,但傅里叶级数的收敛条件是相当宽松的,足以囊括绝大部分实用信号,从而推动了傅里叶级数的研究。可是在此后约 100 年的时间里,傅里叶级数的应用仍然很少,这主要是因为当时物理学家和工程技术人员对傅里叶级数的物理含义仍不甚理解,甚至怀疑。直至 20 世纪 20 年代,由于无线电技术的发展,出现了谐波分析仪,从实验方面证实了傅里叶级数的存在性,才使得傅里叶级数的研究和应用进入了飞速发展的阶段。尤其是 1965 年以来,各种快速傅里叶算法的提出和计算机技术、集成电路技术的突飞猛进,使得傅里叶分析方法成为信号与系统领域最基本、最重要的分析方法,几乎渗透到所有的科学技术领域,例如电子、电力、自动控制、机械、地震、遥感、建筑、生物工程、光学、热工学。

虽然说对于某一给定函数,可以选择各种可能的完备正交函数集进行分解,但是三角函数集和复指数函数集是最重要、最常见、最方便的基本函数。

3.3.1 周期信号的三角函数形式的傅里叶级数

1. 傅里叶级数的三角函数形式

设 $f(t)$ 为实周期信号,周期为 T ,则有

$$f(t) = f(t + kT), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

若 $f(t)$ 满足狄里赫利条件:

- (1) 在一个周期内,只有有限个极大值和极小值,且只有有限个第一类不连续点。
- (2) 在一个周期内 $f(t)$ 绝对可积,即

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty$$

则 $f(t)$ 可用傅里叶级数表示为

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (3.7)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= A_0 = \frac{T}{2} \int_0^T f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n &= -\arctan \frac{b_n}{a_n} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

式(3.7)称为周期信号的三角函数形式的傅里叶级数,式(3.8)中的各系数称为傅里叶系数。在式(3.7)中,当 $n=0$ 时, A_0 项称为周期信号的直流分量,它是原信号在一个周期内的平均值,故又称为平均分量;当 $n=1$ 时, $A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ 项与原信号有相同的频率,称为1次谐波分量或基波分量, $\omega_0 = 2\pi/T$ 称为周期信号的基波角频率, A_1 是基波分量的幅值, φ_1 是基波分量的相位;当 $n=2$ 时,对于 $A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$ 项,其频率为基波频率的2倍,称为2次谐波分量, A_2 是2次谐波分量的幅值, φ_2 是2次谐波分量的相位。以此类推,对于 $A_n \cos(\omega_0 t + \varphi_n)$ 项,其频率为基波频率的 n 倍,称为 n 次谐波分量, A_n 是 n 次谐波分量的幅值, φ_n 是 n 次谐波分量的相位。一般把2次以上谐波分量称为高次谐波分量。

例 3.2 周期锯齿波如图 3.1 所示,求其傅里叶级数。

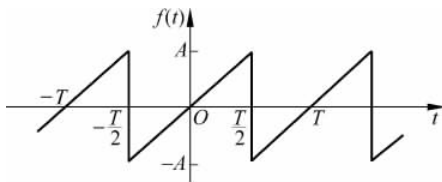


图 3.1 例 3.2 的图

解: 由于 $f(t)$ 是奇函数,所以有

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0 \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt = 0 \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2A}{T} \sin n\omega_0 t dt \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2A}{n\pi} \end{aligned}$$

故有

$$A_n = b_n, \quad \varphi_n = \pm 90^\circ$$

对应的傅里叶级数为

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2A}{n\pi} \cos(n\omega_0 t \pm 90^\circ)
 \end{aligned}$$

2. 信号合成

例 3.3 周期矩形波如图 3.2 所示, 求其傅里叶系数, 并讨论合成原信号。

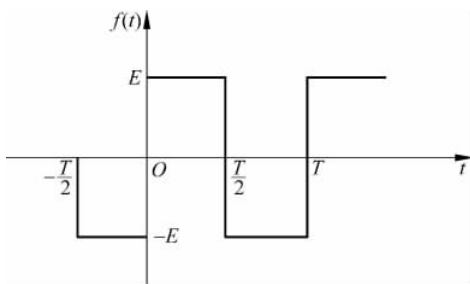


图 3.2 例 3.3 的图

解: 由于 $f(t)$ 也是奇函数, 所以有

$$\begin{aligned}
 a_0 &= a_n = 0 \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt \\
 &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} E \sin n\omega_0 t dt \\
 &= \frac{4E}{T} \left(\frac{-\cos n\omega_0 t}{n\omega_0} \right) \Big|_0^{T/2} \\
 &= \begin{cases} 4E/T, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

设 $T=6s, E=1$, 将上述主要谐波分量的合成情况画于图 3.3 中。其中, 图 3.3(a) 所示是基波分量与 3 次谐波分量、5 次谐波分量相加的情况; 图 3.3(b) 所示是基波分量一直加到 13 次谐波分量的情况; 图 3.3(c) 所示是基波分量一直加到 37 次谐波分量的情况。可见, 叠加的谐波分量项数越多, 就越接近原矩形波信号本身。

再看一个例子。如果谐波次数用 N 表示, 在图 3.4 中画出分别用 $N=1, 3, 5, 7$ 项逼近一个方波信号的情况。该图说明, 随着 N 增加, 逼近的精确程度明显改善。但是, 对于具有不连续点的周期信号会发生这样一种现象: 当选取傅里叶级数的项数 N 增多时, 合成的波形虽然在总趋势上更逼近于原函数, 但在不连续点附近要出现波动。由图 3.4 可以看出, 有限项数傅里叶级数的合成波形在原函数的不连续点处是收敛于不连续点处的平均值, 且在不连续点附近呈现起伏。随着次数 N 的增加, 起伏的峰部更靠近不连续点, 但其峰值的大小并不下降, 而大约等于原函数在不连续点处跳变值的 9%。这个起伏在不连续点的两侧呈衰减振荡的形式。这种现象是 1898 年由美国物理学家米切尔森 (Michelson) 首先发现, 并由吉布斯 (Gibbs) 于 1899 年首先证明的, 称为吉布斯现象。由

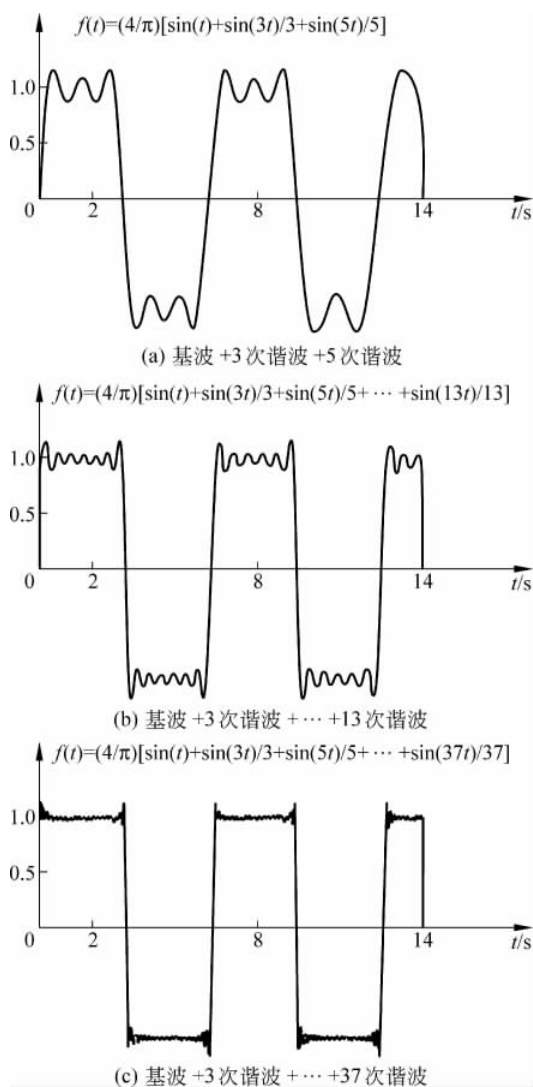


图 3.3 合成原信号

于吉布斯现象的存在,原函数 $f(t)$ 在一个周期内只能具有有限个不连续点。

3.3.2 周期信号的指数函数形式的傅里叶级数

现在讨论傅里叶级数的另一种形式——复指数级数形式。

根据欧拉公式

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

式(3.7)改写成

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} [e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \varphi_n)}]$$

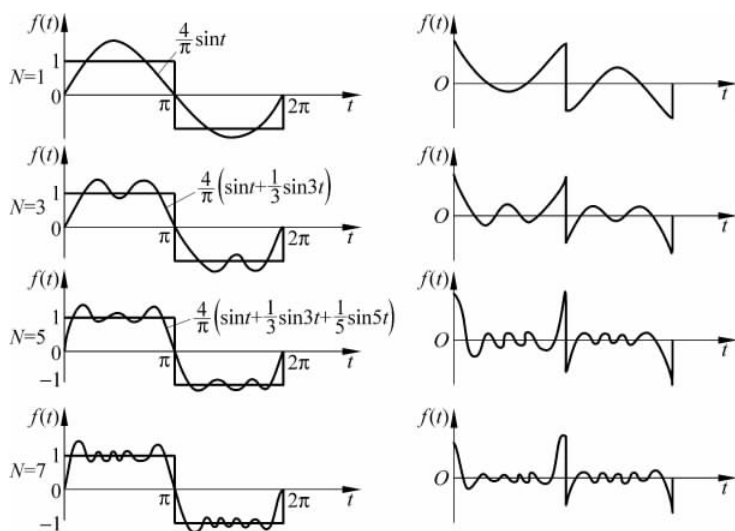


图 3.4 用有限项傅里叶级数逼近方波

令

$$F_0 = F(0) = a_0$$

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{2}A_n e^{-j\varphi_n} = \frac{1}{2} \dot{A}_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

上式可改写为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (3.9)$$

上式即为傅里叶级数的复指数形式。 $F(n\omega_0)$ 称为傅里叶复系数。下面讨论 $F(n\omega_0)$ 的计算问题。

由于

$$\dot{A}_n = A_n e^{-j\varphi_n} = A_n \cos \varphi_n - j A_n \sin \varphi_n = a_n - j b_n$$

所以

$$\begin{aligned} \dot{A}_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt - j \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) (\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

从而有

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{2} \dot{A}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.10)$$

式(3.10)是求傅里叶复系数 $F(n\omega_0)$ 的计算公式。一旦 $F(n\omega_0)$ 被确定,也就确定了式(3.9)。

需要进一步说明的是,由于复系数 $F(n\omega_0)$ 是复数,因此可写成下面的形式:

$$F(n\omega_0) = |F(n\omega_0)| e^{j\theta_n} = |F(n\omega_0)| e^{j\varphi_n}$$

式中: θ_n 为 $F(n\omega_0)$ 的幅角,即第 n 次谐波分量的初相位,就是式(3.8)中的 φ_n , 因而有

$$\theta_n = \varphi_n$$

将式(3.10)中的 n 换成 $-n$, 得

$$F(-n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{jn\omega_0 t} dt$$

可见

$$F(-n\omega_0) = F^*(n\omega_0)$$

由共轭复数的性质, 有

$$|F(-n\omega_0)| = |F(n\omega_0)|, \quad \theta_{-n} = -\theta_n$$

所以, 在式(3.9)中, 每对相同 n 值的正、负频率项合成为一个余弦实函数, 即

$$\begin{aligned} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} + F(-n\omega_0) e^{-jn\omega_0 t} &= |F(n\omega_0)| [e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)}] \\ &= 2 |F(n\omega_0)| \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \end{aligned} \quad (3.11)$$

需要着重强调的是, 单个负频率项 $F(-n\omega_0) e^{-jn\omega_0 t}$ 只是一种数学表示, 无实际意义。

由上述分析可以看出, 周期信号的三角函数级数表示和周期信号的指数级数表示只是同一信号的两种不同分解形式。前者为实数形式的傅里叶级数, 是将周期信号分解成直流分量和一系列谐波分量之和; 后者为复指数形式的傅里叶级数, 是将周期信号分解成直流分量和一系列复指数函数之和。为了从傅里叶级数的复指数形式导出三角函数级数形式, 将式(3.9)改写为

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} + F(-n\omega_0) e^{-jn\omega_0 t}]$$

把式(3.11)代入上式得

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 |F(n\omega_0)| \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (3.12)$$

将上式与式(3.7)、式(3.8)进行比较, 可得如下互转换公式

$$\begin{cases} A_0 = a_0 = F_0, A_n = 2 |F(n\omega_0)|, \varphi_n = \theta_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \\ a_n = F(n\omega_0) + F(-n\omega_0), b_n = j[F(n\omega_0) - F(-n\omega_0)] \\ F(n\omega_0) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \end{cases} \quad (3.13)$$

例 3.4 信号如图 3.5 所示, 试求其复指数形式的傅里叶级数。

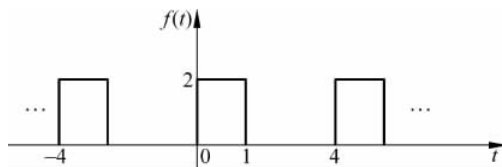


图 3.5 例 3.4 的图

解: 由式(3.10), 得

$$\begin{aligned} F(n\omega_0) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 2 e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{j4n\omega_0} (e^{-j\frac{n\pi}{2}} - 1) \\
 &= \frac{1}{jn\pi} e^{-j\frac{n\pi}{4}} (e^{j\frac{n\pi}{4}} - e^{-j\frac{n\pi}{4}}) \\
 &= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{4} e^{-j\frac{n\pi}{4}}
 \end{aligned}$$

由式(3.9)得

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{4} e^{-j\frac{n\pi}{4}} \right) e^{jn\omega_0 t} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{4} e^{jn(\omega_0 t - \frac{\pi}{4})}
 \end{aligned}$$

3.3.3 傅里叶级数的性质

利用傅里叶级数的性质,可以简化傅里叶系数的计算。为了避免过多的数学推导,便于读者掌握这些性质本身的内容,下面讨论的各种性质的证明从略。

1. 线性性质

由式(3.8)中 a_0 、 a_n 、 b_n 各系数的计算公式和式(3.10)中 $F(n\omega_0)$ 的计算公式可以看出,傅里叶系数的计算是一种线性运算,因此,傅里叶系数满足叠加性和齐次性。设两个周期信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的系数分别为 $F_1(n\omega_0)$ 和 $F_2(n\omega_0)$,则有

$$A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t) \leftrightarrow A_1 F_1(n\omega_0) + A_2 F_2(n\omega_0) \quad (3.14)$$

例 3.5 求图 3.6(a)所示信号 $f(t)$ 的傅里叶系数 $F(n\omega_0)$ 。

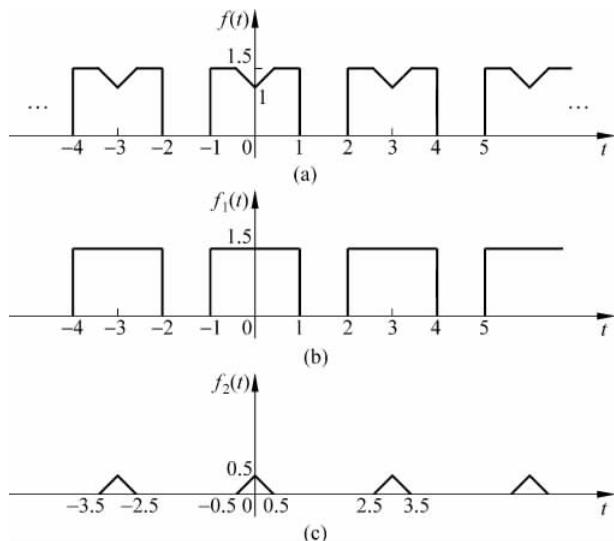


图 3.6 例 3.5 的图