第 3 章　傅里叶级数与拉普拉斯变换

【教学目标】

① 理解傅里叶级数、拉普拉斯变换与拉普拉斯逆变换的基本概念.

② 掌握将一个周期函数展开成傅里叶级数的方法.

③ 能用拉普拉斯变换基本公式与性质进行积分变换.

④ 了解傅里叶级数与拉普拉斯变换在工程技术、电学、信号科学和自动控制系统中的作用.

自然界的许多现象都具有周期性，如电子信号技术中常见的方波、锯齿形波和三角波以及由空气分子的周期性振动产生的声波等. 1807 年，法国数学家、物理学家傅里叶(Fourier，1768—1830)在热传导这种周期性现象的分析与处理中提出了任意函数的三角级数表示法，即由三角函数组成的级数，这就是傅里叶级数. 拉普拉斯变换简称拉普拉斯变换，它在力学、电学、控制论等工程技术与科学领域中有着广泛的应用. 本章将主要讨论如何将函数展开成傅里叶级数，以及在工程技术、电子信号技术方面的运用. 介绍拉普拉斯变换的基本概念、主要性质、拉普拉斯逆变换以及一些应用举例.

3-1　傅里叶级数

一、三角级数、三角函数系的正交性

在物理学和工程技术问题中常常遇到各种周期运动，周期运动在数学中是用周期函数来反映的. 正弦函数是一种常见而简单的周期函数. 如描述简谐振动的函数 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$，其中 A 是振幅，ω 是角频率，φ 是初相. 许多周期运动具有较复杂的振动，这些振动可以由若干正弦振动“叠加”而成

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$$

其中，A_0，A_n，φ_n($n=1,2,3,\cdots$)都是常数. 这样，可以把一个比较复杂的周期运动看成是许多不同频率的简谐振动的叠加. 在电工学上，这种展开称为谐波分析. 其中常数项 A_0 称为 $f(t)$的直流分量；$A_1\sin(\omega t+\varphi_1)$称为一次谐波(又叫做基波)；而 $A_2\sin(2\omega t+\varphi_2)$，$A_3\sin(3\omega t+\varphi_3)$，依次称为二次谐波、三次谐波，等等.

一般的，形如

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{3-1}$$

的级数称为三角级数，其中 $a_0,a_n,b_n(n=1,2,3,\cdots)$都是常数.

三角级数在电路分析与设计，电子信号处理中应用广泛. 为了研究如何把函数展开成三角级数，首先介绍三角函数系的正交性.

三角函数系是指函数集合

$$\{1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots,\sin nx,\cos nx,\cdots\} \tag{3-2}$$

所谓三角函数系的正交性，是指在三角函数系(3-2)中任何不同的两个函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$上的积分等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (k,n=1,2,\cdots,k\neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (k,n=1,2,\cdots,k\neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (k,n=1,2,\cdots,k\neq n)$$

以上等式很容易通过求定积分来推得结果，应注意在三角函数系中，两个相同函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$上的积分不等于零.

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2\,\mathrm{d}x=2\pi,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x=\pi,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x=\pi \quad (n=1,2,\cdots)$$

二、以 2π 为周期的函数展开成傅里叶级数

如何将函数展开成三角级数？这是我们关心的问题. 下面主要讨论三个问题：

(1) 如何求系数 a_0,a_n,b_n？

(2) 周期函数 $f(x)$满足什么条件，可以展开成三角级数？

(3) 展开的三角级数的收敛情况.

我们可以通过积分的方法来求 a_0,a_n,b_n.

首先对式(3-1)两端在区间$[-\pi,\pi]$上逐项积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nx\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nx\,\mathrm{d}x\right)$$

根据三角函数系的正交性有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x=\pi a_0$$

即

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

其次求系数 a_n，用 $\cos kx$ 乘以式(3-1)，然后逐项积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos kx\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \cos kx \sin nx\,\mathrm{d}x\right)$$

根据三角函数系的正交性，等式右端除 $k=n$ 的一项外，其余各项均为 0，所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = a_n\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,\mathrm{d}x = a_n\pi$$

即

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots)$$

类似的，用 $\sin kx$ 乘以式(3-1)，然后逐项积分，得

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots)$$

定义　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，如果

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots)$$

存在，则称它们为函数 $f(x)$的傅里叶系数，由傅里叶系数组成的三角级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

称为 $f(x)$ 的傅里叶级数.

关于函数 $f(x)$的展开条件及其收敛问题，我们给出下面的定理.

收敛定理　(**狄利克雷(Dirichlet)充分条件**)设以 2π 为周期的函数 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上满足下列条件：

(1) 连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 至多只有有限个极值点；

则 $f(x)$的傅里叶级数收敛，且

(1) 当 x 是 $f(x)$的连续点时，级数收敛于 $f(x)$；

(2) 当 x 是 $f(x)$的间断点时，级数收敛于这一点左右极限的平均值$\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

【例 3-1】　脉冲矩形波的信号函数 $f(x)$是周期为 2π 的函数，它在$[-\pi,\pi)$的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leqslant x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$$

求 $f(x)$的傅里叶级数展开式.

解：所给函数满足收敛定理的条件，在间断点 $x=k\pi(k\in z)$处，傅里叶级数收敛于

$$\frac{f(k\pi-0)+f(k\pi+0)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0$$

在连续点 $x\neq k\pi(k\in z)$处收敛于 $f(x)$，函数图形如图 3-1 所示.

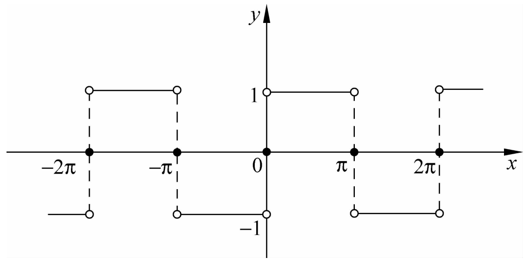

图　3-1

计算傅里叶系数如下：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}x\right)=0$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=0\quad(n=1,2,3,\cdots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}, & n\text{ 为奇数}\\0, & n\text{ 为偶数}\end{cases}\end{aligned}$$

所以函数 $f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty,x\neq k\pi,k\in z)\tag{3-3}$$

上面式(3-3)表明：矩形波是由一系列不同频率的正弦波叠加而成的，这些正弦波的频率依次为基波频率的奇数倍.

【例 3-2】　锯齿脉冲信号函数 $f(x)$是周期为 2π 的函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\leqslant x<0\\0, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$$

将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

解：所给函数满足收敛定理的条件，在函数的间断点 $x=(2k+1)\pi(k\in z)$处，对应的傅里叶级数收敛于

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{0-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

在连续点 $x(x\neq(2k+1)\pi)$处收敛于 $f(x)$. 函数的图形如图 3-2 所示.

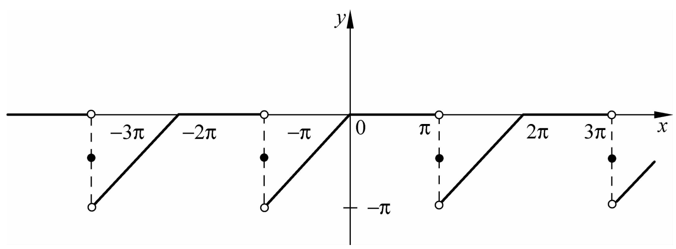

图 3-2

计算傅里叶系数如下：

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_{-\pi}^{0} \\
&= \frac{1}{n^2\pi}(1-\cos nx) \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{n^2\pi}, & n\text{ 为奇数} \\ 0, & n\text{ 为偶数} \end{cases} \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]\Bigg|_{-\pi}^{0} \\
&= -\frac{\cos nx}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (n=1,2,3,\cdots)
\end{aligned}$$

所以函数 $f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{\pi}{4} + \left(\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x \\
&\quad + \left(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) - \frac{1}{4}\sin 4x \\
&\quad + \left(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x\right) - \cdots \\
&\quad (-\infty < x < +\infty, x \neq (2k+1)\pi, k \in z)
\end{aligned}$$

【例 3-3】 三角脉冲信号函数 $f(x)$是周期为 2π 的函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$$

将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

解：所给函数满足收敛定理的条件，并且在$(-\infty,+\infty)$内处处连续，如图 3-3 所示，因此它的傅里叶级数处处收敛于函数 $f(x)$.

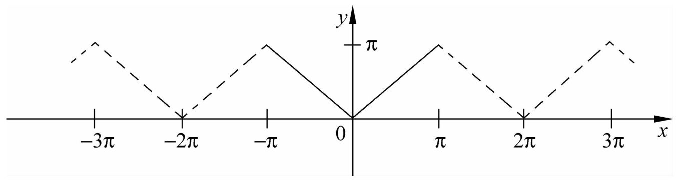

图　3-3

计算傅里叶系数如下：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{0}^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi}, & n\text{ 为奇数}\\ 0, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

所以函数 $f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

三、奇函数和偶函数的傅里叶级数

一般来说,一个函数的傅里叶级数既含有正弦项,又含有余弦项(见例 3-2).但是,也有一些函数的傅里叶级数只含有正弦项(见例 3-1)或者只含有常数项和余弦项(见例 3-3).实际上,这些情况与所给函数 $f(x)$的奇偶性有密切关系.

在一个三角级数中,若只含有正弦项,则该级数称为正弦级数;若只含有余弦项,则称为余弦级数.

一般的,有下述定理.

定理 当 $f(x)$是周期为 2π 的奇函数时,它的傅里叶级数为正弦级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

傅里叶系数为

$$a_n = 0 \quad (n = 0,1,2,3,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

当 $f(x)$是周期为 2π 的偶函数时,它的傅里叶级数为余弦级数.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

傅里叶系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,3,\cdots)$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

【例 3-4】 把周期为 2π 的函数 $f(x)=x^2(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$展开成傅立里叶级数.

解:由于 $f(x)$是偶函数,所以它的傅里叶级数是余弦级数. 因此

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3\pi}x^3\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n 4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$$

由于 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,由收敛定理知

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

四、周期为 $2l$ 的周期函数展开成傅里叶级数

前面我们讨论的周期函数都是以 2π 为周期的. 但在很多实际问题中所遇到的周期函

数，它的周期不一定是 2π. 下面讨论周期为 $2l$ 的函数如何展开成傅里叶级数.

对于以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$，作变量代换

$$x = \frac{l}{\pi}t$$

根据前面讨论的结果，得到下面的定理.

定理　设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 在区间 $[-l,l]$ 上满足狄利克雷收敛定理的条件，则它的傅里叶级数的展开式为：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{3-4}$$

其中系数 a_n, b_n 为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,3,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,3,\cdots) \end{cases} \tag{3-5}$$

注意：如果 x 是函数 $f(x)$ 的间断点，根据收敛定理，$f(x)$ 的傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

【例 3-5】　设脉冲信号函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，它在 $[-2,2)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leqslant x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x < 2 \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解：$l=2$，由公式(3-5)直接计算傅里叶系数，得

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 0\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\mathrm{d}x = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\cos\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2 = \frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}, & n\text{ 为奇数} \\ 0, & n\text{ 为偶数} \end{cases}$$

所以函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

$$(-\infty < x < +\infty, x \neq 0, \pm 2, \pm 4, \cdots)$$

习 题 3-1

1. 将下列周期为 2π 的函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数，$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

(1) $f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\leqslant x<0\\ \pi-x, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$；　　(2) $f(x)=2x^2,-\pi\leqslant x<\pi$；

(3) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3},-\pi\leqslant x<\pi$；　　(4) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2},-\pi\leqslant x<\pi$.

2. 将下列各周期函数展开为傅里叶级数，函数在一个周期内的表达式为

(1) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x<3\end{cases}$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\\ -1, & \dfrac{1}{2}\leqslant x<1\end{cases}$.

3-2 拉普拉斯变换的概念与性质

一、拉普拉斯变换的基本概念

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $b>a$，如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的**广义积分**. 记为 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$. 即

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\quad(a<b)$$

这时也称广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**；如果上述极限不存在，则称广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

类似的，无穷区间 $(-\infty,b]$ 上的广义积分可定义为

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\quad(a<b)$$

无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分可定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

此时，如果上式右端的两个广义积分 $\int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散 .

计算广义积分就是先算原函数，再求极限. 为了书写方便，我们可以把这两步合并在一个公式里，设 $F(x)$是连续函数的一个原函数，那么由牛顿—莱布尼茨公式有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$

其中

$$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x), \quad F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

定义 2 设函数 $f(t)$的定义域为$[0,+\infty)$，若广义积分 $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ 对于 p 在某一范围内的值收敛，则此积分就确定了一个参数为 p 的函数，记做 $F(p)$，即

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

函数 $F(p)$叫做 $f(t)$的**拉普拉斯(Laplace)变换**，简称**拉氏变换**(或叫做 $f(t)$的象函数)，用记号 $L[f(t)]$表示，即 $F(p)= L[f(t)]$.

若 $F(p)$是 $f(t)$的拉普拉斯变换，则称 $f(t)$为 $F(p)$的拉普拉斯逆变换(或叫做 $F(p)$的象原函数)，记做 $L^{-1}[F(p)]$，即 $f(t)=L^{-1}[F(p)]$.

对拉普拉斯变换的定义，作以下两点说明.

(1) 定义中只要求 $f(t)$在 $t\geqslant0$ 时有定义，为了研究拉普拉斯变换某些性质的方便，假定在 $t<0$ 时，$f(t)\equiv0$.

(2) 拉普拉斯变换是将给定函数通过广义积分转换成一个新的函数，它是一种积分变换.

【例 3-6】 求指数函数 $f(t)=\mathrm{e}^{at}(t\geqslant0$，$a$ 是常数)的拉普拉斯变换.

解：根据拉普拉斯变换的定义有

$$L[\mathrm{e}^{at}]= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{at} \cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(p-a)t}\mathrm{d}t$$

当 $p>a$ 时积分收敛，而且有

$$L[\mathrm{e}^{at}]= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(p-a)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{p-a} \quad (p > a)$$

【例 3-7】 求一次函数 $f(t)=at(t\geqslant0$，a 是常数)的拉普拉斯变换.

解：$L[at]= \int_0^{+\infty} at \cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t =-\frac{a}{p}\int_0^{+\infty} t\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-pt})$

$$=-\frac{a}{p}[t\mathrm{e}^{-pt}]\Big|_0^{+\infty} + \frac{a}{p}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

根据罗必达法则，有

$$\lim_{t\to+\infty} t\mathrm{e}^{-pt} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{pt}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{p\mathrm{e}^{pt}} = 0$$