第3章 组合计数初步

组合计数是组合数学的重要组成部分，组合计数的内容是极其丰富的，本章主要介绍容斥原理、鸽舍原理和递推关系，这三部分内容在计算机科学与技术领域中有着较高的实用价值。

3.1 容斥原理和鸽舍原理

3.1.1 容斥原理

容斥原理也称为包含排斥原理，它主要讨论有限集合的计数问题。

设 A、B 都是有限集合，且 A 和 B 是不相交的，即 A 和 B 没有共同元素，那么 $A\cup B$ 中的元素个数应为 A 中元素个数与 B 中元素个数之和，即 $|A\cup B|=|A|+|B|$。

对于一般情况，则有以下定理。

定理 3.1.1 设 A、B 是有限集，则

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

证明 由同一律和分配律可知

$$A\cup B=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})=A\cup(B\cap\overline{A})$$

由于 $A\cap(B\cap\overline{A})=\varnothing$，这说明 A 和$(B\cap\overline{A})$是不相交的，所以有

$$|A\cup B|=|A\cup(B\cap\overline{A})|=|A|+|B\cap\overline{A}|$$

又由于

$$B=B\cap(A\cup\overline{A})=(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})$$

而$(B\cap A)\cap(B\cap\overline{A})=\varnothing$，这就明 $B\cap A$ 和 $B\cap\overline{A}$ 是不相交的，所以有

$$|B|=|(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})|=|B\cap A|+|B\cap\overline{A}|$$

$$|B\cap\overline{A}|=|B|-|A\cap B|$$

由此证得

$$|A\cup B|=|A|+|B\cap\overline{A}|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

定理 3.1.1 也称为容斥原理。

对于 3 个有限集的容斥原理为

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

这是因为

$$
\begin{aligned}
|A\cup B\cup C| &= |(A\cup B)\cup C| \\
&= |A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C| \\
&= |A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)| \\
&= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-(|A\cap C|+|B\cap C|-|(A\cap C)\cap(B\cap C)|) \\
&= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-(|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|) \\
&= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|
\end{aligned}
$$

用同样方法可得到 4 个有限集的容斥原理

$$
\begin{aligned}
|A\cup B\cup C\cup D| = {} & |A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|- \\
& |A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D|+ \\
& |A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|+ \\
& |B\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|
\end{aligned}
$$

利用数学归纳法可得到对于 n 个有限集的容斥原理

$$
\begin{aligned}
|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| = {} & \sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j| \\
& +\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots \\
& +(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|
\end{aligned}
$$

例 3.1 某班有学生 48 人，其中有 25 人选学英语，有 20 人选学法语，有 12 人既选学英语又选学法语。问这两种外语都不选学的人数是多少？

解 设 A 表示选学英语的学生的集合；B 表示选学法语的学生的集合。

由题设可知：$|A|=25$，$|B|=20$，$|A\cap B|=12$。又由容斥原理可得

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=25+20-12=33$$

所以这两种外语都不选学的人数为

$$48-|A\cup B|=48-33=15(\text{人})$$

例 3.2 某班有学生 38 人，其中有 20 人参加合唱队，有 16 人参加话剧队，有 10 人这两个队都不参加，问这两个队都参加的学生人数是多少？

解 设 A 表示参加合唱队学生的集合；B 表示参加话剧队学生的集合。

由题设可知：$|A|=20$，$|B|=16$，而$|A\cup B|=38-10=28$，由容斥原理可知

$$
\begin{aligned}
&|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B| \\
&28=20+16-|A\cap B|
\end{aligned}
$$

由此得到

$$|A\cap B|=8(\text{人})$$

所以这两个队都参加的学生人数为 8 人。

例 3.3 70 名学生参加体育比赛，其中短跑得奖者 36 人，跳高得奖者 29 人，投掷得奖者 36 人；有 14 人既是短跑得奖者又是跳高得奖者，有 15 人既是跳高得奖者又是投掷得奖者，有 13 人既是短跑得奖者又是投掷得奖者；三项都得奖的人数为 6 人。问一项奖都没有得到的学生人数是多少？

解 设 A 表示短跑得奖者的集合；B 表示跳高得奖者的集合；C 表示投掷得奖者的集合。

由题设可知：$|A|=36$，$|B|=29$，$|C|=36$，$|A\cap B|=14$，$|B\cap C|=15$，$|A\cap C|=13$，$|A\cap B\cap C|=6$。

由此可得

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\\ &= 36+29+36-14-15-13+6=65\end{aligned}$$

所以一项奖都没有得的人数为 $70-65=5$(人)。

例 3.4 某校有足球队员 38 人，篮球队员 15 人，排球队员 20 人，3 个队的队员总数为 58 人，且其中只有 3 人同时参加 3 个球队，问：仅仅参加两种球队的队员人数是多少？

解 设 A 是足球队员的集合；B 是篮球队员的集合；C 是排球队员的集合。

由题设可知：$|A|=38$，$|B|=15$，$|C|=20$，$|A\cup B\cup C|=58$，$|A\cap B\cap C|=3$。

由容斥原理可知

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

于是有

$$58=38+15+20-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+3$$

由此可得

$$|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|=18$$

但仅仅参加两种球队的人数不是 18，因为 $A\cap B\supset A\cap B\cap C$，所以仅仅参加足球队和篮球队而没有参加排球队的人数应是 $|A\cap B|-|A\cap B\cap C|$；同样理由，仅仅参加足球队和排球队而没有参加篮球队的人数应是 $|A\cap C|-|A\cap B\cap C|$；仅仅参加篮球队和排球队而没有参加足球队的人数应是 $|B\cap C|-|A\cap B\cap C|$。所以仅仅参加两种球队的总人数应是

$$|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-3|A\cap B\cap C|=18-9=9(\text{人})。$$

例 3.5 求 1～250 间能被 2、3、5、7 中任一数整除的整数个数。

解 设 A 表示 1～250 间能被 2 整除的整数集合；B 表示 1～250 间能被 3 整除的整数集合；C 表示 1～250 间能被 5 整除的整数集合；D 表示 1～250 间能被 7 整除的整数集合。

若用 $[x]$ 表示对 x 作取整运算，如 $[3.1]=3$，$[13.8]=13$ 等。

由题设可知

$$|A|=\left[\frac{250}{2}\right]=125$$

$$|B|=\left[\frac{250}{3}\right]=83$$

$$|C|=\left[\frac{250}{5}\right]=50$$

$$|D|=\left[\frac{250}{7}\right]=35$$

$$|A\cap B|=\left[\frac{250}{2\times 3}\right]=41$$

$$|A\cap C|=\left[\frac{250}{2\times 5}\right]=25$$

$$|A\cap D|=\left[\frac{250}{2\times 7}\right]=17$$

$$|B\cap C|=\left[\frac{250}{3\times 5}\right]=16$$

$$|B\cap D|=\left[\frac{250}{3\times 7}\right]=11$$

$$|C\cap D|=\left[\frac{250}{5\times 7}\right]=7$$

$$|A\cap B\cap C|=\left[\frac{250}{2\times 3\times 5}\right]=8$$

$$|A\cap B\cap D|=\left[\frac{250}{2\times 3\times 7}\right]=5$$

$$|A\cap C\cap D|=\left[\frac{250}{2\times 5\times 7}\right]=3$$

$$|B\cap C\cap D|=\left[\frac{250}{3\times 5\times 7}\right]=2$$

$$|A\cap B\cap C\cap D|=\left[\frac{250}{2\times 3\times 5\times 7}\right]=1$$

由此可得

$$|A\cup B\cup C\cup D|=125+83+50+35-4-25-17-16-11-7+8+5+3+2+1=193$$

所以在 1～250 间能被 2、3、5、7 中任一数整除的整数个数为 193。

3.1.2　鸽舍原理

如果某人营造了 n 个鸽舍，养了多于 n 只鸽子，则必有一个鸽舍住有 2 只或 2 只以上的鸽子。这就是鸽舍原理。

一般的情况是：当鸽舍仅有 n 个，而鸽子数目大于 $n\times m$ 只时，则必有一个鸽舍住有 $m+1$ 只或多于 $m+1$ 只鸽子。

例如，仅营造了 5 个鸽舍，但养有 26 只鸽子，那么必定有一个鸽舍住有 6 只或 6 只以上的鸽子。

鸽舍原理虽然简单，却有着广泛的用途，而且运用鸽舍原理去解决的问题往往都有一定的难度。

例 3.6　在任意 $n+1$ 个正整数中，必存在两个数，它们之差能被 n 整除。

解　由于任意正整数被 n 除后，其余数只能是 0、1、2、…、$n-1$ 共有 n 种，所以在 $n+1$ 个正整数中，必存在两个数，它们被 n 除后的余数相等，因此这两个数之差必能被 n 整除。由此得证。

例 3.7　在边长为 a 的正三角形内，任意画上 7 个点，证明其中必有 3 个点连成的小三角形其面积不超过$\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$。

证明　设$\triangle ABC$ 是边长为 a 的正三角形。在边 BC 上取两点 D 和 E，使得 $BD=DE=EC=\frac{a}{3}$。连接 AD 和 AE(图 3.1.1)，于是把正三角形 ABC 分隔成 3 个三角形：$\triangle ABD$、

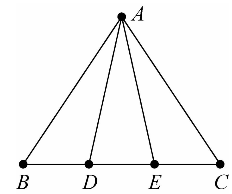

图 3.1.1

$\triangle ADE$ 和 $\triangle AEC$。由于边长为 a 的正三角形的面积为 $\frac{1}{2}\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$。所以这 3 个三角形的面积都等于 $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$。

在正三角形 ABC 内,任意画上的 7 个点可以看作是 7 只鸽子;面积都等于 $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$ 的 3 个三角形:$\triangle ABD$、$\triangle ADE$、$\triangle AEC$ 可以看作是 3 个鸽舍。由鸽舍原理可知,必存在一个三角形,其内部至少画有 3 个点,所以这 3 个点连成的三角形面积小于等于 $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$。

例 3.8 在 1～100 的正整数中,任取 51 个正整数,其中必存在两个数,一个数是另一个数的倍数。

解 易见,对于任意偶数,必存在一个奇数,使得偶数＝奇数×2^k。

现构造以下 50 个集合:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{1,1\times 2,1\times 2^2,1\times 2^3,1\times 2^4,1\times 2^5,1\times 2^6\}\\
A_3 &= \{3,3\times 2,3\times 2^2,3\times 2^3,3\times 2^4,3\times 2^5\}\\
A_5 &= \{5,5\times 2,5\times 2^2,5\times 2^3,5\times 2^4\}\\
A_7 &= \{7,7\times 2,7\times 2^2,7\times 2^3\}\\
A_9 &= \{9,9\times 2,9\times 2^2,9\times 2^3\}\\
A_{11} &= \{11,11\times 2,11\times 2^2,11\times 2^3\}\\
A_{13} &= \{13,13\times 2,13\times 2^2\}\\
&\vdots\\
A_{49} &= \{49,49\times 2\}\\
A_{51} &= \{51\}\\
A_{53} &= \{53\}\\
&\vdots\\
A_{99} &= \{99\}
\end{aligned}
$$

容易验证,这 50 个集合中元素的总数共 100 个,恰好是 1～100 的所有正整数,且在含有两个或两个以上元素的集合 A_1、A_3、…、A_{49} 中,同一集合中的任意两个正整数必是:一个数是另一个数的倍数。因此,在 1～100 的正整数中任取 51 个正整数,其中至少有两个数属于同一集合中,所以这两个数中有一个数是另一个数的倍数。

例 3.9 在平面上有 6 个点,其任意两点都用一条边相连,所得到的图称为完全图(图 3.1.2)。现在给每边涂色,可随意地涂红色或黑色。证明在这个完全图中,必存在着一个三角形,其三条边有相同的颜色。

证明 设平面上的 6 个点为 v_1、v_2、v_3、v_4、v_5、v_6。为了便于讨论,先画出与点 v_1 相连的 5 条边(图 3.1.3)。由于这 5 条边已分别涂上红或黑两种颜色,由鸽舍原理可知,其中至少有 3 条边有相同颜色。不妨设边 v_1v_2、边 v_1v_3 和边 v_1v_6 有相同颜色(假设是黑色的),在图 3.1.3 中,虚线边表示红色,实线边表示黑色。

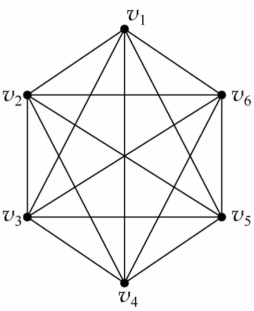

图 3.1.2

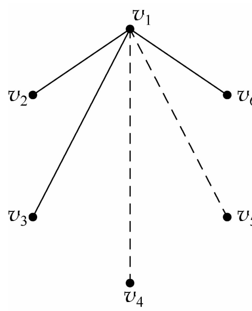

图 3.1.3

现在考察边 v_2v_3。如果 v_2v_3 是黑色边，则三角形 $v_1v_2v_3$ 的三条边颜色相同（都是黑色的），问题得解；如果 v_2v_3 是红色边，如图 3.1.4(a)所示，则再考察边 v_3v_6，如果边 v_3v_6 是黑色的，则三角形 $v_1v_3v_6$ 的三条边颜色相同（都是黑色的），问题得解；如果边 v_3v_6 是红色的，如图 3.1.4(b)所示，则再考虑边 v_2v_6，如果边 v_2v_6 是黑色的，则三角形 $v_1v_2v_6$ 的三条边颜色相同（都是黑色的），问题得解；如果 v_2v_6 是红色边，则三角形 $v_2v_3v_6$ 的三条边都是红色的，如图 3.1.4(c)所示，问题得解，证毕。

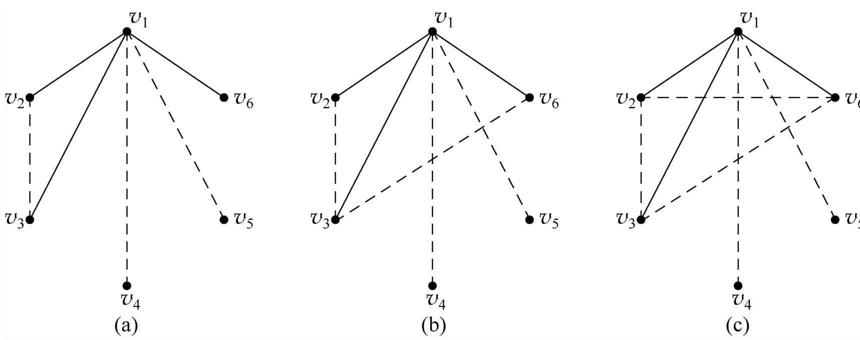

图 3.1.4

3.2　递推关系

3.2.1　递推关系的基本概念

递推关系也称为差分方程，它的求解对象是数列。数列就是一个由自然数集合到实数集合的函数。

设 a 是自然数集合 **N** 到实数集合 **R** 的函数，记函数值 $a(0)=a_0, a(1)=a_1, \cdots, a(n)=a_n, \cdots$。数列常记作$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$或简单地记作$(a_n)$。

例 3.10　某人去工厂工作，与厂方签订合同时规定：进厂时年薪为 30 000 元，以后每年增加的工资为上一年年薪的 15%，问：n 年后，此人的年薪为多少？

解 设 a_n 表示 n 年后此人的年薪。易知

$$a_0 = 30\,000$$
$$a_1 = 30\,000 + 30\,000 \times 0.15 = 30\,000(1 + 0.15)$$
$$a_2 = 30\,000(1 + 0.15) + 30\,000(1 + 0.15) \times 0.15 = 30\,000(1 + 0.15)^2$$
$$\vdots$$
$$a_n = 30\,000(1 + 0.15)^n$$

数列(a_n)是我们熟知的等比数列，其中首项为 30 000，公比为$(1+0.15)$。

数列有多种表示形式，例 3.10 给出了数列的一般项 a_n 的简单表达式，称为数列的紧凑格式表示。

显然，数列最理想的表示形式是紧凑格式。然而在很多情况下，想要得到数列的紧凑格式并非易事。例如，著名的斐波那契(Fibonacci)数列，其定义为数列的前两项各取值为 1(也可以取其他已知值)，以后的各项都为前两项的和，即 $a_0=1$，$a_1=1$，而

$$a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 1 = 2$$
$$a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$$
$$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

斐波那契数列的前几项为 1，1，2，3，5，8，13，21，34，…

显然，用简单的观察法是很难得到斐波那契数列一般项 a_n 的简明表达式。然而，条件 $a_0=1$，$a_1=1$ 和关系式 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ 可以完整地描述斐波那契数列(数列中的每一项都有确定的数值)。常称上述关系式为递推关系(或差分方程)，条件 $a_0=1$ 和 $a_1=1$ 称为初始条件。

一般来说，由数列的任意项 a_n 与其前几项 a_{n-1}、a_{n-2}、…、a_{n-k} 所组成的关系式称为递推关系(或差分方程)。利用递推关系求出数列的紧凑格式表示就是解递推关系。目前尚没有解任意递推关系的一般方法。本章仅介绍常用的常系数线性递推关系的求解方法。

形状如下列的递推关系称为常系数线性递推关系：

$$a_n + b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_k a_{n-k} = f(n)$$

其中，b_1、b_2、…、b_k 为常数，$f(n)$是已知函数。当 $b_k \neq 0$ 时，上述递推关系称为 k 阶常系数线性递推关系。

常系数线性递推关系又分为两类，当 $f(n)=0$ 时，称为齐次常系数线性递推关系；当 $f(n)\neq 0$ 时，称为非齐次常系数线性递推关系。例如：

$$a_n - 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0$$

是齐次常系数线性递推关系，且其阶数为 3。又如：

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = n^2 + 2^n$$

是非齐次常系数线性递推关系，且其阶数为 2。

常系数线性递推关系的性质，有关通解、特解、初始条件等概念以及求解的方法与常系数线性微分方程的有关论述在形式上是一致的。下面将不加证明地介绍常系数线性递推关系的求解方法。

3.2.2　齐次常系数线性递推关系

齐次常系数线性递推关系的求解过程与齐次常系数线性微分方程的求解过程很相似，它也是通过其特征方程的根来求得其通解的。

设齐次常系数线性递推关系为

$$a_n + b_1 a_{n-1} + \cdots + b_k a_{n-k} = 0$$

则代数方程

$$p^k + b_1 p^{k-1} + \cdots + b_k = 0$$

称为该递推关系的特征方程。

（1）特征方程有 k 个不相同的实根：p_1、p_2、$\cdots$、p_k 时，k 阶齐次常系数线性递推关系的通解为

$$a_n = c_1 p_1^n + c_2 p_2^n + \cdots + c_k p_k^n$$

其中，c_1、c_2、$\cdots$、c_k 为任意常数，它由初始条件确定其值。

例 3.11　求齐次常系数线性递推关系 $a_n - 3a_{n-1} - 18a_{n-2} = 0$ 的通解。

解　首先写出其特征方程

$$p^2 - 3p - 18 = 0$$
$$(p-6)(p+3) = 0$$
$$p_1 = 6,\quad p_2 = -3$$

由此可得题设的递推关系的通解为

$$a_n = c_1 6^n + c_2(-3)^n$$

例 3.12　求初始条件为 $a_0 = 1$，$a_1 = 2$ 的齐次常系数线性递推关系 $a_n - 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 0$ 的解。

解　首先写出其特征方程。

$$p^2 - 7p + 12 = 0$$
$$(p-3)(p-4) = 0$$
$$p_1 = 3,\quad p_2 = 4$$

由此求得通解为

$$a_n = c_1 3^n + c_2 4^n$$

当初始条件为 $a_0 = 1$ 和 $a_1 = 2$ 时，可得

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 2 = c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 4 \end{cases}$$

解之可得

$$c_1 = 2,\quad c_2 = -1$$

所以所求的解为

$$a_n = 2 \cdot 3^n + (-1) \cdot 4^n$$

例 3.13　求初始条件为 $a_0 = 1$，$a_1 = 1$ 的斐波那契数列的紧凑格式表示。

解　由斐波那契数列的构造可知

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

其特征方程为

$$p^2 - p - 1 = 0$$

$$p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

所以其通解为

$$a_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

又由初始条件 $a_0=1, a_1=1$ 可知

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

解之可得

$$c_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \quad c_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

由此得到斐波那契数列的紧凑格式为

$$a_n = \frac{5+\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

（2）当特征方程有多重实根时，如设特征方程的根为 $\underbrace{p_1、p_1、\cdots、p_1}_{r个}、p_{r+1}、p_{r+2}、\cdots、p_k$，其中 p_1 为 r 重实根，则此齐次常系数线性递推关系的通解为

$$a_n = c_1 p_1^n + c_2 n p_1^n + \cdots + c_r n^{r-1} p_1^n + c_{r+1} p_{r+1}^n + \cdots + c_k p_k^n$$

例 3.14 求递推关系 $a_n + 9a_{n-1} + 27a_{n-2} + 27a_{n-3} = 0$ 的通解。

解 其特征方程为

$$p^3 + 9p^2 + 27p + 27 = 0$$

$$(p+3)^3 = 0$$

$$p = -3 \quad （3 重根）$$

由此可得通解为

$$a_n = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n + c_3 n^2(-3)^n$$

例 3.15 求初始条件为 $a_0=1, a_1=0, a_2=14$ 的递推关系 $a_n - 3a_{n-1} + 4a_{n-3} = 0$ 的解。

解 其特征方程为

$$p^3 - 3p^2 + 4 = 0$$

$$p^3 + p^2 - 4p^2 + 4 = 0$$

$$p^2(p+1) - 4(p^2-1) = 0$$

$$(p+1)(p^2 - 4p + 4) = 0$$

$$(p+1)(p-2)^2 = 0$$

$$p_1 = -1, p_2 = 2（2 重根）$$

由此可得通解为

$$a_n = c_1(-1)^n + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot n \cdot 2^n$$

当 $a_0=1, a_1=0, a_2=14$ 时，可得

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 0 = c_1 \cdot (-1) + c_2 \cdot 2 + c_3 \cdot 2 \\ 14 = c_1 + c_2 \cdot 4 + c_3 \cdot 2 \cdot 2^2 \end{cases}$$

解之可得

$$c_1 = 2,\quad c_2 = -1,\quad c_3 = 2$$

于是递推关系的解为

$$a_n = 2 \cdot (-1)^n + (-1) \cdot 2^n + 2n \cdot 2^n$$

(3) 当特征方程有复数根时，由于特征方程的系数为实数，所以复数根必定以共轭形式成对出现。如果设特征方程有一对共轭复数根为 $\alpha+\beta\mathrm{i}$ 和 $\alpha-\beta\mathrm{i}$，那么对应的齐次常系数线性递推关系的通解为

$$a_n = c_1(\alpha+\beta\mathrm{i})^n + c_2(\alpha-\beta\mathrm{i})^n + c_3 p_3^n + \cdots + c_k p_k^n$$

为了避免做复杂的复数运算，并使得递推关系解的形式变得更为简洁，常把复数根用三角形式表式，即

$$\alpha \pm \beta\mathrm{i} = r(\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta)$$

其中 $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，$\theta=\arctan\dfrac{\beta}{\alpha}$。

由于

$$(\alpha \pm \beta\mathrm{i})^n = r^n(\cos n\theta \pm \mathrm{i}\sin n\theta)$$

并可证明其实部 $r^n\cos n\theta$ 和其虚部 $r^n\sin n\theta$ 都是齐次常系数线性递推关系的解，且两者是线性无关的，所以齐次常系数线性递推关系的通解为

$$a_n = c_1 r^n \cos n\theta + c_2 r^n \sin n\theta + c_3 p_3^n + \cdots + c_k p_k^n$$

例 3.16　求递推关系 $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ 的通解。

解　其特征方程为

$$p^2 - p + 1 = 0$$

解得

$$p = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

把复数根转化为三角形式表示

$$p = \cos\frac{\pi}{3} \pm \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$p^n = \cos\frac{n\pi}{3} \pm \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{3}$$

所以其通解为

$$a_n = c_1\cos\frac{n\pi}{3} + c_2\sin\frac{n\pi}{3}$$

例 3.17　求初始条件为 $a_0=0, a_1=2, a_2=\dfrac{5}{2}$ 的递推关系 $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3} = 0$ 的解。

解　其特征方程为

$$p^3 - 2p^2 + p - 2 = 0$$

$$(p-2)(p^2+1)=0$$
$$p=2,\quad p=\pm \mathrm{i}$$

把$\pm \mathrm{i}$转化为三角形式表示

$$\pm \mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{2}\pm \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$$
$$(\pm \mathrm{i})^n=\cos\frac{n\pi}{2}\pm \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{2}$$

所以该递推关系的通解为

$$a_n=c_1 2^n+c_2\cos\frac{n\pi}{2}+c_3\sin\frac{n\pi}{2}$$

由初始条件$a_0=0,a_1=2,a_2=\frac{5}{2}$,可得

$$\begin{cases} 0=c_1+c_2 \\ 2=2c_1+c_3 \\ \frac{5}{2}=4c_1-c_2 \end{cases}$$

解之可得

$$c_1=\frac{1}{2},\quad c_2=-\frac{1}{2},\quad c_3=1$$

由此得到递推关系的解为

$$a_n=2^{n-1}-\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}$$

(4) 当特征方程有多重复数根时,如设$\alpha\pm\beta \mathrm{i}$为其$m$重根时,则齐次常系数线性递推关系的通解为

$$a_n=c_1 r^n\cos n\theta+c_2 r^n\sin n\theta+c_3 n\cdot r^n\cos n\theta+c_4 n\cdot r^n\sin n\theta+\cdots+ c_{2m-1}n^{m-1}\cos n\theta+c_{2m}n^{m-1}\sin n\theta+c_{2m+1}p_{2m+1}^n+\cdots+c_k p_k^n$$

其中$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$,$\theta=\arctan\frac{\beta}{\alpha}$。

例 3.18 当初始条件为$a_0=0,a_1=1,a_2=-2,a_3=-1$时,求递推关系$a_n+2a_{n-2}+a_{n-4}=0$的解。

解 其特征方程为

$$p^4+2p^2+1=0$$
$$(p^2+1)^2=0$$
$$p=\pm \mathrm{i}(2\text{ 重根})$$

由于

$$\pm \mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{2}\pm \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$$
$$(\pm \mathrm{i})^n=\cos\frac{n\pi}{2}\pm \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{2}$$

所以其通解为

$$a_n=c_1\cos\frac{n\pi}{2}+c_2\sin\frac{n\pi}{2}+c_3 n\cos\frac{n\pi}{2}+c_4 n\sin\frac{n\pi}{2}$$

由初始条件可得

$$\begin{cases} 0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 + c_4 \cdot 0 \\ 1 = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 0 + c_4 \cdot 1 \\ -2 = c_1(-1) + c_2 \cdot 0 + c_3(-2) + c_4 \cdot 0 \\ -1 = c_1 \cdot 0 + c_2(-1) + c_3 \cdot 0 + c_4(-3) \end{cases}$$

解之可得

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 0$$

由此得到递推关系的解为

$$a_n = \sin\frac{n\pi}{2} + n \cdot \cos\frac{n\pi}{2}$$

3.2.3　非齐次常系数线性递推关系

与非齐次常系数线性微分方程的通解的结构相似，非齐次常系数线性递推关系的通解等于对应的齐次常系数线性递推关系的通解加上一个非齐次常系数线性递推关系的特解。即

$$\text{非齐次通解} = \text{齐次通解} + \text{非齐次特解}$$

前面已介绍了齐次常系数线性递推关系通解的求解方法。因此求非齐次常系数线性递推关系的通解主要是求出非齐次常系数线性递推关系的一个特解。但是求非齐次常系数线性递推关系的特解尚没有一般方法，本节仅介绍当 $f(n)$ 为 d^n 类型或多项式时，采用“待定系数法”的求解过程。

设非齐次常系数线性递推关系为

$$a_n + b_1 a_{n-1} + \cdots + b_k a_{n-k} = f(n)$$

(1) 当 $f(n) = ad^n$ 时，如果 d 不是特征方程的根，则可设非齐次常系数线性递推关系的一个特解为

$$Ad^n$$

其中 A 为待定常数，代入递推关系后，比较系数确定其值。

例 3.19　求非齐次常系数线性递推关系：$a_n - 2a_{n-1} - 8a_{n-1} = 7 \times 5^n$ 的通解。

解　先求出其对应的齐次常系数线性递推关系($a_n - 2a_{n-1} - 8a_{n-1} = 0$)的通解。易知，其特征方程为

$$p^2 - 2p - 8 = 0$$

$$(p-4)(p+2) = 0$$

$$p_1 = 4, \quad p_2 = -2$$

由此可知，齐次递推关系的通解为

$$a_n = c_1 4^n + c_2(-2)^n$$

由于 5 不是特征方程的根，所以可令非齐次递推关系的特解为

$$A \cdot 5^n$$

代入非齐次递推关系后，可得

$$A \cdot 5^n - 2A \cdot 5^{n-1} - 8A \cdot 5^{n-2} = 7 \times 5^n$$

比较系数后可得

$$A = 25$$

所以非齐次递推关系的一个特解为

$$25 \cdot 5^n$$

由此可得非齐次递推关系的通解为

$$a_n = c_1 4^n + c_2(-2)^n + 25 \cdot 5^n$$

例 3.20 求初始条件为 $a_0=3$，$a_1=9$ 的非齐次常系数线性递推关系 $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 2 \cdot 3^n$ 的解。

解 先求对应齐次递推关系的通解。其特征方程为

$$p^2 - p - 2 = 0$$

$$(p-2)(p+1) = 0$$

$$p_1 = 2, \quad p_2 = -1$$

所以齐次递推关系的通解为

$$a_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n$$

由于 3 不是特征方程的根，所以可令非齐次递推关系的特解为

$$A \cdot 3^n$$

代入非齐次递推关系后可得

$$A \cdot 3^n - A \cdot 3^{n-1} - 2A \cdot 3^{n-2} = 2 \cdot 3^n$$

比较系数后可得

$$A = \frac{9}{2}$$

所以非齐次递推关系的一个特解为

$$\frac{9}{2} \cdot 3^n$$

由此可得非齐次递推关系的通解为

$$a_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n + \frac{9}{2} \cdot 3^n$$

由初始条件 $a_0=3$ 和 $a_1=9$，可得

$$\begin{cases} 3 = c_1 + c_2 + \dfrac{9}{2} \\ 9 = 2c_1 - c_2 + \dfrac{27}{2} \end{cases}$$

解之可得

$$c_1 = -2, \quad c_2 = \frac{1}{2}$$

所以该递推关系的解为

$$a_n = (-2) \cdot 2^n + \frac{1}{2} \cdot (-1)^n + \frac{9}{2} \cdot 3^n$$

（2）当 $f(n) = a \cdot d^n$，且 d 是特征方程的 r 重根时，则令非齐次常系数线性递推关系的一个特解为

$$A \cdot n^r \cdot d^n$$

其中 A 是待定常数。

例 3.21　求初始条件为 $a_0=0,a_1=-4,a_2=32$ 的非齐次递推关系 $a_n-4a_{n-1}-16a_{n-2}+64a_{n-3}=4\cdot 4^n$ 的解。

解　先求出其对应的齐次递推关系的通解，其特征方程为

$$p^3-4p^2-16p+64=0$$

$$(p+4)(p-4)^2=0$$

解得
$$p_1=-4,\quad p_2=4(2\text{ 重根})$$

所以齐次递推关系的通解为

$$a_n=c_1(-4)^n+c_2\cdot 4^n+c_3\cdot n\cdot 4^n$$

由于 4 是特征方程的 2 重根，所以应令非齐次递推关系的一个特解为

$$A\cdot n^2\cdot 4^n$$

代入后可得

$$An^2 4^n-4A(n-1)^2 4^{n-1}-16A(n-2)^2 4^{n-2}+64A(n-3)^2 4^{n-3}=4\cdot 4^n$$

比较系数后可得

$$A=1$$

所以非齐次递推关系的一个特解为

$$n^2\cdot 4^n$$

其通解为

$$a_n=c_1(-4)^n+c_2 4^n+c_3 n\cdot 4^n+n^2\cdot 4^n$$

由初始条件 $a_0=0,a_1=-4,a_2=32$ 可得

$$\begin{cases} 0=c_1+c_2 \\ -4=c_1(-4)+4c_2+4c_3+4 \\ 32=16c_1+16c_2+32c_3+64 \end{cases}$$

解之可得

$$c_1=\frac{1}{2},\quad c_2=-\frac{1}{2},\quad c_3=-1$$

所以所求递推关系的解为

$$a_n=\frac{1}{2}(-4)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4^n-n\cdot 4^n+n^2\cdot 4^n$$

(3) 当 $f(n)$ 为 d^n 与一个关于 n 的 m 次多项式的乘积时，且 d 不是特征方程的根，可令非齐次常系数线性递推关系的一个特解为

$$(A_0+A_1 n+\cdots+A_m n^m)d^n$$

其中 $A_0,A_1,\cdots,A_m$ 为特定常数，将其代入非齐次常系数线性递推关系后，合并同类项比较系数确定其值。

例 3.22　求非齐次递推关系 $a_n+a_{n-2}=(5n^3-n^2-2n+5)\cdot 2^n$ 的通解。

解　其特征方程为

$$p^2+1=0$$

$$p=\pm\mathrm{i}$$

将 $\pm\mathrm{i}$ 写成三角形式表示

$$\pm\mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{2}\pm\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$$

所以其对应的齐次递推关系的通解为

$$a_n = c_1 \cos \frac{n\pi}{2} + c_2 \sin \frac{n\pi}{2}$$

由于2不是特征方程的根,所以可令非齐次递推关系的一个特解为

$$(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3) \cdot 2^n$$

代入非齐次递推关系后,可得

$$(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3) \cdot 2^n + (A_0 + A_1(n-2) + A_2(n-2)^2 + A_3(n-2)^3) \cdot 2^{n-2}$$
$$= (5n^3 - n^2 - 2n + 5) \cdot 2^n$$

或可写为

$$(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3) + \frac{1}{4}(A_0 + A_1(n-2) + A_2(n-2)^2 + A_3(n-2)^3)$$
$$= 5n^3 - n^2 - 2n + 5$$

合并同类项,比较系数可得

$$\begin{cases} \frac{5}{4}A_3 = 5 \\ \frac{5}{4}A_2 - \frac{6}{4}A_3 = -1 \\ \frac{5}{4}A_1 - A_2 + 3A_3 = -2 \\ \frac{5}{4}A_0 - \frac{A_1}{2} + A_2 - 2A_3 = 5 \end{cases}$$

解之可得

$$A_0 = 4, \quad A_1 = -8, \quad A_2 = 4, \quad A_3 = 4$$

所以该非齐次递推关系的一个特解为

$$(4n^3 + 4n^2 - 8n + 4) \cdot 2^n$$

非齐次递推关系的通解为

$$a_n = c_1 \cos \frac{n\pi}{2} + c_2 \sin \frac{n\pi}{2} + (4n^3 + 4n^2 - 8n + 4) \cdot 2^n$$

例 3.23 求初始条件为 $a_0 = 0, a_1 = 0$ 的非齐次递推关系 $a_n - a_{n-2} = (3n^2 + 4n - 7) \cdot 2^n$ 的解。

解 其特征方程为

$$p^2 - 1 = 0$$
$$(p-1)(p+1) = 0$$
$$p = 1, \quad p = -1$$

所以其对应的齐次递推关系的通解为

$$a_n = c_1 + c_2(-1)^n$$

由于2不是特征方程的根,所以可令非齐次递推关系的一个特解为

$$(A_0 + A_1 n + A_2 n^2) \cdot 2^n$$

代入非齐次递推关系后,可得

$$(A_0 + A_1 n + A_2 n^2) - \frac{1}{4}(A_0 + A_1(n-1) + A_2(n-2)^2) = 3n^2 + 4n - 7$$

合并同类项,比较系数可得

$$\begin{cases}\frac{3}{4}A_2 = 3\\ \frac{3}{4}A_1 + A_2 = 4\\ \frac{3}{4}A_0 + \frac{2}{4}A_1 - A_2 = -7\end{cases}$$

解之可得

$$A_0 = -4,\quad A_1 = 0,\quad A_2 = 4$$

所以该非齐次递推关系的一个特解为

$$(4n^2 - 4)\cdot 2^n$$

非齐次递推关系的通解为

$$a_n = c_1 + c_2(-1)^n + (4n^2 - 4)2^n$$

由初始条件 $a_0=0$ 和 $a_1=0$ 可知

$$\begin{cases}0 = c_1 + c_2 - 4\\ 0 = c_1 - c_2\end{cases}$$

解之可得

$$c_1 = 2,\quad c_2 = 2$$

所以所求递推关系的解为

$$a_n = 2 + 2(-1)^n + (4n^2 - 4)\cdot 2^n$$

(4) 当 $f(n)$为 d^n 与一个关于 n 的 m 次多项式的乘积时,且 d 是特征方程的 r 重根,则应令非齐次常系数线性递推关系的一个特解为

$$n^r(A_0 + A_1 n + \cdots + A_m n^m)\cdot d^n$$

其中 A_0、A_1、…、A_m 为特定常数,将其代入非齐次常系数线性递推关系后,合并同类项比较系数确定其值。

例 3.24 求非齐次递推关系 $a_n+4a_{n-1}+4a_{n-2}=(6n+2)(-2)^n$ 的通解。

解 其特征方程为

$$p^2 + 4p + 4 = 0$$
$$(p + 2)^2 = 0$$

解得

$$p = -2(2\text{ 重根})$$

所以其对应的齐次递推关系的通解为

$$a_n = c_1(-2)^n + c_2\cdot n\cdot(-2)^n$$

由于-2是特征方程的 2 重根,所以应令非齐次递推关系的一个特解为

$$n^2(A_0 + A_1 n)(-2)^n$$

代入非齐次递推关系后,可得

$$\begin{aligned}&(A_0 n^2 + A_1 n^3)(-2)^n + 4(A_0(n-1)^2 + A_1(n-1)^3)(-2)^{n-1} + \\ &4(A_0(n-2)^2 + A_1(n-2)^3)(-2)^{n-2}\\ =&(6n+2)(-2)^n\end{aligned}$$

或可写为

$$(A_0n^2+A_1n^3)-2(A_0(n-1)^2+A_1(n-1)^3)+(A_0(n-2)^2+A_1(n-2)^3)=6n+2$$

合并同类项,比较系数可得

$$\begin{cases}6A_1=6\\2A_0-6A_1=2\end{cases}$$

解之可得

$$A_0=4,\quad A_1=1$$

所以该非齐次递推关系的一个特解为

$$(n^3+4n^2)(-2)^n$$

其解通为

$$a_n=c_1(-2)^n+c_2\cdot n(-2)^n+(n^3+4n^2)(-2)^n$$

例 3.25 求初始条件为 $a_0=2, a_1=0$ 的非齐次递推关系 $a_n-9a_{n-2}=(6n^2-4n-6)\cdot 3^n$ 的解。

解 其特征方程为

$$p^2-9=0$$

$$(p-3)(p+3)=0$$

解得 $\qquad p=3,\quad p=-3$

所以其对应的齐次递推关系的通解为

$$a_n=c_1 3^n+c_2(-3)^n$$

由于 3 是特征方程的 1 重根,所以应令非齐次递推关系的一个特解为

$$n(A_0+A_1n+A_2n^2)\cdot 3^n$$

代入非齐次递推关系后可得

$$(A_0n+A_1n^2+A_2n^3)3^n-9(A_0(n-2)+A_1(n-2)^2+A_2(n-2)^3)\cdot 3^n$$
$$=(6n^2-4n-6)\cdot 3^n$$

或可写为

$$(A_0n+A_1n^2+A_2n^3)-(A_0(n-2)+A_1(n-2)^2+A_2(n-2)^3)=6n^2+4n-6$$

合并同类项,比较系数可得

$$\begin{cases}6A_2=6\\4A_1-12A_2=-4\\2A_0-4A_1+8A_2=-6\end{cases}$$

解之可得

$$A_0=-3,\quad A_1=2,\quad A_2=1$$

所以非齐次递推关系的一个特解为

$$(n^3+2n^2-3n)\cdot 3^n$$

非齐次递推关系的通解为

$$a_n=c_1 3^n+c_2(-3)^n+(n^3+2n^2-3n)\cdot 3^n$$

由初始条件 $a_0=2$ 和 $a_1=0$ 可知

$$\begin{cases}2=c_1+c_2\\0=3c_1-3c_2\end{cases}$$

解之可得

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1$$

由此得到所求非齐次递推关系的解为

$$a_n = 3^n + (-3)^n + (n^3 + 2n^2 - 3n) \cdot 3^n$$

显然,当 $f(n)$为 d^n 与关于 n 的 m 次多项式的乘积时,如果 $d=1$,则 $f(n)$仅为一个关于 n 的 m 次多项式,于是有以下结论。

(5) 当 $f(n)$为关于 n 的 m 次多项式时,如果 1 不是特征方程的根,则可令非齐次常系数线性递推关系的一个特解为

$$A_0 + A_1 n + \cdots + A_m n^m$$

如果 1 是特征方程的 r 重根,则应令非齐次常系数线性递推关系的一个特解为

$$n^r(A_0 + A_1 n + \cdots + A_m n^m)$$

其中 A_0、A_1、…、A_m 为待定常数,代入非齐次常系数线性递推关系后,合并同类项,比较系数后确定其值。

例 3.26　求初始条件为 $a_0=0$,$a_1=-1$ 的非齐次递推关系 $a_n-a_{n-1}-2a_{n-2}=2n^2-8$ 的解。

解　其特征方程为

$$p^2 - p - 2 = 0$$

$$(p-2)(p+1) = 0$$

解得

$$p = 2, \quad p = -1$$

所以对应的齐次递推关系的通解为

$$a_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n$$

现在求非齐次递推关系的一个特解。

由于 1 不是特征方程的根,所以可设非齐次递推关系的一个特解为

$$A_0 + A_1 n + A_2 n^2$$

代入非齐次递推关系后,可得

$$A_0 + A_1 n + A_2 n^2 - (A_0 + A_1(n-1) + A_2(n-1)^2) - 2(A_0 + A_1(n-2) + A_2(n-2)^2)$$
$$= 2n^2 - 18$$

合并同类项,比较系数可得

$$\begin{cases} -2A_2 = 2 \\ -2A_1 + 10A_2 = 0 \\ -2A_0 + 5A_1 - 9A_2 = -18 \end{cases}$$

解之可得

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -5, \quad A_2 = -1$$

于是求得非齐次递推关系的一个特解为

$$-n^2 - 5n + 1$$

所以其通解为

$$a_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n - n^2 - 5n + 1$$

由初始条件 $a_0=0$ 和 $a_1=-1$ 可知

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + 1 \\ -1 = 2c_1 - c_2 - 5 \end{cases}$$

解之可得

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -2$$

由此求得该非齐次递推关系的解为

$$a_n = 2^n - 2(-1)^n - n^2 - 5n + 1$$

例 3.27 求初始条件为 $a_0=1$,$a_1=1$ 的非齐次递推关系 $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=6n-4$ 的解。

解 其特征方程为

$$p^2 - 2p + 1 = 0$$

$$(p-1)^2 = 0$$

解得

$$p = 1 \quad (2\text{ 重根})$$

所以对应的齐次递推关系的通解为

$$a_n = c_1 + c_2 n$$

由于 1 是特征方程的 2 重根,所以应设非齐次递推关系的一个特解为

$$n^2(A_0 + A_1 n)$$

代入非齐次递推关系后,可得

$$A_0 n^2 + A_1 n^3 - 2(A_0(n-1)^2 + A_1(n-1)^3) + A_0(n-2)^2 + A_1(n-2)^3 = 6n - 4$$

合并同类项,比较系数后可得

$$\begin{cases} 6A_1 = 6 \\ 2A_0 - 6A_1 = -4 \end{cases}$$

解之可得

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 1$$

所以非齐次递推关系的一个特解为

$$a_n = n^2 + n^3$$

由此可得其通解为

$$a_n = c_1 + c_2 n + n^2 + n^3$$

当初始条件为 $a_0=1$,$a_1=1$ 时,可得

$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ 1 = c_1 + c_2 + 2 \end{cases}$$

解之可得

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -2$$

因此所求的递推关系的解为

$$a_n = 1 - 2n + n^2 + n^3$$

下面介绍一些递推关系的应用实例。

例 3.28 气泡排序算法分析。

设有 n 个寄存器 x_1、x_2、…、x_n,每一个寄存器存放了一个数。现在需要把这 n 个数以由小到大递增的次序存放在 x_1、x_2、…、x_n 中。解决这类问题的算法称为排序算法,排序算法有多种,其中最简单、最常用的是气泡算法。该算法首先把这 n 个数中的最小者存放在

x_1 中，然后把余下的 $n-1$ 个数中的最小者存放在 x_2 中，再把余下的 $n-2$ 个数中的最小者存放在 x_3 中，……，直到排序完成。

把 n 个数中的最小者存放在 x_1 中的程序是这样实现的：

首先把存放在 x_{n-1} 和 x_n 中的两个数进行比较，再把其中较小者存放在 x_{n-1} 中，另一个数存放在 x_n 中。此时，x_{n-1} 中的数是 x_{n-1} 和 x_n 中的数的最小者。

然后，把存放在 x_{n-2} 中的数和 x_{n-1} 中的数进行比较，再把其中较小者存放在 x_{n-2} 中，另一个数存放在 x_{n-1} 中，此时 x_{n-2} 中的数是 x_n、x_{n-1}、x_{n-2} 中的数的最小者。

接着再把存放在 x_{n-3} 中的数和 x_{n-2} 中的数进行比较，再把其中较小者存放在 x_{n-3} 中，另一个数存放在 x_{n-2} 中。此时 x_{n-3} 中的数是 x_n、x_{n-1}、x_{n-2}、x_{n-3} 中的数的最小者。

……

直到把 x_n、x_{n-1}、…、x_1 中的最小者存入 x_1 中为止。

如果用 $m(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示将 x_1、x_2、…、x_n 中的最小者存入 x_1 中的程序。易知，该程序需要作 $n-1$ 次“比较”。

另外，如果用 $S(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示把 x_1、x_2、…、x_n 中的数由小到大递增的排序程序，则有：

$$S(x_1,x_2,\cdots,x_n) \overset{\text{def}}{=\!=} m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \circ S(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

其中符号 $\overset{\text{def}}{=\!=}$ 表示“定义为”；两个程序段间的符号“$\circ$”表示以自左到右的次序执行程序。

如果用 a_n 表示把 n 个数由小到大排序所需要进行比较的次数。由上面分析可知

$$a_n = a_{n-1} + n - 1$$

或写成

$$a_n - a_{n-1} = n - 1$$

这是一个非齐次常系数线性递推关系。由于特征方程的根为 1，所以此非齐次递推关系的一个特解应设为

$$A_0 n + A_1 n^2$$

代入非齐次递推关系后可得

$$A_0 n + A_1 n^2 - (A_0(n-1) + A_2(n-1)^2) = n - 1$$

合并同类项，比较系数后可得

$$A_0 = -\frac{1}{2},\quad A_1 = \frac{1}{2}$$

所以其特解为

$$-\frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$$

其通解为

$$a_n = c - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$$

由于 a_0 没有意义，所以初始条件可取 $a_1=0$，由此可得

$$0 = c - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

解得　$$c = 0$$

于是得到初始条件为 $a_1=0$ 的解

$$a_n=\frac{n(n-1)}{2}$$

上式表明，把 n 个数由小到大排序时，共需要进行$\frac{n(n-1)}{2}$次比较。

例 3.29 在原子反应器里，每秒钟每个粒子分裂为两个粒子。假如在开始 $t=0$ 时，反应器中有一个粒子，以后每秒钟有一个粒子射入反应器里，那么在第 n 秒时，反应器里有多少个粒子？

解 设在第 n 秒时，反应器里有 a_n 个粒子。由题意可知

$$a_n=2a_{n-1}+1$$
$$a_n-2a_{n-2}=1$$

这是一个非齐次常系数线性递推关系，其对应的齐次递推关系的通解为

$$a_n=c\cdot 2^n$$

由于 1 不是特征方程的根，所以该非齐次递推关系的一个特解可设为 A(待定常数)。代入非齐次递推关系后，可知 $A=-1$。由此得到非齐次递推关系的通解为

$$a_n=c\cdot 2^n-1$$

由初始条件 $a_0=1$，可得 $c=2$。

所以所求递推关系的解为

$$a_n=2^{n+1}-1$$

例 3.30 设 $a_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$，求 a_n 的计算公式。

解 由题设可知

$$a_n=1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2$$
$$a_{n-1}=1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2$$

所以有递推关系

$$a_n-a_{n-1}=n^2$$

易见，特征方程的根为 1，所以在求非齐次递推关系的特解时，应设特解为

$$n(A_0+A_1n+A_2n^2)$$

代入递推关系后，应有

$$A_0n+A_1n^2+A_2n^3-(A_0(n-1)+A_1(n-1)^2+A_2(n-2)^3)=n^2$$

整理后可得

$$A_0+A_1(2n-1)+A_2(3n^2-3n+1)=n^2$$

合并同类项，比较系数可得

$$\begin{cases}3A_2=1\\2A_1-3A_2=0\\A_0-A_1+A_2=0\end{cases}$$

解之可得

$$A_0=\frac{1}{6},\quad A_1=\frac{1}{2},\quad A_3=\frac{1}{3}$$

由此可知，非齐次递推关系的一个特解为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

易知，所对应的齐次递推关系的通解为

$$a_n = c$$

所以所求非齐次递推关系的通解为

$$a_n = c + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

再由初始条件 $a_0=0$，代入通解后，可得 $c=0$。因此本例的解为

$$a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

也即有

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

例 3.31 在一个计算机系统中，把一个十进制数字串作为一个编码字，如果它包含有 0 的个数为偶数，就是有效的，否则就是无效的。例如，103280976 是有效的(串中有 2 个 0)，而 203045607 是无效的(串中有 3 个 0)。设 a_n 表示有效的 n 位编码字的个数，找出一个关于 a_n 的递推关系，并求出它的解。

解 为了找出关于 a_n 的递推关系，可以考虑怎样由 $n-1$ 位数字串去构造一个 n 位有效的数字串。下面分两种情况讨论。

第一种情况：在一个 $n-1$ 位的有效数字串后面加上一个非 0 的数字就可得到一个 n 位的有效数字串。加一个非 0 数字的方式共有 9 种，所以用这种方法构成 n 位有效数字串的方式共有 $9a_{n-1}$ 种。

第二种情况：在一个 $n-1$ 位无效数字串的后面加上一个数字 0，就可得到一个 n 位的有效数字串。这样做的方式数等于无效的 $n-1$ 位数字串的个数。由于 $n-1$ 位十进数字串共有 10^{n-1} 个，所以无效的 $n-1$ 位数字串的个数为 $10^{n-1}-a_{n-1}$。

由以上分析可知

$$a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1})$$

或可写为

$$a_n - 8a_{n-1} = \frac{1}{10} \times 10^n$$

上式就是所求的递推关系。

现在求此递推关系的解。

其特征方程为

$$\begin{aligned} p - 8 &= 0 \\ p &= 8 \end{aligned}$$

由此可得齐次递推关系($a_n-8a_{n-1}=0$)的通解为

$$a_n = c \cdot 8^n$$

由于 10 不是特征方程的根，所以可设非齐次递推关系的一个特解为

$$A \cdot 10^n$$

代入递推关系后，可得

$$A \cdot 10^n - 8 \cdot A \cdot 10^{n-1} = \frac{1}{10} \cdot 10^n$$

合并同类项，比较系数可得

$$A = \frac{1}{2}$$

所以非齐次递推关系的一个特解为

$$\frac{1}{2} \cdot 10^n$$

其通解为

$$a_n = c \cdot 8^n + \frac{1}{2} \cdot 10^n$$

因为 a_0 没有意义，而 $a_1 = 9$，所以可得

$$9 = c \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 10^n$$

解得
$$c = \frac{1}{2}$$

由此可得此递推关系的解为

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 8^n + \frac{1}{2} \cdot 10^n = \frac{1}{2}(8^n + 10^n)$$

3.2.4 生成函数

生成函数是数列的另一种重要表示形式。

设数列为 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$，则称函数

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

为数列(a_n)的生成函数（或称母函数）。

例 3.32 设数列 $a_n \equiv 1$，求其生成函数。

解 由生成函数的定义可知

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

例 3.33 求等比数列 $a_n = q^n$ 的生成函数。

解 其生成函数为

$$f(x) = 1 + qx + q^2 x^2 + \cdots + q^n x^n + \cdots = \frac{1}{1-qx}$$

例 3.34 求 $a_n = n$ 的生成函数。

解 其生成函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 + 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + \cdots + nx^n + \cdots \\ &= x(1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + \cdots) \end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

上述等式两边求导后可得

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=1+2x+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

$$x\left(\frac{1}{1-x}\right)'=x(1+2x+\cdots+nx^{n-1}+\cdots)$$

由此可知,数列 $a_n=n$ 的生成函数为

$$f(x)=x\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

例 3.35　求 $a_n=n^2$ 的生成函数。

解　由上例可知

$$\frac{x}{(1-x)^2}=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$$

两边求导后可得

$$\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=1+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2\cdot x^{n-1}+\cdots$$

$$x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=x+2^2x^2+3^2x^3+\cdots+n^2x^n+\cdots$$

由此可知,数列 $a_n=n^2$ 的生成函数为

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}n^2\cdot x^n\\&=0+x+2^2x^2+\cdots+n^2\cdot x^n+\cdots\\&=x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'\\&=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

上述各例中,分别给出了数列 $a_n\equiv1, a_n=q^n, a_n=n, a_n=n^2$ 的生成函数的简明表达式,它也称为生成函数的紧凑格式表示。

生成函数在求解递推关系时,有重要用途。下面举例说明利用生成函数求解递推关系的过程。

例 3.36　求初始条件为 $a_0=2, a_1=6$ 的非齐次常系数线性递推关系 $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=2^n$ 的解。

解　本例将利用生成函数来求解。

设所求数列(a_n)的生成函数为

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\end{aligned}$$

在所需求解的递推关系的各项都乘以 x^n,于是有

$$a_nx^n-2a_{n-1}x^n+a_{n-2}x^n=2^n\cdot x^n$$

由于本例给出的是一个 2 阶常系数线性递推关系,所以对各项中的 n 自 2 到∞求和,由此

得到

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n - 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot x^n$$

在上述等式中,各项分别为

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots) - a_0 - a_1 x \\ &= f(x) - a_0 - a_1 x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n &= 2x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} \\ &= 2x(a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots) \\ &= 2x((a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots) - a_0) \\ &= 2x(f(x) - a_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n &= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} \\ &= x^2 (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots) \\ &= x^2 f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} 2^n x^n &= 2^2 x^2 + 2^3 x^3 + \cdots + 2^n x^n + \cdots \\ &= (1 + 2x + 2^2 x^2 + \cdots + 2^n x^n + \cdots) - 1 - 2x \\ &= \frac{1}{1-2x} - 1 - 2x\end{aligned}$$

由此可得

$$f(x) - a_0 - a_1 x - 2x(f(x) - a_0) + x^2 f(x) = \frac{1}{1-2x} - 1 - 2x$$

把初始条件 $a_0 = 2, a_1 = 6$ 代入后可得

$$f(x) - 2 - 6x - 2xf(x) + 4x + x^2 f(x) = \frac{1}{1-2x} - 1 - 2x$$

整理后可得

$$f(x)(1 - 2x + x^2) = \frac{1}{1-2x} + 1$$

$$f(x)(1-x)^2 = \frac{2(1-x)}{1-2x}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{2}{(1-2x)(1-x)} \\ &= 2\left(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\right) \\ &= 4\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n\end{aligned}$$

由此说明,$f(x)$是数列 $4 \cdot 2^n - 2$ 的生成函数,所以所求递推关系的解为

$$a_n = 4 \cdot 2^n - 2$$

对于一般情况，若设 k 阶常系数线性递推关系为

$$a_n + b_1 a_{n-1} + \cdots + b_k a_{n-k} = g(n)$$

其中 b_1、b_2、…、b_k 是常数，$g(n)$是已知函数。

在用生成函数求解时，首先在等式两边乘以 x^n，于是有

$$a_n x^n + b_1 a_{n-1} x^n + \cdots + b_k a_{n-k} x^n = g(n) x^n$$

然后对 n 自 k 到∞求和，得到

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=k}^{\infty} b_1 a_{n-1} x^n + \cdots + \sum_{n=k}^{\infty} b_k a_{n-k} x^n = \sum_{n=k}^{\infty} g(n) x^n$$

若设所求数列(a_n)的生成函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n &= a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \cdots \\ &= f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{k-1} x^{k-1} \\ \sum_{n=k}^{\infty} b_1 a_{n-1} x^n &= b_1 x \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} \\ &= b_1 x (a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k + \cdots) \\ &= b_1 x (f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{k-2} x^{k-2}) \\ &\vdots \\ \sum_{n=k}^{\infty} b_k a_{n-k} x^n &= b_k x^k \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^{n-k} \\ &= b_k x^k (a_0 + a_1 x + \cdots) \\ &= b_k x^k f(x) \end{aligned}$$

由此可知，生成函数为

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{1 + b_1 x + \cdots + b_k x^k} \Big[& \sum_{n=k}^{\infty} g(n) x^n + a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-1} \\ & + b_1 x (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-2} x^{k-2}) + \cdots + b_{k-1} x^{k-1} \cdot a_0 \Big] \end{aligned}$$

求出生成函数 $f(x)$后，就可求得递推关系的解。

例 3.37 用生成函数求初始条件为 $a_0=1$ 的递推关系 $a_n - a_{n-1} = n+1$ 的解。

解 设所求数列的生成函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

在所求解的递推关系两边乘以 x^n，可得

$$a_n x^n - a_{n-1} x^n = n x^n + x^n$$

由于所求解的递推关系为一阶常系数线性递推关系，所以对 n 自 1 到∞求和，可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

其中

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\
&= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) - a_0 \\
&= f(x) - a_0 \\
\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n &= x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} \\
&= x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \\
&= x f(x) \\
\sum_{n=1}^{\infty} n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\
&= \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{（见例 3.34）} \\
\sum_{n=1}^{\infty} x^n &= x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \\
&= (1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) - 1 \\
&= \frac{1}{1-x} - 1
\end{aligned}$$

由此可知

$$f(x) - a_0 - x f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} - 1$$

由初始条件 $a_0 = 1$ 代入后

$$\begin{aligned}
f(x) - 1 - x f(x) &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} - 1 \\
f(x)(1-x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\
f(x) &= \frac{1}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

求导后可得

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

再次求导后可得

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = 2 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n-1) x^n$$

易知

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1}{(1-x)^3}$$

由于

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)''$$

所以

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n$$

由此求得递推关系的解为

$$a_n = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$$

例 3.38　求 $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$ 的解。其初始条件为 $a_0 = 1, a_1 = 1$。

解　设所求数列(a_n)的生成函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

首先把递推关系各项乘以 x^n,可得

$$a_n x^n - a_{n-1} x^n - 2a_{n-2} x^n = 0$$

再对 n 自 2 到∞求和,可得

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n - 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n - x\left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1}\right) - 2x^2\left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}\right) = 0$$

$$(f(x) - a_0 - a_1 x) - x(f(x) - a_0) - 2x^2 f(x) = 0$$

把初始条件 $a_0 = 1$ 和 $a_1 = 1$ 代入可得

$$f(x) - 1 - x - x(f(x) - 1) - 2x^2 f(x) = 0$$

整理后可得

$$f(x)(1 - x - 2x^2) = 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x-2x^2} \\ &= \frac{1}{(1-2x)(1+x)} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{1-2x} + \frac{1}{1+x}\right) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-2x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x} \\ &= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \end{aligned}$$

由此求得递推关系的解为

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$$

例 3.39 用生成函数求初始条件为 $a_0=1, a_1=4$ 的递推关系 $a_n+4a_{n-2}=2n \cdot 2^n$ 的解。

解 设(a_n)的生成函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

对于所求递推关系的各项乘以 x^n,得到

$$a_n x^n + 4a_{n-2} x^n = 2n \cdot 2^n x^n$$

再对 n 自 2 到∞求和,得到

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n + 4\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2n \cdot 2^n x^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n + 4x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} 2n \cdot 2^n x^n$$

$$f(x) - a_0 - a_1 x + 4x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2n \cdot 2^n x^n - 4x$$

将初始条件 $a_0=1$ 和 $a_1=4$ 代入后,可得

$$f(x) - 1 - 4x + 4x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2n \cdot 2^n x^n - 4x$$

整理后可得

$$f(x)(1+4x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} 2n \cdot 2^n x^n + 1$$

由于

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$$

$$\left(\frac{1}{1-2x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^n x^{n-1}$$

$$x\left(\frac{1}{1-2x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^n x^n$$

$$\frac{2x}{(1-2x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 2^n x^n$$

由此可知

$$\begin{aligned} f(x)(1+4x^2) &= \frac{4x}{(1-2x)^2} + 1 \\ &= \frac{1+4x^2}{(1-2x)^2} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-2x}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^n x^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1) \cdot 2^n x^n$$

由此求得递推关系的解为

$$a_n = (n+1) \cdot 2^n$$

例 3.40　用生成函数求初始条件为 $a_0=0$，$a_1=8$ 的递推关系 $a_n-4a_{n-2}=(n+1)4^n$ 的解。

解　设数列 a_n 的生成函数为

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

对递推关系的各项都乘以 x^n，得到

$$a_n x^n - 4a_{n-2}x^n = (n+1)4^n x^n$$

对 n 自 2 到∞求和

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n - 4\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n = \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)4^n x^n$$

$$f(x) - a_0 - a_1 x - 4x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)4^n x^n - 1 - 8x$$

将初始条件 $a_0=0$ 和 $a_1=8$ 代入后，得到

$$f(x) - 4x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)4^n x^n - 1$$

由于

$$\frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{n} 4^n x^n$$

两边求导后，得到

$$\frac{4}{(1-4x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n4^n x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)4^{n+1}x^n$$

由此可知

$$\frac{1}{(1-4x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)4^n x^n$$

于是有

$$f(x)(1-4x^2) = \frac{1}{(1-4x)^2} - 1$$

$$= \frac{1-(1-4x)^2}{(1-4x)^2}$$

$$= \frac{8x(1-2x)}{(1-4x)^2}$$

$$f(x) = \frac{8x(1-2x)}{(1-4x)^2(1-4x^2)}$$

$$= \frac{8x}{(1-4x)^2(1+2x)}$$

由有理式的有关知识可知

$$\frac{8x}{(1-4x)^2(1+2x)} = \frac{A}{(1-4x)^2} + \frac{B}{1-4x} + \frac{C}{1+2x}$$

其中 A、B、C 是待定常数。通分后可得

$$\frac{8x}{(1-4x)^2(1+2x)} = \frac{A(1+2x)+B(1-4x)(1+2x)+C(1-4x)^2}{(1-4x)^2(1+2x)}$$

$$\frac{8x}{(1-4x)^2(1+2x)} = \frac{A(1+2x)+B(1-2x-8x^2)+C(1-8x+16x^2)}{(1-4x)^2(1+2x)}$$

合并同类项,比较系数可得

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 2A-2B-8C=8 \\ -8B+16C=0 \end{cases}$$

解之可得

$$A=\frac{4}{3}, \quad B=-\frac{8}{9}, \quad C=-\frac{4}{9}$$

于是

$$\frac{8x}{(1-4x)^2(1+2x)} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(1-4x)^2} - \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{1-4x} - \frac{4}{9} - \frac{1}{1+2x}$$

$$= \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)4^n x^n - \frac{8}{9}\sum_{n=0}^{\infty}4^n x^n - \frac{4}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{3}(n+1)4^n - \frac{8}{9}4^n - \frac{4}{9}(-2)^n\right)x^n$$

这说明所求数列为

$$a_n = \frac{4}{3}(n+1)4^n - \frac{8}{9}4^n - \frac{4}{9}(-2)^n$$

习题

1. 在 20 个大学生中,有 10 个戴眼镜的,有 8 个爱吃口香糖的,有 6 个既戴眼镜又爱吃口香糖。问不戴眼镜又不爱吃口香糖的大学生有多少个?

2. 某班有学生 50 人,有 26 人在第一次考试中得优,有 21 人在第二次考试中得优,有 17 人两次考试都没有得优,求两次考试都得优的学生数。

3. 某班有学生 30 人,选学英、日、俄三种外语。学英语者 18 人,学日语者 15 人,学俄

语者 11 人；兼学英、日语者 9 人，兼学英、俄语者 6 人；兼学日、俄语者 6 人；三种外语都学习的有 4 人。问：这三种外语都不学的人数是多少？

4. 电视台对 200 人进行调查的结果是：有 95 人喜欢电视剧甲，有 128 人喜欢电视剧乙，有 82 人喜欢电视剧丙；有 30 人对这三部电视剧都喜欢；有 17 人对这三部电视剧都不喜欢。问：仅仅喜欢两部电视剧的人数是多少？

5. 在 100 名大学生中，有 34 人爱好音乐，24 人爱好美术，48 人爱好体育；至少有两种爱好的有 20 人；有 25 人这三种爱好都没有。求这三种爱好都有的大学生数。

6. 在 1～200 的正整数中，能被 2、3 或 5 整除的正整数有多少个？

7. 一个计算机网络由 8 台计算机组成，每台计算机至少直接连接到一台其他的计算机。证明网络中至少有两台计算机直接连接相同数目的其他计算机。

8. 一个口袋有 10 个红球和 10 个白球，有人不看球而随机地从袋中取球，问：他至少取多少个球，才能保证取出的球中至少有 3 个是相同颜色的球？

9. 设 a_1、a_2、…、a_n 是任意正整数，证明存在着 i 和 k（$i\geqslant 0$，$k\geqslant 1$）使得 $a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+k}$ 能被 n 整除。

10. 求下列递推关系的通解。

(1) $a_n-6a_{n-1}+16a_{n-2}=0$。

(2) $a_n+6a_{n-1}+9a_{n-2}=0$。

(3) $a_n+4a_{n-2}=0$。

(4) $a_n-2a_{n-1}+2a_{n-2}=0$。

11. 解下述递推关系。

(1) $a_n-2a_{n-2}+a_{n-2}=0$，初始条件为 $a_0=1$，$a_1=1$。

(2) $a_n-2a_{n-1}+2a_{n-2}-a_{n-3}=0$，初始条件为 $a_0=2$，$a_1=1$，$a_2=1$。

(3) $a_n+a_{n+2}=0$，初始条件为 $a_0=0$，$a_1=1$。

(4) $a_n-a_{n-1}+4a_{n-2}-4a_{n-3}=0$，初始条件为 $a_0=1$，$a_1=1$，$a_2=1$。

12. 求下列递推关系的通解。

(1) $a_n-7a_{n-1}+10a_{n-2}=3^n$。

(2) $a_n+6a_{n-1}+9a_{n-2}=3+3^n$。

(3) $a_n-a_{n-1}+a_{n-2}=2^n$。

(4) $a_n+a_{n-1}=(n^2+1)\cdot 2^n$。

(5) $a_n-2a_{n-1}=n^2\cdot 2^n$。

(6) $a_n-5a_{n-1}+6a_{n-2}=n^2+n+2$。

(7) $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=2n-1$。

(8) $a_n+4a_{n-2}=n^2-1$。

13. 求下列递推关系的解。

(1) $a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=2^n$，初始条件为 $a_0=0$，$a_1=0$。

(2) $a_3+3a_{n-1}+2a_{n-2}=1$，初始条件为 $a_0=0$，$a_1=1$。

(3) $a_n+a_{n-1}=7n$，初始条件为 $a_0=1$。

(4) $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=n+2$，初始条件为 $a_0=0$，$a_1=1$。

(5) $a_n-a_{n-1}=n^2\cdot 2^n$，初始条件为 $a_0=0$，$a_1=2$。

(6) $a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=(n+2)2^n$，初始条件为 $a_0=1, a_1=0$。

(7) $a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}=(n^2+1)\cdot 3^n$，初始条件为 $a_0=0, a_1=1, a_2=0$。

(8) $a_n-6a_{n-1}+9a_{n-2}=(n+2)\cdot 3^n$，初始条件为 $a_0=0, a_1=3$。

14. 考察一个控制环境中的细菌繁殖问题。设 a_n 表示第 n 天的细菌数，设第 n 天的细菌增长率为 a_n-2a_{n-1}。如果已知细菌的增长率每天翻一番，求初始条件为 $a_0=1, a_1=4$ 时 a_n 的值。

15. 一个质点在水平方向上运动，每秒走过的距离是它前一秒走过距离的两倍，设 a_n 表示在第 n 秒时质点的位置，当 $a_0=3, a_1=10$ 时，求 a_n。

16. 在原子反应器中，每秒钟每个粒子分裂为 3 个粒子，每秒钟有一个粒子射入反应器内。设在开始时，反应器中有 100 个粒子，那么在第 n 秒时，反应器中有多少个粒子？

17. 求下列数列的生成函数。

(1) $a_n=2^n+2$。

(2) $a_n=n^2+2n+1$。

(3) $a_n=n^3$。

(4) $a_n=(n+1)5^n$。

(5) $a_n=n^2 2^n$。

(6) $a_n=(n^2+n)3^n$。

(7) $a_n=(n^2+3n+2)2^n$。

(8) $a_n=n(n+1)(n+2)4^n$。

(9) $a_n=(n+1)(n+2)(n+3)4^n$。

18. 若数列 a_n 的生成函数如下，求 a_n。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^3}$。

(2) $f(x)=\dfrac{2x}{(1-2x)^2}$。

(3) $f(x)=\dfrac{6x+1}{(1-3x)^3}$。

(4) $f(x)=\dfrac{3-x}{(1-2x)(1+3x)}$。

(5) $f(x)=\dfrac{1-x^3}{(1-x)^3}-1$。

(6) $f(x)=\dfrac{3-x}{(1-2x)(1+3x)}$。

(7) $f(x)=\dfrac{1}{(1-2x)^2(1-x)}$。

(8) $f(x)=\dfrac{6x}{(1+3x)(1-9x^2)}$。

(9) $f(x)=\dfrac{1}{(1-4x)^4}$。

(10) $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-4x)^4}$。

19. 利用生成函数求下列递推关系的解。

(1) $a_n-a_{n-2}=0, a_0=1, a_1=1$。

(2) $a_n-2a_{n-1}-8a_{n-2}=0, a_0=0, a_1=1$。

(3) $a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=0, a_0=1, a_1=1$。

(4) $a_n+a_{n-2}=0, a_0=1, a_1=0$。

20. 利用生成函数求下列递推关系的解。

(1) $a_n-a_{n-2}=3^n, a_0=0, a_1=1$。

(2) $a_n-4a_{n-2}=2^n, a_0=0, a_1=1$。

(3) $a_n-3a_{n-1}=n+1, a_0=1$。

(4) $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=n^2+n+1, a_0=0, a_1=1$。

21. 利用生成函数求下列递推关系。

(1) $a_n-3a_{n-1}+2a_{n-2}=n\cdot 3^n, a_0=0, a_1=1$。

(2) $2a_n-3a_{n-1}=(n+1)3^n, a_0=0$。

(3) $a_4-4a_{n-1}+4a_{n-2}=(n+1)4^n, a_0=0, a_1=8$。

22. 利用生成函数求 $a_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的计算公式。