

第 3 章

信号的傅里叶变换

众所周知,一束白光(太阳光)通过一个玻璃三棱镜后可以分解成不同颜色的光。牛顿发现了这一现象并最早提出了谱(spectrum)的概念,指出不同颜色的光具有不同的波长,对应不同的频率。不同颜色光的频率所形成的频带即光谱。牛顿再利用一个三棱镜将不同颜色的光又合成一束白光。前者对应光的分析,后者对应光的综合。

1822 年,法国工程师傅里叶(Fourier)指出,一个“任意”的周期函数 $x(t)$ 都可以分解为无穷多个不同频率正弦信号的和,即傅里叶级数。求解傅里叶系数的过程就是傅里叶变换。傅里叶级数和傅里叶变换又统称为傅里叶分析或谐波分析。傅里叶分析方法相当于光谱分析中的三棱镜,而信号 $x(t)$ 相当于一束白光,将 $x(t)$ “通过”傅里叶分析后可得到信号的频谱,频谱作傅里叶反变换后又可得到原信号 $x(t)$ 。由 3.1 节的讨论可知,傅里叶变换实际上是将信号 $x(t)$ 和一组不同频率的复正弦作内积,这一组复正弦即变换的基向量,而傅里叶系数或傅里叶变换是 $x(t)$ 在这一组基向量上的投影。

我们知道,正弦信号是最规则的信号,由幅度、相位及频率这三个参数即可完全确定。另外,正弦信号有着广泛的工程背景,如交流电、简谐运动等。而且,正弦信号有许多好的性质,例如正交性,即

$$\int_t^{t+T} \sin(n\Omega_0 t) \sin(m\Omega_0 t) dt = \begin{cases} T/2 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

式中 $T=2\pi/\Omega_0$, 而 m, n 为整数。由于以上这些原因,傅里叶分析技术已广泛应用于电学、声学、光学、机械学、生物医学工程等众多领域,为广大工程技术人员及科学工作者所熟悉。

傅里叶分析分别包含了连续信号和离散信号的傅里叶变换和傅里叶级数,内容相当丰富。本章先简要介绍连续时间信号的傅里叶变换和傅里叶级数的基本概念,再着重讨论离散时间信号的傅里叶变换(discrete time Fourier transform, DTFT)及联系连续信号和离散信号的抽样定理,然后引导出在时域和频域都取离散值的离散傅里叶变换,即 DFT。DFT 是数字信号处理中最基本,也是最重要的运算,除了谱分析外,卷积、相关等都可以通过 DFT 在计算机上实现。

希尔伯特(Hilbert)变换是信号处理理论中的一个重要变换,它在信号分析与处理方面以及窄带信号的描述方面都有着重要的应用,通过希尔伯特变换还可以加深对傅里叶

变换的理解,本章最后将对希尔伯特变换给以简要的介绍。

3.1 连续时间信号的傅里叶变换

3.1.1 连续周期信号的傅里叶级数

设 $x(t)$ 是一个复正弦信号,记作 $x(t) = Xe^{j\Omega_0 t}$,式中 X 是幅度, Ω_0 是频率,其周期 $T = 2\pi/\Omega_0$ 。若 $x(t)$ 由无穷多个复正弦所组成,且其第 k 个复正弦的频率是 Ω_0 的 k 倍,其幅度记为 $X(k\Omega_0)$,则 $x(t)$ 可表示为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \quad (3.1.1)$$

显然, $x(t)$ 也是周期的,周期仍为 T 。反过来,我们也可将(3.1.1)式理解为周期信号 $x(t)$ 的分解,用于分解的基函数都是幅度为 1 的复正弦。其中,对应频率为 $k\Omega_0$ 的复正弦的幅度是 $X(k\Omega_0)$ 。将此结果推广到一般的周期信号,即大家所熟知的傅里叶级数。

设 $x(t)$ 是一个周期信号,其周期为 T ,若 $x(t)$ 在一个周期内的能量是有限的,即

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (3.1.2)$$

那么,我们可将 $x(t)$ 展成傅里叶级数,即(3.1.1)式。式中 $X(k\Omega_0)$ 是傅里叶系数,其值应是有限的,且有

$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (3.1.3)$$

它代表了 $x(t)$ 中第 k 次谐波的幅度。需要说明的是, $X(k\Omega_0)$ 是离散的,即 $k = -\infty \sim \infty$, 两点之间的间隔是 Ω_0 。(3.1.1)式称为指数形式的傅里叶级数,此外还有三角形式的傅里叶级数,见文献[2]和[13],此处不再讨论。

应该指出,并非任一周期信号都可展成傅里叶级数。将周期信号 $x(t)$ 展成傅里叶级数,除了(3.1.2)式所示的条件外, $x(t)$ 还需满足如下 Dirichlet 条件:

- (1) 在任一周期内有间断点存在,则间断点的数目应是有限的;
- (2) 在任一周期内极大值和极小值的数目应是有限的;
- (3) 在一个周期内应是绝对可积的,即

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty \quad (3.1.4)$$

文献[2]给出了一些不满足 Dirichlet 条件的“病态”信号的例子。我们在实际工作中所遇到的信号一般都能满足 Dirichlet 条件,在展成傅里叶级数时一般不会遇到问题。

例 3.1.1 图 3.1.1(a) 是一个周期矩形信号, 显然, 它满足 (3.1.2) 式及 Dirichlet 条件。由 (3.1.3) 式可知, 其傅里叶系数

$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jk\Omega_0 t} dt = \frac{A\tau}{T} \frac{\sin(k\Omega_0 \tau/2)}{k\Omega_0 \tau/2} = \frac{A\tau}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \tau)}{k\pi f_0 \tau} \quad (3.1.5)$$

$X(k\Omega_0)$ 是一个离散的 sinc 函数, 如图 3.1.1(b) 所示, 图中 $\tau=0.2T, T=1, A=5$ 。

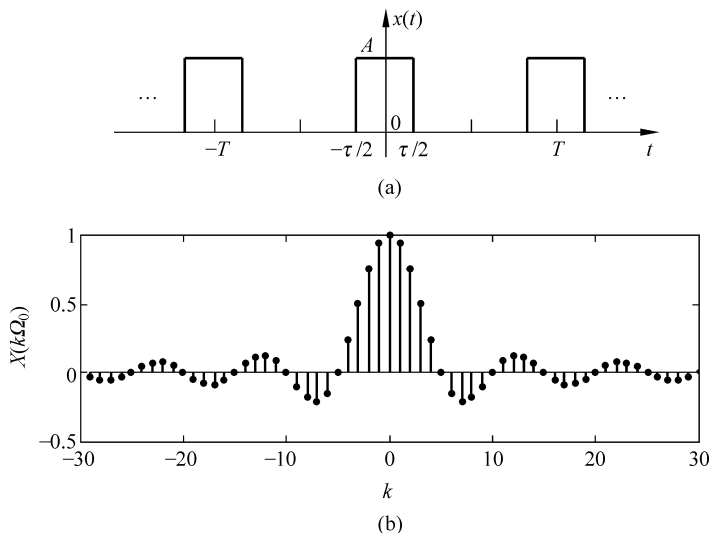


图 3.1.1 周期矩形信号及其傅里叶系数

3.1.2 连续非周期信号的傅里叶变换

设 $x(t)$ 是一个连续时间信号, 若 $x(t)$ 属于 L_2 空间, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (3.1.6)$$

那么, $x(t)$ 的傅里叶变换存在, 并定义为

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (3.1.7)$$

其反变换是

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (3.1.8)$$

式中 $\Omega=2\pi f$ 为角频率, 单位是 rad/s。 $X(j\Omega)$ 是 Ω 的连续函数, 称为信号 $x(t)$ 的频谱密度函数, 或简称为频谱。

实现傅里叶变换, 除了要满足 (3.1.6) 式所给出的条件外, 与 $x(t)$ 展成傅里叶级数一

样也需要满足 Dirichlet 条件。除了将考虑的区间由一个周期扩展到 $-\infty \sim +\infty$ 外,傅里叶变换时的 Dirichlet 条件的表述方法和傅里叶级数的是一样的,此处不再重复。其中第(3)条的要求来自于傅里叶变换的定义,即

$$|X(j\Omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (3.1.9)$$

因此,只要 $x(t)$ 满足绝对可积的条件, $X(j\Omega)$ 便是有界的,即傅里叶变换存在。由于

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \right]^2 \quad (3.1.10)$$

因此,只要 $x(t)$ 是绝对可积的,那么,它就一定是平方可积的。但是反过来并不一定成立。例如,信号

$$x(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \quad (3.1.11)$$

是平方可积的,但不是绝对可积的^[3,4,12]。这一结果说明,Dirichlet 条件是傅里叶变换存在的充分条件,但并不是必要条件。几乎所有的能量信号都可以作傅里叶变换,因此,在实际工作中一般没有必要逐条地考虑 Dirichlet 条件。

例 3.1.2 令 $x(t)$ 是例 3.1.1 中周期矩形信号的一个周期,其傅里叶变换

$$X(j\Omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\Omega t} dt = A\tau \frac{\sin(\Omega\tau/2)}{\Omega\tau/2} \quad (3.1.12)$$

由于 $x(t)$ 是实的偶信号,所以 $X(j\Omega)$ 也是实的,它是频域的 sinc 函数,如图 3.1.2 所示。

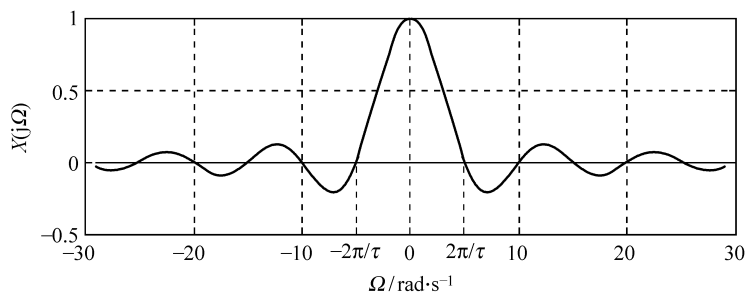


图 3.1.2 矩形信号的频谱

3.1.3 傅里叶级数和傅里叶变换的区别与联系

以上分别讨论了傅里叶级数和傅里叶变换的定义及其存在条件,现简要讨论二者的区别。

前已述及,傅里叶级数对应的是周期信号,而傅里叶变换对应的是非周期信号;前者要求信号在一个周期内的能量是有限的,而后者要求信号在整个时间区间内的能量是有

限的。

此外,傅里叶级数的系数 $X(k\Omega_0)$ 是离散的,而傅里叶变换 $X(j\Omega)$ 是 Ω 的连续函数。

由此可见,傅里叶级数与傅里叶变换二者的物理含义不同,因而量纲也不同。 $X(k\Omega_0)$ 代表了周期信号 $x(t)$ 的第 k 次谐波幅度的大小,而 $X(j\Omega)$ 是频谱密度的概念。为说明这一点,我们可将一个非周期信号视为周期 T 趋于无穷大的周期信号。由 $\Omega_0 = 2\pi/T$ 可知,若 $T \rightarrow \infty$,则必有 $\Omega_0 \rightarrow 0, k\Omega_0 \rightarrow \Omega$,将(3.1.3)式两边同乘以 T ,并取 $T \rightarrow \infty$ 时的极限,可得

$$\lim_{T \rightarrow \infty} TX(k\Omega_0) = \lim_{\Omega_0 \rightarrow 0} \frac{2\pi X(k\Omega_0)}{\Omega_0} = X(j\Omega) \quad (3.1.13)$$

所以,从量纲上看, $X(j\Omega)$ 等于谐波幅度 $X(k\Omega_0)$ 除以频率 Ω_0 ,显然,它是频谱密度的概念。

比较例 3.1.1、例 3.1.2 及(3.1.5)式和(3.1.12)式,我们看到,周期信号的傅里叶系数和用该信号的一个周期所求出的傅里叶变换的关系为

$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{T} X(j\Omega) \big|_{\Omega=k\Omega_0} \quad (3.1.14)$$

这一关系也可由图 3.1.1 和图 3.1.2 看出。

由(1.2.3a)式可得周期信号 $x(t)$ 的功率

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X^*(k\Omega_0) e^{-jk\Omega_0 t} \right] dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^*(k\Omega_0) \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^*(k\Omega_0) X(k\Omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X(k\Omega_0)|^2 \end{aligned}$$

于是有

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X(k\Omega_0)|^2 \quad (3.1.15)$$

对能量信号 $x(t)$,我们采用同样的方法可以导出

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega \quad (3.1.16)$$

(3.1.15)式和(3.1.16)式给出的两个关系称为 Parseval 关系或 Parseval 定理。前者反映的是功率关系,后者反映的是能量关系。

现在,我们不考虑(3.1.2)式的约束及 Dirichlet 条件,直接求解周期信号的傅里叶变

换。将(3.1.1)式代入(3.1.7)式,有

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \right] e^{-j\Omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\Omega - k\Omega_0)t} dt$$

由积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm jxy} dx = 2\pi\delta(y) \quad (3.1.17)$$

可以得到周期信号傅里叶变换的表达式

$$X(j\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) \delta(\Omega - k\Omega_0) \quad (3.1.18)$$

该式表明,一个周期信号的傅里叶变换是由频率轴上间距为 Ω_0 的冲激序列(Drac 函数)所组成,这些冲激序列的强度等于相应的傅里叶系数乘以 2π 。这样的离散频谱又称为“线谱”。由冲激函数的定义和频谱密度的物理概念可知,周期信号的频谱应理解为在无穷小的频率范围内取得了一个“无限大”的频谱密度。无限大是从冲激函数的角度来理解的。冲激函数的强度为 $2\pi X(k\Omega_0)$,单纯地从 $X(k\Omega_0)$ 来理解,它无密度的概念,它代表了在 $k\Omega_0$ 处的谐波的大小。

由此可以看出,本不具备傅里叶变换条件的周期信号,在引入了冲激信号后也可以做傅里叶变换。当然,变换的结果也应从冲激信号的角度来理解。这样,由(3.1.18)式,我们可以把傅里叶级数和傅里叶变换统一在一个理论框架下来进行讨论,并建立起二者的联系。

由上述讨论,我们不难得出如下结论:时域连续的周期信号的傅里叶变换在频域是离散的、非周期的。

当周期信号的周期 T 趋于无穷大时,由(3.1.18)式给出的离散频谱将变成连续谱,它对应的是周期信号的一个周期的傅里叶变换,但由于周期为无穷大,因此,它对应的实际上是(3.1.7)式的非周期信号的傅里叶变换。由此我们可得出另一个结论:时域连续的非周期信号的傅里叶变换在频域上是连续的、非周期的。

读者在有关“信号与系统”的教科书(例如,参考文献[2,8,13])中都可看到有关连续时间信号傅里叶变换与傅里叶级数的详述,本书不再对此做进一步的讨论。下面仅给出几个常用周期信号傅里叶变换的例子。

(1) 单个复正弦

$$x(t) = e^{j\Omega_0 t} \Leftrightarrow X(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \quad (3.1.19)$$

(2) 实正弦

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin\Omega_0 t = [e^{j\Omega_0 t} - e^{-j\Omega_0 t}]/j2 \Leftrightarrow \\ X(j\Omega) &= j\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)] \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

(3) 实余弦

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos \Omega_0 t = [e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}]/2 \Leftrightarrow \\ X(j\Omega) &= \pi[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)] \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

(4) 复正弦集合

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_0 t} \Leftrightarrow X(j\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0) \quad (3.1.22)$$

式中 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0)$ 是频域的冲激串序列。

(5) 时域冲激串序列

重写(1.1.5)式,并令周期为 T ,有

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (3.1.23)$$

$p(t)$ 称为冲激串序列。显然,它是周期的,周期为 T ,将其展成傅里叶级数,有

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$$

其中傅里叶系数

$$P(k\Omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \quad (3.1.24)$$

于是有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_0 t}, \quad \Omega_0 = 2\pi/T \quad (3.1.25)$$

将(3.1.25)式代入(3.1.7)式,有

$$P(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t} e^{jk\Omega_0 t} dt = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0) \quad (3.1.26)$$

此式为时域冲激串的傅里叶变换,变换的结果是频域的冲激串,即有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0) \quad (3.1.27)$$

请注意这两个冲激串的间距 T 和 Ω_0 互为倒数。这一对变换关系在信号处理中有着重要的作用,我们在 3.3 节将会用到它。

时域的冲激串可以展开成(3.1.25)式的傅里叶级数,同理,频域的冲激串也可展开成傅里叶级数。请读者自己推导,对应(3.1.25)式的关系是

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0) = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnT\Omega}, \quad T = 2\pi/\Omega_0 \quad (3.1.28)$$

(3.1.25)式与(3.1.28)式给出的这一对关系称为 Poisson 和公式,在信号处理中同样有着重要的应用。

3.1.4 关于傅里叶变换的进一步解释

我们在本节开头时已指出,傅里叶变换实际上是将信号 $x(t)$ 和一组不同频率的复正弦作内积,即

$$X(k\Omega_0) = \langle x(t), e^{jk\Omega_0 t} \rangle, \quad X(j\Omega) = \langle x(t), e^{j\Omega t} \rangle$$

前者对应傅里叶级数,后者对应傅里叶变换。式中的复正弦即变换的基向量,而傅里叶系数或傅里叶变换是 $x(t)$ 在这一组基向量上的投影。由于不同频率的正弦信号两两之间是正交的,因此傅里叶变换是正交变换。

傅里叶变换可以更直观地解释为是将信号展开成无穷多正弦信号的组合。对傅里叶级数,“无穷多”正弦指的是取基波频率 Ω_0 整数倍的那些正弦,对傅里叶变换,则是在 Ω 轴上连续取值的那些正弦。

将一个复杂的信号分解为一系列简单信号的组合是信号处理中最基本的方法。这样做的目的,一方面是便于了解所要处理的信号的内涵,另一方面是便于提取信号的特征。那么,傅里叶变换为什么选择正弦信号作为分解的基向量呢?这是因为:

(1) 前已述及,正弦信号是最规则的信号,由幅度、相位及频率这三个参数即可完全确定其时域波形。其频域也最简单,即只有一根谱线(复正弦)。将信号展开为正弦的组合,即可得到所有的谱线,从而得到信号的频谱分布。另外,正弦信号处处可导,且有着无穷阶的导数,在信号处理的理论推导方面特别有用。

也许有人会问,为什么不选择时域只取 0 和 1 的更简单的方波作为分解的基函数?确实,方波在时域非常简单,通过时间轴的伸缩也能构成正交基(早期的 Walsh 变换),但其频谱是 sinc 函数(如图 3.1.2 所示),包含了从 $-\infty \sim +\infty$ 的所有频率成分,因此不利于频谱分析。实际上,凡是信号在时域中有阶跃(或冲激)的成分,则都需要无穷多的频率成分才能合成这样的阶跃(或冲激)。另外,方波的不可导是限制其应用的又一个重要原因。

(2) 时间和频率是现实世界中两个最重要也是最基本的物理量,它们与我们的日常生活密切相关,我们时时可以感受到它们的存在。时间自不必说,对频率,如声音的粗细、图像色彩的单调与绚丽、物体运动的快慢等,都包含了丰富的频率内容。而傅里叶变换正好把时间和频率联系了起来,使得我们对一个给定的信号,可以由时域转换到频域,反之亦然。

基于此,傅里叶变换是信号分析和处理领域中最重要工具。

3.2 离散时间信号的傅里叶变换(DTFT)

3.2.1 DTFT 的定义

设 $h(n)$ 为一个 LSI 系统的单位抽样响应, 由 1.7 节, 我们可求出该系统的频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (3.2.1)$$

此式为离散时间序列的傅里叶变换, 即 DTFT。由第 1 章、第 2 章的讨论可知, $H(e^{j\omega})$ 是 ω 的连续函数, 且是周期的, 周期为 2π 。比较 (3.2.1) 式和 (3.1.1) 式可以看出, (3.2.1) 式的 DTFT 也可看作是周期信号 $H(e^{j\omega})$ 在频域内展成的傅里叶级数, 其傅里叶系数是时域信号 $h(n)$ 。

由序列 Z 变换的定义, 很容易得到

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \big|_{z=e^{j\omega}} \quad (3.2.2)$$

即 DTFT 是 z 仅在单位圆上取值的 Z 变换。若希望 $H(e^{j\omega})$ 存在, 那么 $H(z)$ 的收敛域应包含单位圆, 即

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)e^{-j\omega n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (3.2.3)$$

我们再一次看到, 若 $h(n)$ 的 $H(e^{j\omega})$ 存在, 那么 $h(n)$ 一定要属于 l_1 空间。由此, 对任一序列 $x(n)$, 只要它属于 l_1 空间, 我们都可按 (3.2.1) 式来定义它的 DTFT, 即

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (3.2.4)$$

属于 l_1 空间的 $x(n)$ 将是非周期的时间序列。进一步, 我们认为 (3.2.4) 式是能量有限序列的傅里叶变换。显然 $X(e^{j\omega})$ 也是 ω 的连续函数, 同样, 由于

$$X(e^{j\omega+2\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j2\pi n} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

因而 $X(e^{j\omega})$ 也是 ω 的周期函数, 周期为 2π 。

至此, 我们已讨论了三种形式的傅里叶变换, 连同 3.5 节要讨论的时域为离散的周期序列的傅里叶变换, 即离散傅里叶级数 (DFS), 共有四种形式的傅里叶变换, 如图 3.2.1 所示。

由此图可以看出, 若 x 在时域是周期的, 那么在频域 X 一定是离散的, 反之亦然。同样, 若 x 是非周期的, X 一定是连续的, 反之也成立。这四种傅里叶变换针对四种不同类

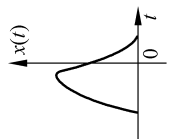
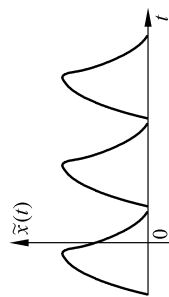
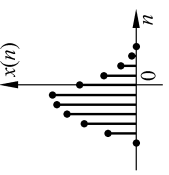
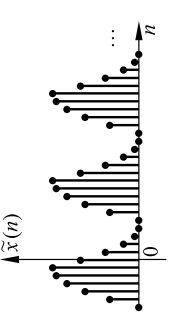
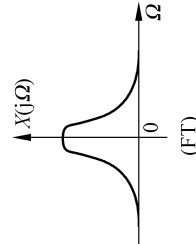
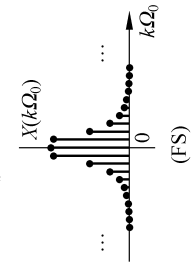
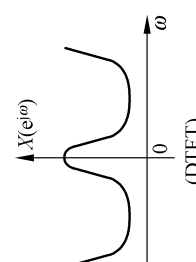
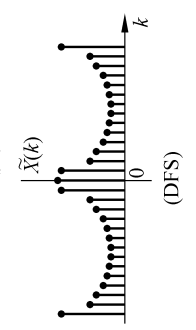
域	时域		频域	
	连续 非周期	连续 周期	离散 非周期	离散 周期
时域	 $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$	 $X(k\Omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$	 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$	 $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$
频域	 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$	 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$	 $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	 $\tilde{x}(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$
	连续 非周期	离散 非周期	连续 周期	离散 周期

图 3.2.1 四种形式的傅里叶变换