

第 1 章

流体的力学性质与流体运动的基本概念

流体力学和固体力学同为力学的两大分支,二者研究的运动形式相同,但研究的物质对象不同。它们采用相同的连续介质模型并遵从相同的牛顿力学定律。然而,流体有着不同于固体的力学性质,并且流体运动的描述方法、流体运动的基本形式和流体运动的具体分类都与固体运动有所不同。本章将阐释这些内容,作为全书的基础。

1.1 流体力学的研究对象与流体的连续介质模型

自然界存在着各种各样的运动形式,不同的运动形式构成不同学科的研究对象。机械运动是一种以物体位置随时间变动为特征的运动形式,是力学的研究对象。流体力学是力学的一个分支,它研究流体(液体、气体)机械运动的规律。流体力学所研究的机械运动乃是物质的宏观运动,亦即大量分子所组成的质点系统的运动,不涉及物质的微观结构与微观运动。

流体和固体一样,是由分子组成的。分子之间存在空隙。分子本身作永不停息的、不规则的运动,分子与分子之间还存在相互作用力。这些统属于微观范畴,原非本课程的研究对象。然而,流体的宏观运动是和流体的微观结构及微观运动有密切联系的。流体宏观运动的物理量,往往是大量分子微观运动的物理量统计平均的结果。稍许涉及流体的微观结构与微观运动,有助于理解流体运动的物理本质。标准状态下, 1cm^3 的气体中含有 2.7×10^{19} 个分子,相邻分子间距约为 $3.2 \times 10^{-7}\text{cm}$ 。而 1cm^3 的水约含 3.3×10^{22} 个分子,相邻分子间距约为 $3.1 \times 10^{-8}\text{cm}$ 。一般而言,两个中性分子间距 d 接近 10^{-7}cm 时,分子间仅有互吸力,其大小与 d^7 成反比。当两分子靠近到电子云开始重叠时,就出现互斥力,其大小与 d^n ($n > 7$, 可高达 $n = 13$) 成反比。当两分子间距 $d = d_0 \approx (3 \sim 4) \times 10^{-8}\text{cm}$ 时,互吸力与互斥力平衡,总效应为零。气体分子间距约为液体分子间距的 10 倍,因而液体分子互吸力是气体分子互吸力的 10^7 倍。气体分子间的相互作用弱,分子热运动的动能足以克服分子间的相

互吸引,因而气体分子可以自由运动,分子排列是完全无序的。气体分子热运动速度大,平均自由程比分子直径大千倍。这些就是气体的体积和形状都很容易改变的根本原因。在固体中,一般而言,分子排列是有序的,固定的,每个分子只在其平衡位置附近振动,因而固体的体积和形状都不容易改变。液体体积不易改变,形状却容易改变,介乎固体与气体之间。有人据此推断液体分子间距也介乎固体与气体之间,这是一种误解。实际上,液体分子间距与固体分子间距是同一数量级的,为 $(3\sim 4)\times 10^{-8}\text{ cm}$,液体也和固体一样,其体积不易改变。液体的形状容易改变的根本原因在于其分子排列是部分有序的,分子群具有很大的活动性,在一定条件下,分子群可以相对地自由移动。液体内部还存在空穴,其分子可以向空穴移动。以上我们简略地、极不完全地描绘了气体与液体的分子图像,一则借以认识一下我们的研究对象——流体的本来面目;二则在介绍流体的物理力学性质时,可以此作为解释其微观根源的基础。

尽管流体本身存在分子结构、分子运动和分子作用力,在流体力学中还是把流体看作连续介质。首先,我们把流体物质看作是连续分布的,亦即连续地占满它所占有的全部空间,不留任何空隙。其次,表征流体性质、描述流体运动的各个物理量如速度、压强、密度等在流动空间的每一点都具有确定的、有限的数值,而且在一般情况下也是连续分布、连续变化的。这就是说,它们都可以表示为空间点坐标与时间的连续函数。以后可以看到,这一点也是由流体的微观特性予以保证的。最后,连续介质是从宏观运动的观点出发而提出的理论模型,在此基础上建立起来的流体力学是一种宏观科学。一方面,在流体力学中不考虑流体内部的微观结构和微观运动;另一方面,对于流体的微观运动,有关连续介质的概念和定律都不适用。然而,微观和宏观这两种运动是相互关联的。大量微观粒子的随机运动会显示为具有一定规律的宏观效应,而宏观运动的各种性质又可以认为是大量微观粒子运动性质的统计平均的结果。比如,在边长为 0.001 cm 的小立方体内,就含有 2.7×10^{10} 个气体分子,这些分子在 10^{-6} s 内相互碰撞 10^{14} 次。大量气体分子的频繁撞击,宏观上就形成气体各部分之间以及气体与器壁之间的压力。由于大量气体分子频繁撞击器壁,单位时间内器壁的单位面积上所受到的平均冲量(即分子动量变化的统计平均值)就表现为气体对器壁的压强。在流体力学中,对气体分子碰撞过程本身并不追究,而只考虑它们的宏观效应——气体压强。把连续介质作为研究流体的模型,是欧拉(L. Euler)于1753年确立的,因而一般称为欧拉连续介质模型。当然这只是一种理论的抽象。然而按照流体力学研究流体的宏观机械运动的要求,这种理论抽象既是必然的又是合理的。一则通常所考虑的空间范围或空间尺度比流体分子间距大很多;二则研究流体机械运动的目的就在于确定宏观的大量分子的平均力学特性。在前述实例中,对流体机械运动而言,气体压强是必不可少的研究课题,而形成气体压强的微观根源——气体分子的相互碰撞则无直接的意义。

在流体力学中,引进这种连续介质模型不仅可使研究工作大为简化,而且以连续函数为基础的数学分析这一强有力的工具得以应用。两个世纪以来,在连续介质模型的基础上所建立起来的流体力学理论已为大量的实验结果所证实,这就更加有力地说明了这种模型的合理性。任何理论模型都不是完美无缺的,都不能绝对化。连续介质模型也是这样。当流动的特征长度小到可以和分子尺度相比拟(如微粒在液体中的布朗(Brown)运动)时或当流体分子运动的平均自由程大到可以和运动物体的尺度相比拟(如极稀薄气体中一般物体的运动)时,对于这些情况下的流体运动,连续介质模型都不适用。

由连续介质模型出发,还可引进流体质点作为流体力学研究的基本单元。所谓流体质点乃是组成流体的微小物质单元。宏观地看,流体质点是很小的,其大小完全可以忽略不计,其空间范围可看作一个没有大小的几何点,物理量在其上的变化也觉察不到;微观地看,流体质点又是很大很大的,它包含大量分子,使得统计平均方法和连续介质模型可以使用。简而言之,流体质点就是一个“宏观小、微观大”的流体单元。

前面说过,按照连续介质模型,表征流体性质、描述流体运动的各个物理量在流动空间的每一点处具有确定的值。现在以流体密度为例,来研究这个“一点处的值”的明确含义。在流动空间内围绕一点 P 取流体团,其体积为 ΔV ,质量为 Δm ,则 P 点处流体密度 ρ 的理论定义式应为

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1-1)$$

实际上,流体质量是集中分布在各个分子,且主要是集中于各个原子核上,分子间的空隙处则无质量可言,况且分子本身又在永不停息地、不规则地运动。当 ΔV 向零无限逼近直到其尺度接近于微观尺度(10^{-8}cm)时, ΔV 内分子数非常有限; ΔV 的进一步缩小将引起其中的分子数起伏不定,比值 $\Delta m/\Delta V$ 也就随之起伏而得不出确定值。因而,按照连续介质的要求,必须重新考虑上述极限过程。设想围绕 P 点取一尺度为 10^{-3}cm 的流体微元,其体积 δV^* 约为 10^{-9}cm^3 ,这样的微元体积内仍含有大量的流体分子(如为常温常压下的气体,则有 2.7×10^{10} 个分子,如为液体,则分子数更多),当 ΔV 以 δV^* 为极限朝着它无限逼近时,微观结构中质量分布极不均匀的情形将不显现,就大多数分子平均而得出的比值 $\Delta m/\Delta V$ 则不受分子数涨落的影响,而趋近于一个确定的局部值。对于宏观运动而言,体积为 10^{-9}cm^3 的流体微元实际上可以看成是一个无所谓大小的几何点。由此极限过程所得出的比值 $\Delta m/\Delta V$,应能准确地反映出宏观质量在空间各点处的不同分布状况。由此可见,空间一点处流体密度的实际定义式应为

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \delta V^*} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1-2)$$

换言之,在式(1-1)取极限的过程中, ΔV 无限减小,并不是真正地趋向于数学上的零。而是如式(1-2)所示趋向于 δV^* ,也可以说,趋向于物理上的零,后面推导中,将采用物理上的“零”值。而 δV^* 实际上可视作流体质点的体积,如前所述,它应是“宏观小,微观大”的。

按照上述取体积极限的过程,得出各空间点处流体密度的局部值,就可以把流体密度表示为空间点坐标的连续函数,即

$$\rho = \rho(x, y, z) \quad (1-3)$$

类似地考虑连续介质中流体质点的其他物理量,也可以得到空间点坐标的相应的连续函数。后面的章节,我们不仅要考虑物理量在各空间点处的局部值,而且要涉及它们的瞬时值。这里所说的瞬时,也就是进行统计平均所需要的时间,必须是宏观充分短、微观充分长的。

1.2 作用于流体的力

流体的力学性质实际上也就是流体在力的作用下有什么样的性态或响应。故在讨论力学性质之前,先对作用于流体的力进行一般分析。流体作用力按其来源及表现形式的不同,

可分为质量力和表面力。

质量力起源于外力场对流体的作用,例如最常见的重力就是地球引力场引起的。场源不必与流体直接接触,质量力就能显现其作用,并且是作用于每个流体质点上。因此,质量力又称为远程力或超距力。电磁场对于带电流体所作用的电磁力也是一种质量力,它在电磁流体力学中起重要作用,但本课程不涉及这种力。

一般来说,质量力可以与空间点坐标建立起一一对应的关系,或者说,质量力也可以表示为空间点坐标与时间的函数。定义 $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, z, t)$ 为 t 时刻作用在空间某点 $P(x, y, z)$ 处单位质量流体的质量力,即

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\rho \Delta V} \quad (1-4)$$

式中, ρ 为流体密度; ΔV 为 P 点处流体微团的体积; $\Delta \mathbf{F}$ 为作用于该微团的质量力。

一般情况下,本课程所涉及的质量力并不随时间而变化。且因质量力的大小随场源与作用对象之间距离的增加而缓慢地减小(与距离的平方成反比),对于小范围的流体,作用于流体团的总质量力可以近似地认为正比于流体团的质量,其作用点就是流体团的质心。

按达朗贝尔(d'Alembert)原理处理动力学问题时,或在非惯性(加速或旋转)参照系中观察、描述运动时,都会出现惯性力。例如在作加速运动的水车内,在质量为 m 、加速度为 $\mathbf{a}$ 的流体元上,加一反向的惯性力 $-\mathbf{ma}$,则可将动力学问题化为平衡问题来处理。又如由于地球自转,在刚连于地球的旋转坐标系中观察、描述运动,不仅会出现离心惯性力而且会出现科里奥利力。惯性力也作用于每一个流体质点上,且其大小也与质量成正比,因而也是一种质量力。

表面力(或界面力)起源于流体分子运动与分子相互作用(互吸或互斥)。分子作用力的大小随着分子间距离的增加而急剧地减小(与距离的 7 次方到 13 次方成反比),仅当相互作用的两部分流体分子间的距离与分子间距(10^{-7}cm 或 10^{-8}cm)同数量级时,才显现其作用。换句话说,表面力的作用范围只限于靠近作用面的薄层之内,因此,又称其为近程力或接触力。宏观上认为表面力作用于两部分流体的接触面上,而且,只要所考虑的作用面比分子作用力的影响范围大得多时,其上的总表面力的大小就取决于作用面积的大小,在此意义上,表面力又可称为面积力。

在运动着的流体内部,我们想像用一个方位任意的平面 BAC 把流体切断。先考虑 BAC 面左侧流体 I 对右侧流体 II 的作用力,一般而言,这些力是连续地而且不均匀地分布于面上(图 1-1)。围绕 A 点取微分面积 ΔS ,其方位用外法线方向单位矢 $\mathbf{n}$ 表示, ΔS 上作用有表面力 $\Delta \mathbf{\Sigma}$,一般情况下, $\Delta \mathbf{\Sigma}$ 与 ΔS 斜交,则用以描述该处表面力强度的应力矢量 $\boldsymbol{\sigma}$ 应定义为

$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{\Sigma}}{\Delta S} \quad (1-5)$$

一般情况下,应力矢量 $\boldsymbol{\sigma}$ 应为所在点坐标 (x, y, z) (或矢径 $\mathbf{r}$)与时间 t 的函数,而且与作用面的方位($\mathbf{n}$)有关,即

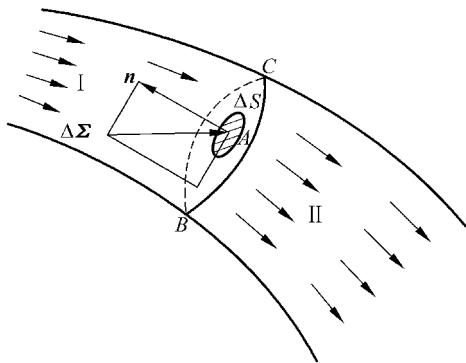


图 1-1 作用于流体的表面力

$$\sigma = \sigma(r, n, t) \quad (1-6)$$

转而考虑同一点A处BAC面右侧流体Ⅱ对左侧流体Ⅰ的反作用力,则其作用面的方位和作用力的方向均与上述相反,为 $-n$ 和 $-\Delta\Sigma$,因此可得

$$\sigma(-n) = -\sigma(n) \quad (1-7)$$

亦即应力矢量 σ 是作用面方位矢 n 的奇函数。

表面力一般可分解为垂直于作用面的正向力或称法向力(如拉力或压力)与平行于作用面的切向力。实际上气体根本不能承受拉力,液体在很特殊的情况下可承受微弱的拉力,一般地认为液体也只能承受压力。流体力学课程中,沿袭材料力学的符号规定:拉力为正,压力为负。

1.3 流体的流动性与黏性

液体和气体具有一个共同的最基本的特性就是流动性。正是由于这一特性,才能将二者统一于流体这一概念之内而与固体区别开来。从力学的角度来看,流动性是指:流体受到不管多么小的切应力作用都会发生连续变形的特性。图1-2中,左侧为一固体块,受到一切应力作用后,发生一定大小的剪切变形后即趋于平衡(静止)。右侧为流体,处于相距很近、很大的两平行板之间,固定下板,拖曳上板,使之匀速平移,即有切应力作用于流体面上,而后流体发生连续变形(流动),切应力不去,变形不止。俗话说:“水向低处流”,实际上也就是与倾斜水面相切的重力分力作用的结果。液体和气体在切应力作用下不能保持平衡,这是它们与固体根本不同之处。

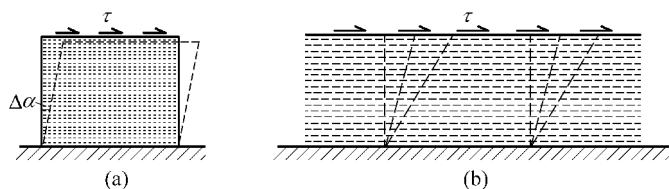


图 1-2 作用于固体与流体的切应力 τ

(a) 固体; (b) 流体

流体变形一经发生,其内部就会出现抵抗。抵抗力的大小,不仅与变形大小,而且与变形的快慢有关。流体对于外加切力或剪切变形表现出抵抗的性质,就是黏性。这种抵抗与变形之间的关系可通过最简单的二维剪切流动进行分析。设有水平设置的两块平行平板,其间充满某种流体。上板由于外力拖曳而在其自身平面内作等速运动,速度为 U ,下板保持静止。实验表明,两板间的流体将被带动作水平运动。当流体黏性很强、两板相距很近、上板速度不大且板间流体作层状运动时,流体中的速度分布如图1-3所示。在本书第4章将会看到,图1-3(a)的直线分布和图1-3(b)的曲线分布分别相应于沿流向无压强降落和有压强降落这两种不同情况。

下面对上述流速分布的形成作进一步分析。由于流体和与之接触的固体之间存在分子相互作用,流体就附着在固体表面上,紧贴平板的流体质点因而与平板取同一速度,即上板

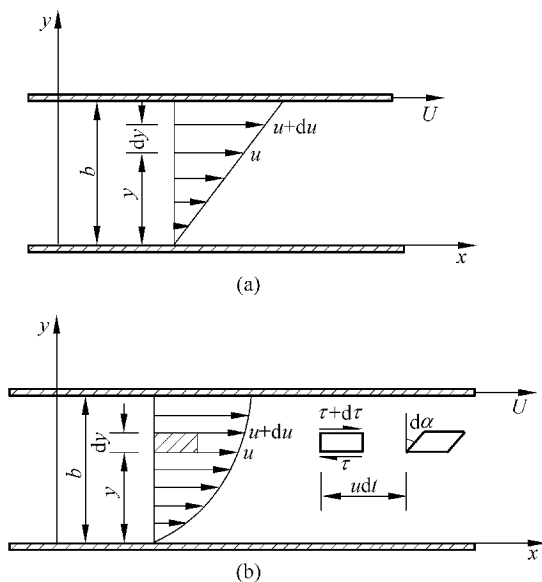


图 1-3 平行平板间的黏性流动

面流体质点的速度为 U 而下板面流体质点的速度则为零,这就是所谓固体壁面上流体的无滑动条件或黏附条件。关于流体和与之接触的固体壁之间究竟有无相对滑动,是长时间存在争议的问题,直到 19 世纪与 20 世纪之交才有定论。对于液体,通过近代观察分析,无滑动条件完全符合实际。对于气体,只有在气体分子平均自由程很大,雷诺数(Reynolds number)很低而马赫数(Mach number)(当地流速与声速之比)很高的情况下,紧贴固体壁面的气体质点才有显著的相对滑移。本课程在处理实际流体的流动时,一律采用无滑动条件。

由流速分布图(图 1-3)可以看出相邻两层流体之间存在相互作用。一方面,运动快的上层流体对下层流体作用着顺流向的切力(拖曳力),从而带动下层流体,传递切向运动,保证运动的连续性。另一方面,运动慢的下层流体对上层流体作用着反流向的切力,从而阻滞上层流体,传递阻力,减缓流动,也保证运动的连续性。黏性的这种传递运动与阻滞运动的双重作用,正是通过相邻两流体层在分界面上彼此作用着大小相等、方向相反而作用对象不同的一对切力即内摩擦力实现的。

可以定量地表示切力与变形或流动之间的关系,比较简单的就是牛顿(I. Newton)提出的,通常称之为牛顿内摩擦定律:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \rho \nu \frac{du}{dy} \quad (1-8)$$

式中, u 表示坐标为 y 处的流体质点的速度,其方向平行于 x 轴; du/dy 则为速度的横向变化率,长度单位为 m ,速度单位为 m/s ; τ 为切应力,即单位面积上的切力,其方向与作用面相切,单位为 N/m^2 。正由于流体速度沿横向有变化,原来为矩形的流体团,经时间 dt 后,变为平行四边形,其铅直边转角为 $d\alpha$ 。从几何关系可以方便地证明 $\frac{du}{dy} = \frac{d\alpha}{dt}$,前者为单位时间的切应变即切应变率,后者为单位时间的角变形即角变形率。式(1-8)表明,切应力与切应变率成正比,比例系数 μ 为与流体变形无关的常数,称为动力黏度,或称动力黏性系数,其量

纲为 $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$ 。 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, 称为运动黏度, 或称运动黏性系数, 其量纲为 L^2T^{-1} , 单位为 m^2/s 。

流体动力黏度 μ 的数值, 随流体的种类及温度而异。对于气体, μ 随温度上升而增大; 对于液体, μ 随温度上升而减小。产生这种差别的原因在于气体黏性主要源于气体的分子运动、相互碰撞而引起的动量交换。温度越高, 分子热运动越剧烈, 动量交换越厉害, 黏性就越强。而液体黏性主要由于液体分子的相互吸引, 温度越高, 分子热运动的平均动能越大, 分子摆脱互相吸引的能力越强, 从而“流动性”增强, 黏性减弱。

凡切应力与切应变率之间的关系满足牛顿内摩擦定律的流体称为牛顿流体。切应力与切应变率不成正比或者说在二者之间具有变比例系数的流体称为非牛顿流体(图 1-4)。在此情况下, 比例系数可能与承受切力的时间长短及切力的大小有关。还有一些物体, 突出的如一些塑性体, 存在某一屈服应力, 当实际产生的切应力低于屈服应力时, 该物体将不会发生连续变形, 其性态类似于固体。当实际产生的切应力高于屈服应力时, 则在切应力作用下发生连续变形, 如果切应力和切应变率成正比地同时增长, 则为理想的宾厄姆(Bingham)塑性体。可见, 塑性体既不是固体, 也不是流体, 而是处于二者之间

的一种过渡状态。在水利工程中, 含沙量极高的挟沙水流、河口浮泥、管道排泥、泥石流等都不是牛顿流体。一般的胶体、润滑剂、聚合物溶液以及各种膏类也不是牛顿流体, 它们或为非牛顿流体或为塑性体。高浓度的泥石流近似于宾厄姆塑性体。本书仅限于研究牛顿流体, 非牛顿流体和塑性体则在非牛顿流体力学及流变学中研究。

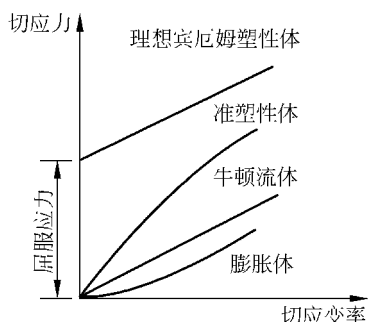


图 1-4 牛顿流体与非牛顿流体

1.4 流体压缩性

流动性与黏性是流体承受切应力作用时所表现的特性。当流体承受压力作用时, 便产生体积压缩变形, 其内部出现压应力, 以抵抗压缩变形。流体的这种特性称为压缩性。除去压力后, 流体体积会恢复原状, 这就是流体的弹性。流体的压缩性及弹性的大小可分别用体积压缩率 β 及体积模量 E_v 表示。它们由下式定义:

$$\beta = -\frac{\frac{\delta V}{V}}{\frac{\delta p}{\rho}} = \frac{\frac{\delta \rho}{\rho}}{\frac{\delta p}{\rho}} = \frac{1}{E_v} \quad (1-9)$$

式中, δp 为作用于流体的压强(压应力的大小)增加量; V 及 ρ 分别为增压前流体的体积和密度; δV 及 $\delta \rho$ 分别为增压后流体的体积改变与密度改变。负号表示体积 V 随压强 p 的增加而减小。液体的 β 值很小, E_v 很大, 表示其压缩性小, 而对压缩变形的抵抗很强; 气体的 β 很大, E_v 很小, 表明其压缩性很大, 而对压缩变形的抵抗很弱。

正常气压和温度下水的 $E_v = 2.10 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 而等温过程中大气的 $E_v = 1.05 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, 两相比较, 大气压缩性约为水的两万倍。液体在一般情况下, 可忽略其压缩性而视为不可压缩流体。但在特殊情况如水击问题中, 在极短促的时间内, 压力变化非常剧烈, 则需考虑其

压缩性。气体一般应视为可压缩的,但在低速运动时,其压力变化小而慢,因而所引起的密度变化很小,也可忽略其压缩性。例如常温下的空气,当流速大约不超过 50m/s 时,如果 1% 的体积变化认为可以忽略的话,就可以看作是**不可压缩的。今后为了研究方便,按照考虑还是略去压缩性,而将流体划分为可压缩流体与不可压缩流体。显然,不可压缩流体也是一种理论模型,它的体积压缩系数 $\beta \rightarrow 0$,而体积弹性模量 $E_v \rightarrow \infty$ 。如果流体物质的质量分布均匀,则为均质流体,否则就是非均质流体。均质不可压缩流体的密度 ρ 为常量,而非均质不可压缩流体(如含沙量不均匀的挟沙水流,含盐量不均匀的海水)的密度 ρ 则有一定的空间分布。

本书以不可压缩流体为主,但也要论及可压缩流体。在后一种情况下,不仅要考虑密度 ρ 随压强 p 而变化,而且涉及温度 T 对 ρ 的影响。这就不可避免地遇到热力学概念与热力学方程,它们在一般的热力学及分子物理学书中有介绍,这里不加赘述。

流体的 ρ 、 p 、 T 之间的函数关系式叫做流体状态方程,一般可表示为

$$f(\rho, p, T) = 0 \quad (1-10)$$

对于不同的流体,有不同的具体表达式。完全气体的状态方程为

$$p = \rho RT \quad (1-11)$$

式中, p 为气体绝对压强; T 为气体绝对温度; R 为气体常数,空气的气体常数 $R=287\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ 。常温常压下的实际气体近似地符合完全气体状态方程。从热力学观点来看,上述两式中的 ρ 、 p 、 T 也是热力学状态参量,流体状态方程是针对热力学平衡态建立的,因此,流体压强 p 又叫做热力学压强。

1.5 描述流体运动的两种方法

如何描述流体运动是一个运动学的问题。可以采用两种方法:一种是给出每一个流体质点的物理量随时间的变化;另一种则是给出每一瞬时占据流动范围内每一空间点处的流体质点的物理量,而不管这些质点是从哪里来的,以及将要到哪里去。这两种方法都是瑞士数学家欧拉在约两百年前提出来的。二十余年后,法国数学家拉格朗日(J. L. Lagrange)对它们作了改进。习惯上称前一种为拉格朗日法,而称后一种为欧拉法。

将理论力学中曾经详细研究过的质点系力学的方法与流体运动的特点相结合,就形成了拉格朗日法,简称拉氏法。质点系的运动方程为

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1-12)$$

式中下标 i 用以区别不同质点。

运动着的流体系统有无穷多个流体质点,各流体质点彼此紧挨,相对滑移,联系密切。用标注下标的办法区分流体质点,并不方便。于是改用起始时刻 t_0 时流体质点的起始坐标 (ξ, ζ, η) 或位矢 $\mathbf{r}_0$ 来区分流体质点。表示流体质点位置随时间变化的运动方程则为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \quad (1-13)$$

或

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \zeta, \eta, t) \\ y &= y(\xi, \zeta, \eta, t) \\ z &= z(\xi, \zeta, \eta, t) \end{aligned} \right\} \quad (1-13a)$$

式中, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_0 = \xi\mathbf{i} + \zeta\mathbf{j} + \eta\mathbf{k}$; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别为 x, y, z 坐标轴方向的单位矢; $\mathbf{r}$ 及 x, y, z 为任意时刻 t 流体质点的位置矢与位置坐标。 $\mathbf{r}_0$ 或 ξ, ζ, η 是与流体质点一一对应的, 可用作辨认流体质点的标记, 如图 1-5 所示。当 ξ, ζ, η 取确定值时, 式 (1-13) 就表示起始时刻位于 $\mathbf{r}_0(\xi, \zeta, \eta)$ 处的流体质点位置随时间而变化的函数关系。由它所描述的空间曲线就是该流体质点的运动轨迹, 因而式 (1-13) 也就是流体质点的迹线方程。当 (ξ, ζ, η) 取所有流体质点的起始坐标值时, 式 (1-13) 就描述了整个流体系统全部流体质点的运动。 ξ, ζ, η 及 t 总称为拉格朗日变数。

如视 ξ, ζ, η 为参变量, 由位置矢 $\mathbf{r}(x, y, z)$ 对 t 的一阶偏导数及二阶偏导数可分别求出流体质点的速度 $\mathbf{u}$ 和加速度 $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \quad (1-14)$$

或

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial x}{\partial t} \\ u_y &= \frac{\partial y}{\partial t} \\ u_z &= \frac{\partial z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1-14a)$$

$$\mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \quad (1-15)$$

或

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ a_y &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ a_z &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-15a)$$

式中, $\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ 。

流体质点的密度及压强也可表示为 ξ, ζ, η (或 $\mathbf{r}_0$) 及 t 的函数, 亦即

$$\rho = \rho(\xi, \zeta, \eta, t) \quad (1-16)$$

$$p = p(\xi, \zeta, \eta, t) \quad (1-17)$$

显而易见, 拉氏法着眼于流体质点, 跟踪流体质点来描述流体运动, 故又称质点法。

欧拉法从分析运动流体所占据的不动空间内各点处的运动情况入手, 来把握整个流体运动, 它把表征流动状态的物理量表示为空间点坐标及时间的函数。每一瞬时 t 占据每一空间位置 $\mathbf{r}$ 的流体质点的速度可表示为

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (1-18)$$

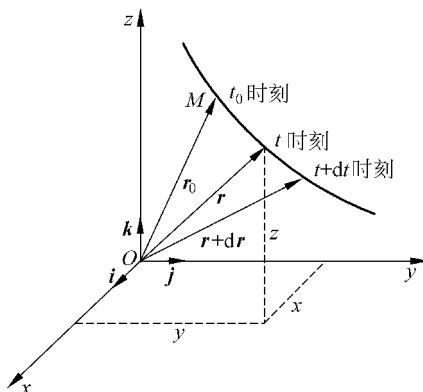


图 1-5 流体质点 M 的运动轨迹

或

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t) \\ u_y &= u_y(x, y, z, t) \\ u_z &= u_z(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (1-18a)$$

式中 x, y, z, t 总称欧拉变数。流体质点的密度和压强可分别表示为

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \quad (1-19)$$

$$p = p(x, y, z, t) \quad (1-20)$$

从高等数学可知,在一定的空间区域内,每一个空间点处都对应某物理量的一个值,这些值的集合就构成物理量的场。显然,空间点的集合必须与物理量(即场量)的集合一一对应。由此,式(1-19)和式(1-20)分别表示密度场和压强场,二者都是标量场。式(1-18)表示流速场,为一矢量场。场是一种物理状态的数学抽象,用以表述相应物理量的空间分布,同时,场也可随时间而变化。对于随时间而变化的场,其物理量的空间分布具有瞬时性,即这种分布本身是时间 t 的函数。欧拉法实质上就是用“场”的观点或“场论”方法来描述流体运动,它集中注意于各空间点,或者说,固守在各空间点处观察描述流体运动,故又称空间点法。

拉格朗日法与欧拉法各有短长。在实际问题中,我们感兴趣的往往只是表征流动的物理量在空间的分布情况及其随时间而变化的情况,对于每个流体质点在每一时刻的具体性态不大可能也没有必要搞得一清二楚。从这方面考虑,拉氏法提供了比实际需要多得多的情况,非常烦琐,数学上困难很大;而欧拉法以 x, y, z, t 为自变量,数学上处理比较方便,也比较适用。但是前已说明,拉氏法乃是质点系力学方法的自然延伸,便于直接应用各种现成的力学定律。因此,实际上往往将两种方法结合使用,相辅相成。此外,两种方法所描述的是同一对象,即一定时间内流体在空间的运动,因而它们之间可以互相转换。

前面说过,两种方法或者说两种变数可以相互转换。由拉格朗日变数变换为欧拉变数的关键就是,从拉格朗日变数表示的基本关系式(1-13a),推求出欧拉变数表示的基本关系式(1-18a)。

已知

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \zeta, \eta, t) \\ y &= y(\xi, \zeta, \eta, t) \\ z &= z(\xi, \zeta, \eta, t) \end{aligned} \right\}$$

在函数行列式

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \zeta, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

既不等于零也不等于无穷大的条件下,可由式(1-13a)反解出单值函数

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y, z, t) \\ \zeta &= \zeta(x, y, z, t) \\ \eta &= \eta(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$