

3.1 薄透镜的复振幅透过率

3.1.1 引言

夫琅和非衍射场的光场复振幅分布是某一平面光场复振幅分布的傅里叶变换,而夫琅和非衍射可用透镜系统获得。这说明:用透镜可以实现任一平面光场复振幅的傅里叶变换。这就是傅里叶光学的基础,也是近代光学模拟计算方法的基础和相干光信息处理的基础。这种变换特性的基础是:单透镜和透镜系统可以改变光波位相的空间分布,或者说,它能对通过透镜的光波进行位相的空间调制。下面对此进行说明。

光波通过透镜的过程如图 3.1.1 所示。图 3.1.1(a)中 F_o 是凸透镜的前焦点, n_i 是透镜材料的折射率。图 3.1.1(b)中 n_m 是透镜外媒质的折射率。 F_i 是凸透镜的后焦点。图 3.1.1(c)中 F_o 是凹透镜的前虚焦点,图 3.1.1(d)中 F_i 是凹透镜的后虚焦点。从光线光学(几何光学)的观点看,透镜的作用是使光线发生偏折,其偏折的规律为:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

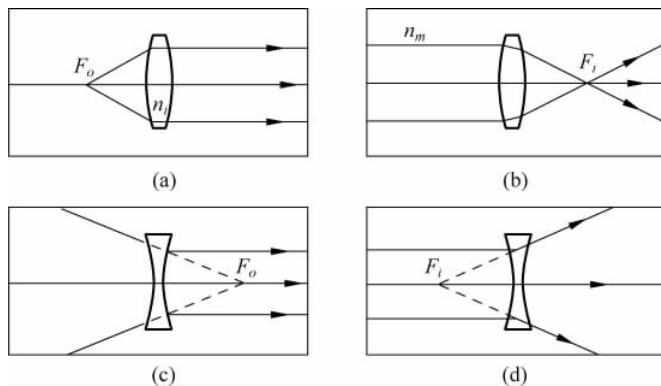


图 3.1.1 透镜的作用

式中 f 是薄透镜(透镜厚度趋于零,可忽略不计), n 是透镜材料的折射率, R_1 和 R_2 分别是透镜两分界面的曲率半径。而从波动光学(物理光学)的观点看,透镜的作用是改变波面的形状,如图 3.1.2 所示。使平面波变成会聚的球面波(会聚透镜),或发散的球面波(发散透镜)其原因是:透镜各点厚度不同,因而光波通过时要产生相应的相位变化,从而使入射的

波面变形。也就是光波复振幅的空间分布发生变化。

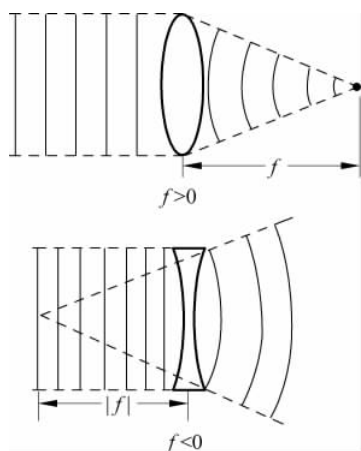


图 3.1.2 会聚透镜和发散透镜对垂直入射平面波的效应

下面给出透镜对光波作用的数学表达式, 设入射平面(透镜前表面的平面)上的复振幅为 $U_i(x, y)$ 。出射平面(透镜后表面的平面)上的复振幅为 U'_i 。则透镜的作用是把 U_i 变成 $U'_i(x, y)$ 。

为简单起见, 在以下推导中假设光通过透镜时不偏折, 无吸收。

(1) 透镜是薄透镜, 因而光波通过透镜不发生偏折, 即入射点和出射点处于同一高度, 所以任一光线在透镜中传播的距离恰等于该处透镜的厚度, 而忽略由于折射引起的传播距离的差值。

(2) 透镜无吸收, 因而光波通过透镜后, 其复振幅的幅值不变, 只是相位改变。

光波通过任一透光薄片(透镜、载有信息的图片等)后, 其复振幅的变化可用透光片的复振幅透过率表示, 其

定义为

$$t(x, y) = \frac{U'(x, y)}{U(x, y)} \quad (3.1.1)$$

式中 $U'(x, y)$ 和 $U(x, y)$ 分别为出射光波和入射光波的复振幅, $t(x, y)$ 则是透光片在 (x, y) 处的复振幅透过率。

对薄透镜则有

$$U'_i(x, y) = t_i(x, y) \cdot U_i(x, y) \quad (3.1.2)$$

下面推导 $t_i(x, y)$ 的表达式。

参看图 3.1.3, 令透镜的最大厚度为 Δ_0 , 而在坐标 (x, y) 处的厚度为 $\Delta(x, y)$ 。这时光波通过透镜时, 在 (x, y) 点发生的总位相延迟可写为

$$\phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k[\Delta_0 - \Delta(x, y)] \quad (3.1.3)$$

其中 n 是透镜材料的折射率, $kn\Delta(x, y)$ 是由透镜引起的位相延迟, 而 $k[\Delta_0 - \Delta(x, y)]$ 是由两个平面之间剩下的自由空间区域引起的位相延迟。透镜的作用可以等效地用一个形式为

$$t_i(x, y) = \exp[jk\Delta_0] \exp[jk(n-1)\Delta(x, y)] \quad (3.1.4)$$

的相乘的位相变换来表示。

3.1.2 厚度函数

为了确定各种不同类型的透镜引起的位相变换的具体形式, 先规定以下符号规则: 当光线从左到右时, 它遇到的每个凸面的曲率半径为正, 而每个凹面的曲率半径为负。于是图 3.1.3 中透镜左面的曲率半径 R_1 为正, 而右面的曲率半径 R_2 为负。

为求出厚度 $\Delta(x, y)$, 把透镜剖成两半, 如图 3.1.4 所示, 把总厚度函数写成两部分各自的厚度函数之和

$$\Delta(x, y) = \Delta_1(x, y) + \Delta_2(x, y) \quad (3.1.5)$$

由图中的几何关系可得厚度 $\Delta_1(x, y)$ 的表达式

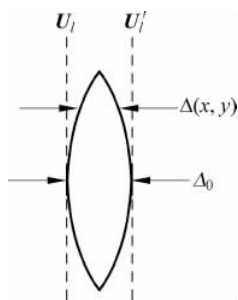


图 3.1.3 厚度函数

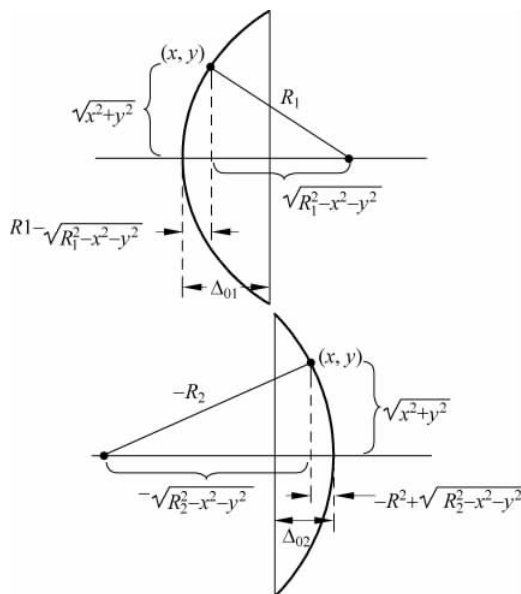


图 3.1.4 厚度函数的计算

$$\begin{aligned}\Delta_1(x, y) &= \Delta_{01} - (R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2 - y^2}) \\ &= \Delta_{01} - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}}\right)\end{aligned}\quad (3.1.6)$$

同理

$$\begin{aligned}\Delta_2(x, y) &= \Delta_{02} - (-R_2 - \sqrt{R_2^2 - x^2 - y^2}) \\ &= \Delta_{02} + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}}\right)\end{aligned}\quad (3.1.7)$$

由此可得总厚度函数

$$\begin{aligned}\Delta(x, y) &= \Delta_0 - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}}\right) \\ &\quad + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}}\right)\end{aligned}\quad (3.1.8)$$

其中 $\Delta_0 = \Delta_{01} + \Delta_{02}$ 。

3.1.3 傍轴近似

对于傍轴光束有

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} &\cong 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_1^2} \\ \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} &\cong 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_2^2}\end{aligned}\quad (3.1.9)$$

利用上述的近似可得厚度函数

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\quad (3.1.10)$$

3.1.4 位相变换及其物理意义

将上式代入式(3.1.4),得到透镜变换的傍轴近似为

$$t_l(x, y) = \exp[jkn\Delta_0] \cdot \exp\left[-jk(n-1)\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$$

由薄透镜的焦距公式

$$\frac{1}{f} \stackrel{\text{def}}{=} (n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \quad (3.1.11)$$

可得

$$t(x, y) = \exp[jkn\Delta_0] \exp\left[-j\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right] \quad (3.1.12)$$

这是透镜对入射光波效应的基本表达式。

注意,虽然推导这个式子时假定透镜的具体形式如图 3.1.3 所示,但是上面所规定的符号规则使得这一结果可用于其他类型的透镜。图 3.1.5 画出了凸面和凹面的各种组合所得到的几种不同类型的透镜。

要理解透镜变换的物理意义,最好是考察透镜对垂直入射的单位振幅平面波的效应。此时,在透镜前的场分布 U_l 为 1,式(3.1.2)给出透镜后侧的场 U'_l 的表达式如下:

$$U'_l(x, y) = \exp[jkn\Delta_0] \exp\left[-j\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right] \quad (3.1.13)$$

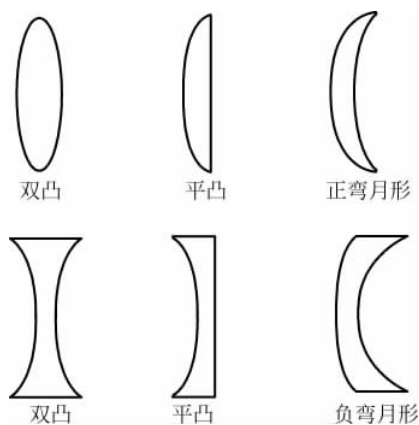


图 3.1.5 各种类型的透镜

第一项只是一常数位相延迟。而第二项则可解释为

对一个球面波的二次曲面近似。若焦距 f 为正,则球面波经透镜后在位于透镜轴线上和透镜距离为 f 的一点会聚。若 f 为负,则球面波是从透镜前面在透镜上并与透镜距离为 f 的一点发散出来,如图 3.1.2 所示。

3.2 透镜的傅里叶变换性质

正透镜的性质之一是能够进行二维的傅里叶变换。下面考虑用正透镜进行傅里叶变换的两类光路:第一类要变换的物体置于变换透镜的前方;第二类要变换的物体置于变换透镜的后方。下面先导出一般公式,然后讨论一些有实用价值的特殊情况。

3.2.1 要变换的物体置于透镜的前方

设要变换的物体是一个透明图片(例如一张正片),其透射系数为 $\tau(x_0, y_0)$,照明光波 $A_0 \exp(j\varphi)$ 投射在透明片上,物体光波为

$$O(x_0, y_0) = A_0 \tau(x_0, y_0) \exp(j\varphi) \quad (3.2.1)$$

φ 由照明条件确定。

现用点源 S 发出的单色球面波照明,如图 3.2.1 所示。 O 为要进行变换的图片,置于透镜前方,距透镜距离为 d_0 ,此位置称为输入面。光源 S 与透镜的距离为 p ,光源的共轭像面 (x, y) 面与透镜的距离为 q 。为免混乱,此处对于 p, q 和 d_0 均用正值。这时在输入面上入射光波为

$$A \exp \left[jk \frac{x_0^2 - y_0^2}{2(p - d_0)} \right] \quad (3.2.2)$$

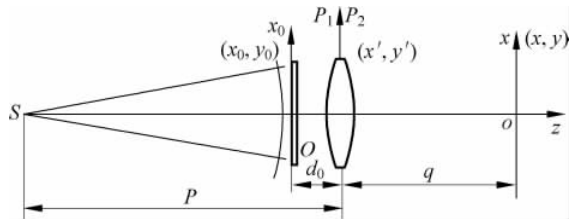


图 3.2.1 输入面在透镜前

入射光波通过输入面到达透镜所在平面,由菲涅耳衍射公式(2.4.29),透镜前表面光场分布为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(x', y') &= \frac{A_0}{j\lambda d_0} \iint_{\Sigma_0} \tau(x_0, y_0) \exp \left[jk \frac{x_0^2 + y_0^2}{2(p - d_0)} \right] \\ &\quad \times \exp \left[jk \frac{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2}{2d_0} \right] dx_0 dy_0 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

通过透镜后光场分布为

$$\mathbf{u}_1(x', y') p_1(x', y') \exp \left(-jk \frac{x'^2 + y'^2}{2f'} \right) \quad (3.2.4)$$

$p(x', y')$ 是透镜的光瞳函数,定义为

$$p(x', y') = \begin{cases} 1 & \text{在光瞳内} \\ 0 & \text{在光瞳外} \end{cases} \quad (3.2.5)$$

此时在光源 S 的共轭像面,即输出面上的光场为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) &= \frac{1}{j\lambda q} \iint_{\Sigma_p} \mathbf{u}_1(x', y') \exp \left(-jk \frac{x'^2 + y'^2}{2f'} \right) \\ &\quad \times \exp \left[jk \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2q} \right] dx' dy' \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

将式(3.2.3)代入上式,得到

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) &= -\frac{A_0}{\lambda^2 q d_0} \iint_{\Sigma_0} \iint_{\Sigma_p} \tau(x_0, y_0) \\ &\quad \times \exp \left[j \frac{k}{2} (\Delta_x + \Delta_y) \right] dx_0 dy_0 dx' dy' \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

式中

$$\Delta_x = \frac{x_0^2}{p - d_0} + \frac{(x' - x_0)^2}{d_0} - \frac{x'^2}{f'} + \frac{(x - x')^2}{q}$$

$$\begin{aligned}
&= x_0^2 \left(\frac{1}{p-d_0} + \frac{1}{d_0} \right) + x'^2 \left(\frac{1}{d_0} + \frac{1}{q} - \frac{1}{f'} \right) + \frac{x^2}{q} - \frac{2x'x_0}{d_0} - \frac{2xx'}{q} \\
&= \frac{f'qx_0^2}{d_0[(f'-d_0)+f'd_0]} + \frac{x'^2[q(f'-d_0)+f'd_0]}{d_0f'q} + \frac{x^2}{q} - \frac{2x'x_0}{d_0} - \frac{2xx'}{q} \\
&= \left\{ x_0 \left[\frac{f'q}{d_0[q(f'-d_0)+f'd_0+f'd_0]} \right]^{1/2} - x' \left[\frac{q(f'-d_0)+f'd_0}{d_0f'q} \right]^{1/2} \right. \\
&\quad \left. + x \left[\frac{f'd_0}{q[q(f'-d_0)+f'd_0]} \right]^{1/2} \right\}^2 + \frac{(f'-d_0)x^2}{q(f'-d_0)+f'd_0} \\
&\quad - \frac{2f'x_0x}{q(f'-d_0)+f'd_0} \tag{3.2.8}
\end{aligned}$$

上式推导过程曾利用了物像关系式 $p^{-1} + q^{-1} = f'^{-1}$, 并采用配平方法。对于 Δ_y 有类似的结果, 只是其中 x 用 y 代替。将 $\Delta_x + \Delta_y$ 代入式(3.2.7)。首先对变量 x', y' 进行积分, 并假定积分限 \sum_p 可以扩展到无限, 求得对应大括号平方项的积分为一复常量, 可与积分号前面的常量合在一起, 用 c' 表示。就得到

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= c' \exp \left\{ jk \frac{(f'-d_0)(x^2+y^2)}{2[q(f'-d_0)+f'd_0]} \right\} \iint_{-\infty}^{\infty} \tau(x_0, y_0) \\
&\quad \times \exp \left[-jk \frac{f'(x_0x + y_0y)}{q(f'-d_0)+f'd_0} \right] dx_0 dy_0 \tag{3.2.9}
\end{aligned}$$

这是输入面位在透镜前面的一般公式, 以下是特殊情况。

(1) 输入面位在透镜的前焦点 $d_0 = f'$ 。由式(3.2.9)得到

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= c' \iint_{-\infty}^{\infty} \tau(x_0, y_0) \\
&\quad \times \exp \left(-jk \frac{x_0x + y_0y}{f'} \right) dx_0 dy_0 \tag{3.2.10}
\end{aligned}$$

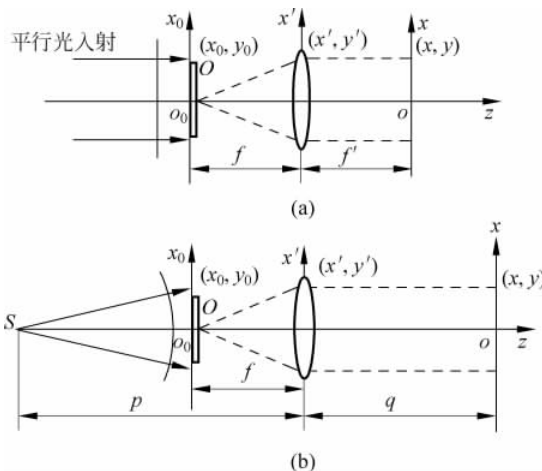
在这种情况下, 衍射物体的透射系数与衍射场的复振幅分布存在准确的傅里叶变换的关系, 并且与照明光源的位置无关。当光源位在无限远, 即用平行光照明物体时, 变换平面位在透镜的后焦点, 见图 3.2.2(a); 光源位在任意位置且与透镜距离为 p 时, 变换平面位将在光源的共轭像面, 与透镜的距离为 $q = f'p/(p-f')$ (见图 3.2.2(b))。

如果令 $f_x = x/\lambda f'$, $f_y = y/\lambda f'$, 则式(3.2.10)可改写成

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= c' \iint_{-\infty}^{\infty} \tau(x_0, y_0) \exp[-j2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)] dx_0 dy_0 \\
&= c' \mathbf{T}(f_x, f_y) \tag{3.2.11}
\end{aligned}$$

式中, $\mathbf{T}(f_x, f_y)$ 是 $\tau(x_0, y_0)$ 的傅里叶变换; f_x 和 f_y 代表在 x 和 y 方向物体的空间频率。

利用这种光学傅里叶变换, 一方面可以分析物体的空间频谱, 另一方面可以根据空间频谱来研究物体的结构。近代光学中的光学变换、光学空间滤波、光学信息处理以及傅里叶变换全息等都以此为基础, 并由此发展成为近代光学的一个重要分支——傅里叶光学。


 图 3.2.2 输入面在透镜前焦点 $d_0 = f'$

(2) 输入面紧靠透镜 $d_0 = 0$ 。此时(见图 3.2.3(b)), 由式(3.2.9)得到

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= c' \exp\left(jk \frac{x^2 + y^2}{2q}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} \tau(x_0, y_0) \\
 &\quad \times \exp\left(-jk \frac{x_0 x + y_0 y}{q}\right) dx_0 dy_0
 \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

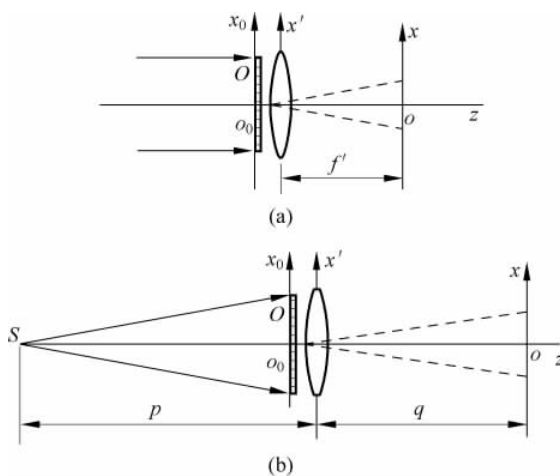


图 3.2.3 输入面紧靠透镜

在这种情况下存在一个二次位相因子。如果用平行光照明(见图 3.2.2(a)), 由于 $p = \infty, q = f'$, 上式变为

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= c' \exp\left(jk \frac{x^2 + y^2}{2f'}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} \tau(x_0, y_0) \\
 &\quad \times \exp\left(-jk \frac{x_0 x + y_0 y}{f'}\right) dx_0 dy_0
 \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

二次位相因子仍然存在,只不过由于光源位置不同,在输出面上位置坐标 x 与频率坐标的比例不同,前者是 λq ; 后者是 $\lambda f'$ 。另外与第一种情况($d_0 = f'$)比较,第二种情况($d_0 = 0$)可以充分利用透镜的孔径,以提高输出面的总光强。

(3) 物体位在透镜前任意位置 当用平行光照明物体,即 $q = f'$,由式(3.2.9)得到

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{c}' \exp \left[jk \frac{(f' - d_0)(x^2 + y^2)}{2f'^2} \right] \iint \tau(x_0, y_0) \\ &\quad \times \exp \left(-jk \frac{x_0 x + y_0 y}{f'} \right) dx_0 dy_0 \\ &= \mathbf{c}' \exp \left[jk \frac{(f' - d_0)(x^2 + y^2)}{2f'^2} \right] \mathbf{T}(f_x, f_y) \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

可见在傅里叶变换平面上, x 与 f_x 的比例不变,但仍有位相因子存在。应当指出,如果 $d_0 > f'$,物体的像为放大的实像;若 $d_0 < f'$,则物体的像为放大的虚像,见图(3.2.4(a)和(b))。当发散光照明物体时,由式(3.2.9)很容易看出不仅有位相因子存在,而且 x 与 f_x 的比例也要改变。

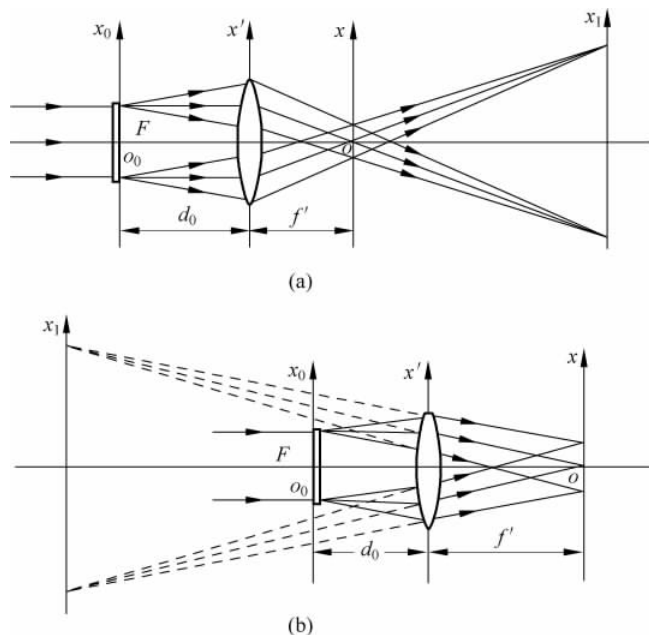


图 3.2.4 输入面在透镜前任意位置

3.2.2 要变换的物体置于透镜的后方

当要变换的物体置于透镜的后方时,如图 3.2.5 所示。此时物面上的光场为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(x_0, y_0) &= \frac{A_0}{j\lambda d_0} \iint_{\Sigma_p} \exp \left(jk \frac{x'^2 + y'^2}{2p} \right) \exp \left(-jk \frac{x'^2 + y'^2}{2f'} \right) \\ &\quad \times \exp \left[jk \frac{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2}{2d_0} \right] dx' dy' \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

通过物体以后为

$$\mathbf{O}(x_0, y_0) = \mathbf{u}_1(x_0, y_0) \tau(x_0, y_0)$$

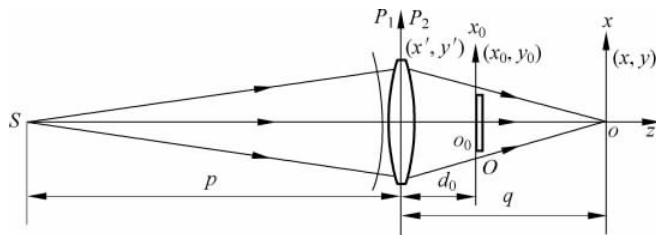


图 3.2.5 输入面在透镜后

在 (x, y) 面上的光场分布则为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) &= \frac{1}{j\lambda(q-d_0)} \iint_{\Sigma_0} \tau(x_0, y_0) \mathbf{u}_1(x_0, y_0) \\ &\quad \times \exp\left[jk \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2(q-d_0)}\right] dx_0 dy_0 \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

将式(3.2.15)代入上式有

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) &= -\frac{A_0}{\lambda^2 d_0 (q-d_0)} \iint_{\Sigma_p} \iint_{\Sigma_0} \tau(x_0, x_0) \\ &\quad \times \exp\left[jk \frac{k}{2} (\Delta'_x + \Delta'_y)\right] dx' dy' x_0 dy_0 \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta'_x &= \frac{x'^2}{p} - \frac{x'^2}{f'} + \frac{(x_0 - x')^2}{d_0} + \frac{(x - x_0)^2}{q-d_0} \\ &= x^2 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{d_0} - \frac{1}{f'} \right) + x_0^2 \left(\frac{1}{d_0} + \frac{1}{q-d_0} \right) \\ &\quad + \frac{x^2}{q-d_0} - \frac{2x_0 x'}{d_0} - \frac{2xx_0}{q-d_0} \\ &= x^2 \frac{q-d_0}{d_0 q} + x_0^2 \frac{q}{d_0 (q-d_0)} + \frac{x^2}{q-d_0} - \frac{2x_0 x'}{d_0} - \frac{2xx_0}{q-d_0} \\ &= \left\{ x' \left(\frac{q-d_0}{d_0 q} \right)^{1/2} - x_0 \left[\frac{q}{d_0 (q-d_0)} \right]^{1/2} \right\} + \frac{x^2}{q-d_0} - \frac{2xx_0}{q-d_0} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

推导上式时,也利用了物像关系式。对于 Δ'_y 有类似的结果。将 $(\Delta'_x + \Delta'_y)$ 代入式(3.2.17),与推导式(3.2.9)相似,可得

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) &= c' \exp\left[jk \frac{x^2 + y^2}{2(q-d_0)}\right] \iint_{-\infty}^{\infty} \tau(x_0, y_0) \\ &\quad \times \exp\left[-jk \frac{x_0 x + y_0 y}{q-d_0}\right] dx_0 dy_0 \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

由式(3.2.9)和式(3.2.19)可见,不论衍射物体(或输入面)在透镜后何种位置,只要观察面(或输出面)是照明光源的共轭像面,都能得到带有二次位相因子的傅里叶变换。下面讨论

两种情况。

(1) 输入面紧靠透镜放置, $d_0=0$ 。这时得到与式(3.2.13)相同的结果。说明输入面在透镜的前方或后方变换结果是相同的。

(2) 输入面在透镜后面的任意位置, 在此情形, 输出面上的光场如式(3.2.19)所示。如用平行光照明, 则式(3.2.19)变为

$$u(x, y) = c' \exp \left[jk \frac{x^2 + y^2}{2(f' - d_0)} \right] \iint_{-\infty}^{\infty} \tau(x_0, y_0) \times \exp \left[-jk \frac{x_0 x + y_0 y}{f' - d_0} \right] dx_0 dy_0 \quad (3.2.20)$$

在变换平面(输出面)上, 位置坐标与空间频率的比率为 λd , $d=q-d_0$ 或 $f'-d_0$, 如图 3.2.6 所示。

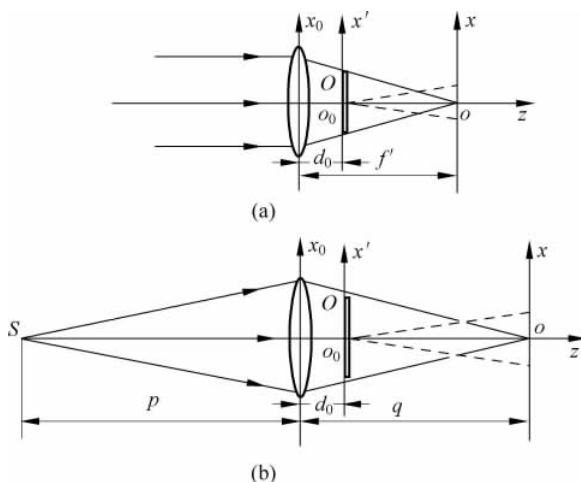


图 3.2.6 输入面在透镜后任意位置

现将以上讨论的各种情况列入表 3.2.1。应当指出二次位相因子的存在, 说明物体上任一点衍射的光在频谱面上不为平面波。很易证明波面弯曲的曲率半径等于频谱平面与物体的共轭像点的距离。

表 3.2.1 光学傅里叶变换的各种光路

| 输入面位置 | 光源位置 | 变换平面 | 二次位相因子 | x/f_x |
|--------------------|----------|------------------------|--|--------------------------------------|
| 前焦面 ($d_0=f$) | ∞ | 后焦面 | 无 | $\lambda f'$ |
| | p | $q = \frac{pf'}{p-f'}$ | | |
| 透镜前 d_0 处 | ∞ | 后焦面 | $k(f'-d_0)(x^2+y^2)/2f'^2$ | $\lambda f'$ |
| | p | $q = \frac{pf'}{p-f'}$ | $k \frac{(f'-d_0)(x^2+y^2)}{2[q(f'-d_0)+f'd_0]}$ | $\frac{\lambda q(f'-d_0)+f'd_0}{f'}$ |

续表

| 输入面位置 | 光源位置 | 变换平面 | 二次位相因子 | x/f_x |
|---------------------|----------|------------------------|------------------------|-------------------------------|
| 紧靠透镜 ($d_0=0$) | ∞ | 后焦面 | $k(x^2+y^2)/2f'$ | $\lambda f'$ |
| | p | $q = \frac{pf'}{p-f'}$ | $k(x^2+y^2)/2q$ | λq |
| 透镜后 d_0 处 | ∞ | 后焦面 | $k(x^2+y^2)/2(f'-d_0)$ | $\lambda d = \lambda(f'-d_0)$ |
| | p | $q = \frac{pf'}{p-f'}$ | $k(x^2+y^2)/2(q-d_0)$ | $\lambda d = \lambda(q-d_0)$ |

3.3 单色光理想薄透镜的成像

下面讨论有限范围内单色光理想薄透镜的成像问题。条件是：①一个无像差的薄的正透镜所成的实像；②单色光照明。这个限制意味着成像系统对于复场振幅是线性的。

3.3.1 正透镜的脉冲响应

如图 3.3.1 所示的几何关系,设一个平面物体放在透镜前距离为 d_0 的位置上,并用单色光照明。现用 $U_0(x_0, y_0)$ 表示紧靠物体之后的复振幅光场。在透镜后距离为 d_i 的平面上复振幅光场分布,用 $U_i(x_i, y_i)$ 表示。现欲求在什么条件下场分布 U_i 可以合理地叫做物分布 U_0 的“像”。

由于波动传播现象是线性的,因此可把场分布 U_i 表示成下述迭加积分

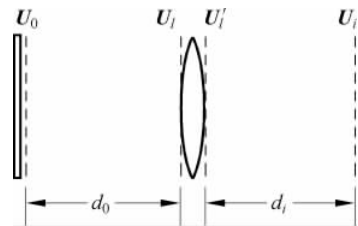


图 3.3.1 透镜的作用

$$U_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0) U_0(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \quad (3.3.1)$$

其中 $\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0)$ 是由置于物坐标 (x_0, y_0) 的单位振幅的点光源在坐标 (x_i, y_i) 处产生的复振幅光场。因此,只要能够确定脉冲响应 \mathbf{h} , 就能完备地描写成像系统的性质。

如果光学系统要产生高质量的像, U_i 就必须尽可能地和 U_0 相似。也就是说,脉冲响应应当非常近似于 δ 函数,即

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0) \cong \mathbf{K} \delta(x_i \pm Mx_0, y_i \pm My_0) \quad (3.3.2)$$

其中 \mathbf{K} 是一个复常数, M 代表系统的放大率,式中含有正负号是为了容许可能的像的倒立。因此把上式最近似成立的平面定为“像平面”。

为了求得 \mathbf{h} , 令物体为 (x_0, y_0) 点上的一个 δ 函数(点源),那么投射到透镜上的将是来自 (x_0, y_0) 点发出的一个发散的球面波,其傍轴近似为

$$U_l(x, y) = \frac{1}{j\lambda d_0} \exp \left\{ j \frac{k}{2d_0} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] \right\} \quad (3.3.3)$$

通过透镜之后,场分布变为

$$U_l'(x, y) = U_l(x, y) P(x, y) \exp \left[-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right] \quad (3.3.4)$$

最后,利用菲涅耳衍射方程来描写通过距离 d_i 的传播,即

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}'_i \exp\left\{j \frac{k}{2d_i} [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]\right\} dx dy \quad (3.3.5)$$

其中已舍去常数位相因子。合并上面 3 个方程,可得

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0) &= \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \exp\left[j \frac{k}{2d_i} (x_i^2 + y_i^2)\right] \exp\left[j \frac{k}{2d_0} (x_0^2 + y_0^2)\right] \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp\left[j \frac{k}{2} \left(\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f}\right) (x^2 + y^2)\right] \\ &\times \exp\left\{-jk \left[\left(\frac{x_0}{d_0} + \frac{x_i}{d_i}\right)x + \left(\frac{y_0}{d_0} + \frac{y_i}{d_i}\right)y\right]\right\} dx dy \quad (3.3.6) \end{aligned}$$

于是,式(3.3.1)和式(3.3.6)提供了一个规定 \mathbf{U}_0 和 \mathbf{U}_i 之间的关系的形式解。但是,除非作进一步的简化,否则很难确定可以把 \mathbf{U}_i 合理地当成 \mathbf{U}_0 的像的条件。

3.3.2 消去二次位相因子: 透镜成像公式

上述脉冲响应函数中最麻烦的是那些含有二次位相因子的项。注意这些项中有两项是与透镜坐标 (x, y) 无关的,即

$$\exp\left[j \frac{k}{2d_i} (x_i^2 + y_i^2)\right] \text{ 与 } \exp\left[j \frac{k}{2d_0} (x_0^2 + y_0^2)\right]$$

这两项仅仅表示在 $x_i y_i$ 与 $x_0 y_0$ 平面上的位相弯曲,如果只讨论两个球面之间而不是两个平面之间的成像问题,这两项可以直接弃去。但是,即使是对于两个平面之间的成像,也可以证明这两项是无关紧要的。

为了消去因子 $\exp\left[j \frac{k}{2d_i} (x_i^2 + y_i^2)\right]$,注意,对于绝大多数人们感兴趣的情形,透镜之后的光场分布将是成像操作的最后一步的产物。因此这一分布将直接被一个只对光的强度起反应的探测器(例如照相底片或光电探测器)接收。由于这一项只改变光场的位相分布,它对测量光强分布的结果不发生任何影响,因此可以弃去。

但位相因子 $\exp\left[j \frac{k}{2d_0} (x_0^2 + y_0^2)\right]$ 不能这样直接地处理掉,因为它依赖于迭加积分的积分变量 (x_0, y_0) ^①。但是,在大多数有关的情形下,可以用下面的论据把它消去。若成像系统的行为近似于式(3.3.2)所代表的理想特性,那么坐标 (x_i, y_i) 处的光场振幅必定只含物平面上以理想的几何物体点为中心的一个微小区域的贡献(见图 3.3.2)。如果在这个微小区域内 $\exp\left[j \frac{k}{2d_0} (x_0^2 + y_0^2)\right]$ 的参量的变化不大于几分之一弧度,则可用下述近似

$$\exp\left[j \frac{k}{2d_0} (x_0^2 + y_0^2)\right] \cong \exp\left[j \frac{k}{2d_0} \left(\frac{x_i^2 + y_i^2}{M^2}\right)\right] \quad (3.3.7)$$

因为对 (x_0, y_0) 的依赖关系已经消除了,于是指数项可以弃去,原因仍然是它不会影响 $(x_i,$

^① 如果照明是“非相干的”,可以证明成像系统对于强度是线性的,其脉冲响应为 $|\mathbf{h}|^2$ 。在这种情况下,两个位相因子都可以直接弃去。

y_i)平面内的强度测量。

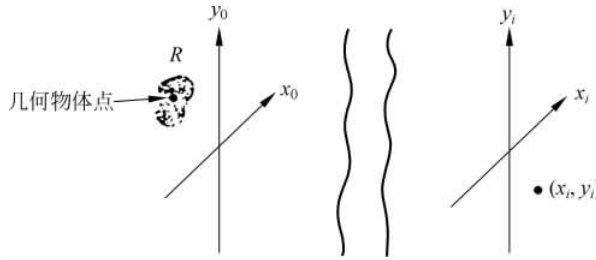


图 3.3.2 特定点的物像关系

通过上述讨论,可把脉冲响应的表达式简化为

$$\begin{aligned} h(x_i, y_i; x_0, y_0) \cong & \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp \left[j \frac{k}{2} \left(\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f} \right) (x^2 + y^2) \right] \\ & \cdot \exp \left\{ -jk \left[\left(\frac{x_0}{d_0} + \frac{x_i}{d_i} \right) x + \left(\frac{y_0}{d_0} + \frac{y_i}{d_i} \right) y \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

作为最后一步简化,现只限于讨论透镜后面的一个特殊的平面,它和透镜的距离 d_i 满足

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f} = 0 \quad (3.3.9)$$

即透镜成像公式。因此要获得一个和理想情况相近的脉冲响应,就必须满足成像公式。这时脉冲响应简化为

$$\begin{aligned} h(x_i, y_i; x_0, y_0) \cong & \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \\ & \cdot \exp \left\{ -jk \left[\left(\frac{x_0}{d_0} + \frac{x_i}{d_i} \right) x + \left(\frac{y_0}{d_0} + \frac{y_i}{d_i} \right) y \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

定义系统的放大率为

$$M = \frac{d_i}{d_0} \quad (3.3.11)$$

最后,脉冲响应简化为

$$\begin{aligned} h(x_i, y_i; x_0, y_0) \cong & \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \\ & \cdot \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{\lambda d_i} \left[(x_i + Mx_0)x + (y_i + My_0)y \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

上式说明:满足物像关系时,脉冲响应是透镜孔径的夫琅和菲衍射。

3.3.3 物体和像之间的关系

为求出理想的像,通常的方法是让波长 λ 趋于零,这时衍射效应可以忽略。作变量变换

$$\tilde{x} = \frac{x}{\lambda d_i}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{\lambda d_i} \quad (3.3.13)$$

则脉冲响应式(3.3.12)可以改写为

$$h(x_i, y_i; x_0, y_0) \cong M \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y})$$

$$\cdot \exp\{-j2\pi[(x_i + Mx_0)\tilde{x} + (y_i + My_0)\tilde{y}]\} d\tilde{x} d\tilde{y} \quad (3.3.14)$$

随着 λ 趋于零, P 等于 1 的 (\tilde{x}, \tilde{y}) 区域将无限增大, 使得可把 P 换成 1 而仍然保持积分限为无穷。于是

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0) &\rightarrow M \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\{-j2\pi[(x_i + Mx_0)\tilde{x} \\ &\quad + (y_i + My_0)\tilde{y}]\} d\tilde{x} d\tilde{y} \\ &= M\delta(x_i + Mx_0, y_i + My_0) \\ &= \frac{1}{M}\delta\left(\frac{x_i}{M} + x_0, \frac{y_i}{M} + y_0\right) \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

把这个结果用到迭加积分式(3.3.1)中, 可知物体和像的振幅分布由式(3.3.10)联系

$$\mathbf{U}_i(x_i, y_i) = \frac{1}{M}\mathbf{U}_0\left(-\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M}\right) \quad (3.3.16)$$

于是得出结论: 几何光学预言的像是物体的准确的复现, 它在像平面上被放大并且是倒立的。

几何光学的预言当然不是精确的。只有把衍射效应也考虑进来, 才能对物和像之间的关系有更全面的理解。为此, 回到脉冲响应的表达式(3.3.14), 并且做如下的补充的变数变换

$$\tilde{x}_0 = -Mx_0, \quad \tilde{y}_0 = -My_0 \quad (3.3.17)$$

求出脉冲响应为

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(x_i, y_i; \tilde{x}_0, \tilde{y}_0) &= M \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \tilde{x}; \lambda d_i \tilde{y}) \\ &\quad \cdot \exp\{-j2\pi[(x_i - \tilde{x}_0)\tilde{x} + (y_i - \tilde{y}_0)\tilde{y}]\} d\tilde{x} d\tilde{y} \end{aligned}$$

注意此时 \mathbf{h} 是空间不变的, 只依赖于坐标之差 $(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0)$ 。最后定义

$$\mathbf{h} = \frac{1}{M}\mathbf{h} \quad (3.3.18)$$

迭加积分, 式(3.3.1)变为

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i(x_i, y_i) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(x_i - \tilde{x}_0; y_i - \tilde{y}_0) \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{M}\mathbf{U}_0\left(-\frac{\tilde{x}_0}{M}, -\frac{\tilde{y}_0}{M}\right)\right] d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0 \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

这正是脉冲响应 \mathbf{h} 与几何光学所预言的像的卷积。为了方便起见, 定义一个新函数 \mathbf{U}_g , 它代表几何光学所预言的像; 即

$$\mathbf{U}_g(x_i, y_i) = \frac{1}{M}\mathbf{U}_0\left(-\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M}\right) \quad (3.3.20)$$

于是卷积式(3.3.19)可用简化符号写成

$$\mathbf{U}_i(x_i, y_i) = \mathbf{h}(x_i, y_i) * \mathbf{U}_g(x_i, y_i) \quad (3.3.21)$$

其中

$$\mathbf{h}(x_0, y_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y})$$

$$\cdot \exp[-j2\pi(x_i \tilde{x} + y_i \tilde{y})] d\tilde{x} d\tilde{y} \quad (3.3.22)$$

方程(3.3.21)和方程(3.3.22)代表现阶段分析的最后结果。它们表明:当衍射效应也考虑进来之后,像就不再是物体的准确复现了。相反,实际上得到的像是物体的平滑变形,这是脉冲响应的宽度不为零的结果,即卷积的低通滤波效果。详情可参看“工程光学”中关于等晕成像的描述。这种平滑作用能使物体的精细细节受到强烈的衰减,结果使所生成的像产生相应的失真。

注意,实际的透镜均为有限尺寸,因此透镜的孔径对成像有重要影响,主要截去高频和产生渐晕。图 3.3.3 为透镜孔径对傅里叶变化面上光场影响的示意图。图中给出了衍射角为以下 3 种情况对成像影响的说明。

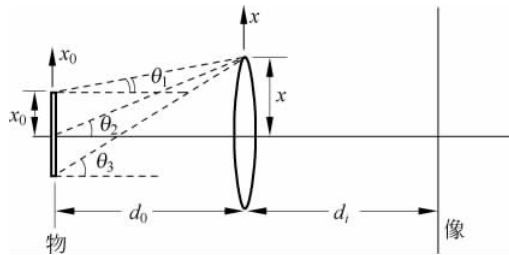


图 3.3.3 透镜孔径对光场影响的示意图

(1) 衍射角小于 θ_1 时,衍射光将全部通过透镜成像,相应的空间频率为

$$f_1 = \frac{\sin\theta_1}{\lambda} \cong \frac{1}{\lambda} \frac{x - x_0}{d_0}$$

(2) 衍射角大于 θ_3 时,衍射光全部不能通过透镜成像,而被透镜截去,相应的空间频率为

$$f_{\max} = \frac{\sin\theta_3}{\lambda} \cong \frac{1}{\lambda} \frac{x + x_0}{d_0}$$

(3) 衍射角在 $\theta_1 \sim \theta_3$ 之间的衍射光,只有部分通过透镜,将形成像的渐晕。

3.4 计算举例

例 3.1 一个被直径为 l 的圆形孔径限制的物函数 U_0 ,把它放在直径为 L 的圆形会聚透镜的前焦面上。测量透镜的后焦面上的强度分布,假定 $L > l$ 。

(a) 求出关于其所测得强度准确代表物体的傅里叶谱的模的平方的最大空间频率的表达式。

(b) 如果 $L = 4\text{cm}$, $l = 2\text{cm}$, f_0 (焦距) $= 50\text{cm}$ 以及 $\lambda = 6 \times 10^{-7}\text{m}$, 这个频率的数值等于多少(单位用周/毫米)?

(c) 在多大的频率以上测得的频谱为零? 尽管物体可以在更高的频率以上有不为零的傅里叶分量。

(a) 解

透镜有限孔径对于物面空间频率成分传播的限制称为渐晕。仅当某一方向上的平面波分量不受阻碍地通过透镜时,在后焦面上相应会聚点测得的强度才准确代表物相应空间频

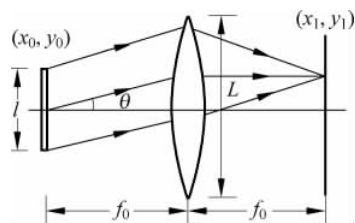


图 3.4.1 例 1 图(1)

率的傅里叶谱的模的平方。如图 3.4.1 所示,在小角度情况下,满足这一要求的平面波分量的传播方向 θ 角最大为

$$\theta \approx \frac{\frac{L}{2} - \frac{l}{2}}{f_0} = \frac{L-l}{2f_0}, \quad L \ll f_0, l \ll f_0$$

因透镜是圆形孔径,在圆周方向上都有相应的最大空间频率

$$\begin{aligned} f_{\max} &= (\sqrt{f_x^2 + f_y^2})_{\max} \\ &= \frac{\sin\theta}{\lambda} \approx \frac{\theta}{\lambda} = \frac{L-l}{2\lambda f_0} \end{aligned}$$

(b) 解

当 $L=4\text{cm}, l=2\text{cm}, f_0=50\text{cm}, \lambda=6 \times 10^{-7}\text{m}$ 时

$$\begin{aligned} f_{\max} &= \frac{L-l}{2\lambda f_0} = \frac{(4-2) \times 10}{2 \times 6 \times 10^{-7} \times 10^3 \times 50 \times 10} \\ &= 33.3 \text{ 周/mm} \end{aligned}$$

(c) 解

当某一方向传播的平面波分量完全被透镜孔径拦阻时,在后焦面上没有该频率成分,测得频谱为零。如图 3.4.2 所示,当传播方向倾角超过 β 时,该平面波分量正是这种情况。在小角度情况下

$$\beta \approx \frac{\frac{L}{2} + \frac{l}{2}}{f_0} = \frac{L+l}{2f_0} \quad (L \ll f_0, l \ll f_0)$$

相应的空间频率为

$$\begin{aligned} f &= \frac{\sin\beta}{\lambda} \approx \frac{\beta}{\lambda} = \frac{L+l}{2\lambda f_0} \\ &= \frac{(4+2) \times 10}{2 \times 6 \times 10^{-7} \times 10^3 \times 50 \times 10} \\ &= 100 \text{ 周/mm} \end{aligned}$$

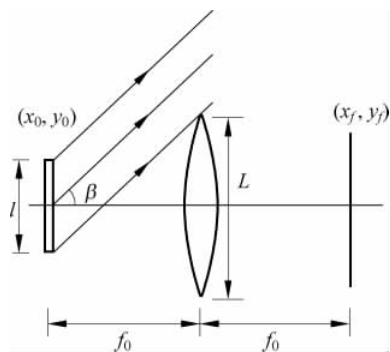


图 3.4.2 例 3.1 图(2)

综合上述情况,可以得到如下结论;当 $f \leq \frac{L-l}{2\lambda f_0}$, 透镜后焦面上可以得到相应空间频率成分的物体准确的傅里叶谱;当 $\frac{L-l}{2\lambda f_0} < f < \frac{L+l}{2\lambda f_0}$ 时,透镜后焦面上得到的并非准确的物体的傅里叶谱,各空间频率成分受到透镜孔径程度不同的拦阻;当 $f \geq \frac{L+l}{2\lambda f_0}$ 时,虽然物可能有更高的空间频率成分,但因这些分量全部被透镜有限孔径所阻挡,在后焦面上完全得不到物的傅里叶谱中的这些高频成分。这就是渐晕效应对物的频谱传播的影响。从公式可以看出,当透镜孔径 L 增大,或者物体尽量靠近透镜,可以减小这一效应的影响。

例 3.2 一个衍射屏具有下述圆对称的振幅透射率函数

$$t(r) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos ar^2 \right) \text{circ} \left(\frac{r}{l} \right)$$

(a) 这个屏的作用在什么方面像一个透镜?

(b) 给出此屏的焦距的表达式。

(c) 什么特性将会严重地限制这种屏用作成像装置(特别是对于多色物体)?

(a) 解

衍射屏的复振幅透射率如图 3.4.3 所示,也可以把它表示为直角坐标的形式

$$\begin{aligned} t(x, y) &= \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos[\alpha(x^2 + y^2)] \right\} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{l}\right) \\ &= \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \exp[-j\alpha(x^2 + y^2)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \exp[j\alpha(x^2 + y^2)] \right\} \\ &\quad \times \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{l}\right) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

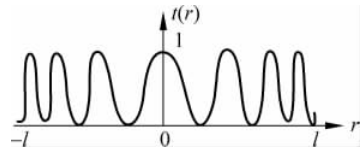


图 3.4.3 例 3.2 图(1)

式(3.4.1)大括号中第一项仅仅是使直接透射光振幅衰减,其他两项指数项与透镜位相变换因子 $\exp\left[-j\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right]$ 比较,可见形式相同。当平面波垂直照射时,这两项的作用是分别产生会聚球面波和发散球面波。因此在成像性质和傅里叶变换性质上该衍射屏都有些类似于透镜,因子 $\text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{l}\right)$ 表明该屏具有半径为 l 的圆形孔径。

(b) 解

把衍射屏复振幅透射率中的复指数项与透镜位相变换因子相比较,得到相应的焦距。

对于 $\frac{1}{4} \exp[-j\alpha(x^2 + y^2)]$ 项,令 $\alpha = \frac{k}{2f_1}$, 则有

$$f_1 = \frac{k}{2\alpha} = \frac{\pi}{\lambda\alpha}$$

焦距 f_1 为正,其作用相当于会聚透镜。对于

$$\frac{1}{4} \exp[j\alpha(x^2 + y^2)]$$

项,令 $\alpha = \frac{-k}{2f_2}$, 则有

$$f_2 = -\frac{k}{2\alpha} = -\frac{\pi}{\lambda\alpha}$$

焦距 f_2 为负,其作用相当于发散透镜。对于 $\frac{1}{2}$ 这一项,平行光波直接透过,仅振幅衰减,可看作是

$$f_3 = \infty$$

(c) 解

由于该衍射屏有三重焦距,用作成像装置时,对同一物体它可以形成三个像,例如对于无穷远的点光源,分别在屏两侧对称位置形成实像和虚像,另一个像在无穷远(直接透射光)(见图 3.4.4)。当观察者观察其中一个像时,同时会看到另外的离焦像,无法分离开。如用接收屏接收,在任何一个像面上都会有其他的离焦像形成的背景干扰。除此以外,对于多色物体,严重的色差也是一个重要的限制。因为焦距都与波长 λ 成反比。例如取 $\lambda_{\text{红}} = 0.69\mu\text{m}$, $\lambda_{\text{蓝}} = 0.40\mu\text{m}$, 则有

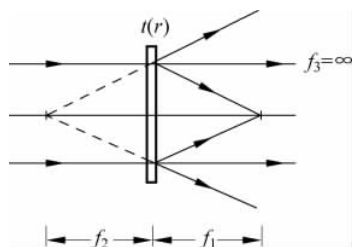


图 3.4.4 例 3.2 图(2)

$$f_{\text{红}} = \frac{0.40}{0.69} f_{\text{蓝}}$$

$$\approx 0.57 f_{\text{蓝}}$$

显然这样大的色差是无法用作成像装置。若采用白光作光源,在像面上可以看到严重的色散现象。

这种衍射屏实际就是同轴形式的点源全息图,即伽柏全息图,参看第 4 章。

例 3.3 一维物函数的一个阵列可表示成 $U_0(x, y_k)$, 其中 $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_N$ 是 N 个固定的 y 坐标。现欲对所有 N 个函数在 x 方向作傅里叶变换, 得出变换式的一个阵列

$$G_0(f_x, y_k) = \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y_k) \exp(-j2\pi f_x x) dx$$

忽略物体孔径和透镜孔径的有限大小, 利用本章所推得的透镜的傅里叶变换性质和透镜的成像性质, 证明这一变换能够用下述透镜装置来完成:

- (a) 两个不同焦距的圆柱透镜。
- (b) 焦距相同的一个圆柱透镜和一个球面透镜。

简化: 因为只需要显示 $|G_0|^2$, 因此位相因子可以弃去。

(a) 证明

由一维函数阵列 $U_0(x, y_k)$ 得到其一维傅里叶变换阵列 $G_0(f_x, y_k)$, 需要在 x 方向实现傅里叶变换, 而在 y 方向实现成像关系。因柱面透镜位相变换为

$$\exp\left(-j \frac{kx^2}{2f_{\text{柱}}}\right)$$

物体放在柱面透镜前, 在它的后焦面上可实现 x 方向上的变换关系。然而, 在 y 方向却是衍射传播过程, 得不到成像关系。若增加另一个柱面透镜, 使它在不影响 x 方向变换关系的前提下, 安排适当的位置, 可以实现 y 方向成像。如图 3.4.5 所示的就是这种方法。把焦距 f_1, f_2 的两个薄柱面透镜重叠在一起, 设 $f_2 > f_1$, 输出平面选在第二柱面透镜后焦面上, 输入物平面置于柱透镜前 d_1 距离, 且

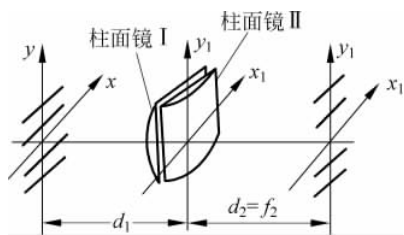


图 3.4.5 例 3.3 图(1)

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f_1}$$

其中 $d_2 = f_2$, 显然这里第一柱面透镜用来实现 y 方向成像, 第二柱面透镜用来实现 x 方向的傅里叶变换。当然还需要更严格地证明。

首先计算位于输入平面 (x, y) 坐标的单色点光源在输出平面 (x_1, y_1) 处产生的光场复振幅, 即系统的脉冲响应 $h(x, y; x_1, y_1)$, 然后再根据线性系统的迭加积分求出输出场分布。由 (x, y) 点发出的单位振幅的发散球面波在 $x_1 y_1$ 平面上场分布的傍轴近似为(略去常数位相因子)

$$U_l(x_l, y_l) = \frac{1}{j\lambda d_1} \exp\left\{j \frac{k}{2d_1} [(x_l - x)^2 + (y_l - y)^2]\right\}$$

两个柱面透镜的位相变换分别为

$$\exp\left(-j\frac{k}{2f_1}y_l^2\right) \text{ 和 } \exp\left(-j\frac{k}{2f_2}x_l^2\right)$$

假定不考虑吸收,也不考虑透镜孔径的限制, x_ly_l 平面透射光场分布为

$$\begin{aligned} U'_l(x_l, y_l) &= \frac{1}{j\lambda d_1} \exp\left\{j\frac{k}{2d_1}[(x_l - x)^2 + (y_l - y)^2]\right\} \\ &\times \exp\left(-j\frac{k}{2f_1}y_l^2\right) \exp\left(-j\frac{k}{2f_2}x_l^2\right) \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

这一光波场传播到 x_1y_1 平面上,得到的场分布即脉冲响应,根据菲涅耳衍射方程,得到

$$\begin{aligned} h(x, y; x_1, y_1) &= \frac{\exp(jkd_2)}{j\lambda d_2} \iint_{-\infty}^{\infty} U'_l(x_l, y_l) \\ &\times \exp\left\{j\frac{k}{2d_2}[(x_1 - x_l)^2 + (y_1 - y_l)^2]\right\} dx_l dy_l \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

将式(3.4.2)代入式(3.4.3),把全部常数因子合并为 c ,并分离变量得到

$$\begin{aligned} h(x, y; x_1, y_1) &= c \exp\left[j\frac{k}{2d_1}(x^2 + y^2)\right] \times \exp\left[j\frac{k}{2d_2}(x_1^2 + y_1^2)\right] \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left[j\frac{k}{2d_1}x_l^2 - j\frac{k}{2f_2}x_l^2 + j\frac{k}{2d_2}x_l^2 - j\frac{k}{d_1}xx_l - j\frac{k}{d_2}x_1x_l \right] dx_l \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[j\frac{k}{2d_1}y_l^2 - j\frac{k}{2f_1}y_l^2 + j\frac{k}{2d_2}y_l^2 - j\frac{k}{d_1}yy_l - j\frac{k}{d_2}y_1y_l \right] dy_l \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

因为

$$f_2 = d_2$$

式(3.4.4)中第一项积分成为

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(j\frac{k}{2d_1}x_l^2\right) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{x}{\lambda d_1} + \frac{x_1}{\lambda d_2}\right)x_l\right] dx_l \\ &= F\left\{ \exp\left[-\pi\left(\frac{x_l}{\sqrt{j\lambda d_1}}\right)^2\right] \right\} \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

由高斯函数的傅里叶变换式(见傅里叶变换表)可知,式(3.4.5)应变为

$$\begin{aligned} &\sqrt{j\lambda d_1} \exp[-j\pi\lambda d_1 f_x^2] \\ &= \sqrt{j\lambda d_1} \exp\left[-j\pi\lambda d_1 \left(\frac{x}{\lambda d_1} + \frac{x_1}{\lambda d_2}\right)^2\right] \\ &= \sqrt{j\lambda d_1} \exp\left(-j\pi\frac{x^2}{\lambda d_1}\right) \exp\left[-j\pi\lambda d_1 \left(\frac{x_l}{\lambda d_2}\right)^2\right] \times \exp\left(-j\pi\frac{2xx_l}{\lambda d_2}\right) \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

因为

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f_1}, \quad M = \frac{d_2}{d_1}$$

式(3.3.4)中第二项积分成为

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-j2\pi\left(\frac{y}{\lambda d_1} + \frac{y_1}{\lambda d_2}\right)y_l\right] dy_l = \delta\left(\frac{y}{\lambda d_1} + \frac{y_1}{\lambda d_2}\right) \\ &= \frac{\lambda d_2}{M} \delta\left(y + \frac{y_1}{M}\right) \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

式(3.4.6)、式(3.4.7)代入式(3.4.4),则

$$\begin{aligned}
 h(x, y; x_1, y_1) &= c \exp\left[j \frac{k}{2d_1}(x^2 + y^2)\right] \\
 &\quad \times \exp\left[j \frac{k}{2d_2}(x_1^2 + y_1^2)\right] \\
 &\quad \times \sqrt{j\lambda d_1} \exp\left[-j\pi\lambda d_1 \left(\frac{x_1}{\lambda d_2}\right)^2\right] \\
 &\quad \times \exp\left(-j\pi \frac{x^2}{\lambda d_1}\right) \exp\left(-j\pi \frac{2xx_1}{\lambda d_2}\right) \\
 &\quad \times \frac{\lambda d_2}{M} \delta\left(y + \frac{y_1}{M}\right)
 \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

利用 δ 函数性质,上式中因子

$$\exp\left(j \frac{k}{2d_1} y^2\right) \cdot \delta\left(y + \frac{y_1}{M}\right) = \exp\left[j \frac{k}{2d_1} \left(\frac{-y_1}{M}\right)^2\right] \delta\left(y + \frac{y_1}{M}\right) \tag{3.4.9}$$

式(3.4.9)代入式(3.4.8),把包括 x_1, y_1 的位相因子及所有常数并入 c' ,得到

$$h(x, y; x_1, y_1) = c' \exp\left(-j2\pi \frac{x_1}{\lambda d_2} x\right) \delta\left(y + \frac{y_1}{M}\right) \tag{3.4.10}$$

根据系统的线性性质, $x_1 y_1$ 平面上场分布可表示成迭加积分的形式

$$\begin{aligned}
 U(x_1, y_1) &= \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) h(x, y; x_1, y_1) dx dy \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) \cdot c' \exp\left(-j2\pi \frac{x_1}{\lambda d_2} x\right) \times \delta\left(y + \frac{y_1}{M}\right) dx dy
 \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

c' 与积分变量无关,可提出积分号外,把上式改写为

$$\begin{aligned}
 U(x_1, y_1) &= c' \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-j2\pi \frac{x_1}{\lambda d_2} x\right) \\
 &\quad \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) \delta\left(y + \frac{y_1}{M}\right) dy \right] dx
 \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

根据 δ 函筛选性质,得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) \delta\left(y + \frac{y_1}{M}\right) dy = U_0\left(x, -\frac{y_1}{M}\right)$$

把它代入式(3.4.11),于是

$$\begin{aligned}
 U(x_1, y_1) &= c' \int_{-\infty}^{\infty} U_0\left(x, -\frac{y_1}{M}\right) \exp\left(-j2\pi \frac{x_1}{\lambda d_2} x\right) dx \\
 &= c' G_0(f_x, y_k)
 \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

其中 $f_x = \frac{x_1}{\lambda d_2} = \frac{x_1}{\lambda f_2}$; $y_k = -\frac{y_1}{M}$ 。 c' 中的位相因子不影响强度记录。

这样就证明了采用两个焦距不同的柱面透镜的组合对于所给函数阵列得到了变换式的阵列。例如:当 $d_1 = d_2 = 2f_1$ 及 $f_2 = 2f_1$ 时,在 x 方向实现傅里叶变换,而在 y 方向得到 1:1 的成像关系。

(b) 证明

为了实现这一变换式阵列,还可采用如图 3.4.6 的方法。把焦距 f 相同的圆柱透镜和球

面透镜重叠放置,物面置于柱面透镜的前焦面,观察面选在球面透镜后焦面上。 x 方向由球面透镜实现一次傅里叶变换。 y 方向上,由于柱面透镜和球面透镜的组合焦距为 $f/2$,物距为 f ,故在 y 方向系统实现1:1 成像。

证明方法同(a),仍从分析线性系统的脉冲响应入手,再由叠加积分求系统的输出。

由 (x, y) 点发出的单位振幅发散球面波在 $x_1 y_1$ 平面上场分布的傍轴近似为

$$U_l(x_l, y_l) = \frac{1}{j\lambda f} \exp\left\{j \frac{k}{2f} [(x_l - x)^2 + (y_l - y)^2]\right\}$$

柱面透镜和球面透镜的位相变换分别为

$$\exp\left(-j \frac{k}{2f} y_l^2\right) \text{ 及 } \exp\left[-j \frac{k}{2f} (x_l^2 + y_l^2)\right]$$

忽略吸收,不考虑透镜孔径的大小,得到透射光场复振幅分布

$$\begin{aligned} U'_l(x_l, y_l) &= \frac{1}{j\lambda f} \exp\left\{j \frac{k}{2f} [(x_l - x)^2 + (y_l - y)^2]\right\} \\ &\quad \times \exp\left(-j \frac{k}{2f} y_l^2\right) \exp\left[-j \frac{k}{2f} (x_l^2 + y_l^2)\right] \\ &= \frac{1}{j\lambda f} \exp\left[j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2)\right] \exp\left(-j \frac{k}{2f} y_l^2\right) \\ &\quad \times \exp\left[-j \frac{k}{f} (x_l x + y_l y)\right] \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

这一光波场传播到 $x_1 y_1$ 平面上得到的场分布即为脉冲响应,根据菲涅耳衍射方程

$$\begin{aligned} h(x, y; x_1, y_1) &= \frac{\exp(jkf)}{j\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} U'_l(x_l, y_l) \\ &\quad \times \exp\left\{j \frac{k}{2f} [(x_1 - x_l)^2 + (y_1 - y_l)^2]\right\} dx_l dy_l \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

式(3.4.14)代入式(3.4.15),把全部常数因子合并为 c ,并分离变量得到

$$\begin{aligned} h(x, y; x_1, y_1) &= c \exp\left[j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2)\right] \exp\left[j \frac{k}{2f} (x_1^2 + y_1^2)\right] \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(j \frac{k}{2f} x_l^2 - j \frac{k}{f} x_l x - j \frac{k}{f} x_l x_1\right) dx_l \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-j \frac{k}{f} y_l y - j \frac{k}{f} y_l y_1\right) dy_l \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

上式中两个积分可按与(a)中相同方法分别计算如下

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(j \frac{k}{2f} x_l^2\right) \exp\left[-j 2\pi \left(\frac{x}{\lambda f} + \frac{x_1}{\lambda f}\right) x_l\right] dx_l \\ &\quad \sqrt{j\lambda f} \exp\left[-j\pi\lambda f \left(\frac{x_1}{\lambda f}\right)^2\right] \exp\left(-j\pi \frac{x^2}{\lambda f}\right) \times \exp\left(-j\pi \frac{2xx_1}{\lambda f}\right) \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-j 2\pi \left(\frac{y}{\lambda f} + \frac{y_1}{\lambda f}\right) y_l\right] dy_l = \lambda f \delta(y + y_1) \end{aligned}$$

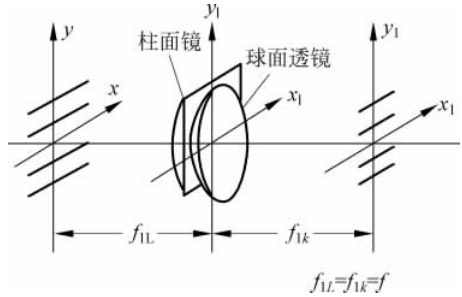


图 3.4.6 例 3.3 图(2)

把它们代入式(3.4.16)后,得到

$$\begin{aligned}
 h(x, y; x_1, y_1) &= c \exp\left[j \frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right] \\
 &\quad \times \exp\left[j \frac{k}{2f}(x_1^2 + y_1^2)\right] \\
 &\quad \times \sqrt{j\lambda f} \exp\left[-j\pi\lambda f \left(\frac{x_1}{\lambda f}\right)^2\right] \exp\left(-j\pi \frac{x^2}{\lambda f}\right) \\
 &\quad \times \exp\left(-j\pi \frac{2xx_1}{\lambda f}\right) \cdot \lambda f \delta(y + y_1)
 \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

利用 δ 函数性质,上式中因子

$$\exp\left(j \frac{k}{2f}y^2\right) \cdot \delta(y + y_1) = \exp\left[j \frac{k}{2f}(-y_1)^2\right] \delta(y + y_1)$$

将它代入式(3.4.17),然后把包括 y_1 的位相因子及所有常数并入 c' ,则有

$$h(x, y; x_1, y_1) = c' \exp\left(-j2\pi \frac{x_1}{\lambda f}x\right) \delta(y + y_1)$$

根据系统的线性性质,用叠加积分计算输出平面场分布为

$$\begin{aligned}
 U(x_1, y_1) &= \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) h(x, y; x_1, y_1) dx dy \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) \cdot c' \exp\left(-j2\pi \frac{x_1}{\lambda f}x\right) \times \delta(y + y_1) dx dy
 \end{aligned}$$

式中 c' 与积分变量无关,可提出积分号外,于是

$$\begin{aligned}
 U(x_1, y_1) &= c' \int_{-\infty}^{\infty} \left(-j2\pi \frac{x_1}{\lambda f}x\right) \\
 &\quad \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) \delta(y + y_1) dy\right] dx
 \end{aligned}$$

利用 δ 函数筛选性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) \delta(y + y_1) dy = U_0(x, -y_1)$$

所以,

$$\begin{aligned}
 U(x_1, y_1) &= c' \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x, -y_1) \exp\left(-j2\pi \frac{x_1}{\lambda f}x\right) dx \\
 &= c' G_0(f_X, y_k)
 \end{aligned}$$

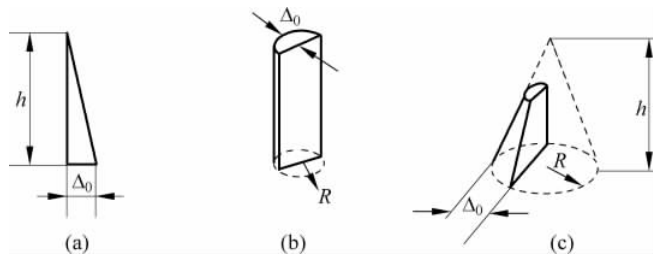
其中 $f_X = \frac{x_1}{\lambda f}$, $y_k = -y_1$, c' 中的位相因子不影响强度记录。

习题

3.1 在薄透镜假设下,求出下面 3 种光学元件的位相变换因子。并说明每种元件对正入射平面波的效应是什么?

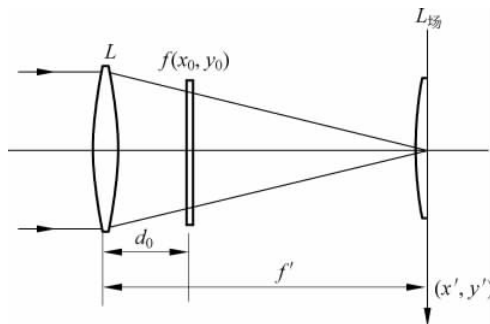
(1) 光楔(题 3.1 图(a));

- (2) 柱面透镜(题 3.1 图(b));
 (3) 锥面透镜(题 3.1 图(c))。



题 3.1 图

3.2 在如题 3.2 图所示的傅里叶变换系统中,为了在透镜后焦面上探测到物体的准确傅里叶变换,可以在探测面上放置一个正场镜。求这个场镜的焦距 f' ,并说明这样做的理由。



题 3.2 图

3.3 分析题 3.3 图各系统中,在 (x, y) 平面上观察到的光场分布是属于物体透过率函数 $\tau(x_0, y_0)$ 的非涅耳衍射还是夫琅和菲衍射? 有哪些符合准确的傅里叶变换关系? 在各种傅里叶变换光路中,指出空间频率坐标和频率平面上空间坐标之间的比例系数,并指出二次位相弯曲的曲率中心。

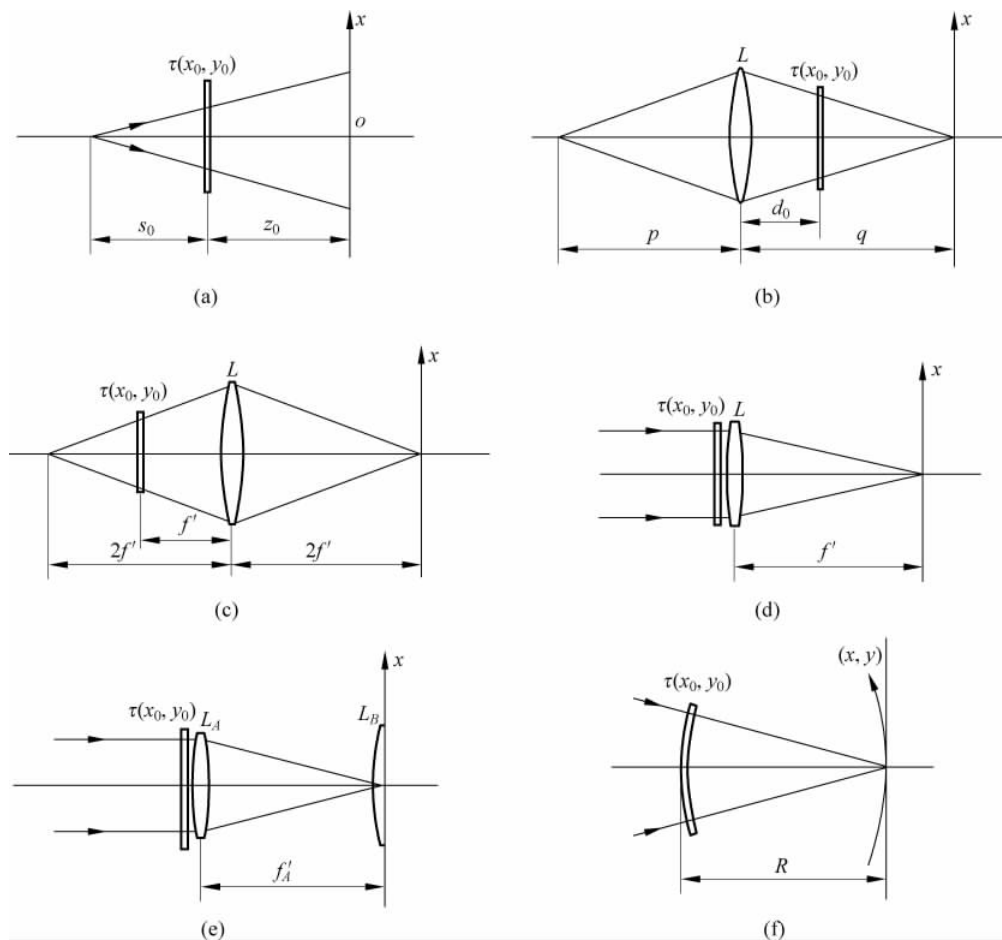
3.4 采用如题 3.4 图所示的傅里叶变换系统。已知透镜孔径 $D=50\text{mm}$, 焦距 $f'=2000\text{mm}$, 物体透明片 O 到透镜的距离 $d_0=1000\text{mm}$, 用单位振幅的单色平面波正入射照明, 光波长 $\lambda=0.633\mu\text{m}$ 。物体复振幅表示为

$$O(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(1 + \cos 20\pi x_0) \cdot \text{rect}\left(\frac{x_0}{10}\right) \text{rect}\left(\frac{y_0}{10}\right)$$

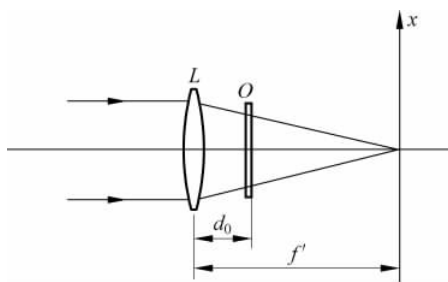
大致画出透镜后焦面上沿 x 方向的强度分布, 算出各衍射分量之间的间隔和各衍射分量宽度的数值。

3.5 如题 3.5 图所示的光学系统, 将输入透明片 $\tau_1(x_0, y_0)$ 和 $\tau_2(x_1, y_1)$ 分别放置在透镜 L_1 和 L_2 的前面。设 $f'_1=2\alpha, f'_2=\alpha$, 且 L_1, L_2 和屏幕 P 三者之间间隔均为 2α , 求 P 面上的复振幅和光强分布?

3.6 一个被直径为 l 的圆孔限制的物函数 τ_0 , 把它放在直径为 D 的会聚透镜前焦面



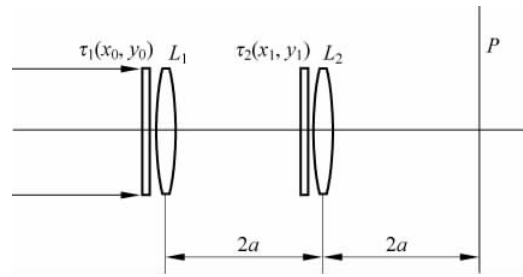
题 3.3 图



题 3.4 图

上,测量透镜后焦面上强度分布(假设 $D > l$)。

- (1) 求出对于多大的空间频率,测得强度还能代表物体傅里叶谱的模平方的准确值?
- (2) 令 $D = 40\text{mm}$, $l = 20\text{mm}$, $f' = 500\text{mm}$,计算这个最大空间频率?
- (3) 在多大空间频率以上,就测不出物体的频谱值? 尽管物体实际上有更高的空间频率分量存在,按上面得出的条件,计算这个频率值。



题 3.5 图