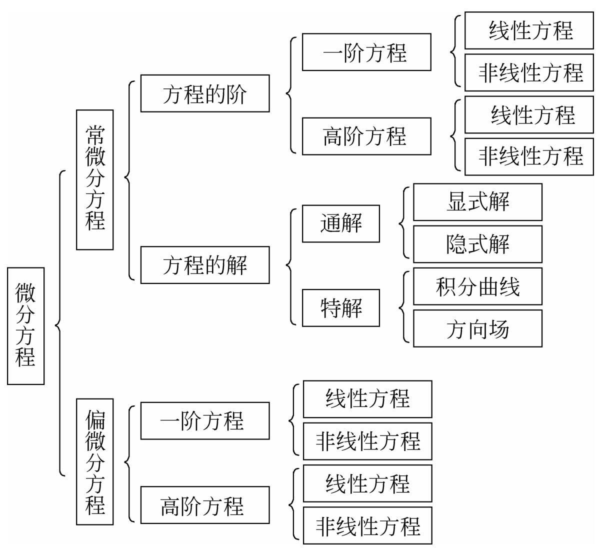
# 第1章

# 微分方程概论

## 一、知识点归纳




## 二、习题解答

1. 指出下列微分方程的阶数，并回答微分方程是否线性的.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4x^2-y$；　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+12xy=0$；

(3) $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3y^2=0$；　　(4) $x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-5\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3xy=\sin x$；

(5) $\frac{dy}{dx}+\cos y+2x=0$； (6) $\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+e^y=x$.

**解** (1) 一阶；线性的； (2) 二阶；非线性的； (3) 一阶；非线性的；
(4) 二阶；线性的； (5) 一阶；非线性的； (6) 二阶；非线性的.

2. $y=\sin\frac{1}{x}$是微分方程

$$x^2y''+2xy'+x^{-2}y=0$$

的解吗？在什么条件下是？在什么条件下不是？为什么？

**解** 函数 $y=\sin\frac{1}{x}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，即当 $x\neq 0$ 时，函数 $y=\sin\frac{1}{x}$是上述微分方程的解；当 $x=0$ 时，函数没有定义，故不能成为微分方程的解.

3. 验证函数$\frac{1}{1+x^2}$是方程$(1+x^2)y''+4xy'+2y=0$ 的解.

**解** 由 $y=\frac{1}{1+x^2}$知，$y'=\frac{d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{dx}=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$，$y''=\frac{d\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)}{dx}=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$，于是

$$(1+x^2)y''+4xy'+2y=(1+x^2)\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}+4x\frac{-2x}{(1+x^2)^2}+2\frac{1}{1+x^2}=0,$$

所以函数 $y=\frac{1}{1+x^2}$是微分方程$(1+x^2)y''+3xy'+2y=0$ 的解.

4. 验证由 $x^3+3xy^2=1$ 所确定的隐函数是方程 $2xy\frac{dy}{dx}+x^2+y^2=0$ 在区间$(0,1)$上的解.

**解** 将方程 $x^3+3xy^2=1$ 两边对 $x$ 求导，得 $3x^2+6xy\frac{dy}{dx}+3y^2=0$，即 $2xy\frac{dy}{dx}+x^2+y^2=0$. 又函数 $x^3+3xy^2=1$ 中 $x$ 的取值范围为$(0,1]$，而当 $x=1$ 时，$y=0$，但 $y=0$ 不是方程 $2xy\frac{dy}{dx}+x^2+y^2=0$ 的解，因此，由 $x^3+3xy^2=1$ 所确定的隐函数是方程 $2xy\frac{dy}{dx}+x^2+y^2=0$ 在区间$(0,1)$上的解.

5. 证明$|y'|+|y|=0$ 有一个解，但不是通解；证明$|y'|+1=0$ 根本没解.

**证明** 由$|y'|+|y|=0$ 可得$\begin{cases}|y'|=0\\|y|=0\end{cases}$，则 $y=0$，即 $y=0$ 是方程的一个解，但不是通解(通解中需含有一个任意常数).

由$|y'|+1=0$ 得$|y'|=-1$，这是不可能的，因此无解.

6. 证明 $y=(x+c)^2$($c$ 为任意常数)是一阶方程$(y')^2-4y=0$ 的通解；$y=0$ 也是该微分方程的解，但它不在通解中.

**证明** 由 $y=(x+c)^2$ 知，$y'=2(x+c)$，于是$(y')^2-4y=4(x+c)^2-4(x+c)^2=0$，$y=(x+c)^2$ 是方程的解，并且含有一个任意常数 $c$，因此是通解.

显然，$y=0$ 也是该微分方程的解，但不包含在通解中(即不能通过 $c$ 的取值来得到这个解).

7. 给定一阶微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$，

(1) 求出它的通解；

(2) 求出通过点(1,4)的特解；

(3) 求出与直线 $y=2x+3$ 相切的解；

(4) 求出满足条件 $\int_0^1 y\mathrm{d}x=2$ 的解；

(5) 绘出解(2)、(3)、(4)的图形.

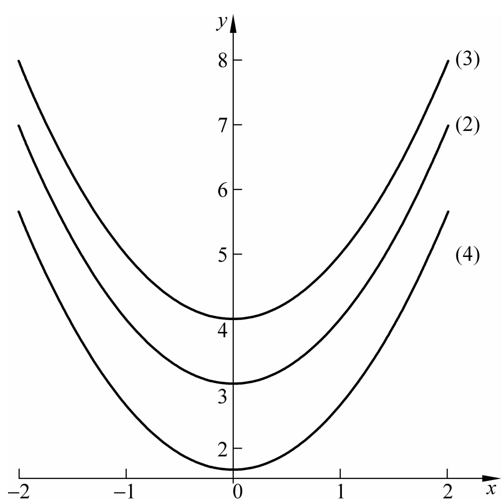
**解**　(1) 由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$，得通解 $y=x^2+c$，$c$ 为任意常数.

(2) 当 $x=1$ 时，$y=1+c=4$，得 $c=3$，即特解为 $y=x^2+3$.

(3) 该解与直线 $y=2x+3$ 相切，可知方程 $x^2+c=2x+3$ 只有一个解，即 $\Delta=4-4(c-3)=0$，$c=4$，得解为 $y=x^2+4$.

(4) $\int_0^1 y\mathrm{d}x=\int_0^1(x^2+c)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^3}{3}+cx\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}+c=2$，$c=\dfrac{5}{3}$，得解为 $y=x^2+\dfrac{5}{3}$.

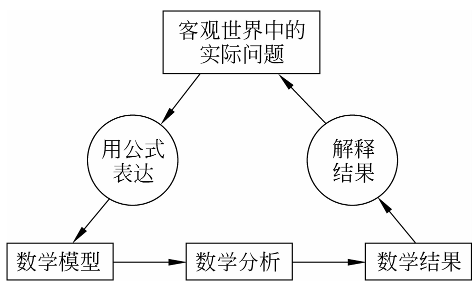
(5) 如图



# 第2章

# 微分方程模型

## 一、数学模型与实际问题的关系




## 二、习题解答

1．试分别建立具有下列性质的曲线满足的微分方程.

（1）曲线上任意一点的切线与该点的向径之间的夹角为零；

（2）曲线上任意一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定长 $a$；

（3）曲线上任意一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积都等于常数 $A^2$；

（4）曲线上任意一点的切线介于两坐标轴之间的部分被切点等分；

（5）曲线上任意一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方；

（6）曲线上任意一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项；

（7）曲线上任意一点的切线的斜率与切点的横坐标成正比.

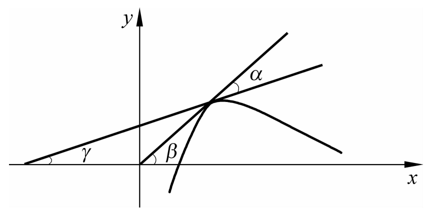
**解**　（1）设所求曲线方程为 $y=y(x)$，由题设，曲线上任意点 $(x,y)$ 处切线的斜率 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 应

与该点向径所在直线的斜率$\frac{y}{x}$相等，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}.$$

这就是所求曲线满足的微分方程.

如果要求曲线满足"曲线上任意点的切线与该点的向径之间的夹角为$\alpha$"的微分方程，则如图所示




则有

$$\tan\alpha=\tan(\beta-\gamma)=\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\tan\gamma},$$

但$\tan\beta=\frac{y}{x}$，$\tan\gamma=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，于是有

$$\tan\alpha=\frac{\frac{y}{x}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{1+\frac{y}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{y-xy'}{x+yy'}\quad\text{或}\quad y'=\frac{y-x\tan\alpha}{x+y\tan\alpha}.$$

（2）设所求曲线方程为$y=y(x)$，则该曲线在任意点$(x,y)$处的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x).$$

此切线与$x$轴和$y$轴的交点分别为$A\left(\frac{xy'-y}{y'},0\right)$和$B(0,y-xy')$，由题意，$A$，$B$两点间的距离等于$a$，即

$$\left(\frac{xy'-y}{y'}\right)^2+(xy'-y)^2=a^2.$$

这就是所求曲线满足的微分方程.

（3）由题意，并利用上题结果，有

$$\frac{1}{2}\left|\frac{xy'-y}{y'}\right|\,|xy'-y|=A^2,$$

于是所求微分方程即为

$$\left|\left(x-\frac{y}{y'}\right)(y-xy')\right|=2A^2.$$

（4）由题(2)知，曲线$y=y(x)$在任意点$(x,y)$处的切线与$x$轴和$y$轴的交点分别为$A\left(\frac{xy'-y}{y'},0\right)$和$B(0,y-xy')$，由题意，切点$(x,y)$为$A$，$B$两点连线的中点，即

$$x=\frac{xy'-y}{2y'},\quad y=\frac{y-xy'}{2},$$

化简得 $y+xy'=0$,此即为所求.

(5) 由题(2)知,曲线 $y=y(x)$ 在任意点 $(x,y)$ 处的切线在 $y$ 轴上的纵截距为 $|y-xy'|$,由本题题意有

$$|y-xy'|=x^2,$$

此方程即为所求.

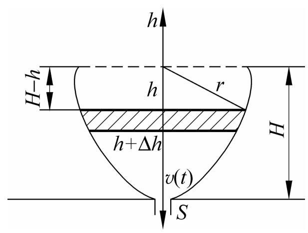
(6) 由题(2)知,曲线 $y=y(x)$ 在任意点 $(x,y)$ 处的切线在 $y$ 轴上的纵截距为 $|y-xy'|$,由本题题意有

$$|y-xy'|=\frac{x+y}{2},$$

即 所求方程为 $2|y-xy'|=x+y$.

(7) 由题意,所求方程即为 $y'=kx$,其中 $k$ 为比例常数.

2. 有高为 $H$(cm)的半球形容器(如下图所示),水从它的底部小孔流出,小孔的横截面积为 $S$(cm$^2$),开始时容器盛满水,问要多少时间水流完?




**解**　水从孔口流出的流量(即通过孔口横截面的水的体积 $V$ 对时间 $t$ 的变化率)可用下列公式计算

$$\mathrm{d}V=S\mu\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t$$

其中,$\mu$ 为流量系数,$S$ 为孔口横截面积,$g$ 为重力加速度,$h$ 为水面高度,$\mu\sqrt{2gh}$ 表示液体流出的速率.

另一方面,从小口流出的水的体积与半球容器中水下降高度 $\Delta h$ 的水的体积相等,即

$$\mathrm{d}V=\pi r^2\Delta h=-\pi\left(\sqrt{H^2-(H-h)^2}\right)^2\mathrm{d}h=-\pi(2Hh-h^2)\mathrm{d}h$$

由以上两个式子得

$$S\mu\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t=-\pi(2Hh-h^2)\mathrm{d}h,\quad h\in[0,H],$$

或

$$S\mu\sqrt{2g}\,\mathrm{d}t=-\pi(2Hh^{\frac{1}{2}}-h^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}h,\quad h\in[0,H].$$

两边积分得

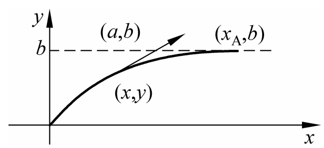
$$S\mu\sqrt{2g}t=-2H\pi\frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}}+\pi\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}+C$$

因为当 $t=0$ 时，有 $h=H$，所以 $C=\frac{14}{15}\pi H^{\frac{5}{2}}$，于是

$$t=\frac{1}{S\mu\sqrt{2g}}\left(\frac{2}{5}\pi h^{\frac{5}{2}}-\frac{4H}{3}\pi h^{\frac{3}{2}}+\frac{14}{15}\pi H^{\frac{5}{2}}\right).$$

当 $h=0$ 时，水全部流完，这时 $t=\frac{14\pi H^{\frac{5}{2}}}{15S\mu\sqrt{2g}}$.

3. 导弹跟踪问题. 如图所示，设在初始时刻 $t=0$ 时，导弹位于坐标原点(0,0)，飞机位于点$(a,b)$，飞机沿着平行于 $x$ 轴的方向以常速 $v_0$ 飞行，导弹按照制导系统始终指向飞机以常速 $v_1$ 飞行，求导弹的飞行轨迹和击中飞机所需的时间 $T$.




**解**　设在时刻 $t$ 时，飞机位于点$(x_A,b)$. 导弹位于点$(x(t),y(t))$，根据题意有

$$x_A=a+v_0t.$$

由于导弹指向飞机，点$(x_A,b)$在导弹飞行轨迹的切线上，故有

$$b-y(t)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}[x_A-x(t)],$$

即

$$[a+v_0t-x(t)]=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}[b-y(t)]. \tag{1}$$

又导弹飞行的速度向量是$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$，以常速 $v_1$ 飞行，所以有

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=v_1^2,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{v_1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}}. \tag{2}$$

将(1)式两边对 $t$ 求导，得到

$$v_0-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(b-y)-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(b-y)=v_0. \tag{3}$$

将(2)式代入(3)式，得到如下二阶非线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\lambda\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}}{b-y}, \tag{4}$$

式中 $\lambda=\frac{v_0}{v_1}$ 是飞机与导弹的速度比.由题意,有以下边界条件

$$\begin{cases} x(0)=0, \\ x(b)=a+v_0 T. \end{cases} \tag{5}$$

于是,追击问题的数学模型是由(4)式和(5)式组成的二阶常微分方程的边值问题,其求解,见本书第 3 章,习题解答二中的第 29 题.

4. 以总数为 50 万元进行某种连续的复式投资,其收益率是每年 8%,求 25 年后钱的总量.

**解**　设 $p(t)$ 为在任何时刻 $t$ 存折中的数额,最初 $N(0)=500\ 000$.由题意,

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}-0.08p(t)=0.$$

这个方程的通解是

$$p(t)=c\mathrm{e}^{0.08t}.$$

由初始条件 $N(0)=500\ 000$,得 $c=500\ 000$,于是有

$$p(t)=500\ 000\mathrm{e}^{0.08t}.$$

将 $t=25$ 代入,得

$$p(25)=500\ 000\mathrm{e}^{0.08\times 25}\approx 3.694\ 528\ 050\times 10^6.$$

5. 假设商场中某种商品在时刻 $t$ 的价格为 $p(t)$,已知变化率与需求量 $D$ 和供给量 $S$ 之差成正比(比例常数为 $k$),若

$$D=a-bp,\quad S=-c+dp,$$

其中 $a,b,c,d$ 为正的常数,若初始价格为 $p_0$,求时刻 $t$ 时,该商品的价格.

**解**　由题意

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}=a-bp(t)+c-dp(t),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}=a+c-(b+d)p(t).$$

问题的通解是

$$p(t)=c\mathrm{e}^{-(b+d)t}+\frac{a+c}{b+d}.$$

将初始条件 $p(0)=p_0$ 代入得 $c=p_0-\frac{a+c}{b+d}$,于是

$$p(t)=\left(p_0-\frac{a+c}{b+d}\right)\mathrm{e}^{-(b+d)t}+\frac{a+c}{b+d},$$

即为所求.