第1章　牛顿力学基础

物理学是探究物质结构和运动基本规律的学科。物质的运动形式是多种多样的，其中最简单、最基本的运动是描述物体位置变化的机械运动，而机械运动往往被包含在其他更高级的运动形式之中，如热运动、电磁运动等。研究机械运动的是力学，它涉及地面上交通工具的行驶，宇宙的探测，大气、江河的流动，及基本粒子相互作用的径迹分析等。17世纪牛顿在伽利略、开普勒等人工作的基础上，综合了世世代代前人的研究成果，总结出三条运动定律（牛顿三定律）而建立了完整的经典力学理论，成为近代物理学的开端与科学发展的基础。

1.1　牛顿力学的建立与发展

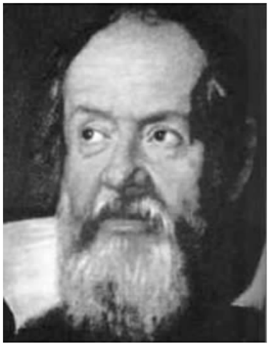
1.1.1　牛顿力学的建立与发展概述

牛顿（Isaac Newton，英国，1643—1727）在给物理学家R. 胡克（Robert Hook，英国，1635—1703）的一封信中有一句名言："如果我看得更远，那是站在巨人的肩上"。牛顿力学的建立是一大批科学家辛勤劳动的产物，是社会发展的需求。如果说意大利科学家伽利略关于地面物体运动的理论和德国天文学家开普勒关于天体运动的理论为经典力学理论体系的建立铺平了道路，那完成这一重任的是英国科学家牛顿，他把似乎截然不同的地面运动和天体运动的规律概括在了一个严密统一的理论中。牛顿出生在英国一个不富裕的农民家庭，是遗腹子，靠祖母抚养成人。17岁进剑桥大学学数学，广泛阅读了各类书籍，涉及天文学、数学、力学、光学、化学、神学及炼金术等领域。牛顿的成就是多方面的，特别是1687年伟大的《自然哲学的数学原理》一书的出版，标志着力学作为一门严谨科学的诞生。

牛顿
（1643—1727）

亚里士多德（Aristotle，希腊，384 BC—322 BC）是古希腊古典文化的集大成者，是他首先进行科学分类。他所命名的"物理学"是泛指无生命物体的运动与时间、空间及与周

围物体之间关系的一门独立自然学科，并首先使用数学方法考察具体物理规律。不过，亚里士多德的物理学理论基本上是错误的，因为它是根据人的感觉经验和逻辑理性建立起来的经验性的体系，后经神学改装，使人们一直束缚在以生活经验为基础的亚里士多德的传统观念中近2000年。所以，走出这加上神学色彩的传统观念，批驳亚里士多德的错误，是一个自然哲学的基础问题，是一场重要的思想革命，意大利科学家伽利略(Galileo Galilei，1564—1642)对此作出了非常重要的贡献。他的传世之作是1632年出版的《关于托勒密和哥白尼两大世界体系对话》和1638年出版的《关于力学和局部运动两门新科学的谈话和数学证明》，在科学实验的基础上融会贯通了数学、物理学和天文学三门知识，以非凡的文学才能、生动的语言以及严密的科学推理方法证实和传播了日心说，陈述了他在力学方面研究的成果。伽利略认为世界是一个有秩序的服从简单规律的整体，要了解大自然就必须进行系统的实验上的定量观测，并且找出其中精确的数量关系。这种新的科学思想和科学研究方法的提出，开创了以实验事实为基础并具有严密逻辑体系的近代科学。爱因斯坦曾评论说："伽利略的发现以及他所应用的科学推理方法，是人类思想史上最伟大的成就之一，而且标志着物理学的真正开端。"伽利略第一次提出了惯性和加速度，第一次把力和运动改变联系起来；在"作匀速直线运动的船舱中物体运动规律不变"的著名论述中第一次提出了惯性参照系的概念，提出了相对性原理的思想；对弹道的研究发现了运动独立性原理和运动的合成与分解。这些以及其他物理学概念和原理的创新为牛顿力学理论体系的建立奠定了基础。



伽利略

(1564—1642)

与此同时，德国天文学家开普勒(J. Kepler，1571—1630)的行星运动三定律揭开了行星运动之谜。大约公元150年，亚历山大城的托勒密(C. Ptolemaeus，90—168)提出了完善的地心说，认为宇宙有"九重天"，而地球位于宇宙中心岿然不动。他的理论能够相当准确地测算出太阳、月亮和行星的位置，在后来的1400年间一直是天文和航海家的有用工具。但是，利用这种宇宙模型计算和描述天体运动非常繁琐和复杂，并且和不断获得的观测数据有时相差较大而不得不对模型中的数学公式进行极麻烦的修正。尽管如此，由于以地球为参照系观测星球的运动与人们的直观经验相一致，且后来教会利用它来论证"人类中心"，地心说在天文学上一直占统治地

开普勒

(1571—1630)

位，直到 1543 年波兰天文学家哥白尼(Copernicus，1473—1573)提出完善的太阳中心说。哥白尼高度赞扬发光的太阳，并且发现如以太阳为宇宙中心(除月球绕地球运转外，地球和行星都一边自转一边围绕太阳作匀速圆周运动的公转)的宇宙结构模型来描述和计算天体运动时，一切将变得清晰和简单。

哥白尼的日心体系与地心体系之间的根本区别在于描述所观测运动时所选取的参照系不同。日心说的科学意义也就在于这参照系的改变，它为理解行星的运动开辟了一条新的途径。这种变化富有启发意义，正是这种启发导致开普勒等人按全新的方式来考虑行星的真实轨道。开普勒富有想象力，善于抽象思维和理论分析，他发现哥白尼行星的匀速圆周运动与实际的天文观测资料还是有出入。于是他就从这些“出入”开始，经过多年的努力，分别于 1609 年和 1619 年发表了行星运动三定律。第一定律是“轨道定律”：所有行星分别在大小不同的椭圆轨道上围绕太阳运动，太阳位于这些椭圆的一个焦点上。第二定律是“面积定律”：行星和太阳之间所连直线在相等的时间内扫过的面积相等。第三定律是“周期定律”：行星绕太阳一周所需的时间(公转周期)的平方，和它的轨道长半轴的立方成正比。行星运动三定律澄清了太阳系的空间位形，它们的发现向人们提出了新课题：是什么样的力维系这些天体遵从这样的轨道运动？经过许多科学家对此问题的探索，导致了经典力学大厦一根重要支柱——万有引力定律的建立。

一大批科学家的辛勤劳动给牛顿力学的建立“预备好了最适宜的环境”。正是在这种环境下，牛顿完成了人类对自然界认识的第一次大综合，在《自然哲学的数学原理》一书中总结和提炼了当时已发现的地面上所有的力学规律。他把伽利略提出、笛卡儿(Reneé Descartes，法国，1596—1650)完善的惯性定律作为了第一定律；在定义了质量、力和动量后，提出了动量改变与外力的关系，把它作为第二定律；在多人关于碰撞现象研究结果的基础上，提出了作用力与反作用力的关系，作为了第三定律。该书中还提到力的独立性原理、伽利略相对性原理、动量守恒定律以及对空间和时间的理解等。在该书中牛顿在开普勒等人的研究基础上，把地球上的三定律应用到了行星的运动，用微积分解释了开普勒的椭圆轨道，正确提出了地球表面物体所受的重力与地球月球之间的引力、太阳行星之间的引力具有相同的本质，得出了万有引力定律，从而宣告了天地间物体的机械运动都遵从同样的力学规律——牛顿三定律。

1750 年，瑞士数学家、物理学家欧拉(Leonhard Euler，1707—1783)给出了《自然哲学的数学原理》中并未给出的第二定律的精确形式，也就是今天我们所使用的公式

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} \tag{1-1}$$

并且，由于欧洲数学家的努力，从直角坐标系扩展到极坐标、自然坐标等坐标系，由常微分方程发展为偏微分方程，由微分形式演变为变分形式，形成了现代的分析力学。

功、能概念的出现是牛顿力学的重要发展,而以势能的变化代替保守力做功是其中一个关键性的进展。“功”的概念是早期工业革命中工程师为比较蒸汽机效率而提出的,“能”是英国医生托马斯·杨(Thomas Young,1773—1829)于1807年提出的。直到19世纪中期,才逐步把$\frac{1}{2}mv^2$确认为动能,与物体相对位置有关的势函数称做势能,统称为机械能。

18世纪在力学发展中出现了和物体转动有关的“角动量”概念,19世纪人们把它看作是基本概念之一,从此对以前不认识的客观存在的角动量守恒规律有了认识。19世纪末对三体问题的研究以及20世纪70年代混沌现象的发现是牛顿力学的另一个发展,使得我们对牛顿力学有了更深刻的认识。

1.1.2 牛顿三定律的表述

1.1.2.1 牛顿第一定律

任何物体,只要没有外力改变它的状态,便会永远保持静止或匀速直线运动的状态。其数学形式可表示为:$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$时,$\boldsymbol{v}=$恒矢量。

1. 质点

定律中的“物体”指的是“质点”,质点是一个理想化模型,是只有质量而没有大小和形状的点。实际物体的形状、大小千差万别,在空间位置随时间变化(机械运动)过程中其形状和大小也可能发生各种变化(形变),质点就是忽略这些因素,考虑的只是物体的整体移动。比如跳水运动员,我们说他在空中的运动轨迹是一个抛物线,如图1-1所示,实际上已把他看作了一个质点。这个抛物线实际上是运动员身体质量中心(叫质心)的轨迹。又如,在考虑地球绕太阳公转时,把地球看作一质点在椭圆轨道(地球质心的轨迹)上运行,而太阳(太阳的质心)作为另一质点位于此椭圆轨迹的一个焦点上。

我们说一个物体从空间一个位置移动到另一位置,指的是物体的整体移动。从数学上度量物体移动时,当然需要物体准确的空间位置(数学点),数学点上积聚了物体的全部质量,这个数学点应该就是物体的质心。也就是说,无论物体上任意点运动情况如何,不论物体的大小和运动范围,当只考虑物体整体运动时都可以把它看作质点,质心的位置就是质点的位置。一个质量均匀分布的球体,其质心应是它的球心;一个质量均匀分布的立方体,其质心应是它的体心;地面上不太大的运动物体质心位置与重心相同。

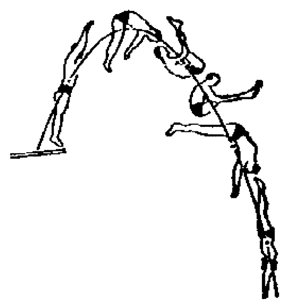


图1-1 跳水运动员的运动

如果考虑的是物体转动(比如地球自转),那就不能把物体(地球)看作质点;如果考虑组成物体各部分的运动时,当然

也不能把物体当作一个质点。如研究跳水运动员在跳水过程中其头部的运动时，跳水运动员整体不能当作质点，但其头部却可以看成质点。图 1-2 中，如果 A，B 之间有相对运动，而需要研究它们各自的运动状态时，就不能把 A 与 B 组合体看作一个质点。如果 A，B 之间没有相对运动，它们的运动情况一样，那 A 与 B 的组合体就可以当作一个质点处理。

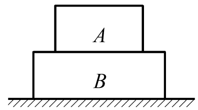


图 1-2　A,B 组合体

2. 惯性和惯性系

第一定律表明，任何物体都有保持静止或匀速直线运动状态的特性，这种特性叫惯性，故第一定律又称惯性定律。惯性反映了物体改变运动状态的难易程度。同时，第一定律也确定了力的含义，物体质点所受的力是外界对物体的一种作用，是试图改变物体静止或匀速直线运动状态的作用。

由于任何一个物体不可能不受到外力作用，所以第一定律不能直接用实验严格验证，但可间接验证。一个具有一定初速度的物体在粗糙水平面上只能滑动一定的路程，因为有摩擦阻力存在。如果在较光滑的水平面上，摩擦外力较小，可滑动较长的距离。可以外推，如果物体在一理想的绝对光滑的水平面上，不受外来阻力的影响，它就会保持其初速度不变而匀速直线运动下去。这只不过是理想化外推而已。然而，如果物体受到两个或两个以上外力时，当外来作用相互抵消时，实验上可观测到受力平衡物体和不受到外力作用一样，保持静止或匀速直线运动的状态，不过这是间接验证。

静止、匀速直线运动等运动状态的观测是离不开参照系的。如果在 S 参照系中，观测到一受力平衡物体保持着静止或匀速直线运动的状态，而在相对 S 作加速运动的参照系 S' 中，观测到受力平衡物体不再保持静止或匀速直线运动的状态，即第一定律在 S' 中不成立。我们把惯性定律在其中成立的参照系称为惯性参照系，简称惯性系，而把 S' 称为非惯性系。一个参照系是否是惯性系，只能根据观测和实验来判断。实验证明，以太阳为参照系观测到行星和宇宙飞行器的运动非常好地符合牛顿定律，所以太阳参照系是惯性系。可以证明，相对惯性系作匀速直线运动的参照系也是惯性系。地球相对太阳既有公转又有自转，所以地球不是惯性系。不过，地面上观测到的空间范围不大、时间间隔不长的力学现象，它们也相当好地符合牛顿定律，所以地面（或地球）参照系可看作近似程度相当好的惯性系，而相对地面静止或匀速直线运动的物体都可近似地当作惯性系。

1.1.2.2　牛顿第二定律

在第一定律的基础上，牛顿第二定律进一步阐明了质点在外力作用下其运动状态变化的具体规律，即确定了力、质量、加速度的定量关系。

物体（质点）运动时总具有速度，速度是矢量，是表述物体运动状态的物理量。把质点的质量 m 与其速度 $\boldsymbol{v}$ 的乘积称做质点的动量，用 $\boldsymbol{p}$ 表示，有

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v} \tag{1-2}$$

它也是矢量,既具有大小,也具有方向(方向与速度$\boldsymbol{v}$的方向相同),其合成服从平行四边形法则。牛顿第二定律阐明了作用于质点的合外力与其动量变化的关系,即

动量为$\boldsymbol{p}$的质点,某时刻受到合外力$\boldsymbol{F}$($\boldsymbol{F}=\sum\limits_i \boldsymbol{F}_i$)的作用,其动量随时间的变化率等于该时刻作用于质点的合外力。数学表达式为

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}+m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1-3}$$

它是牛顿力学的基本方程。在经典力学中,质点的质量是不变的,即$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$,则

$$\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=m\boldsymbol{a} \tag{1-4}$$

依据矢量性质,上面矢量方程在直角坐标系中可写成分量式,为

$$F_x=\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t},\quad F_y=\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t},\quad F_z=\frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} \tag{1-5}$$

或

$$F_x=ma_x,\quad F_y=ma_y,\quad F_z=ma_z \tag{1-6}$$

1. 力和加速度

第二定律概括了力的独立性(叠加性)。如果几个力同时作用在一个物体上,$\sum \boldsymbol{F}_i=m\boldsymbol{a}$,实验证明,物体的加速度$\boldsymbol{a}$等于每个力单独作用时所产生的加速度的矢量叠加,即$\boldsymbol{a}=\sum \boldsymbol{a}_i$。这称为力的独立性原理或叠加原理,这也是运动叠加原理的实质。

对于质点,力$\boldsymbol{F}$来自其他物体的作用。只要这种作用不为零,$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$,物体就获得加速度,所以$m\boldsymbol{a}$不是力而是物体本身的属性。

2. 惯性质量

设有同样的力$\boldsymbol{F}$作用在两个质量分别是m_1和m_2的物体上,$\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$分别表示它们获得的加速度,根据(1-4)式有,$\boldsymbol{F}=m_1\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{F}=m_2\boldsymbol{a}_2$,可得

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{a_2}{a_1}$$

即在相同外力作用下,物体的加速度和质量成反比。质量大的物体产生的加速度小,表明质量大的物体抵抗运动变化的能力强,也就是它的惯性大。物体的质量反映了物体本身改变运动状态的难易程度,即(1-3)式和(1-4)式中的质量也是物体惯性的量度,因此把它们称做惯性质量,或简称质量。

1.1.2.3 牛顿第三定律

牛顿第一、二定律是牛顿总结了伽利略等前人研究成果基础上而建立的。而史学家

们普遍认为，第三定律是牛顿独立发现的。它深刻揭示了物体机械运动的普遍客观事实——作用与反作用。牛顿写到："任何物体拉引或推压另一物体时，同样也要被另一物体所拉引或推压。"这里明确指出：物体间的作用是相互的，且相互作用是同性质的。牛顿第三定律表述如下：

当物体 A 以力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用于物体 B 时，物体 B 也同时以力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用于物体 A 上，作用力 $\boldsymbol{F}_1$ 和反作用力 $\boldsymbol{F}_2$ 总是大小相等，方向相反，且在同一直线上。

第三定律指出，力总是成对出现的，作用与反作用同时出现，同时消失，它们分别作用在相互作用的两个物体上，所以不存在相互抵消问题。并且指出，弹性力的反作用力必定是弹性力，万有引力的反作用力必定是万有引力，摩擦力的反作用力也必定是摩擦力。

如图 1-3 所示，一质量为 m 的金属球用细绳吊在天花板上。由于球静止，受力平衡，根据牛顿第二定律有

$$T-p=ma=0$$

细绳给球向上的拉力 $\boldsymbol{T}$ 和地球对球的作用力 $\boldsymbol{p}$ 都作用在球上，合作用抵消，金属球不获得加速度，保持静止。根据牛顿第三定律，细绳给球向上的拉力 $\boldsymbol{T}$（弹性力）的反作用力为 $\boldsymbol{T}'$，它和 $\boldsymbol{T}$ 大小相等，方向相反，在一条直线上，是作用于细绳上的金属球向下拉绳的弹性力。而地球对球的作用力 $\boldsymbol{p}$ 是向下的重力（万有引力），其反作用力 $\boldsymbol{p}'$ 是金属球作用在地球上的向上的力，也是万有引力。

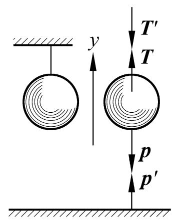


图 1-3　相互作用

1.2　加速度矢量的表示

1.2.1　直角坐标系中加速度的表示

1. 位置矢量

选定直角坐标系，就可以定量描述质点在空间的位置。设 t 时刻，质点处于空间 M 点，从坐标原点向质点的位置引一有向线段$\overrightarrow{OM}$，记作 $\boldsymbol{r}$（图 1-4），$\boldsymbol{r}$ 的方向说明了 M 点相对于坐标轴的方位，$\boldsymbol{r}$ 的大小（它的模）表明了 M 点到原点的距离，即 $\boldsymbol{r}$ 完全确定了 t 时刻质点在空间的位置。用来确定质点位置的矢量 $\boldsymbol{r}$，叫做质点的位置矢量，简称位矢，也叫径矢，单位是 m。质点在运动时，位矢随时间变化，也就是说 $\boldsymbol{r}$ 是时间的函数，有

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-7}$$

(1-7)式就是质点的运动函数。如取 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为 x,y,z 轴正方向的单位矢量，由矢量几何性质，t 时刻的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 可由它在直角坐标系中沿坐标轴的三个分量确定，写成

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-8}$$

这表明,质点的实际运动是 x,y,z 方向各分运动的合成。

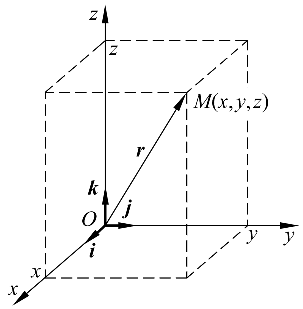


图 1-4　*M* 点的位置矢量

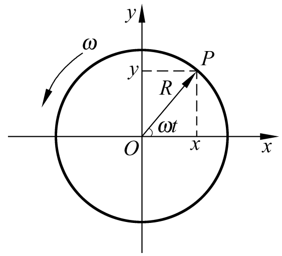


图 1-5　匀速圆周运动

例 1.1　一质点在 xy 平面内作匀速率、半径为 R 的圆周运动,如图 1-5 所示。设 $t=0$ 时刻,质点处于 x 轴上,且其位置矢量单位时间转过的角度为 ω(角速度)。求质点的运动函数和轨道方程(轨迹)。

解　设 t 时刻质点运动到 P 点,此时位置矢量与 x 轴正向夹角为 ωt。所以,位置矢量 x,y 轴分量大小分别为

$$x=R\cos\omega t$$

$$y=R\sin\omega t$$

所以,t 时刻质点位置矢量即运动函数为

$$\boldsymbol{r}=R\cos\omega t\boldsymbol{i}+R\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

把分量式中 $x=R\cos\omega t$,$y=R\sin\omega t$ 两边分别平方后相加,消去时间参数 t,可得质点的轨道方程,有

$$x^2+y^2=R^2$$

2. 位移矢量

质点在某时间内的位置改变叫做它在此时间内的位移,其单位是 m。如果 t 时刻质点的位矢为 $\boldsymbol{r}(t)$,$t+\Delta t$ 时刻质点的位矢 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$,$\Delta t$ 内质点的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t) \tag{1-9}$$

也就是 Δt 内质点位移的增量。

例 1.2　设一质点,t_1 时刻位于平面直角坐标系中 $A(1,3)$点,t_2 时刻位于 $B(3,1)$点,单位是 m。求 $\Delta t=t_2-t_1$ 时间内的位移。

解　图 1-6 表明了 $\Delta t=t_2-t_1$ 时间内的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$。

t_1 时刻位置矢量

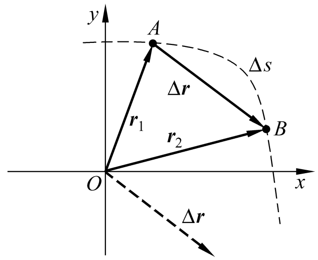


图 1-6　位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r}_1 = 1\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m})$$

t_2 时刻位置矢量

$$\boldsymbol{r}_2 = 3\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m})$$

$\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (3-1)\boldsymbol{i} + (1-3)\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m})$$

位移的大小为

$$|\Delta\boldsymbol{r}| = |2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}\ (\mathrm{m})$$

如果图中虚线表示质点的运动轨迹，那当质点由 A 运动到 B 时所经过的路程 Δs 明显不等于位移的大小，即 $|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta s$。但是，当 Δt 趋于零时，也就是图中 $\boldsymbol{r}_2$ 无限靠近 $\boldsymbol{r}_1$ 时，$|\Delta\boldsymbol{r}|$ 和 Δs 趋于相同，变成同阶无穷小，可以相互代替。此时，位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 写为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$（也称为质点的元位移），Δs 写成 $\mathrm{d}s$，即 $\Delta t \to 0$ 时有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$。

3. 速度矢量

Δt 时间内质点的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$，微分量 $\mathrm{d}t$ 时间内质点的位移微分量是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。定义位置矢量对时间的变化率为质点 t 时刻的速度，用 $\boldsymbol{v}$ 表示，有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-10}$$

它和位矢 $\boldsymbol{r}(t)$ 都是描述质点运动状态的物理量，其单位是 m/s。例如，一个质点的位矢 $\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + 3t^2\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m})$，其速度为 $\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{i} + 6t\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m/s})$。

速度的大小叫速率，因为 $\Delta t \to 0$ 时，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$，所以有

$$v = |\boldsymbol{v}| = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-11}$$

这就是说，速率又等于质点的路程函数对时间的变化率。

由(1-10)式可知，速度的方向就是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的方向，即 Δt 趋近于零时的 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向，如图 1-7 所示。当 Δt 趋于零时，图中 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 越来越靠近 $\boldsymbol{r}(t)$，$\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向也就越来越靠近轨道 P 点的切线。所以，质点速度在 P 点的方向就是质点轨道在该点指向前方的切线方向。由(1-8)式，(1-10)速度定义式可写为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{v}_x + \boldsymbol{v}_y + \boldsymbol{v}_z \tag{1-12}$$

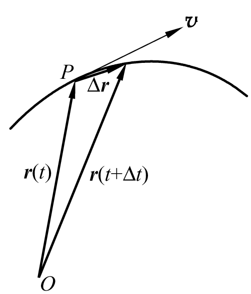


图 1-7　速度的方向

这表明：质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 是 3 个坐标轴方向分速度的矢量和。其中

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{1-13}$$

所以,速度的大小又可写成

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{1-14}$$

例 1.3 设位矢 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+3t^2\boldsymbol{j}$ (m)。求质点在 $t=0$ 时刻(初始时刻)和 $t=1$ s 时刻的速度和在这 1 s 时间内的平均速度。

解 由于 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{i}+6t\boldsymbol{j}$,所以质点在 $t=0$ 时刻和 $t=1$ s 时刻的速度分别为

$$\boldsymbol{v}(0) = 2\boldsymbol{i}\ (\mathrm{m/s})$$

$$\boldsymbol{v}(1) = 2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m/s})$$

按照速度的含义,时间 Δt 之内的平均速度应是 Δt 之内的位移与时间 Δt 之比,即

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-15}$$

$t=0$ 时刻的位矢 $\boldsymbol{r}(0)=0$,即质点位于原点,$t=1$ s 时刻的位矢 $\boldsymbol{r}(1)=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$ (m)。所以,从 $t=0$ 到 $t=1$ s 时间内的平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}}{1-0} = 2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m/s})$$

4. 加速度矢量

牛顿第二定律已给出加速度的定义,为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-16}$$

表示质点速度的变化率。如果速度的数值随时间发生变化,或者方向发生变化,或者二者同时都发生变化,都表明速度在变化,质点运动状态在改变,物体一定获得了加速度。加速度为零,说明质点速度是常矢量(大小、方向恒定);而速度为零的时刻,质点可能具有加速度。加速度的单位为 $\mathrm{m/s^2}$,由 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$,可以看出力的单位为 $\mathrm{kg\cdot m/s^2}$,即为 N,$1\ \mathrm{N}=1\ \mathrm{kg\cdot m/s^2}$。

由(1-12)速度分量式,加速度可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_z}{\mathrm{d}t} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

这表明:质点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 是 3 个坐标轴方向分量的矢量和,其中

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ a_y &= \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \\ a_z &= \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}\right\} \tag{1-17}$$

加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1-18}$$

例 1.4　求例 1.1 中质点任意时刻的速度和加速度。

解　例 1.1 中已求出质点的位矢，设其单位为 m，有

$$\boldsymbol{r} = R\cos\omega t\boldsymbol{i} + R\sin\omega t\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m})$$

匀速率圆周运动中角速度 ω 是常量(角速度的概念请参考第 1.2.2 节)，由(1-10)式和(1-16)式，质点任意时刻的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -R\omega\sin\omega t\boldsymbol{i} + R\omega\cos\omega t\boldsymbol{j} = R\omega(-\sin\omega t\boldsymbol{i} + \cos\omega t\boldsymbol{j})\ (\mathrm{m/s})$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = R\omega^2(-\cos\omega t\boldsymbol{i} - \sin\omega t\boldsymbol{j}) = -\omega^2(R\cos\omega t\boldsymbol{i} + R\sin\omega t\boldsymbol{j}) = -\omega^2\boldsymbol{r}\ (\mathrm{m/s^2})$$

注意 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}$，负号表明质点加速度的方向总和位矢的方向相反，即匀速率圆周运动的加速度方向始终沿半径指向圆心，所以常把它称做向心加速度。匀速率圆周运动中位矢、速度、加速度的方向总是变化，但它们的大小不变，有

$$r = |\boldsymbol{r}| = R\sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t} = R$$

$$v = |\boldsymbol{v}| = R\omega\sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t} = R\omega \tag{1-19}$$

$$a = |\boldsymbol{a}| = |-\omega^2\boldsymbol{r}| = R\omega^2 \tag{1-20}$$

(1-19)式和(1-20)式是匀速率圆周运动中以角速度 ω 对速度、向心加速度的表示式。角速度 ω 的单位是 $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ 或 $\mathrm{s^{-1}}$。

例 1.5　静止在坐标原点的质点，如果获得一加速度 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m/s^2})$，求此质点获得加速度后的运动状态。

解　求运动状态，就是表示出质点的位矢和速度。由于加速度无 z 轴分量，静止在坐标原点的质点运动一定是 xy 平面的平面运动。由题意，获得加速度的时刻作为初始时刻，有 $\boldsymbol{r}(0) = 0$，即 $x(0) = 0$，$y(0) = 0$；静止意味着 $\boldsymbol{v}(0) = 0$，即 $v_x(0) = 0$，$v_y(0) = 0$。这些都是初始条件。按 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m/s^2})$，有

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 2$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 3$$

有 $dv_x = a_x dt$，$dv_y = a_y dt$，对它们两边积分，有

$$v_x = \int_0^t a_x dt = \int_0^t 2dt = 2t\ (\mathrm{m/s})$$

$$v_y = \int_0^t a_y dt = \int_0^t 3dt = 3t\ (\mathrm{m/s})$$

因为 $v_x = \frac{dx}{dt}$，$v_y = \frac{dy}{dt}$，所以

$$dx = v_x dt = 2t dt$$

$$dy = v_y dt = 3t dt$$

对它们两边积分，得

$$x = \int_0^t v_x dt = \int_0^t 2t dt = t^2\ (\mathrm{m})$$

$$y = \int_0^t v_y dt = \int_0^t 3t dt = 3t^2/2\ (\mathrm{m})$$

分别得到位矢和速度的分量式。位矢分量式中消 t，质点的轨迹为

$$y = \frac{3}{2}x$$

是一直线。静止质点获得加速度后的运动是匀加速直线运动。位矢和速度的矢量表达式分别为

$$\boldsymbol{v} = 2t\boldsymbol{i} + 3t\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m/s})$$

$$\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} + \frac{3t^2}{2}\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m})$$

由此看出，如果已知质点的加速度 $\boldsymbol{a}$、初始速度 $\boldsymbol{v}_0$ 和初始位矢 $\boldsymbol{r}_0$，因 $d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}dt$，积分可得质点的速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \int_{t_0}^t \boldsymbol{a}dt$，再积分得到质点的位矢 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \int_{t_0}^t \boldsymbol{v}dt$。

1.2.2 圆周运动中的切向加速度和法向加速度

加速度是速度的变化率，速度是矢量，既有大小又有方向，加速度就是表示速度大小和方向两个因素的变化率。速度的方向是轨道切线向前的方向，设轨道的切线向前方向的单位矢量(速度的单位矢量)为 $\boldsymbol{\tau}$ (或 $\boldsymbol{e}_t$)，速度可写为

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau} \tag{1-21}$$

加速度就为

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(v\boldsymbol{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \tag{1-22}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 等于两个分矢量的合成。

(1-22)式中第一个分量$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$ 的方向为$\boldsymbol{\tau}$，大小为$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$。$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$是速率变化率，故此分矢量在加速度中表示着速度大小的变化率，称为切向加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$。匀速率圆周运动中 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}=0$，非匀速率圆周运动中 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}\neq 0$。式中第二个分量 $v\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$，$\boldsymbol{\tau}$ 是速度的单位矢量，所以 $v\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$表示速度方向的变化率，方向为 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$ 的方向，即 $\Delta t\to 0$ 时 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 的极限方向。在圆周运动中，如图 1-8(c)所示，单位矢量$\boldsymbol{\tau}(t)$，$\boldsymbol{\tau}(t+\Delta t)$和 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 组成了等腰三角形，当 $\Delta t\to 0$ 时 $\Delta\theta\to 0$，$\Delta\boldsymbol{\tau}$ 和$\boldsymbol{\tau}(t)$的夹角趋于直角，$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$ 的方向与$\boldsymbol{\tau}(t)$垂直，即与$\boldsymbol{v}(t)$垂直指向圆心，是 t 时刻轨道曲线的法向，因此把 $v\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$称为法向加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$。如果用 $\boldsymbol{n}$(或用 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$)表示指向圆心的法向单位矢量，$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$ 可表示为 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=|\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}|\boldsymbol{n}=\mathrm{d}\tau\boldsymbol{n}$。加速度可写为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}=a_{\mathrm{t}}\boldsymbol{\tau}+a_{\mathrm{n}}\boldsymbol{n} \tag{1-23}$$

加速度大小可表示为

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{t}}^2+a_{\mathrm{n}}^2} \tag{1-24}$$

图 1-8(b)中，Δt 时间内的质点路程是 Δs，$\Delta s=R\Delta\theta$，当 $\Delta t\to 0$ 时有 $\mathrm{d}s=R\mathrm{d}\theta$。因为 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，对于圆周运动(匀速或非匀速)有

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=R\omega \tag{1-25}$$

其中 $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$就是角速度，表示圆周运动的快慢。因为 $a_{\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，对于圆周运动有

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\alpha \tag{1-26}$$

其中 $\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$，叫做角加速度，单位为 $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ 或 s^{-2}。由图 1-8(c)知，当 $\Delta t\to 0$ 时 $\mathrm{d}\tau=$

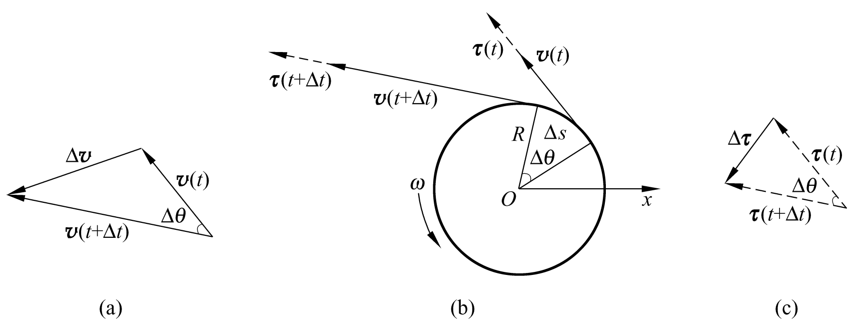


图 1-8　圆周运动的法向加速度

$d\theta \cdot 1$,法向加速度大小 $a_n=\left|v\dfrac{d\tau}{dt}\right|=v\dfrac{|d\tau|}{dt}=v\dfrac{d\theta}{dt}=v\omega$,利用(1-25)式有

$$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2 \tag{1-27}$$

要说明的是质点圆周运动中的角速度也是矢量,大小以质点绕转轴(通过圆心垂直圆平面的直线)转动时转角 θ 的变化率 $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$ 确定,方向是以右手螺旋法则判定:伸开右手让拇指和四指垂直,然后让四指顺着转动方向进行弯曲,这时拇指沿轴线的指向就是角速度的方向。如图 1-8(b)中的角速度的方向是垂直纸面指向读者,以"⊙"表示。如果图 1-8(b)中质点的转动是顺时针方向转动,使四指沿顺时针方向弯曲,此时拇指沿轴线的指向是垂直纸面指向纸里,以"⊗"表示。不过要注意的是,我们经常说的"角速度 ω"指的是角速率。相对角速度、角加速度(角量),质点的速度、加速度又称为线速度、线加速度(线量)。

1.3 牛顿力学中的几种常见力

自然界中存在四种基本力,它们是引力、存在于运动电荷之间的电磁力、微观粒子间相互作用的强力和弱力。其他的力(重力、摩擦力、弹性力、黏滞力、分子力等)都是这四种基本力的不同表现。

1.3.1 万有引力

1.3.1.1 万有引力定律与重力

用手向空中抛出任一物体,按照惯性定律,物体应沿抛出方向走直线,但是它最终却还会落到地面上。这说明地球对地面物体都有一种吸引力。平抛物体的抛速越大,落地时就离起点越远,惯性和地球吸引力使它在空中划出一条曲线。地球吸引力也应作用于月球,但月球的不落地,牛顿认为这只不过是月球下落运动曲线的弯曲度正好与地球表面的弯曲程度相同。这样牛顿就把地球对地面物体的吸引力和地球对月球的吸引力统一起来了。牛顿证明了均匀球体吸引球外每个物体的引力都与球的质量成正比,与它们质量中心(球体的球心)距离的平方成反比。牛顿认为这种引力也作用在太阳和行星、行星与行星之间,并用自己独特的数学才能以平方反比关系证明了开普勒定律的正确性。力是成对出现的,其作用是相互的,无论是地球与物体、地球与月球、太阳与行星等宇宙中任何两质点间都具有这种相同性质的引力,1674 年,英国物理学家胡克(Robert Hook,1635—1707)称这种引力为万有引力。这种引力的规律由牛顿发现,称之为万有

引力定律，表述如下：

任何两个质点都相互吸引，引力的大小与它们的质量成正比，和它们距离的平方成反比。

用 m_1 和 m_2 表示两个质点的质量，以 r 表示它们之间的距离，以 $\boldsymbol{e}_r$ 表示一个质点相对另一个质点径矢的单位矢量，引力定律的数学表示为

$$\boldsymbol{f}=-G\frac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{1-28}$$

式中 G 是一个比例系数，叫引力常量，是一个与物质无关的普适常量，国际单位制(SI)中它的值为

$$G=6.67\times10^{-11}(\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}})$$

图 1-9 显示了两质点间的万有引力。

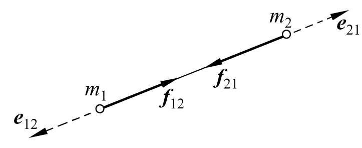


图 1-9　万有引力

1. 引力质量

(1-28)式中的质量反映了质点间的引力性质，是相互吸引作用的量度，因此又叫引力质量，它和反映物体抵抗运动变化性质的惯性质量意义不同。实验证明，同一物体的这两个质量是相等的，可以说它们是物体同一质量的两种表现，所以也就不必加以区分了。

2. 引力场和引力场强矢量

20 世纪爱因斯坦在引力理论中明确指出：任何物体周围都存在着引力场，处在引力场中的物体都将受到引力作用。比如，地面上的一个物体受到指向地心的地球引力场的引力，而且在地面上的不同高度，物体受到地球引力场的作用也不相同。同时，此物体也受到地面上其他物体以及其他星球的引力场的作用，只是其他引力场产生的引力比起地球的作用要小很多。为了表示不同引力场对物体作用的强弱，以及为了比较同一引力场中空间各点产生的作用的不同，引入引力场强物理量。图 1-9 中，定义质量为 m_1 的质点周围空间某一点的引力场强 $\boldsymbol{g}$ 为：当把另一质点 m_2 放在此处时，受到的引力 $\boldsymbol{f}_{21}$ 与 m_2 之比，即单位质量的质点所受到的引力，有

$$\boldsymbol{g}=\left(-G\frac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{e}_{21}\right)\Big/m_2=-G\frac{m_1}{r^2}\boldsymbol{e}_{21} \tag{1-29}$$

其单位为 $\mathrm{N\cdot kg^{-1}}$，方向如图 1-9 所示。m_1 称为场源质量。

忽略地球自转，物体所受的重力就等于地球引力场的引力，所以地球的引力场又叫重力场。用 M 表示地球的质量，且把地球看成质量均匀分布的半径为 R 的球体，球对称分布的质量 M 产生球对称分布的地球引力场，即地面处的引力场强大小处处相等，方向都指向球心。在小范围内我们常说重力方向垂直向下。地面重力场场强为

$$\boldsymbol{g}=-G\frac{M}{R^2}\boldsymbol{e}_R \tag{1-30}$$

表示 1 kg 质量的地面物体在重力场中受到的重力。质量为 m (kg)的地面物体受到的重力为

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} \tag{1-31}$$

所以 $\boldsymbol{g}$ 也是地面物体在重力作用下产生的重力加速度。把 $M=5.98\times10^{24}$ kg,$R=6.37\times10^{6}$ m,$G=6.67\times10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}代入(1-31)式,得重力加速度大小 $g=9.82$ m·s^{-2},使用中常取 $g=9.8$ m·s^{-2}。

例 1.6 月球的半径约为 $r=1.74\times10^{6}$ m,其质量约为 $M=7.35\times10^{22}$ kg,求月球表面处月球引力场场强的大小。

解 把 G,r,M 数据代入(1-29)式中,得

$$g = G\frac{M}{r^2} = 6.67\times10^{-11}\times\frac{7.35\times10^{22}}{(1.74\times10^{6})^2} = 1.62\ (\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

近似等于地球表面重力场强大小的 1/6。

1.3.1.2 潮汐现象和海王星的发现

1. 潮汐现象

牛顿曾用万有引力定律对潮汐现象作出了说明。潮汐是海水的周期性涨落现象。“昼涨称潮,夜涨称夕”,平均 24 小时 50 分钟海水两涨两落,是海水受太阳和月亮的引力造成的。月亮与地球中心的距离差不多是地球半径 R 的 60 倍,在地球表面的海水离月球近的一侧的距离是 $59R$,远的一侧是 $61R$。根据万有引力定律,离月球近的一侧海水指向月球的加速度大于地球的加速度,其效应是水相对地球被加速而离开地球;而远离月球的地球表面另一侧的海水,它指向月球的加速度小于地球的加速度,其效应是地球被加速离开水。所以,海水的大潮发生在面对月亮和远离月亮的地球两侧。太阳对地球的引力约是月球引力的 175 倍,太阳与地球中心的距离约为地球半径的 2.34×10^{4} 倍,由于差一个 R 引起的对涨潮的引力差效果和月亮相比要小得多,所以潮汐现象主要是月球对地球和海水的引力差效应。阴历的初一和十五(新月和满月)时,太阳、月球分别处于同一条直线上地球的两侧和同一侧,它们的引力差效应相互加强,所以每月出现两次大潮;初八(上弦月)和二十三(下弦月),太阳、月球对地球的方位垂直,它们的引力差效应存在部分相左,因此形成了每月出现的两次小潮。由于月球引力差效应,围绕地球的海平面在任何时刻总是存在两个潮水突起部。假设月球不动,对于地面某确定点来说,因地球自转相继两次涨潮相隔的理论时间应是 12 小时。月球是运动的,海水突起部也会随着月球的运动而前移,实际地面某确定点相继潮汐的时间间隔是 12 小时 25 分钟。

2. 海王星的发现

1781 年英国的赫歇耳(F. W. Herschel,1738—1822)通过观察发现了太阳系的行星天王星之后,以万有引力为基础而建立的引力理论已经对木星、土星等行星的运行轨道及行星间相互作用引起的行星偏离椭圆轨道的“出轨”现象作出了很好的解释,但惟独天

王星的引力理论计算和观测数据有一系列的偏差。所以，天文学者想到天王星未必是太阳系的最后边界，天王星之外可能存在一个未知行星。1846 年，法国的年轻人勒维耶(J. Leverrier，1811—1877)完成了根据天王星运行轨道的观测数据用引力理论计算寻找这颗未知行星的“质量、轨道和现在的位置”这项十分艰苦和复杂的工作。当年 9 月 18 日他写信给德国柏林天文台的天文观测家伽勒(J. G. Galle，1812—1910)，请求用优良望远镜指向天空的某一位置，帮助寻找新行星。9 月 23 日伽勒收到信的当晚，在不到 30 分钟的时间内，于勒维耶信中指定位置找到了太阳系的第 8 颗行星。这“笔尖上的发现”不但宣告引力理论的辉煌胜利，并且是理论指导实践的一个精彩例证。

1.3.2　弹性力

当两物体相互接触挤压时，它们要发生形变。发生形变的物体，由于要恢复原状，就要对接触物体产生力的作用，这种性质的力叫弹性力。弹性力的形式多种多样，常见的弹性力有三种：正压力(支撑力)、弹簧的弹力和绳索对物体的拉力。

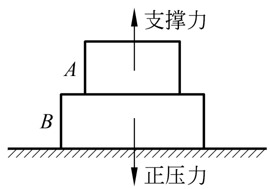


图 1-10　*A*,*B* 间的作用力

如图 1-10 所示，在 A,B 接触面上，存在着 A 作用在 B 上的正压力，同时存在着 B 作用在 A 上的反作用力——支撑力。它们垂直于接触面。

如图 1-11 所示，绳索和重物相接触，在接触处绳索给重物一向上的拉力，作用在重物上。同时重物给绳索一向下大小相等的拉力，作用在绳索的端点。又如图 1-12 所示，当一重物挂在竖直弹簧上时，重物向下拉弹簧，作用于弹簧。弹簧被拉伸形变，弹簧要恢复原长而对重物产生向上的弹力，作用于重物。弹簧作用于重物的向上的弹力遵守胡克定律，有

$$f=-ky \tag{1-32}$$

k 叫弹簧的劲度系数(也称弹性系数)，单位是 N/m。y 是弹簧的伸长量，负号表示弹簧总要恢复原长。

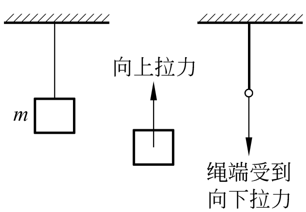


图 1-11　绳索和物体间的相互作用

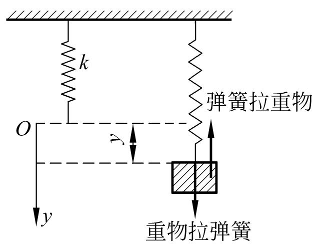


图 1-12　胡克力

例 1.7 在蒸汽机发展早期以及现在许多机器还在使用的机械调速器原理如图 1-13(a)所示,随着两球体 m 的转速不同,θ 发生变化,球体高度升高或降低。当转速超过一定限制时,此装置可以使动力阀门关闭;当转速过低时,使动力阀门打开,达到调速的作用。当球体的转速为 ω 时,求杆臂 l 与铅直方向的夹角 θ,设 l 已知。

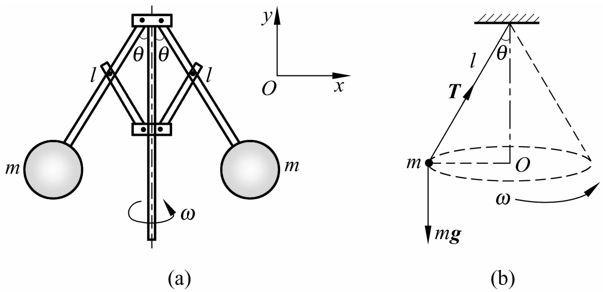


图 1-13 例 1.7 用图

解 球体 m 的运动就是一圆周摆的运动,如图 1-13(b)所示。球体 m 在水平面内作角速率为 ω 的匀速率圆周运动。质点 m 受到重力和 l 的拉力 T,按牛顿第二定律的分量形式,有

$$x\text{ 向:}T\sin\theta = ma_n = ml\sin\theta\omega^2$$

$$y\text{ 向:}T\cos\theta - mg = 0$$

可得 $T=ml\omega^2$,$T\cos\theta=mg$,因此有 $\cos\theta=\dfrac{g}{l\omega^2}$,即

$$\theta = \arccos\frac{g}{l\omega^2}$$

1.3.3 摩擦力

当相互接触的两物体之间具有相对滑动时,沿接触面就会产生阻碍相对滑动的力,称为滑动摩擦力 $\boldsymbol{f}_k$。实验证明,当相对滑动的速度不是太大或太小时,滑动摩擦力的大小 f_k 与垂直接触面的正压力(支撑力)成正比,而与相对滑动的速度无关,有

$$f_k = \mu_k N \tag{1-33}$$

μ_k 为滑动摩擦系数,与形成接触面的两物体的材料和表面状态有关。

例 1.8 在水平力 $\boldsymbol{F}$ 作用下,一质量为 m 的物体在地面上滑动,试分析物体 m 的受力。设 μ_k 为滑动摩擦系数。

解 如图 1-14 所示。除受到力 $\boldsymbol{F}$ 作用外,物体还受到方向向下的重力 $m\boldsymbol{g}$、垂直接触面向上的支撑力 $\boldsymbol{N}$、沿接触面的阻碍物体相对地面滑动的滑动摩擦力 $\boldsymbol{f}_k$。因为竖直 y

方向受力平衡，有

$$N - mg = 0$$

得 $N=mg$。所以，沿 x 负方向的滑动摩擦力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{k}}$ 为

$$f_{\mathrm{k}} = \mu_{\mathrm{k}} N = \mu_{\mathrm{k}} mg$$

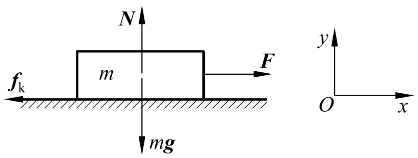


图 1-14　滑动摩擦

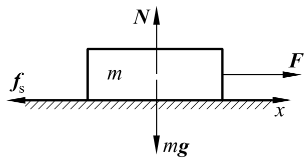


图 1-15　静摩擦

当相互接触的两物体之间具有相对滑动趋势但尚未相对滑动时，沿接触面会产生阻碍相对滑动的趋势力，称为静摩擦力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{s}}$。用水平力 $\boldsymbol{F}$ 拉静止在水平面上物体 m，如图 1-15 所示，若拉力 $\boldsymbol{F}$ 较小，物体仍静止不动，但有了相对水平面的向 x 正向滑动的趋势，于是受到水平面给予的一个阻碍这种滑动的趋势（x 负向）的静摩擦力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{s}}$。由牛顿第二定律知，$F-f_{\mathrm{s}}=0$，$F=f_{\mathrm{s}}$。逐渐增大拉力 F，只要拉力没有拉动物体，物体受到的反向静摩擦力 f_{s} 就永远等于拉力 F，直到拉力开始拉动物体为止。这时的静摩擦力 f_{s} 叫做最大静摩擦力 $f_{\mathrm{s\,max}}$。实验证明，最大静摩擦力 $f_{\mathrm{s\,max}}$ 与相接触的两个物体之间的正压力 N（支撑力）成正比，即

$$f_{\mathrm{s\,max}} = \mu_{\mathrm{s}} N \tag{1-34}$$

μ_{s} 叫静摩擦系数，也取决于形成接触面的两物体的材料和表面状态，它总是大于滑动摩擦系数 μ_{k}，表 1-1 给出了一些情况下 μ_{s} 和 μ_{k} 的粗略数值。(1-34)式称为库伦摩擦定律。

表 1-1　一些典型情况下的摩擦系数

接触面材料	μ_{k}	μ_{s}
钢—钢（干净表面）	0.6	0.7
钢—钢（加润滑剂）	0.05	0.09
铜—钢	0.4	0.5
铜—铸铁	0.3	1.0
玻璃—玻璃	0.4	0.9～1.0
橡胶—水泥路面	0.8	1.0
涂蜡木滑雪板—干雪面	0.04	0.04

除了以上提到的几种牛顿力学中常见的力外，日常生活中还会遇到水滴趋于球形而呈现的液体表面张力，顶风骑自行车遇到的空气阻力，浸在流体（气体和液体）中物体受

到的浮力等。

例 1.9 光滑的水平面上放有 A,B 两物体,如图 1-16(a) 所示。A,B 两物体的质量分别为 m_1 和 m_2,在如图所示的沿 x 向的水平力 $\boldsymbol{F}$ 作用下,它们一起运动,求 A,B 物体间的摩擦力。

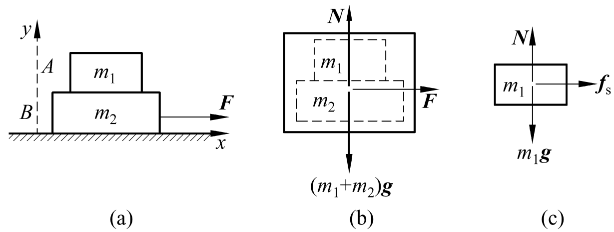


图 1-16　例 1.9 用图

解 由于 A,B 两物体一起运动,可以把它们看成一个质量为(m_1+m_2)的整体,即一个质点。此整体受力分析如图 1-16(b)所示:物体受到重力$(m_1+m_2)\boldsymbol{g}$、支撑力 $\boldsymbol{N}$ 和水平拉力 $\boldsymbol{F}$。根据牛顿第二定律,有

$$y\text{ 向: } N-(m_1+m_2)g=0$$

$$x\text{ 向: } F=(m_1+m_2)a$$

由以上两式可得到它们共同水平方向运动的加速度 a,有

$$a=\frac{F}{m_1+m_2}$$

由于 m_1 相对 m_2 具有向后的滑动趋势,m_1 就受到一个 m_2 给予的向前的静摩擦力 $\boldsymbol{f}_s$,图 1-16(c)是它的受力图。m_1 具有水平方向的加速度 a 就是因为有 $\boldsymbol{f}_s$ 的作用。所以,静摩擦力为

$$f_s=m_1a=\frac{m_1}{m_1+m_2}F$$

这就是两物体之间沿接触面相互给予的静摩擦力。m_2 受到的静摩擦力方向是 x 轴的负向。

1.4 不同参照系中力学量之间的关系

运动是相对的,定量观测一个质点的运动就一定需要参照系。参考系分惯性系和非惯性系两类。牛顿三定律适用于惯性系,所以在观测质点运动时当然优先选取惯性系。对力学量(如位置、速度、动量等)的观测,不同的惯性系也会得到不同的结果,如果知道这些不同结果之间的关系,会给我们带来很大的方便。比如在处理实际问题时,我们本