第 1 章　函数与极限

微积分学是以函数为研究对象的一门科学. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，而极限方法是研究函数的一种基本方法，它是学习微分学、积分学的基础. 本章将介绍函数、函数极限和函数连续等基本概念以及它们的一些性质.

1.1　函　　数

1.1.1　函数的定义

我们在研究一些生产、生活的实际问题或自然现象的过程中，经常发现这些过程所涉及的变量并不是独立变化的，而是需要考虑两个彼此相互依赖、有关联的变量. 我们考察如下两个例子.

例 1.1.1　等腰直角三角形的面积 s 与其直角边的边长 x 的关系为

$$s=\frac{1}{2}x^2,\quad x\in(0,+\infty).$$

可见等腰直角三角形的面积随着边长的变化而变化.

例 1.1.2　据统计，20 世纪 60 年代世界人口增长情况如表 1-1 所示.

表　1-1

年份 t	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
人口 n/百万	2972	3061	3151	3213	3234	3285	3356	3420	3483

显然，随着年份 t 的推移，世界人口数 n 在不断增长.

从以上的例子我们看到，它们所描述的问题虽各不相同，但却有共同的特征：

(1) 每个问题中都有两个变量，它们之间不是彼此孤立的，而是相互联系、相互制约的；

(2) 当一个变量在它的变化范围中任意取定一个数值时，另一个变量按一定的法则存在一定值与之相对应.

具有这两个特征的变量之间的依存关系，我们称为函数关系. 下面给出函数的定义.

定义 1.1.1　设两个变量 x 和 y，当变量 x 在一给定的数集 D 中任意取一个值时，变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 其中，x 叫作自变量，y 叫作因变量或函数. 数集 D 叫作这个函数的定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

例 1.1.1、例 1.1.2 的定义域分别为：$D_f=(0,+\infty)$，$D_f=\{x\mid 1960\leqslant x\leqslant 1968,x\in\mathbf{N}\}$.

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

除了常用 f 表示函数的记号外，还可以用“g”、“F”等英文字母或“φ”等希腊字母表示.

由函数的定义可知，构成函数的两个基本要素为定义域 D 和对应法则 f. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同，则为同一函数，否则就是不同的. 例如，$f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ 是同一函数，而 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 就不是同一函数了.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是在实际问题中，根据实际意义确定. 例如，在圆的面积 s 与半径 r 的函数关系中，$s=\pi r^2$，定义域为 $r>0$，因为 $r\leqslant 0$ 时不再有实际意义；另一种是对抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合. 例如，函数 $y=\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为 $[-3,3]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域为 $(-2,2)$，这种定义域称为函数的自然定义域.

函数的表示方法主要有 3 种：解析法（如例 1.1.1）、表格法（如例 1.1.2）、图像法.

点集 $P=\{(x,y)\mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形，如图 1-1 所示.

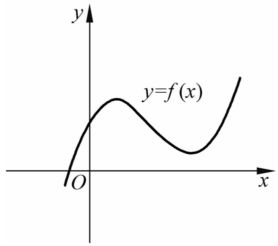

图　1-1

函数的 3 种表示法各有其特点，表格法和图像法直观明了，解析法易于运算. 在处理实际问题时这几种表示方法可以结合使用.

在用解析法表示函数时，有些函数在其定义域的不同部分，其表达式不同，即用多个解析式表示一个函数，这类函数称为分段函数.

例 1.1.3　函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{x}, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1+x, & 1 \leqslant x < 2 \\ x^2+6x-5, & 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

是一个分段函数. 它的定义域 $D=[0,4]$. 当 $x\in[0,1)$ 时，对应的函数式 $f(x)=3\sqrt{x}$；当 $x\in[1,2)$ 时，对应的函数式 $f(x)=1+x$；当 $x\in[2,4]$ 时，对应的函数式 $f(x)=x^2+6x-5$. $x=\dfrac{1}{4}\in[0,1)$，则 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=3\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{3}{2}$.

例 1.1.4　符号函数

$$y = \operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

显然函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，如图 1-2 所示.

例 1.1.5　取整函数 $y=[x]$，其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数，x 为任一实数，$y=[x]=n$，$n\leqslant x<n+1$，$n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$，如图 1-3 所示.

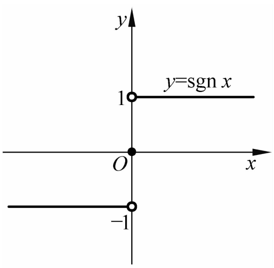

图　1-2

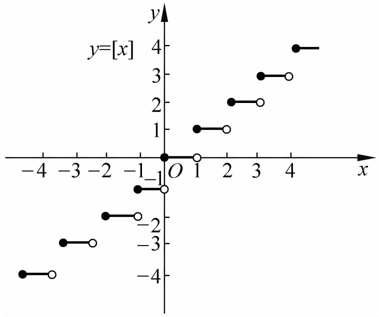

图　1-3

1.1.2　函数的几种特性

1. 单调性

设 I 为函数 $f(x)$ 的定义域内的一个区间. 如果对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的，如图 1-4 所示；反之，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

那么就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的，如图 1-5 所示. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，区间 I 称为单调区间.

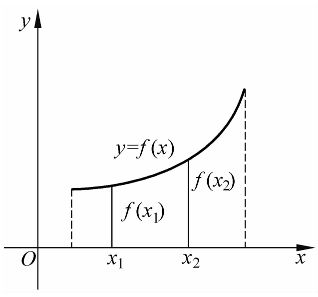

图　1-4

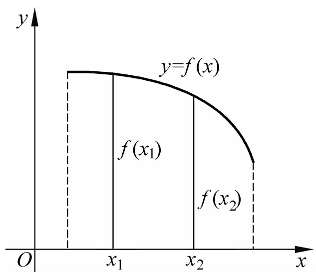

图　1-5

例如，函数 $y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的；函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间$(0,+\infty)$上是单调减少的，在区间$(-\infty,0)$上是单调减少的，而在其整个定义域上却不是单调的.

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一个 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$为偶函数. 如果对于任一 $x\in D$，有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

例如，函数 $f(x)=\cos x$ 是偶函数，函数 $f(x)=x$ 是奇函数，而 $f(x)=x+\cos x$ 既非奇函数，也非偶函数.

3. 周期性

设函数的定义域为 D，如果存在一个不为零的正数 T，使得对于任一个 $x\in D$，有$(x\pm T)\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$恒成立，则称函数 $f(x)$为周期函数，T 称为 $f(x)$的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 的周期为 2π.

4. 有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，如果存在正数 M，使得对任一个 $x\in D$ 有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上有界. 如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$在 D 上无界.

根据定义可知，有界函数的几何意义是：函数 $f(x)$的图形完全落在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间. 例如，在区间$(-\infty,+\infty)$上，$f(x)=\sin x$ 是有界函数.

1.1.3　反函数与复合函数

函数 $y=f(x)$的自变量 x 与因变量 y 的关系往往是相对的. 有时我们不仅要研究 y 随 x 变化而变化的状况，也要研究 x 随 y 变化而变化的状况. 因此，我们引入反函数的概念.

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 满足：对于值域 R_f 中的每一个值 y，有且仅有一个 $x\in D$ 满足 $y=f(x)$，则 x 是一个定义在 R_f 上以 y 为自变量的函数，称这个函数为 $f(x)$的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in R_f.$$

在反函数的表达式中，是以 y 为自变量，x 为因变量的. 通常按习惯仍然用 x 作为自变量，y 作为因变量，因此函数 $f(x)$的反函数也可以记作

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in R_f.$$

例如，函数 $y=x^3, x\in\mathbf{R}$ 与函数 $x=y^{\frac{1}{3}}, y\in\mathbf{R}$ 互为反函数.

在同一坐标平面上，反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与它的原函数 $y=f(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的. 而且，若原函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 上是单调的，则反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在定义域 R_f 上也是单调的.

设函数 $y=f(u), u\in D_f$，函数 $u=g(x), x\in D_g$，如果 $D_f\cap R_g\neq\varnothing$，则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)], x\in\{x\mid g(x)\in D_f\}$$

称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，变量 u 称为中间变量.

不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如，函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 复合成 $y=\arcsin(2+x^2)$，但无意义. 另外，复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成. 如函数 $y=\sqrt[3]{\sin^2\frac{x}{2}}$ 是由 $y=\sqrt[3]{u}, u=v^2, v=\sin w, w=\frac{x}{2}$ 复合而成.

1.1.4　初等函数

初等函数是我们研究的各类问题中最常见的函数，是高等数学最主要的研究对象.

我们把常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这 6 类函数统称为基本初等函数.

(1) 常值函数：$y=C$，C 为常数；

(2) 幂函数：$y=x^\mu$（其中 μ 为任意实常数）；

(3) 指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）；

在实际中，常使用以 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$，其中 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是一个无理数；

(4) 对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）；

高等数学中经常会遇到以 e 为底的对数函数，这种对数函数称为自然对数函数，记作 $y=\ln x$；

(5) 三角函数：如 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

(6) 反三角函数：如 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

定义 1.1.2　由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所得到的并可用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

例如，函数

$$y=\sin^2(3x+1),\quad y=\sqrt{x^2+1},\quad y=\frac{\lg x+\sqrt[3]{x}+2\tan x}{10^x-x+9}$$

等都是初等函数.

特别地，我们称形如 $u(x)^{v(x)}$ 的函数为幂指函数.

1.2 数列的极限

作为微分学基础的极限理论来说,早在古代已有比较清楚的论述. 中国古代的庄周所著的《庄子》一书的“天下篇”中,记有“一尺之棰,日取其半,万世不竭”. 三国时期的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细,所失弥小,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣.”这些都体现了朴素的、典型的极限思想.

极限的概念和运算是高等数学的基础,微积分学的许多重要概念和推理过程就是通过极限来表达或实现的. 本节主要介绍了数列极限的概念以及简单的数列极限的计算.

1.2.1 数列极限的定义

如果按照某一法则,对每个 $n\in\mathbf{N}_+$,对应着一个确定的实数 x_n,这无穷多个实数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$按下标从小到大的次序排列下去,就构成了一个数列,记作$\{x_n\}$,第 n 项 x_n 称为数列的一般项或通项,如:

(1) $1,1,\cdots,1,\cdots$;

(2) $1,-1,1,-1,\cdots,1,-1,\cdots$;

(3) $2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots$;

(4) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$;

(5) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$.

事实上,数列$\{x_n\}$就是一个定义在正整数集 $\mathbf{N}_+$ 上的函数,即 $x_n=f(n)$. 另外,数列对应着数轴上一个点列,可看作一动点依次在数轴上取定 x_1, $x_2,\cdots,x_n,\cdots$,如图 1-6 所示.

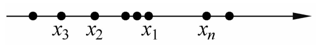

图 1-6

为了说明极限的概念,我们先考虑数列

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots.$$

显然,当 n 无限增大,即 n 趋于无穷大的过程中,一般项$\frac{n}{n+1}$无限接近于常数 1. 我们考察数列$\{x_n\}$,当 n 在正整数集 $\mathbf{N}_+$ 中变化时其通项 x_n 的变化规律可以得到如下数列极限的定义.

定义 1.2.1 如果 n 在正整数集 $\mathbf{N}_+$ 中变化,且无限增大时,数列$\{x_n\}$的通项 x_n 无限趋于一个确定的数 a,则称数列$\{x_n\}$收敛于 a,或称 a 为数列$\{x_n\}$的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad \text{或} \quad x_n\to a(n\to\infty).$$

否则,称数列$\{x_n\}$发散,或$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

精确地说，数列极限的严格数学定义如下：

设有数列$\{x_n\}$，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε(无论它多么小)，总存在正整数N，使得对于$n>N$的一切x_n，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$都成立，则称常数a为数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛，且收敛于a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a, \quad 或 \quad x_n\to a(n\to\infty).$$

如果不存在这样的常数a，则称数列$\{x_n\}$发散，或称$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数$N$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$. 这就是所谓的“$\varepsilon$-$N$”定义.

该定义的几何解释是当$n>N$时，数列$\{x_n\}$的第N项以后所有的点都落在开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内，而只有有限个(至多只有$N$个)在这区间以外，如图 1-7 所示.

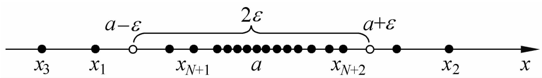

图　1-7

观察数列数值的变化趋势易知以下结果：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，其中$|q|<1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$，其中$k>0$.

今后我们求数列$\{x_n\}$的极限，一般是将$\{x_n\}$进行整理变形，直到我们能观察出其变化趋势或结合一些简单的数列极限的结果，同时在求解过程中利用数列极限的四则运算法则会更方便.

定理 1.2.1(数列极限的四则运算法则)

设数列$\{a_n\}$和数列$\{b_n\}$都收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，那么

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(Ca_n)=C\lim\limits_{n\to\infty}a_n=Ca$，其中$C$是常数；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\pm b$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=ab$；

(4) 若$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{a}{b}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=\sqrt[k]{a}$，特别地，$k$为偶数时，要求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geqslant0$.

定理 1.2.1 中的(2)、(3)都可以推广到有限个收敛数列的情形. 例如，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$，则有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}c_n=a+b-c;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n \cdot c_n) = \lim_{n\to\infty}a_n \cdot \lim_{n\to\infty}b_n \cdot \lim_{n\to\infty}c_n = abc.$$

应用上面的法则,我们可以根据一些已知的简单数列极限结果,求出一些较复杂的数列极限.

例 1.2.1 求下列数列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{n+4}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n-3^{n+1}}{2^{2n+1}+3^n}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{4}{n}}=3$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n-3^{n+1}}{2^{2n+1}+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}=\dfrac{1}{2}$.

1.2.2 数列极限的性质

为了今后学习的需要,我们不加证明地给出有关数列极限的几个性质和定理.

性质 1(唯一性) 若数列$\{x_n\}$收敛,则其极限是唯一的.

性质 2(有界性) 若数列$\{x_n\}$收敛,则数列$\{x_n\}$有界.

注 由性质 2 可知,若数列$\{x_n\}$收敛,则数列$\{x_n\}$必有界,反之则不一定成立,即有界性是数列收敛的必要条件.例如,数列 $x_n=(-1)^{n-1}$有界但不收敛.

推论 无界数列必定发散.

性质 3(保号性) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 且 $a>0$(或 $a<0$),那么存在正整数 N,当 $n>N$ 时,都有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

定理 1.2.2 单调有界数列必有极限.

所谓单调数列是指,如果数列$\{x_n\}$满足条件

$$x_n \leqslant x_{n+1}, \quad n = 1,2,3,\cdots,$$

则称数列$\{x_n\}$是单调增加的;如果数列$\{x_n\}$满足条件

$$x_n \geqslant x_{n+1}, \quad n = 1,2,3,\cdots,$$

则称数列$\{x_n\}$是单调减少的.单调增加的数列和单调减少的数列统称为单调数列.

注 (1) 利用定理 1.2.2 来判定数列收敛时,必须同时满足数列单调和有界这两个条件.

例如,数列 $x_n=(-1)^n$,虽然有界但不单调,而数列 $x_n=n$,虽然是单调的,但其无界,易知两数列均发散.

(2) 单调是数列收敛的充分条件,而非必要条件.

例如,$x_n=1+\dfrac{(-1)^n}{n}$,尽管数列$\{x_n\}$不单调,但知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

(3) 定理 1.2.2 只能判定数列极限的存在性,但未给出求极限的方法.

定理 1.2.3(夹逼准则)　如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件:

(1) $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$,$(n=1,2,3,\cdots)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$,$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

则数列$\{x_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

以后,我们还可将定理 1.2.3 推广到后面要介绍的函数的极限.

1.3　函数的极限

1.3.1　函数的极限

1.2 节我们讨论了数列的极限,这里我们对一般性函数的极限加以讨论.

考察函数 $y=2x+1$,显然当 x 从 1 的两侧无限趋于 1 时,函数值无限地趋近于 3,如表 1-2 所示.

表　1-2

x	0	0.6	0.9	0.99	0.999	…	1	…	1.001	1.01	1.1	1.4	2
$f(x)$	1	2.2	2.8	2.98	2.998	…	3	…	3.002	3.02	3.2	3.8	5

再观察函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$,当 $x\to\infty$时的变化趋势,如图 1-8 所示.

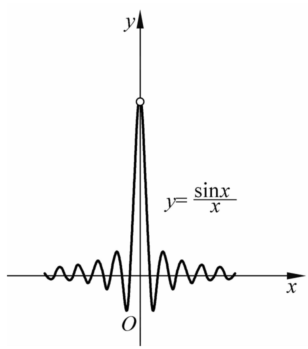

图　1-8

通过观察,当 x 无限增大时,$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$无限接近于 0.

从图形和函数值两方面分析,由于自变量的变化过程不同,函数的极限就表现为不同的形式,我们主要研究两种情形:

(1) 自变量趋于有限值时函数的极限;

(2) 自变量趋于无穷大时函数的极限.

而在这两种情形研究的过程中,考虑到函数定义域的各种形式,自变量 x 的变化形式有 6 种:

(1) x 仅从 x_0 的左侧趋于 x_0,记作 $x\to x_0^-$;

(2) x 仅从 x_0 的右侧趋于 x_0,记作 $x\to x_0^+$;

(3) x 趋于 $x_0(x\neq x_0)$,记作 $x\to x_0$;

(4) x 沿 x 轴正向趋于无穷大,记作 $x\to+\infty$;

(5) x 沿 x 轴负向趋于无穷大,记作 $x\to-\infty$;

(6) $|x|$趋于无穷大,记作 $x\to\infty$.

为了叙述方便,我们用 $x\to\square$统一表示这 6 种极限过程中的任一种,给出函数极限的

定义.

定义 1.3.1 如果函数 $f(x)$在自变量 $x\to\square$的变化过程中，对应的函数值 $f(x)$无限接近于某个确定的数 A，那么这个确定的数 A 就叫作在 $x\to\square$这一变化过程中函数 $f(x)$的极限，或称 $x\to\square$时，$f(x)$收敛于 A，记为

$$\lim_{x\to\square} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\square),$$

否则称 $f(x)$在 $x\to\square$时发散或极限$\lim\limits_{x\to\square} f(x)$不存在.

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

自变量趋于有限值时函数极限的严格数学定义为：

设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数 A 就叫函数 $f(x)$当 x 趋于 x_0 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0).$$

此定义可简单地表达为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,$$

使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

注 (1) 此定义称为"ε-δ"定义，ε 是任意给定的正数，当 ε 给定时，δ 与 ε 有关.

(2) $0<|x-x_0|$表明 x 与 x_0 不相等，故当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$有无极限与函数 $f(x)$在 x_0 处有无定义无关. $0<|x-x_0|<\delta$ 表示 $x\to x_0$ 的过程，即在点 x_0 的去心邻域中，邻域半径 δ 体现了 x 与 x_0 的接近程度，如图 1-9 所示.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的几何解释：当 x 在 x_0 的去心 δ 邻域内时，函数 $y=f(x)$图形完全落在以直线 $y=A$ 为中心线，宽为 2ε 的带形区域内，如图 1-10 所示.

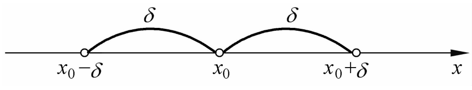

图 1-9

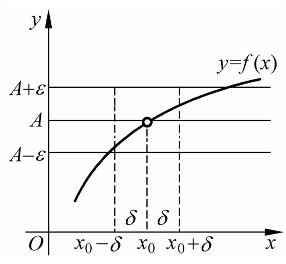

图 1-10

有时，我们可以从函数的图形上观察其函数值的变化趋势. 例如，由函数 $y=\sin x$ 的图形可知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$. 当然，我们也可利用函数极限的严格数学定

义证明一些结论.

例 1.3.1　证明$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)=4$.

证　由于

$$|f(x)-A|=|(x^2-2x+5)-4|=|x^2-2x+1|=|x-1|^2$$

任给 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$,只要 $0<|x-1|<\delta=\sqrt{\varepsilon}$,就有

$$|(x^2-2x+5)-4|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to 1}(x^2-2x+5)=4$$

成立.

例 1.3.2　证明$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$.

证　函数在点 $x=3$ 处没有定义. 由于

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=|x-3|,$$

任给 $\varepsilon>0$,要使

$$|f(x)-A|=|x-3|<\varepsilon,$$

只要取 $\delta=\varepsilon$,当 $0<|x-3|<\delta$ 时,就有

$$\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|<\varepsilon,$$

则

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6.$$

特别地,由极限的定义可知,$x\to x_0$ 是从左右两侧趋于 x_0 的,当只需考虑从一侧趋于 x_0,即当 $x\to x_0^-$(或 $x\to x_0^+$)时,函数的极限称为左(右)极限,即有

左极限:$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$. 记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$.

右极限:$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$. 记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$.

左极限和右极限统称为单侧极限.

定理 1.3.1　函数 $f(x)$当 x 趋于 x_0 时极限存在的充分必要条件是左、右极限存在并且相等,即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

例 1.3.3　设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geqslant 0\end{cases}$,如图 1-11 所示,则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

例 1.3.4 已知 $y=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ x-1, & x<0\end{cases}$，由图 1-12 可知 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，而 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，即 $f(0^+)\neq f(0^-)$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

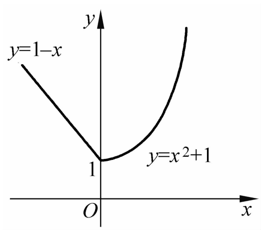

图 1-11

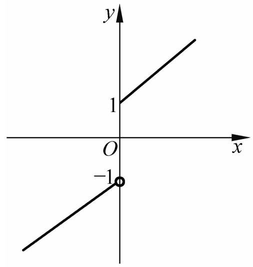

图 1-12

2. 自变量趋于无穷大时函数的极限

自变量趋于无穷大时函数极限的严格数学定义为：

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（无论它多么小），总存在正数 X，使得适合不等式 $|x|>X$ 的一切 x，所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数 A 就叫函数 $f(x)$ 当 x 趋于无穷大时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

函数极限定义可简单地表达为：

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

注 (1) 此定义含两种情况：① $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；② $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) 如图 1-13 所示，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的几何解释为：当 $x<-X$ 或 $x>X$ 时，函数 $y=f(x)$ 图形完全落在以直线 $y=A$ 为中心线，宽为 2ε 的带形区域内.

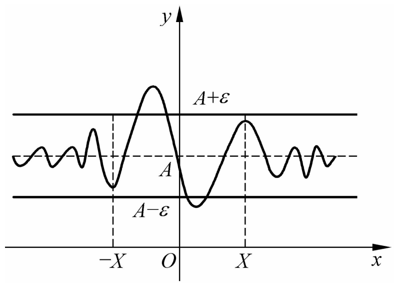

图 1-13

由函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图形易知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，类似地，可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

定理 1.3.2 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

显然，由函数 $y=\arctan x$ 的图形易知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，由定

理 1.3.2 可知$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

一般地，如果$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$($\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$)，则称直线 $y=A$ 为函数 $y=f(x)$的图形的水平渐近线.

1.3.2　函数极限的性质

下面以 $x\to x_0$ 为例给出函数极限的如下性质.

定理 1.3.3(唯一性)　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，那么这极限是唯一的.

定理 1.3.4(局部有界性)　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，则存在一个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，$\delta>0$，使得函数 $f(x)$在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$内有界.

定理 1.3.5(局部保号性)　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，而且 $a>0$(或 $a<0$)，则存在一个 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，当 x 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$内时，就有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

推论 1　设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$，且 $a<b$，则存在 $\delta>0$，对任意 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有 $f(x)<g(x)$.

推论 2　如果在 x_0 的 δ 去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$内，$f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，而且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，那么 $a\geqslant 0$(或 $a\leqslant 0$).

推论 3　如果存在 $\delta>0$，对任意 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有 $f(x)\geqslant g(x)$，而$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$，那么 $a\geqslant b$.

1.3.3　函数极限的四则运算法则

前面介绍过的数列极限的四则运算法则及一些性质可以推广到函数极限.

定理 1.3.6　如果$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=b$，那么

(1) $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\pm g(x)]$必存在，且

$$\lim_{x\to\square}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to\square}f(x)\pm\lim_{x\to\square}g(x)=a\pm b;$$

(2) $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\cdot g(x)]$必存在，且

$$\lim_{x\to\square}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to\square}f(x)\cdot\lim_{x\to\square}g(x)=ab;$$

特别地，如果$\lim\limits_{x\to\square}f(x)$存在，而 C 为常数，则

$$\lim_{x\to\square}[Cf(x)]=C\lim_{x\to\square}f(x)=Ca;$$

(3)若 $b\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在，且

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\square}f(x)}{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}=\frac{a}{b}.$$

例 1.3.5 求$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$.

解 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2}x^2-3}{\lim\limits_{x\to2}x^2+1}=\dfrac{1}{5}$.

注 求有理整函数(多项式)当 $x\to x_0$ 的极限时,只要把 x_0 代入函数中即可. 但对于有理分式函数,如果代入 x_0 后分母等于零,则没有意义,那么关于商的极限的运算法则不能应用,需要考虑其他求解方法,例 1.3.6～例 1.3.8 属于这种情形.

例 1.3.6 求$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

解 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)=6$.

例 1.3.7 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

解 当 $x\to0$ 时,分子与分母的极限都是 0,于是不能采取分子、分母分别取极限的方法. 考虑将函数的分子有理化,得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 1.3.8 求$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

解 当 $x\to1$ 时,括号内两式的分母均趋于零,不能直接运用四则运算法则求,可将函数变形处理,由于

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}=\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{-(x+2)}{x^2+x+1},$$

所以有

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{-(x+2)}{x^2+x+1}=-1.$$

例 1.3.9 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+6}{5x^2+4x-1}$.

解 当 $x\to\infty$时,分子、分母都趋于无穷大,所以不能直接运用四则运算法则求. 先将分子、分母同除以 x^2,然后取极限有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+6}{5x^2+4x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x^2}}{5+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{4}{5}.$$

例 1.3.10　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+2x-9}{7x^3+2x-1}$.

解　先将分子、分母同除以 x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+2x-9}{7x^3+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{9}{x^3}}{7+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=0.$$

例 1.3.11　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+2x-1}{x^2}$.

解　整理有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+2x-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(7x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\infty.$$

例 1.3.9～例 1.3.11 的一般情形如下：

当 $a_0\neq0,b_0\neq0,m$ 和 n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当\ n=m\\ 0, & 当\ n>m\\ \infty, & 当\ n<m\end{cases}.$$

1.3.4　复合函数的极限运算法则

定理 1.3.7　设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成，$y=f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=a$，且存在 $\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=a$.

1.4　两个重要极限

1.4.1　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

在 1.2 节介绍了极限的夹逼准则，不仅说明了极限的存在性，而且给出了求极限的方法，我们可以利用这一准则证明一个重要的极限公式：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

证　函数的定义域为 $x\neq0$ 的全体实数. 在如图 1-14 所示的单位圆中，设圆心角 $\angle AOB=x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，点 A 处的切线与 OB 的延长线相交于 D，又 $BC\perp OA$，则

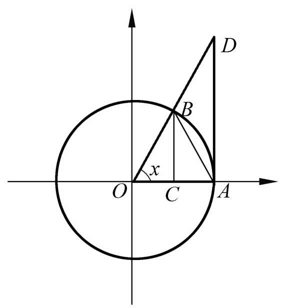

图　1-14

$$CB = \sin x, \quad \overset{\frown}{AB} = x, \quad AD = \tan x.$$

因为$\triangle AOB$的面积<扇形AOB的面积<$\triangle AOD$的面积，所以$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$，即

$$\sin x < x < \tan x.$$

由于$0<x<\frac{\pi}{2}$，因此有

$$\frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x},$$

不等式各边都乘以$\sin x$，得

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{1.4.1}$$

若用$-x$代替x，$\cos x$与$\frac{\sin x}{x}$都不变，所以当$-\frac{\pi}{2}<x<0$时，不等式$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$也成立.

为了应用夹逼准则求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$，由式(1.4.1)只要证明$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

事实上，当$0<|x|<\frac{\pi}{2}$时，

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

即

$$0 < 1 - \cos x < \frac{x^2}{2}.$$

当$x\to 0$时，$\frac{x^2}{2}\to 0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，即

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1.$$

由式(1.4.1)可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

另一方面，我们通过观察图1-8也能直观得到极限结果，但在使用的过程中应注意，分子$\sin x$和分母x在自变量$x\to 0$的前提下都趋近于0.同时这一结果能帮我们求出很多其他函数的极限.

例 1.4.1 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\right)=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3$.

例 1.4.2 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}$.

例 1.4.3　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1.$

例 1.4.4　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}.$

例 1.4.5　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^3\cos x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

1.4.2　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

如图 1-15 所示，我们通过函数 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的图像，观察到在 $x\to\infty$ 的过程中函数值无限接近 e.

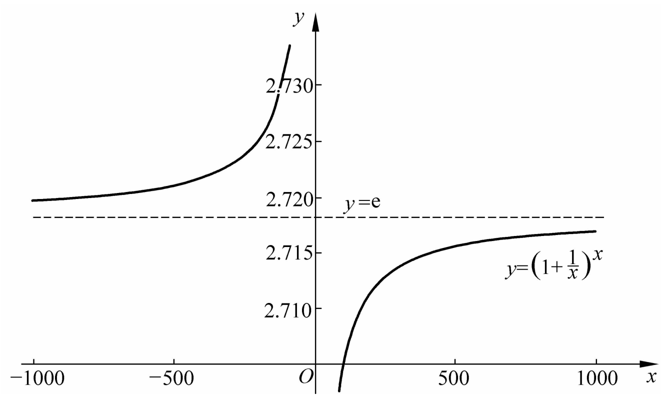

图　1-15

还可利用 1.2 节的单调有界定理证明数列 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 当 n 趋于无穷大时是收敛的.

证　首先证明 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是单调的.

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$\leqslant\left[\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right]^{n+1}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1},$$

即 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是单调增加的.

下面证明 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 有界.

显然,$x_n\geqslant x_1=2$. 类似 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调性的证明可证数列 $y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ 是单调增加的. 设数列 $z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,则

$$z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}=\frac{1}{y_{n+1}},$$

同理可证 $z_{n+1}=\frac{1}{y_{n+2}}$,由于数列 y_n 是单调增加的,所以数列 z_n 是单调减少的.

又 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=z_n<z_1=4$,则 $2\leqslant x_n<4$. 综上,根据定理 1.2.2 可知,数列 x_n 是收敛的. 通常用字母 e 来表示这个极限,即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

这个数 e 是无理数,它的值是 $\mathrm{e}=2.718281828\cdots$.

可以证明,当 $x\to\infty$($+\infty$ 或 $-\infty$)时,函数 $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的极限都存在且都等于 e,即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}. \tag{1.4.2}$$

令 $y=\frac{1}{x}$,可将式(1.4.2)变形为另一种形式:

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\mathrm{e}. \tag{1.4.3}$$

因此,得到结论 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$. 这一结果结合前面介绍的复合函数求极限法则可以处理很多类似形式的函数极限问题,举几例说明.

例 1.4.6　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{1}{x}\right)\right]^{(-x)(-1)}=\mathrm{e}^{-1}$.

例 1.4.7　$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot 3}=\mathrm{e}^3$.

例 1.4.8　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}\cdot\frac{5x}{x-3}}=\mathrm{e}^5$.

例 1.4.9(定期储蓄)　设 A、B、C、D 4 家银行按不同的方式(分别以年、半年、月、连续)计算本利和,若某人在每个银行均存入 1000 元,年利率为 8%,试问 5 年后本利和各为多少?

解　设存入 P_0 元,按复利计算,t 年后本利和为

$$P=P_0(1+r)^t,$$

其中,r 是年利率,t 是存期(年).

A 银行按年计息,则 $P_A=1000(1+8\%)^5=1469.33$(元);

B 银行按半年计息,则 $P_B=1000\left(1+8\%\times\frac{1}{2}\right)^{5\times 2}=1480.24$(元);

C 银行按月计息,则 $P_C=1000\left(1+8\%\times\frac{1}{12}\right)^{5\times 12}=1489.85$(元);

由于 D 银行连续计息,我们先把计息周期缩短,过 $\frac{1}{n}$ 年计一次息,此时利率为 $\frac{r}{n}$,t 年后的本利和为

$$P=P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

若再将 1 年无限细分,即让 $n\to\infty$,t 年后的本利和为

$$P=\lim_{n\to\infty}P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=P_0\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}\cdot rt}=P_0\mathrm{e}^{rt}.$$

则 $P_D=1000\mathrm{e}^{8\%\cdot 5}=1491.82$ 元.

在金融界有人称 e 为银行家常数,它还有一个有趣的解释:若你将 1 元钱存入银行,年利率为 10%,10 年后的本利和恰为数 e,即

$$P=P_0\mathrm{e}^{rt}=1\cdot\mathrm{e}^{(0.10)\cdot 10}=\mathrm{e}.$$

1.5　无穷小量与无穷大量

1.5.1　无穷小量与无穷大量

定义 1.5.1　当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,如果函数 $f(x)$ 的极限为零,则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量,简称无穷小.

特别地，以零为极限的数列$\{x_n\}$称为当$n\to\infty$时的无穷小.

例如，因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$，所以$\frac{1}{x^2}$是当$x\to\infty$时的无穷小；又由于$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$，所以函数$x-2$为当$x\to 2$时的无穷小.

注 无穷小量是一个变量(除常数零外)，它与绝对值很小的数有本质的区别.

如10^{-1000}是个绝对值很小的数，但它不是无穷小.

由无穷小量的定义可知无穷小与函数的极限是密不可分的，我们有如下定理.

定理 1.5.1 在自变量的同一变化过程$x\to x_0$(或$x\to\infty$)中，函数$f(x)$的极限为A的充分必要条件是$f(x)=A+\alpha$，其中α是$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷小.

证 下面仅讨论$x\to x_0$的过程.

必要性 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

令$\alpha(x)=f(x)-A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，即$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小.

充分性 因为$\alpha(x)=f(x)-A$是$x\to x_0$时的无穷小，其中A是常数，即$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，所以，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|\alpha(x)|<\varepsilon,$$

也就是$|f(x)-A|<\varepsilon$. 这就证明了A是$f(x)$当$x\to x_0$时的极限.

类似地可证明$x\to\infty$时的情形.

定义 1.5.2 如果当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时，对应的函数值的绝对值$|f(x)|$无限增大，那么就称函数$f(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷大(量). 记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\quad(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty).$$

显然$\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$，因此函数$y=x^2$为$x\to\infty$时的无穷大.

必须注意，函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时为无穷大，但实际上极限不存在，∞只不过是一个记号.

特别地，如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则直线$x=x_0$称为函数$y=f(x)$的图形的铅直渐近线.

例如，因为$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$，则直线$x=1$是函数$y=\frac{1}{x-1}$的图形的铅直渐近线.

注意到，函数$\frac{1}{x^2}$为$x\to\infty$时的无穷小，同时函数x^2为当$x\to\infty$时的无穷大，这两个函数互为倒数，我们得到无穷小与无穷大之间有如下关系.

定理 1.5.2 在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大.