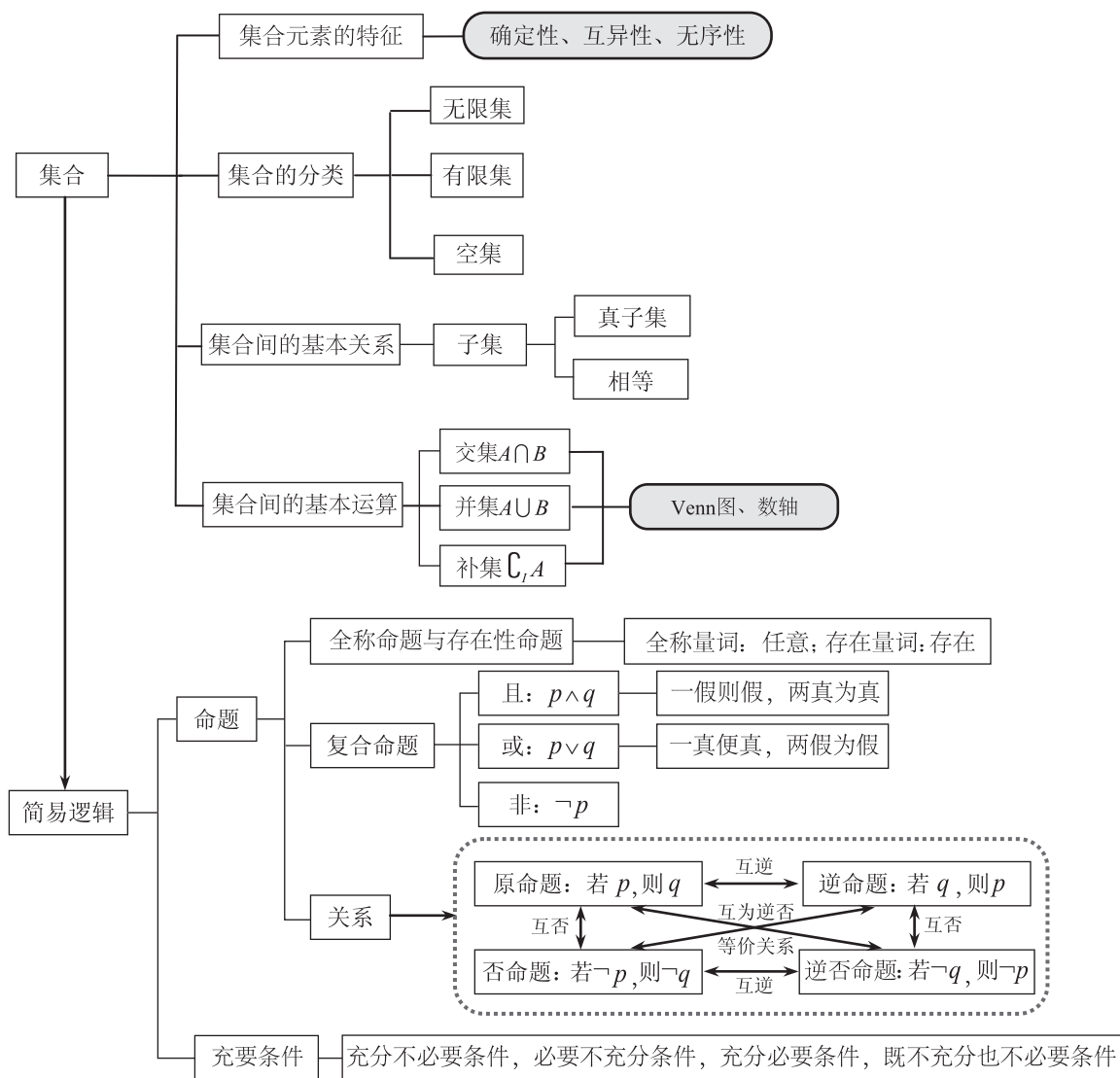


第一章 集合与常用逻辑用语

本章知识结构图



第一节 集合



考纲解读

1. 集合的含义与表示. 了解集合的含义、元素与集合的关系;能用自然语言、图形语言和集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题.

2. 集合间的基本关系. 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集;在具体的情境中,了解全集与

空集的含义.

3. 集合的基本运算. 理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集;理解在给定集合中一个子集的含义,会求给定子集的补集;能使用韦恩(Venn)图表达集合的关系及运算.



命题趋势探究

有关集合的高考试题,考查重点是集合与集合之间的关系与运算,考试形式多以一道选择题为主,分值5分.近年来试题加强了对集合计算和化简能力的考查,并向无限集方向发展,考查学生的抽象思维能力,在解决这些问题时,要注意运用数轴法和特殊值法解题,应加强集合表示方法的转化和化简的训练.

预测2015年高考,将继续体现本章知识的工具性作用,多以小题形式出现,也有可能将其渗透在解答题的表述之中,相对独立.具体估计为:

(1)以选择题或填空题形式出现.北京、重庆等地也可能以集合为基础,综合其他知识在最后一题的位置出现.考查学生的综合推理能力.

(2)热点是集合间的基本运算、数轴法的应用和体现集合的语言工具作用.



知识点精讲

一、集合的有关概念

1. 集合的含义与表示

某些指定对象的部分或全体构成一个集合.构成集合的元素除了常见的数、点等数学对象外,还可以是其他对象.

2. 集合元素的特征

(1)确定性:集合中的元素必须是确定的,任何一个对象都能明确判断出它是否为该集合中的元素.

(2)互异性:集合中任何两个元素都是互不相同的,即相同元素在同一个集合中不能重复出现.

(3)无序性:集合与其组成元素的顺序无关.如 $\{a, b, c\} = \{a, c, b\}$.

3. 集合的常用表示法

集合的常用表示法有列举法、描述法、图示法(韦恩图、数轴)和区间法.

4. 常用数集的表示

$\mathbf{R}$ —实数集 $\mathbf{Q}$ —有理数集 $\mathbf{Z}$ —整数集

$\mathbf{N}$ —自然数集 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ —正整数集 $\mathbf{C}$ —复数集

二、集合间的关系

1. 元素与集合之间的关系

元素与集合之间的关系包括属于(记作 $a \in A$)和不属于(记作 $a \notin A$)两种.

空集:不含有任何元素的集合,记作 $\emptyset$.

2. 集合与集合之间的关系

(1)包含关系.

子集:如果对任意 $a \in A \Rightarrow a \in B$,则集合 A 是集合 B 的子集,记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$,显然 $A \subseteq A$.规定: $\emptyset \subseteq A$.

(2)相等关系.

对于两个集合 A 与 B ,如果 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$,那么集合 A 与 B 相等,记作 $A = B$.

(3)真子集关系.

对于两个集合 A 与 B ,若 $A \subseteq B$,且存在 $b \in B$,但 $b \notin A$,则集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.空集是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集.

三、集合的基本运算

集合的基本运算包括集合的交集、并集和补集运算,如表1-1所示.

表 1-1

交集	$\cap$	$A \cap B =$ $\{x x \in A \text{ 且 } x \in B\}$	
并集	$\cup$	$A \cup B =$ $\{x x \in A \text{ 或 } x \in B\}$	
补集	$\complement_I A$	$\complement_I A =$ $\{x x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$	

1. 交集

由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合,叫做 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$,即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

2. 并集

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合,叫做 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

3. 补集

已知全集 I ,集合 $A \subseteq I$,由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做集合 A 相对于全集 I 的补集,记作 $\complement_I A$,即 $\complement_I A = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$.

四、集合运算中常用的结论

1. 集合中的逻辑关系

(1)交集的运算性质.

$$A \cap B = B \cap A, A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B, \\ A \cap I = A, A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset.$$

(2)并集的运算性质.

$$A \cup B = B \cup A, A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B, \\ A \cup I = I, A \cup A = A, A \cup \emptyset = A.$$

(3)补集的运算性质.

$$\complement_I (\complement_I A) = A, \complement_I \emptyset = I, \complement_I I = \emptyset, \\ (\complement_I A) \cap A = \emptyset, A \cup (\complement_I A) = I.$$

补充性质: $A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow \complement_I B \subseteq \complement_I A \Leftrightarrow A \cap \complement_I B = \emptyset$.

(4)结合律与分配律.

$$\text{结合律: } A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(5) 反演律(德摩根定律).

$\complement_I(A \cap B) = (\complement_I A) \cup (\complement_I B)$,

$\complement_I(A \cup B) = (\complement_I A) \cap (\complement_I B)$.

即“交的补=补的并”,“并的补=补的交”.

2. 由 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 个元素组成的集合 A 的子集个数

A 的子集有 2^n 个,非空子集有 $2^n - 1$ 个,真子集有 $2^n - 1$ 个,非空真子集有 $2^n - 2$ 个.

3. 容斥原理

$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

题型归纳及思路提示

题型 1 集合的基本概念

思路提示

利用集合元素的特征:确定性、无序性、互异性.

例 1.1 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 集合 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$, 则 $b-a$ = ().

A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

解析 由题意知, $0 \in \{1, a+b, a\}$, 又 $a \neq 0$, 故 $a+b=0$, 得

$\frac{b}{a} = -1$, 则集合 $\{1, 0, a\} = \{0, -1, b\}$, 可得 $a = -1, b = 1, b-a = 2$. 故选 C.

变式 1 (2012 新课标理 1) 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{(x, y) | x \in A, y \in A, x-y \in A\}$, 则 B 中所含元素的个数为 ().

A. 3 B. 6 C. 8 D. 10

变式 2 (2013 山东理 2) 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 则集合 $B = \{x-y | x \in A, y \in A\}$ 中元素的个数是 ().

A. 1 B. 3 C. 5 D. 9

变式 3 若集合 $\{x, xy, \lg(xy)\} = \{0, |x|, y\}$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____.

题型 2 集合间的基本关系

思路提示

(1) 判断两集合的关系常用两种方法:一是逻辑分析法,即先化简集合,再从表达式中寻找两集合的关系;二是用列举法表示各集合,从元素中寻找关系,这体现了合情推理的思维方法.

(2) 已知两集合间的关系求参数时,关键是将两集合间的关系转化为元素的关系,进而转化为参数满足的关系,解决这类问题常利用数轴和韦恩图辅助分析.

一、集合关系中的判断问题

例 1.2 若 $A = \{x | x = 4n+1, n \in \mathbb{Z}\}, B = \{x | x = 4n-3, n \in \mathbb{Z}\}, C = \{x | x = 8n+1, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 A, B, C 之间的关系为 ().

A. $C \subseteq B \subseteq A$ B. $A \subseteq B \subseteq C$
C. $C \subseteq A = B$ D. $A = B = C$

解析 解法一:集合 B 中元素 $x = 4n-3 = 4(n-1)+1, n \in$

$\mathbb{Z}$, 故集合 $A = B$, 而集合 C 中元素 $x = 4 \times 2n+1, n \in \mathbb{Z}$, 故 $C \subseteq A$.

解法二: 列举 $A = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}, B = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}, C = \{\dots, -7, 1, 9, \dots\}$.

因此 $C \subseteq A = B$. 故选 C.

评注 解法一是数学中“求同比异”的思想,值得学习;解法二是列举法,易于入手,也是做选择题的常用方法.

变式 1 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

$N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 则 ().

A. $M = N$ B. $M \subseteq N$
C. $M \supseteq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

例 1.3 设 $A = \{x | x^2 - 8x + 15 = 0\}, B = \{x | ax - 1 = 0\}$.

(1) 若 $a = \frac{1}{5}$, 试判断集合 A 与 B 的关系;

(2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 组成的集合 C .

分析 (1) 先求集合 A , 再由 $a = \frac{1}{5}$ 求集合 B , 确定 A 与 B 的关系.

(2) 解方程 $ax - 1 = 0$, 建立 a 的关系式求 a , 从而确定集合 C .

解析 (1) 由 $x^2 - 8x + 15 = 0$, 得 $x = 3$ 或 $x = 5$, 所以 $A = \{3, 5\}$.

若 $a = \frac{1}{5}$, 得 $\frac{1}{5}x - 1 = 0$, 即 $x = 5$, 所以 $B = \{5\}$, 故 $B \subseteq A$.

(2) 因为 $A = \{3, 5\}$, 又 $B \subseteq A$.

① 当 $B = \emptyset$ 时, 则方程 $ax - 1 = 0$ 无解, 则 $a = 0$;

② 当 $B \neq \emptyset$ 时, 则 $a \neq 0$, 由 $ax - 1 = 0$, 得 $x = \frac{1}{a}$,

所以 $\frac{1}{a} = 3$ 或 $\frac{1}{a} = 5$, 即 $a = \frac{1}{3}$ 或 $a = \frac{1}{5}$,

故集合 $C = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$.

评注 (1) 研究集合的子集问题时应首先想到空集, 因为空集是任何集合的子集.

(2) 含参数的一元一次方程 $ax = b$ 解的确定:

当 $a \neq 0$ 时, 方程有唯一实数解 $x = \frac{b}{a}$;

当 $a = b = 0$ 时, 方程有无数个解, 可以为任意实数;

当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时, 方程无解.

变式 1 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 10 \leq 0\}$, 集合 $B = \{x | p + 1 \leq x \leq 2p - 1\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 p 的取值范围.

二、已知集合间的关系, 求参数的取值范围

例 1.4 (2012 大纲全国理 2) 已知集合 $A = \{1, 3, \sqrt{m}\}$, $B = \{1, m\}$, $A \cup B = A$, 则 $m =$ ().

A. 0 或 $\sqrt{3}$ B. 0 或 3 C. 1 或 $\sqrt{3}$ D. 1 或 3

解析 由 $A \cup B = A$, 得 $B \subseteq A$, 故 $m=3$ 或 $m=\sqrt{m}$ 且 $m \neq 1$, 所以 $m=0$ 或 3 , 故选 B.

变式 1 已知集合 $A=\{x|-3 < x < 6\}$, $B=\{x|x \leq a, a \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是_____.

变式 2 已知集合 $A=\{x|x \leq 1\}$, $B=\{x|x \geq a\}$, 且 $A \cup B = \mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

变式 3 已知集合 $P=\{x|x^2 \leq 1\}$, $M=\{a\}$, 若 $P \cup M = P$, 则 a 的取值范围是().

- A. $(-\infty, -1]$ B. $[1, +\infty)$
C. $[-1, 1]$ D. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

三、集合关系中的子集个数问题

例 1.5 已知集合 $A=\{x|x^2-3x-10 \leq 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 则集合 A 的子集个数为_____.

分析 本题应首先确定集合 A 中元素的个数, 再求其子集的个数.

解析 集合 $A=\{x|x^2-3x-10 \leq 0, x \in \mathbf{Z}\}=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 共 8 个元素, 则集合 A 的子集的个数为 $2^8=256$.

例 1.6 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{x|0 < x < 5, x \in \mathbf{N}\}$, 则满足条件 $A \subseteq C \subseteq B$ 的集合 C 的个数为().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解析 由 $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$, 且 $A \subseteq C \subseteq B$, 得集合 C 是集合 $\{1, 2\}$ 与集合 $\{3, 4\}$ 的任一子集的并集, 即求集合 $\{3, 4\}$ 的子集的个数为 $2^2=4$, 故选 D.

变式 1 已知集合 M 满足 $\{1, 2\} \subseteq M \subseteq \{x|x \leq 10, x \in \mathbf{N}^*\}$, 求集合 M 的个数.

3), 所以 $M \cap N = \{x|1 \leq x \leq 3\}$. 故选 C.

评注 凡是遇到集合的运算(交、并、补)问题, 应注意对集合元素属性的识别, 如集合 $\{y|y=f(x), x \in A\}$ 是函数的值域, 是数集, 求出值域可以使之简化; 集合 $\{(x, y)|y=f(x), x \in A\}$ 是点集, 表示函数 $y=f(x)$ 图像上所有点的集合. 再如集合 $M=\{y|x^2+y^2=1, x, y \in \mathbf{R}\}$, 可以理解为单位圆上点的纵坐标的取值集合 $\{y|-1 \leq y \leq 1\}$, 表示的是数集 $[-1, 1]$; $N=\{(x, y)|x^2-y=0, x, y \in \mathbf{R}\}$ 表示的是曲线 $x^2-y=0$, 即抛物线 $y=x^2$ 上的所有点构成的集合, 它表示的是点集, 故有 $M \cap N = \emptyset$. 另如 $M=\{(x, y)|x^2+y^2=4\}$, $N=\{y|y=x\}$, 则有 $M \cap N = \emptyset$, 而易错为 $M \cap N = \{(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$.

变式 1 集合 $P=\{x \in \mathbf{Z}|0 \leq x < 3\}$, $M=\{x \in \mathbf{R}|x^2 \leq 9\}$, 则 $P \cap M = ()$.

- A. $\{1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2\}$
C. $\{x|0 \leq x < 3\}$ D. $\{x|0 \leq x \leq 3\}$

变式 2 已知集合 $A=\{x \in \mathbf{R}||x+3|+|x-4| \leq 9\}$, $B=\{y \in \mathbf{R}|y=4x+\frac{1}{x}-6, x \in (0, +\infty)\}$, 则集合 $A \cap B =$ _____.

变式 3 设全集 $I = \{(x, y)|x, y \in \mathbf{R}\}$, 集合 $M = \{(x, y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$, $N = \{(x, y)|y \neq x+1\}$, 那么 $(\complement_I M) \cap (\complement_I N) = ()$.

- A. $\emptyset$ B. $\{(2, 3)\}$
C. $(2, 3)$ D. $\{(x, y)|y=x+1\}$

变式 4 已知集合 $A=\{(x, y)|x^2+mx-y+2=0, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{(x, y)|x-y+1=0, 0 \leq x \leq 2\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

题型 3 集合的运算

思路提示

凡是遇到集合的运算(并、交、补)问题, 应注意对集合元素属性的理解, 数轴和韦恩图是集合交、并、补运算的有力工具, 数形结合是解集合运算问题的常用思想.

一、集合元素属性的理解

例 1.7 已知集合 $M=\{y|y=x^2+1, x \in \mathbf{R}\}$, $N=\{x|y=\sqrt{9-x^2}\}$, 则 $M \cap N = ()$.

- A. $\{x|1 < x \leq 3\}$ B. $\{x|1 \leq x < 3\}$
C. $\{x|1 \leq x \leq 3\}$ D. $\{x|1 < x < 4\}$

分析 在进行集合运算之前, 首先要识别集合, 即认清集合中元素的属性, 判断 M, N 是数集还是点集, 是数集要化简集合, 是点集要解方程组. 在本题中, 集合 M 的代表元素是因变量, 故是函数的值域(数集); 集合 N 的代表元素是自变量, 故是函数的定义域(数集).

解析 $M=\{y|y=x^2+1, x \in \mathbf{R}\}=\{y|y \geq 1\}$,
 $N=\{x|y=\sqrt{9-x^2}\}=\{x|9-x^2 \geq 0\}=\{x|-3 \leq x \leq$

二、数轴在集合运算中的应用

例 1.8 设集合 $S=\{x||x-2| > 3\}$, $T=\{x|a < x < a+8\}$, $S \cup T = \mathbf{R}$, 则 a 的取值范围是().

- A. $(-3, -1)$
B. $[-3, -1]$
C. $(-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$
D. $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$

分析 借助数轴表示集合 S 和集合 T , 根据集合的关系, 求解参数的取值范围.

解析 因为 $S=\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, $T=\{x|a < x < a+8\}$, 集合 S, T 在数轴上的表示如图 1-1 所示. 因为 $S \cup T = \mathbf{R}$, 所以 $\begin{cases} a < -1 \\ a+8 > 5 \end{cases}$, 可得 $-3 < a < -1$. 故选 A.

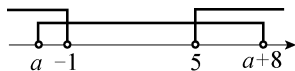


图 1-1

变式 1 (2012 天津理 11) 已知集合 $A=\{x \in \mathbf{R}||x+2| < 3\}$, 集合 $B=\{x \in \mathbf{R}|(x-m)(x-2) < 0\}$, 且 $A \cap B =$

$(-1, n)$, 则 $m =$ _____, $n =$ _____.

变式 2 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 4\}$, 那么集合 $A \cap (\complement_U B) =$ ().

- A. $\{x | -2 \leq x \leq 4\}$ B. $\{x | x \leq 3 \text{ 或 } x \geq 4\}$
C. $\{x | -2 \leq x \leq -1\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$

变式 3 已知集合 $M = \left\{x \left| \frac{x+3}{x-1} < 0 \right.\right\}$, $N = \{x | x \leq -3\}$, 则集合 $\{x | x \geq 1\} =$ ().

- A. $M \cap N$ B. $M \cup N$
C. $\complement_{\mathbf{R}}(M \cap N)$ D. $\complement_{\mathbf{R}}(M \cup N)$

三、韦恩图在集合运算中的应用

例 1.9 设 U 为全集, M, P 是两个非空集合, 定义 M 与 P 的差集 $M - P = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin P\}$, 则 $M - (M - P) =$ ().

- A. P B. $M \cap P$ C. $M \cup P$ D. M

分析 本题可利用题中所给定义 $M - P$ 表示从集合 M 中去掉属于集合 P 的元素解题.

解析 ①当 $M \cap P \neq \emptyset$ 时, 根据题意利用韦恩图解题, 如图 1-2 所示, $M - (M - P) = M \cap P$.

②当 $M \cap P = \emptyset$ 时, $M - (M - P) = M - M = \emptyset = M \cap P$.

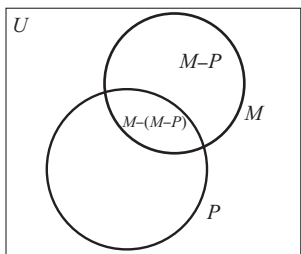


图 1-2

综上, $M - (M - P) = M \cap P$. 故选 B.

评注 凡是遇到抽象的集合运算题可尝试利用韦恩图求解. 本题也可用举例法求解, 比如 $M = \{2, 4\}$, $P = \{1, 3, 5\}$, 根据定义得出所求集合为空集. 故选 B.

变式 1 设全集 $U = M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M \cap \complement_U N = \{2, 4\}$, 则 $N =$ ().

- A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{1, 3, 5\}$ C. $\{1, 4, 5\}$ D. $\{2, 3, 4\}$

变式 2 某班级共有 30 人, 其中 15 人喜爱篮球, 8 人喜爱足球, 两项都不喜爱的有 8 人, 则喜爱篮球但不喜爱足球的有 _____ 人.

例 1.10 如图 1-3 所示, I 是全集, A, B, C 是它的子集, 则阴影部分所表示的集合是 ().

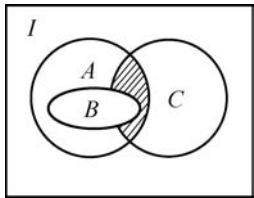


图 1-3

- A. $(A \cap B) \cap C$ B. $(A \cap \complement_U B) \cap C$
C. $(A \cap B) \cap \complement_U C$ D. $(\complement_U B \cup A) \cap C$

分析 本题考查对利用韦恩图表述集合关系的理解.

解析 图 1-3 中的阴影部分为 A 与 C 的公共部分, 即 $A \cap C$ 中去掉属于 B 的那部分元素后剩余元素组成的集合, 即

$(A \cap C) \cap (\complement_U B) = (A \cap \complement_U B) \cap C$. 故选 B.

评注 对于韦恩图表述的集合应做如下理解: 阴影部分涉及到谁就交谁, 涉及不到谁就交其补集.

如图 1-4 所示分别表示: (a) $A \cap B \cap C$; (b) $A \cap B \cap (\complement_U C)$; (c) $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) \cap C$ 或 $\complement_U (A \cup B) \cap C$.

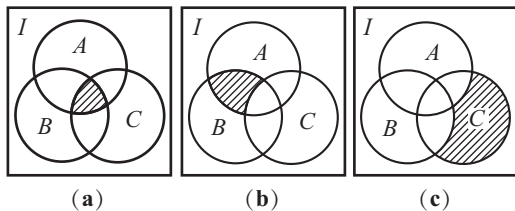


图 1-4

变式 1 已知 M, N 为集合 I 的非空子集, 且 M, N 不相等, 若 $N \cap (\complement_I M) = \emptyset$, 则 $M \cup N =$ ().

- A. M B. N C. I D. $\emptyset$

四、以集合为载体的创新题

例 1.11 设 A 是整数集的一个非空子集, 对于 $k \in A$, 如果 $k - 1 \notin A$ 且 $k + 1 \notin A$, 那么称 k 是 A 的一个孤立元, 给定 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 由 S 的 3 个元素组成的所有集合中, 不含孤立元的集合共有 _____ 个.

解析 由孤立元的定义, 若 t 不是 A 的孤立元, t 应满足 $t - 1 \in A$ 或 $t + 1 \in A$, 即集合中元素连续, 故满足 S 的 3 个元素构成的不含孤立元的集合分别为 $\{1, 2, 3\}$ 、 $\{2, 3, 4\}$ 、 $\{3, 4, 5\}$ 、 $\{4, 5, 6\}$ 、 $\{5, 6, 7\}$ 和 $\{6, 7, 8\}$, 共 6 个.

评注 由 S 的 3 元素组成的集合中, 含有一个孤立元的集合有 30 个, 含有 3 个孤立元的集合有 20 个.

变式 1 设 S 是整数集 $\mathbf{Z}$ 的非空子集, 如果 $\forall a, b \in S$, 有 $ab \in S$, 则称 S 关于数的乘法是封闭的, 若 T, V 是 $\mathbf{Z}$ 的两个不相交的非空子集, $T \cup V = \mathbf{Z}$, 且 $\forall a, b, c \in T$, 有 $abc \in T$, $\forall x, y, z \in V$, 有 $xyz \in V$, 则下列结论恒成立的是 ().

- A. T, V 中至少有一个关于乘法是封闭
B. T, V 中至多有一个关于乘法是封闭
C. T, V 中有且只有一个关于乘法是封闭
D. T, V 中每一个关于乘法是封闭

变式 2 已知集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} (k \geq 2)$, 其中 $a_i \in \mathbf{Z} (i = 1, 2, \dots, k)$, 由 A 中的元素构成两个相应的集合: $S = \{(a, b) | a \in A, b \in A, a + b \in A\}$, $T = \{(a, b) | a \in A, b \in A, a - b \in A\}$, 其中 (a, b) 是有序数对, 集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n . 若对于任意的 $a \in A$, 总有一 $-a \notin A$, 则称集合 A 具有性质 P .

(1) 检验集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 与 $\{-1, 2, 3\}$ 是否具有性质 P , 并对具有性质 P 的集合, 写出相应的集合 S 和 T ;

(2) 对任何具有性质 P 的集合 A , 证明: $n \leq \frac{k(k-1)}{2}$.

变式 3 (2012 江苏 23) 设集合 $P_n = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbf{N}^*$, 记 $f(n)$ 为同时满足下列条件的集合 A 的个数.

① $A \subseteq P_n$; ② 若 $x \in A$, 则 $2x \notin A$; ③ 若 $x \in \complement_{P_n} A$, 则 $2x \notin \complement_{P_n} A$.

(1) 求 $f(4)$;

(2) 求 $f(n)$ 的解析式 (用 n 表示).

最有效训练题 1 (限时 45 分钟)

1. 设集合 $M = \{x | x^2 + x - 6 < 0\}, N = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ().

A. $[2, 3]$ B. $[1, 2]$ C. $[2, 3)$ D. $[1, 2)$

2. 若 $A = \{x | y = \sqrt{4 - x^2}\}, B = \{y | y = x^2 + 1\}$, 则 $A \cap B =$ ().

A. $(1, +\infty)$ B. $[1, 2]$ C. $[0, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

3. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 集合 $A = \{2, 4, 5, 7\}, B = \{1, 4, 7, 8\}$, 那么如图 1-5 所示的阴影部分表示的集合是 ().

A. $\{3, 6\}$ B. $\{2, 4, 6\}$ C. $\{2, 6\}$ D. $\{3, 4, 6\}$

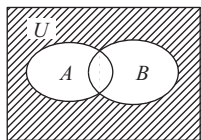


图 1-5

4. 已知全集 $I = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x | |x| < 2, x \in \mathbf{R}\}, P = \{x | x > a\}$, 并且 $M \not\subseteq P$, 那么 a 的取值范围是 ().

A. $\{2\}$ B. $\{a | a \leq 2\}$ C. $\{a | a \geq 2\}$ D. $\{a | a < 2\}$

5. 设集合 $A = \{x | |x - a| < 1, x \in \mathbf{R}\}, B = \{x | 1 < x < 5, x \in \mathbf{R}\}$. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $\{a | 0 \leq a \leq 6\}$ B. $\{a | a \leq 2 \text{ 或 } a \geq 4\}$

C. $\{a | a \leq 0 \text{ 或 } a \geq 6\}$ D. $\{a | 2 \leq a \leq 4\}$

6. 设全集 $U = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}, A = \{(x, y) | 2x - y + m < 0\}, B = \{(x, y) | x + y - n \geq 0\}$, 那么点 $P(2, 3) \in A \cap (\complement_U B)$ 的充要条件是 ().

A. $m > -1$ 且 $n < 5$ B. $m < -1$ 且 $n < 5$

C. $m > -1$ 且 $n > 5$ D. $m < -1$ 且 $n > 5$

7. 设集合 $A = \{-1, 3\}, B = \{a + 2, a^2 + 2\}, A \cap B = \{3\}$, 则实数 $a =$ _____.

8. 已知集合 A 满足条件: 当 $p \in A$ 时, 总有 $\frac{-1}{p+1} \in A$ ($p \neq 0$ 且 $p \neq -1$). 已知 $2 \in A$, 则集合 A 中所有元素的积等于 _____.

9. 已知集合 A, B 满足 $A = \{x | -2 \leq x \leq 7\}, B = \{x | m + 1 < x < 2m - 1\}$, 且 $B \neq \emptyset$. 若 $(\complement_U A) \cap B = \emptyset$, 则 m 的取值范围是 _____.

10. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4mx + 2m + 6 = 0, x \in \mathbf{R}\}$. 若 $A \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$, 则实数 m 的取值范围是 _____.

11. 已知集合 $M = \{m | m = x^2 - y^2, x, y \in \mathbf{Z}\}$, 若对任意的 $m_1, m_2 \in M$, 求证: $m_1 m_2 \in M$.

12. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 2n\} (n \in \mathbf{N}^*)$, 对于 A 的一个子集 S , 若存在不大于 n 的正整数 m , 使得对 S 中的任意一对元素 s_1, s_2 , 都有 $|s_1 - s_2| \neq m$, 则称 S 具有性质 P .

(1) 当 $n = 10$ 时, 试判断集合 $B = \{x \in A | x > 9\}$ 和 $C = \{x \in A | x = 3k - 1, k \in \mathbf{N}^*\}$ 是否具有性质 P ? 请说明理由.

(2) 若集合 S 具有性质 P , 那么集合 $T = \{2n + 1 - x | x \in S\}$ 是否一定具有性质 P ? 请说明理由.

第二节 命题及其关系、充分条件与必要条件



考纲解读

1. 理解命题的概念.

2. 了解“若 p , 则 q ”形式的命题及其逆命题、否命题与逆否命题, 会分析四种命题的相互关系.

3. 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义.



命题趋势探究

预测 2015 年高考命题中, 本专题所涉考点依然会以选择题和填空题形式出现, 融汇代数或几何的具体知识考查充要条件的判断以及四种命题的关系.



知识点精讲

一、命题

可以判断真假的语句叫做命题.

注 判断一个语句是否为命题包含以下两个要素:①必须是陈述句;②必须能判断真假.

二、四种命题

1. 四种命题的表述

只有“若 p ,则 q ”形式的命题才有以下四种命题:

原命题:若 p ,则 q ;

逆命题:若 q ,则 p ;

否命题:若 $\neg p$,则 $\neg q$;

逆否命题:若 $\neg q$,则 $\neg p$.

2. 四种命题的关系

(1)原命题为真(假),其逆命题不一定为真(假);

(2)原命题为真(假),其否命题不一定为真(假);

(3)原命题为真(假),其逆否命题一定为真(假);

(4)若命题的逆命题为真(假)时,其否命题一定为真(假)(两者互为逆否命题).

如图 1-6 所示,根据互为逆否命题的两个命题的真值相同,可知四种命题中实质不同的命题只有原命题和逆命题两类,另外两类只是它们的不同表示形式.

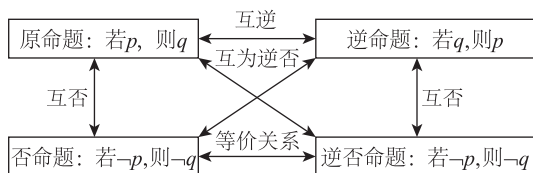


图 1-6

三、充分条件、必要条件、充要条件

1. 定义

如果命题“若 p ,则 q ”为真(记作 $p \Rightarrow q$),则 p 是 q 的充分条件;同时 q 是 p 的必要条件.

2. 从逻辑推理关系上看

(1)若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$,则 p 是 q 的充分不必要条件;

(2)若 $p \not\Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$,则 p 是 q 的必要不充分条件;

(3)若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$,则 p 是 q 的充要条件(也说 p 和 q 等价);

(4)若 $p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$,则 p 不是 q 的充分条件,也不是 q 的必要条件.

对充分和必要条件的理解和判断,要搞清楚其定义的实质:若 $p \Rightarrow q$,则 p 是 q 的充分条件,同时 q 是 p 的必要条件.所谓“充分”是指只要 p 成立, q 就成立;所谓“必要”是指要使得 p 成立,必须要 q 成立(即如果 q 不成立,则 p 肯定不成立).

注 根据互为逆否命题等价.若有 $p \Rightarrow q$,则一定有 $\neg q \Rightarrow \neg p$.

3. 从集合与集合之间的关系上看

设 $A = \{x | p(x)\}$, $B = \{x | q(x)\}$.

(1)若 $A \subseteq B$,则 p 是 q 的充分条件($p \Rightarrow q$), q 是 p 的必要条件;若 $A \subsetneq B$,则 p 是 q 的充分不必要条件, q 是 p 的必要不充分条件,即 $p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$;

注 关于数集间的充分必要条件满足:“小 $\Rightarrow$ 大”.

(2)若 $B \subseteq A$,则 p 是 q 的必要条件, q 是 p 的充分条件;

(3)若 $A = B$,则 p 与 q 互为充要条件.

题型归纳及思路提示

题型 4 四种命题及真假关系

思路提示

互为逆否命题的两个命题是等价命题,它们同真同假,即一个命题与其逆否命题同真同假;一个命题的逆命题和否命题同真同假.当一个命题的真假不易判断时,可以通过判断其逆否命题的真假来判断.

例 1.12 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, $a, b \in \mathbf{R}$,有命题:若 $a + b \geq 0$,则 $f(a) + f(b) \geq f(-a) + f(-b)$.

(1)写出命题的否命题,判断真假,并证明你的结论;

(2)写出命题的逆否命题,判断真假,并证明你的结论.

分析 “已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, $a, b \in \mathbf{R}$ ”为大前提,写否命题时,要保证大前提不变.理清命题的结构,分清命题的条件与结论,写出否命题和逆否命题,然后判断真假,并证明.

解析 (1)否命题:已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, $a, b \in \mathbf{R}$,若 $a + b < 0$,则 $f(a) + f(b) < f(-a) + f(-b)$.

该否命题为真命题,证明如下:

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数,若 $a + b < 0$,则 $a < -b, b < -a$,

所以 $f(a) < f(-b), f(b) < f(-a)$,

所以 $f(a) + f(b) < f(-a) + f(-b)$,故否命题为真命题.

(2)逆否命题:已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, $a, b \in \mathbf{R}$,若 $f(a) + f(b) < f(-a) + f(-b)$,则 $a + b < 0$.

该逆否命题为真命题,证明如下:

由 $f(a) + f(b) < f(-a) + f(-b)$,

得 $f(a) - f(-a) + f(b) - f(-b) < 0$.

令 $g(x) = f(x) - f(-x), x \in \mathbf{R}$,函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调递增的奇函数.由 $g(a) + g(b) < 0$ 得 $g(a) < -g(b) = g(-b)$,所以 $a < -b$,即 $a + b < 0$.

评注 当命题有大前提,写该命题的逆命题、否命题和逆否命题时,应保持大前提不变.

变式 1 命题“若 $x^2 < 1$,则 $-1 < x < 1$ ”的逆否命题是().

A. 若 $x^2 \geq 1$,则 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$

B. 若 $-1 < x < 1$,则 $x^2 < 1$

C. 若 $x > 1$ 或 $x < -1$,则 $x^2 > 1$

D. 若 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$,则 $x^2 \geq 1$

变式 2 命题“若 a, b 都是奇数, 则 $a+b$ 是偶数”的逆否命题是().

- A. 若 $a+b$ 不是偶数, 则 a, b 都不是奇数
 B. 若 $a+b$ 不是偶数, 则 a, b 不都是奇数
 C. 若 $a+b$ 是偶数, 则 a, b 都是奇数
 D. 若 $a+b$ 是偶数, 则 a, b 不都是奇数

题型 5 充分条件、必要条件、充要条件的判断与证明

思路提示

条件与结论的呈现有两种方式:

(1) 题中出现“ A 是 B 的……条件”时, 则 A 是条件, B 是结论.

(2) 若出现“ A 成立的……条件是 B ”, 则 B 是条件, A 是结论. 若由条件可以推出结论, 就是充分性成立; 若从结论可以推出条件, 就是必要性成立.

例 1.13 (2013 安徽理 4) “ $a \leq 0$ ”是“函数 $f(x) = |(ax-1)x|$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增”的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

分析 本题利用函数的图像确定字母的取值范围, 再利用充要条件的定义进行判断.

解析 当 $a=0$ 时, $f(x) = |(ax-1)x| = |x|$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $a < 0$ 时, 结合函数 $f(x) = |(ax-1)x| = |ax^2-x|$ 的图像知函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 如图 1-7(a) 所示; 当 $a > 0$ 时, 结合函数 $f(x) = |(ax-1)x| = |ax^2-x|$ 的图像知函数在 $(0, +\infty)$ 上先增后减再增, 不符合条件, 如图 1-7(b) 所示. 所以要使函数 $f(x) = |(ax-1)x|$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 只需 $a \leq 0$. 即“ $a \leq 0$ ”是“函数 $f(x) = |(ax-1)x|$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增”的充要条件. 故选 C.

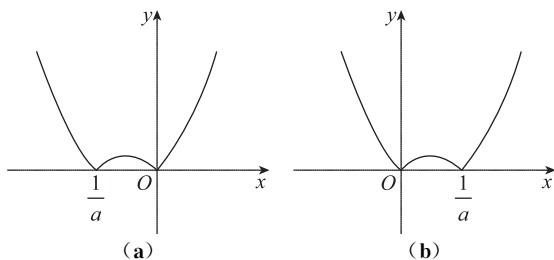


图 1-7

变式 1 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 $x=1$ 是 $x^3=x$ 的().

- A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件

变式 2 若 a, b 为实数, 则“ $0 < ab < 1$ ”是“ $a < \frac{1}{b}$ 或 $b > \frac{1}{a}$ ”的().

- A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

变式 3 已知 $a > 0$, 则 x_0 满足关于 x 的方程 $ax=b$ 的充要条件是().

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, \frac{1}{2}ax^2 - bx \geq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$
 B. $\exists x \in \mathbf{R}, \frac{1}{2}ax^2 - bx \leq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$
 C. $\forall x \in \mathbf{R}, \frac{1}{2}ax^2 - bx \geq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$
 D. $\forall x \in \mathbf{R}, \frac{1}{2}ax^2 - bx \leq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$

题型 6 充分条件、必要条件中的含参数问题

思路提示

求解充要条件中的含参数问题, 往往要先求出必要条件所需满足的参数范围, 再证明其充分性.

例 1.14 设非空集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq a\}$, $B = \{y | y = 2x+3, x \in A\}$, $C = \{z | z = x^2, x \in A\}$, 求使 $C \subseteq B$ 的充要条件.

分析 利用集合与命题之间的关系求解.

解析 由 $-2 \leq x \leq a$ 得 $-1 \leq 2x+3 \leq 2a+3$, 即 $B = \{y | -1 \leq y \leq 2a+3\}$,

当 $-2 \leq a < 0$ 时, $C = \{z | a^2 \leq z \leq 4\}$;

当 $0 \leq a \leq 2$ 时, $C = \{z | 0 \leq z \leq 4\}$;

当 $a > 2$ 时, $C = \{z | 0 \leq z \leq a^2\}$.

所以, 当 $-2 \leq a \leq 2$ 时, $C \subseteq B \Rightarrow 2a+3 \geq 4$,

即 $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$, 反之亦真.

当 $a > 2$ 时, $C \subseteq B \Rightarrow a^2 \leq 2a+3$,

即 $2 < a \leq 3$, 反之亦真.

所以 $C \subseteq B \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq a \leq 3$, 即使 $C \subseteq B$ 的充要条件是 $\frac{1}{2} \leq a \leq 3$.

变式 1 是否存在实数 p , 使 $4x+p < 0$ 是 $x^2-x-2 > 0$ 的充分条件? 如果存在, 求出 p 的取值范围.

变式 2 已知 $p: \left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 2, q: x^2-2x+1-m^2 \leq 0 (m > 0)$, 且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, 求实数 m 的取值范围.

最有效训练题 2(限时 45 分钟)

1. 以下命题中:

- ①函数 $f(x)=\ln x+x-2$ 的图像与 x 轴有 2 个交点;
 ②向量 a, b 不共线, 则关于 x 的方程 $ax^2+bx=0$ 有唯一实根;

③函数 $y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{|x+4|+|x-3|}$ 的图像关于 y 轴对称.

真命题是().

- A. ①③ B. ② C. ③ D. ②③

2. 设 a, b 是向量, 命题“若 $a=-b$, 则 $|a|=|b|$ ”的逆否命题是().

- A. 若 $a \neq -b$, 则 $|a| \neq |b|$
 B. 若 $a=-b$, 则 $|a| \neq |b|$
 C. 若 $|a| \neq |b|$, 则 $a \neq -b$
 D. 若 $|a|=|b|$, 则 $a=-b$

3. 以下四个命题中, 真命题的个数是().

- ①命题“若 $x^2-3x+2=0$, 则 $x=1$ ”的逆否命题为“若 $x \neq 1$, 则 $x^2-3x+2 \neq 0$ ”;
 ②若 $p \vee q$ 为假命题, 则 p, q 均为假命题;
 ③命题 p : 存在 $x \in \mathbf{R}$, 使得 $x^2+x+1 < 0$, 则 $\neg p$: 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $x^2+x+1 \geq 0$;
 ④在 $\triangle ABC$ 中, $A < B$ 是 $\sin A < \sin B$ 的充分不必要条件.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. “ $a+c > b+d$ ”是“ $a > b$ 且 $c > d$ ”的().

- A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知集合 $A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1}{2} < 2^x < 8\right\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < m+1\}$, 若 $x \in B$ 成立的一个充分不必要条件是 $x \in A$, 则实数 m 的取值范围是().

- A. $[2, +\infty)$ B. $(-\infty, 2]$
 C. $(2, +\infty)$ D. $(-2, 2)$

6. 已知 $a < b$, 函数 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

命题 $p: f(a)f(b) < 0$, 命题 $q: g(x)$ 在 (a, b) 内有最值, 则命题 p 是命题 q 成立的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 给定下列命题:

- ①若 $k > 0$, 则方程 $x^2+2x-k=0$ 有实数根;
 ②“若 $a > b$, 则 $a+c > b+c$ ”的否命题;
 ③“矩形的对角线相等”的逆命题;
 ④“若 $xy=0$, 则 x, y 中至少有一个为 0”的否命题.

其中真命题的序号是_____.

8. 已知对数函数 $f(x) = \log_{2a+1} x$, 命题 $p: f(x) = \log_{2a+1} x$ 是增函数. 则 $\neg p$ 为真时, a 的取值范围是_____.

9. 已知不等式 $|x-m| < 1$ 成立的充分不必要条件是 $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$, 则 m 的取值范围是_____.

10. 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{x-1}{x+1} < 0\right\}$, $B = \{x \mid |x-b| < a\}$, 若“ $a=1$ ”是“ $A \cap B \neq \emptyset$ ”的充分条件, 则实数 b 的取值范围是_____.

11. 设命题 $p: (4x-3)^2 \leq 1$, 命题 $q: x^2 - (2a+1)x + a(a+1) \leq 0$, 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.

12. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 非空集合 $A = \left\{x \mid \frac{x-2}{x-(3a+1)} < 0\right\}$, $B = \left\{x \mid \frac{x-a^2-2}{x-a} < 0\right\}$.

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 求 $(\complement_U B) \cap A$;

(2) 命题 $p: x \in A$, 命题 $q: x \in B$, 若 q 是 p 的必要条件, 求实数 a 的取值范围.

第三节 简单的逻辑联结词、全称量词与存在量词



考纲解读

- 了解逻辑联结词“且”、“或”、“非”的含义.
- 理解全称量词与存在量词的意义.
- 能正确地对含有一个量词的命题进行否定.



命题趋势探究

预测 2015 年高考主要考查: 复合命题真假的判断、全称命题与存在性命题的否定以及利用命题的真假求参数范围. 题型主要以选择题、填空题为主.



知识点精讲

1. 简单的逻辑联结词

(1)一般地,用联结词“且”把命题 p 和 q 联结起来,得到一个命题,记作 $p \wedge q$,读作“ p 且 q ”;

(2)一般地,用联结词“或”把命题 p 和 q 联结起来,得到一个命题,记作 $p \vee q$,读作“ p 或 q ”;

(3)一般地,对一个命题 p 否定,得到一个命题,记作 $\neg p$,读作“非 p ”或“ p 的否定”.

逻辑联结词的真值规律如表 1-2 所示.

表 1-2

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$
真	真	真	真	假
假	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	假	假	假	真

口诀:(1)“ p 且 q ”,一假则假,全真才真;(2)“ p 或 q ”,一真则真,全假才假;(3)“ $\neg p$ ”,真假相对.

2. 全称量词与存在量词

(1)全称量词与全称命题. 短语“所有的”、“任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词,并用符号“ $\forall$ ”表示. 含有全称量词的命题叫做全称命题. 全称命题“对 M 中的任意一个 x ,有 $p(x)$ 成立”可用符号简记为“ $\forall x \in M, p(x)$ ”,读作“对任意 x 属于 M ,有 $p(x)$ 成立”.

(2)存在量词与特称命题. 短语“存在一个”、“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词,并用符号“ $\exists$ ”表示. 含有存在量词的命题叫做特称命题. 特称命题“存在 M 中的一个 x_0 ,使 $p(x_0)$ 成立”可用符号简记为“ $\exists x_0 \in M, p(x_0)$ ”,读作“存在 M 中的元素 x_0 ,使 $p(x_0)$ 成立”(特称命题也叫存在性命题).

3. 含有一个量词的命题的否定

(1)全称命题的否定是特称命题. 全称命题 $p: \forall x \in M, p(x)$ 的否定 $\neg p$ 为 $\exists x_0 \in M, \neg p(x_0)$.

(2)特称命题的否定是全称命题. 特称命题 $p: \exists x_0 \in M, p(x_0)$ 的否定 $\neg p$ 为 $\forall x \in M, \neg p(x)$.

注 全称、特称命题的否定是高考常见考点之一.

区别否命题与命题的否定:

①只有“若 p , 则 q ”形式的命题才有否命题,而所有的命题都有否定形式(在高中阶段只对全称、特称命题研究否定形式);

命题“若 p , 则 q ”的否命题是“若 $\neg p$, 则 $\neg q$ ”,而否定形式为“若 p , 则 $\neg q$ ”.

②一个命题与其否定必有一个为真,一个为假;而一个命题与其否命题的真假无必然联系.

题型归纳及思路提示

题型 7 判断含逻辑联结词的命题的真假

思路提示

判断命题真假的一般步骤为:

(1)确定命题的构成形式;

(2)判断所用的逻辑联结词联结的每个简单命题的真假;

(3)根据真值表判断新命题的真假.

例 1.15 判断下列命题的真假.

(1)24 既是 8 的倍数,也是 6 的倍数;

(2)矩形的对角线互相垂直或相等;

(3)菱形不是平行四边形;

(4) $3 \geq 0$.

分析 解题步骤为分析命题的构成、联系真值表、下结论.

解析 (1)命题 p : 24 是 8 的倍数, q : 24 是 6 的倍数,用“且”联结后构成新命题,即 $p \wedge q$. 因为 p, q 都是真命题,所以 $p \wedge q$ 为真命题.

(2) p : 矩形的对角线垂直, q : 矩形的对角线相等,用“或”联结后构成新命题,即 $p \vee q$. 因为 q 是真命题,所以 $p \vee q$ 是真命题.

(3) p : 菱形是平行四边形,用“非”联结后构成新命题,即 $\neg p$. 因为 p 是真命题,所以 $\neg p$ 是假命题.

(4) p : $3 > 0$, q : $3 = 0$,用“或”联结后构成新命题,即 $p \vee q$. 因为命题 p 是真命题,所以命题 $p \vee q$ 是真命题.

变式 1 (2012 江西理 5) 下列命题中,假命题为().

A. 存在四边相等的四边形不是正方形

B. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2$ 为实数的充分必要条件是 z_1, z_2 互为共轭复数

C. 若 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x + y > 2$, 则 x, y 中至少有一个大于 1

D. 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$ 都是偶数

变式 2 已知命题 p, q , 则“ p 或 q 为真”是“ p 且 q 为真”的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

题型 8 含有一个量词的命题的否定

思路提示

(1)含有一个量词的命题的否定: 先否定量词(即“任意”变“存在”、“存在”变“任意”),再否定结论;

(2)清楚命题是全称命题还是特称命题,是正确写出命题否定的前提;

(3)注意命题的否定与否命题的区别;

(4)当 $\neg p$ 的真假不易判断时,可转化为去判断 p 的真假.

例 1.16 写出下列命题的否定并判断其真假.

(1) p : 不论 m 取何实数,方程 $x^2 + mx - 1 = 0$ 必有实数根;

(2) p : 有的三角形的三条边相等;

(3) p : 菱形的对角线互相垂直;

(4) $p: \exists x_0 \in \mathbb{N}, x_0^2 - 2x_0 + 1 \leq 0$.

分析 分析命题所含量词,明确命题是全称命题还是特称命题,再对命题进行否定并判断真假.

解析 (1) $\neg p$: 存在一个实数 m , 使方程 $x^2 + mx - 1 = 0$ 没有实数根. 因为该方程的判别式 $\Delta = m^2 + 4 > 0$, 故 $\neg p$ 为假命题.

(2) $\neg p$: 所有三角形的三条边不全相等. 显然 p 为真, 故 $\neg p$ 为假命题.

(3) $\neg p$: 有的菱形对角线不垂直. 显然 p 为真, 故 $\neg p$ 为

假命题.

(4) $\neg p: \forall x \in \mathbf{N}, x^2 - 2x + 1 > 0$. 显然, 当 $x = 1$ 时, $x^2 - 2x + 1 = 0$, 故 $\neg p$ 为假命题.

评注 命题的否定, 往往需要对正面叙述的词语进行否定, 常用的正面叙述的词语及其否定如表 1-3 所示.

表 1-3

正面词语	否定
等于(=)	不等于($\neq$)
大于(>)	不大于($\leq$)
小于(<)	不小于($\geq$)
是	不是
都是	不都是
至多有一个	至少有两个
至少有一个	一个也没有
任意	存在
所有	某个(些)
至多有 n 个	至少有 $n+1$ 个
任意两个	某两个

特别地, 联结词“且”的否定为“或”, “或”的否定为“且”.

“ p 且 q ”的否定是“ $\neg p$ 或 $\neg q$ ”, “ p 或 q ”的否定是“ $\neg p$ 且 $\neg q$ ”. 即 $\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$, $\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$, 与集合的德摩根法则可类比记忆.

变式 1 命题“存在 $x_0 \in \mathbf{R}, 2^{x_0} \leq 0$ ”的否定是().

- A. 不存在 $x_0 \in \mathbf{R}, 2^{x_0} \leq 0$
- B. 存在 $x_0 \in \mathbf{R}, 2^{x_0} \geq 0$
- C. 对任意的 $x \in \mathbf{R}, 2^x \leq 0$
- D. 对任意的 $x \in \mathbf{R}, 2^x > 0$

变式 2 (2012 湖北理 2) 命题“ $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^3 \in \mathbf{Q}$ ”的否定是().

- A. $\exists x_0 \notin \mathbb{R}, x_0^3 \in \mathbf{Q}$
- B. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^3 \notin \mathbf{Q}$
- C. $\forall x \notin \mathbb{R}, x^3 \in \mathbf{Q}$
- D. $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \notin \mathbf{Q}$

变式 3 (2012 辽宁理 4) 已知命题 $p: \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, [f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) \geq 0$, 则 $\neg p$ 是().

- A. $\exists x_1, x_2 \in \mathbf{R}, [f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) \leq 0$
- B. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, [f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) \leq 0$
- C. $\exists x_1, x_2 \in \mathbf{R}, [f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) < 0$
- D. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, [f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) < 0$

题型 9 根据命题真假求参数的范围

例 1.17 命题 p : 关于 x 的不等式 $x^2 + 2ax + 4 > 0$, 对一切

$x \in \mathbf{R}$ 恒成立, q : 指数函数 $f(x) = (3 - 2a)^x$ 是增函数.

若 p 或 q 为真, p 且 q 为假, 求实数 a 的取值范围.

分析 由命题 p 或 q 为真, p 且 q 为假的含义, 推出 p 与 q 中有且只有一个为真命题, 由此进行讨论.

解析 解法一: 由 p 或 q 为真, p 且 q 为假, 则 p 与 q 中有且只有一个为真.

①若 p 真 q 假, p 真则不等式 $x^2 + 2ax + 4 > 0$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 故 $\Delta < 0$, 即 $4a^2 - 16 < 0$, 得 $-2 < a < 2$, q 假得 $0 < 3 - 2a < 1$, 故 $1 < a < \frac{3}{2}$, 所以 $1 < a < \frac{3}{2}$.

②若 p 假 q 真, p 假得 $a \geq 2$ 或 $a \leq -2$, 同时 $3 - 2a > 1$, 得 $a < 1$, 故 $a \leq -2$.

综上, 实数 a 的取值范围为 $\{a | a \leq -2 \text{ 或 } 1 < a < 2\}$.

解法二: 由指数函数的定义可知, 大前提是 $1 < a < \frac{3}{2}$ 或 $a < 1$, 即 $a \in (-\infty, 1) \cup (1, \frac{3}{2})$. p : 由 $\Delta < 0$ 得 $4a^2 - 16 < 0$, 结合大前提, 得 $-2 < a < \frac{3}{2}$;

q : 由 $3 - 2a > 1$ 得 $a < 1$.

如图 1-8 所示, 则 $\mathbb{C}_{p \cup q}(p \cap q) = \{a | a \leq -2 \text{ 或 } 1 < a < \frac{3}{2}\}$, 又 $a \neq 1$, 所以实数 a 的取值范围为 $\{a | a \leq -2 \text{ 或 } 1 < a < \frac{3}{2}\}$.

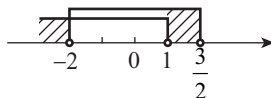


图 1-8

评注 正确理解 p 或 q 为真, p 且 q 为假的含义是解本题的关键点. 把 p 和 q 在数轴上表示出来, 在 $p \cup q$ 中去掉 $p \cap q$, 剩余的部分就是所求, 即 $\mathbb{C}_{p \cup q}(p \cap q)$.

变式 1 已知命题 p : 关于 x 的不等式 $x^2 + (a - 1)x + a^2 \leq 0$ 的解集为 $\emptyset$; 命题 q : 函数 $y = (2a^2 - a)^x$ 为增函数. 若命题 $p \wedge q$ 为真命题, 则实数 a 的取值范围是_____.

变式 2 给定两个命题:

p : 对任意实数 x , 都有 $ax^2 + ax + 1 > 0$ 恒成立.

q : 关于 x 的方程 $x^2 - x + a = 0$ 有实数根.

如果 p 与 q 中有且仅有一个为真命题, 求实数 a 的取值范围.

最有效训练题 3(限时 45 分钟)

1. 已知命题 $p: \exists x \geq 0, 2^x = 3$, 则().

- A. $\neg p: \forall x < 0, 2^x \neq 3$
- B. $\neg p: \forall x \geq 0, 2^x \neq 3$
- C. $\neg p: \exists x \geq 0, 2^x \neq 3$
- D. $\neg p: \exists x < 0, 2^x \neq 3$

2. 已知 p, q 是简单命题, 则“ $p \wedge q$ 是真命题”是“ $\neg p$ 是假命题”的().

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知命题 p : 存在 $a, b \in (0, +\infty)$, 当 $a+b=1$ 时, $\frac{1}{a} +$

$\frac{1}{b}=3$; 命题 q : 任意 $x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$ 恒成立, 则下列

命题中是假命题的是().

A. $\neg p$ 或 $\neg q$ B. $\neg p$ 且 $\neg q$

C. $\neg p$ 或 q D. $\neg p$ 且 q

4. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x-2 > \lg x$; 命题 $q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 > 0$, 则().

A. 命题 $p \vee q$ 是假命题

B. 命题 $p \wedge q$ 是真命题

C. 命题 $p \vee (\neg q)$ 是假命题

D. 命题 $p \wedge (\neg q)$ 是真命题

5. 已知命题 $p: \forall x \in [1, 2], x^2 - a \geq 0$; 命题 $q: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2ax + 2 - a = 0$. 若命题 p 且 q 是真命题, 则实数 a 的取值范围为().

A. $\{a | a \leq -2 \text{ 或 } a = 1\}$

B. $\{a | a \leq -2 \text{ 或 } 1 \leq a \leq 2\}$

C. $\{a | a \geq 1\}$

D. $\{a | -2 \leq a \leq 1\}$

6. 下列说法中错误的是().

A. 如果命题“ $\neg p$ ”与命题“ p 或 q ”都是真命题, 那么命题 q 一定是真命题

B. 命题“若 $a=0$, 则 $ab=0$ ”的否命题是“若 $a \neq 0$, 则 $ab \neq 0$ ”

C. 若命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 < 0$, 则 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$

D. $\sin \theta = \frac{1}{2}$ 是 $\theta = 30^\circ$ 的充分不必要条件

7. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x > \sin x$, 则 p 的否定形式为_____.

8. 给出以下四个命题:

①若 $p \vee q$ 为真命题, 则 $p \wedge q$ 为真命题.

②命题“若 $A \cap B = A$, 则 $A \cup B = B$ ”的逆命题.

③设 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 所对的边, 若 $a=1, b=\sqrt{3}$, 则“ $A=30^\circ$ ”是“ $B=60^\circ$ ”的必要不充分条件.

④命题“若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(-x)$ 是奇函数”的否命题. 其中真命题的序号是_____.

9. 已知命题 $p: |x-1| + |x+1| \geq 3a$ 恒成立, 命题 $q: y = (2a-1)^x$ 为减函数, 若 $p \wedge q$ 为真命题, 则实数 a 的取值范围为_____.

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{I}_R \mathbf{Q} \end{cases}$, 则

(1) $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 给出下列三个命题:

①函数 $f(x)$ 是偶函数;

②存在 $x_i \in \mathbf{R} (i=1, 2, 3)$, 使得以 $(x_i, f(x_i)) (i=1, 2, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形;

③存在 $x_i \in \mathbf{R} (i=1, 2, 3, 4)$, 使得以 $(x_i, f(x_i)) (i=1, 2, 3, 4)$ 为顶点的四边形为菱形. 真命题的序号是_____.

11. 已知 $c > 0$. 设命题 p : 函数 $y = \log_c x$ 为减函数. 命题 q :

当 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 时, 函数 $f(x) = x + \frac{1}{x} > \frac{1}{c}$ 恒成立. 如果 p 或 q 为真命题, p 且 q 为假命题, 求 c 的取值范围.

12. 已知函数 $f(x) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - 2\sqrt{3}\cos 2x - 1$, 且又给

定 $p: \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

(1) 在 p 的条件下, 求 $f(x)$ 的最大值及最小值;

(2) 若又给条件 $q: |f(x) - m| < 2$, 且 p 是 q 的充分条件, 求实数 m 的取值范围.