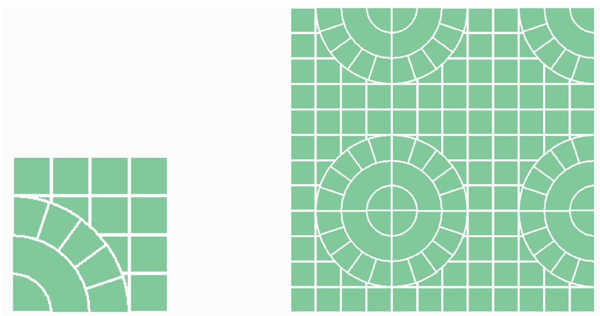
第 5 章　二维变换与裁剪

图形的几何变换(geometric transformation)包括对图形进行平移(translation)、比例(scaling)、旋转(rotation)、反射(reflection)和错切(shear)5 种变换。通过对图形进行几何变换,可以由简单图形构造复杂图形。图 5-1 演示了使用二维平移变换与二维旋转变换,将一块地板砖铺设在九宫格内来展示人行道的真实铺设效果。图形的几何变换可以分为二维图形几何变换和三维图形几何变换,而二维图形几何变换又是三维图形几何变换的基础。



(a) 单块地板砖图案　　(b) 地板砖图案九宫格内铺设效果图

图 5-1　九宫格内铺设地板砖

5.1　图形几何变换基础

5.1.1　二维变换矩阵

二维几何变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 是一个 3×3 的方阵,简称为二维变换矩阵。

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix} \tag{5-1}$$

从功能上可以把二维变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 分为 4 个子矩阵。其中 $\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$是对图形进行比例变换、旋转变换、反射变换和错切变换;$\boldsymbol{T}_2=[l \quad m]$是对图形进行平移变换;$\boldsymbol{T}_3=\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$是对图形进行投影变换;$\boldsymbol{T}_4=[s]$是对图形进行整体比例变换。

5.1.2　规范化齐次坐标

假设变换前的二维点为 $P(x,y)$,变换后的该点为 $P'(x',y')$。二维点可以使用行矢量矩阵表示。出现的问题是 1×2 的行距阵无法与 3×3 的二维变换矩阵相乘。为此引入了规范化齐次坐标。

所谓齐次坐标就是用 $n+1$ 维矢量表示 n 维矢量。例如，在二维平面中，点 $P(x,y)$ 的齐次坐标表示为 (wx,wy,w)。类似地，在三维空间中，点 $P(x,y,z)$ 的齐次坐标表示为 (wx,wy,wz,w)。这里，w 为任一不为 0 的比例系数。点的齐次坐标表示具有不唯一性，例如，二维点(2,3)的齐次坐标可以表示为(2,3,1)、(4,6,2)、(6,9,3)等。为了保证唯一性，需要采用规范化的齐次坐标表示。如果 $w=1$，就称为规范化齐次坐标。二维点 $P(x,y)$ 的规范化齐次坐标为 $(wx/w,wy/w,w/w)$，即 $(x,y,1)$。三维点 $P(x,y,z)$ 的规范化齐次坐标为 $(wx/w,wy/w,wz/w,w/w)$，即 $(x,y,z,1)$。

定义了规范化齐次坐标以后，图形的几何变换可以表达为图形顶点集合的规范化齐次坐标矩阵与某一变换矩阵相乘的形式。

5.1.3 矩阵相乘

二维图形顶点表示为规范化齐次坐标后，其图形顶点集合矩阵一般为 $n\times3$ 的矩阵，其中 n 为顶点数，变换矩阵为 3×3 的矩阵。在进行图形几何变换时需要用到线性代数里的矩阵相乘运算。例如，对于 $n\times3$ 的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 3×3 的矩阵 $\boldsymbol{T}$，令 $m=n-1$，则矩阵相乘公式如下

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{T}&=\begin{bmatrix}p_{00}&p_{01}&p_{02}\\p_{10}&p_{11}&p_{12}\\\vdots&\vdots&\vdots\\p_{m0}&p_{m1}&p_{m2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}t_{00}&t_{01}&t_{02}\\t_{10}&t_{11}&t_{12}\\t_{20}&t_{21}&t_{22}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}p_{00}t_{00}+p_{01}t_{10}+p_{02}t_{20}&p_{00}t_{01}+p_{01}t_{11}+p_{02}t_{21}&p_{00}t_{02}+p_{01}t_{12}+p_{02}t_{22}\\p_{10}t_{00}+p_{11}t_{10}+p_{12}t_{20}&p_{10}t_{01}+p_{11}t_{11}+p_{12}t_{21}&p_{10}t_{02}+p_{11}t_{12}+p_{12}t_{22}\\\vdots&\vdots&\vdots\\p_{m0}t_{00}+p_{m1}t_{10}+p_{m2}t_{20}&p_{m0}t_{01}+p_{m1}t_{11}+p_{m2}t_{21}&p_{m0}t_{02}+p_{m1}t_{12}+p_{m1}t_{22}\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5-2}$$

由线性代数知道，矩阵乘法不满足交换律，只有左矩阵的列数等于右矩阵的行数时，两个矩阵才可以相乘。特别地，对于二维变换的两个 3×3 的方阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{T}$，如对三角形实施二维几何变换，矩阵相乘公式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{T}&=\begin{bmatrix}p_{00}&p_{01}&p_{02}\\p_{10}&p_{11}&p_{12}\\p_{20}&p_{21}&p_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}t_{00}&t_{01}&t_{02}\\t_{10}&t_{11}&t_{12}\\t_{20}&t_{21}&t_{22}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}p_{00}t_{00}+p_{01}t_{10}+p_{02}t_{20}&p_{00}t_{01}+p_{01}t_{11}+p_{02}t_{21}&p_{00}t_{02}+p_{01}t_{12}+p_{02}t_{22}\\p_{10}t_{00}+p_{11}t_{10}+p_{12}t_{20}&p_{10}t_{01}+p_{11}t_{11}+p_{12}t_{21}&p_{10}t_{02}+p_{11}t_{12}+p_{12}t_{22}\\p_{20}t_{00}+p_{21}t_{10}+p_{22}t_{20}&p_{20}t_{01}+p_{21}t_{11}+p_{22}t_{21}&p_{20}t_{02}+p_{21}t_{12}+p_{22}t_{22}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

类似地，可以处理三维变换的两个 4×4 矩阵相乘问题。

5.1.4 二维几何变换

二维几何变换的基本方法是把变换矩阵作为一个算子，作用到变换前的图形顶点集合的规范化齐次坐标矩阵上，得到变换后新的图形顶点集合的规范化齐次坐标矩阵。连接变换后的新图形顶点，就可以绘制出变换后的二维图形。

设变换前图形顶点集合的规范化齐次坐标矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为 $\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & y_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$，变换后图形顶点集合的规范化齐次坐标矩阵 $\boldsymbol{P}'$ 为 $\begin{bmatrix} x'_0 & y'_0 & 1 \\ x'_1 & y'_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_{n-1} & y'_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$，二维变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为 $\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix}$。则二维几何变换公式为 $\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{T}$，可以写成

$$\begin{bmatrix} x'_0 & y'_0 & 1 \\ x'_1 & y'_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_{n-1} & y'_{n-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & y_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix} \tag{5-3}$$

5.2 二维基本几何变换矩阵

二维图形的基本几何变换是指相对于坐标原点和坐标轴进行的几何变换，包括平移、比例、旋转、反射和错切 5 种变换。本节以点的二维基本几何变换为例进行讲解。二维坐标点的基本几何变换可以表示为 $\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{T}$ 的形式，其中，$P(x,y)$为变换前的二维坐标点，$P'(x',y')$为变换后的二维坐标坐标点，$\boldsymbol{T}$ 为 3×3 的变换矩阵。

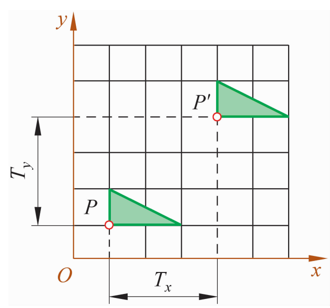


图 5-2 平移变换

5.2.1 平移变换矩阵

平移变换是指将坐标点从 $P(x,y)$位置移动到 $P'(x',y')$位置的过程，如图 5-2 所示。

平移变换的坐标表示为$\begin{cases} x'=x+T_x \\ y'=y+T_y \end{cases}$。

相应的齐次坐标矩阵表示为

$$[x' \quad y' \quad 1]=[x+T_x \quad y+T_y \quad 1]=[x \quad y \quad 1]\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

因此，二维平移变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix} \tag{5-4}$$

式中，T_x，T_y 为平移参数。

5.2.2 比例变换矩阵

比例变换是指坐标点 $P(x,y)$ 相对于坐标原点 O，沿 x 方向缩放 S_x 倍，沿 y 方向缩放 S_y 倍，得到 $P'(x',y')$ 点的过程，如图 5-3 所示。

比例变换的坐标表示为 $\begin{cases} x'=x\cdot S_x \\ y'=y\cdot S_y \end{cases}$。

相应的齐次坐标矩阵表示为

$$[x' \quad y' \quad 1]=[x\cdot S_x \quad y\cdot S_y \quad 1]=[x \quad y \quad 1]\cdot\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，二维比例变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-5}$$

式中，S_x，S_y 为比例系数。

比例变换可以改变图形的形状。当 $S_x=S_y$ 且 S_x、S_y 大于 1 时，图形等比放大；当 $S_x=S_y$ 且 S_x、S_y 小于 1 大于 0 时，图形等比缩小；当 $S_x\neq S_y$ 时，图形发生形变。前面介绍过，变换矩阵的子矩阵 $\boldsymbol{T}_4=[s]$是对图形作整体比例变换，关于这一点读者可以令 $S_x=S_y=S$ 导出，请注意这里 $s=1/S$，即 $s>1$ 时，图形整体缩小；$0<s<1$ 时，图形整体放大。

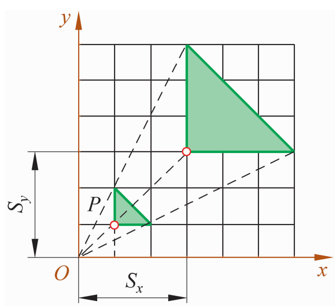


图 5-3　比例变换

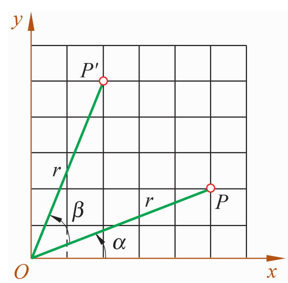


图 5-4　旋转变换

5.2.3 旋转变换矩阵

旋转变换是将坐标点 $P(x,y)$ 相对于坐标原点 O 旋转一个角度 β，逆时针（counter clock wise，CCW）为正，顺时针（clock wise，CW）为负，得到 $P'(x',y')$ 点的过程，如图 5-4 所示。

$P(x,y)$ 点的坐标表示为

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$

$P'(x',y')$ 点的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\beta) = x\cos\beta - y\sin\beta \\ y' = r\sin(\alpha+\beta) = x\sin\beta + y\cos\beta \end{cases}$$

相应的齐次坐标矩阵表示为

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \cdot \cos\beta - y\sin\beta \quad x\sin\beta + y\cos\beta \quad 1]$$

$$= [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，二维旋转变换矩阵

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-6}$$

式中，α 为起始角，β 为旋转角。

式(5-6)为绕原点逆时针旋转的变换矩阵，若旋转方向为顺时针，β 角取为负值。

顺时针旋转变换矩阵

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & \sin(-\beta) & 0 \\ -\sin(-\beta) & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.2.4 反射变换矩阵

反射变换也称为对称变换，是将坐标点 $P(x,y)$ 关于原点或某个坐标轴反射得到 $P'(x',y')$ 点的过程。具体可以分为关于原点反射、关于 x 轴反射、关于 y 轴反射等几种情况，如图 5-5 所示。

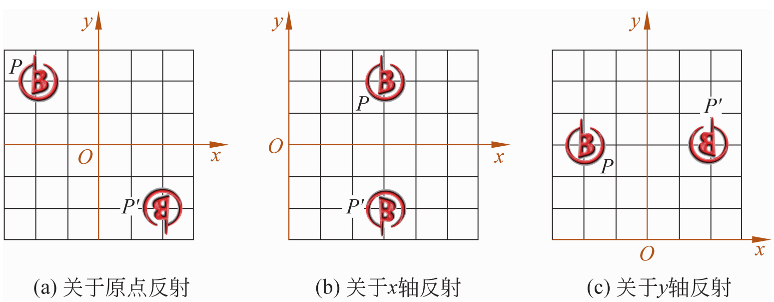


图 5-5 反射变换

关于原点反射的坐标表示为 $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$。

相应的齐次坐标矩阵表示为

$$[x' \quad y' \quad 1] = [-x \quad -y \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，关于原点的二维反射变换矩阵

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-7}$$

同理可得，关于 x 轴的二维反射变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{5-8}$$

同理可得，关于 y 轴的二维反射变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{5-9}$$

5.2.5 错切变换矩阵

错切变换也称为剪切变换，是将坐标点 $P(x,y)$ 沿 x 和 y 轴发生不等量的变换，得到 $P'(x',y')$ 点的过程，如图 5-6 所示。错切变换一般较少使用。

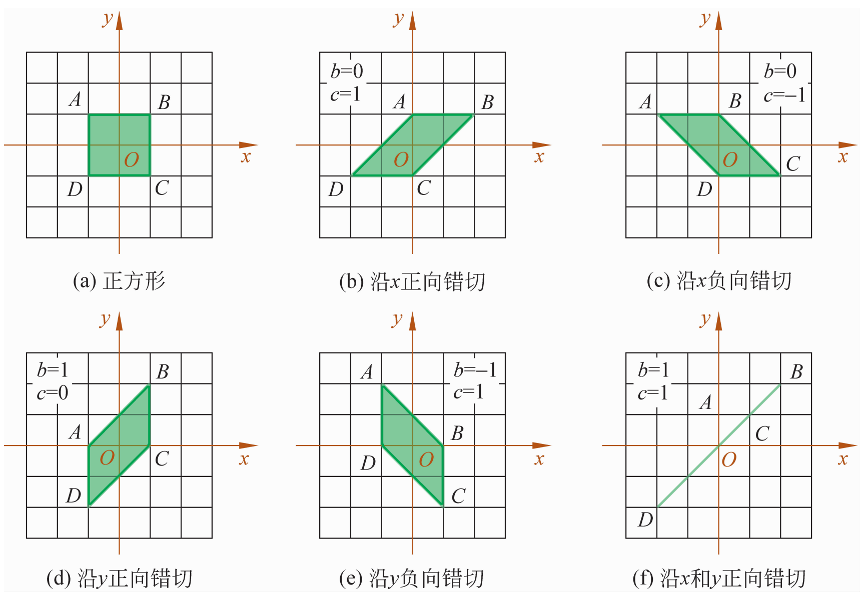


图 5-6　错切变换

沿 x，y 方向的错切变换的坐标表示为 $\begin{cases}x'=x+cy\\ y'=bx+y\end{cases}$。

相应的齐次坐标矩阵表示为

$$[x' \quad y' \quad 1]=[x+cy \quad bx+y \quad 1]=[x \quad y \quad 1]\cdot\begin{bmatrix}1 & b & 0\\ c & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

因此，沿 x，y 两个方向的二维错切变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & b & 0\\ c & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{5-10}$$

其中 c、b 为错切参数。

在前面的变换中，子矩阵 $\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的非对角线元素大多为 0，如果 c 和 b 不为 0，则意味着对图形进行错切变换，如图 5-6(f)所示。令 $b=0$ 可以得到沿 x 方向的错切变换，$c>0$ 是沿 x 正向的错切变换，$c<0$ 是沿 x 负向的错切变换，如图 5-6(b)和图 5-6(c)所示。令 $c=0$ 可以得到沿 y 方向的错切变换，$b>0$ 是沿 y 正向的错切变换，$b<0$ 是沿 y 负向的错切变换，如图 5-6(d)和图 5-6(e)所示。

上面讨论的 5 种变换给出的都是点变换的公式。图形的变换实际上都是通过点变换来完成。例如直线段的变换可以通过对两个顶点进行变换，连接新顶点得到变换后的新直线段；多边形的变换可以通过对每个顶点进行变换，连接新顶点得到变换后的新多边形。自由曲线的变换可以通过变换控制多边形的控制点后，重新绘制曲线来完成。

符合下述形式的坐标变换称为二维仿射变换(affine transformation)。

$$\begin{cases} x' = a_{00}x + a_{01}y + a_{02} \\ y' = a_{10}x + a_{11}y + a_{12} \end{cases} \tag{5-11}$$

矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{02} \\ a_{12} \end{bmatrix} \tag{5-12}$$

齐次矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5-13}$$

变换后的坐标 x' 和 y' 都是变换前的坐标 x 和 y 的线性函数。参数 a_{ij} 是由变换类型确定的常数。仿射变换具有平行线变换成平行线，有限点映射为有限点的一般特性。平移、比例、旋转、反射和错切 5 种变换都是二维仿射变换的特例，任何一组二维仿射变换总可以表示为这 5 种变换的组合。因此，平移、比例、旋转、反射的仿射变换保持变换前后两段直线间的角度、平行关系和长度之比不改变。

5.3 二维复合变换

5.3.1 复合变换原理

复合变换是指图形做了一次以上的基本几何变换，是基本几何变换的组合形式，复合变换矩阵是基本几何变换的组合矩阵。

$\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{T}_0\cdot\boldsymbol{T}_1\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{T}_{n-1}$。其中，$\boldsymbol{T}$ 为复合变换矩阵，$\boldsymbol{T}_0$、$\boldsymbol{T}_1$、…、$\boldsymbol{T}_{n-1}$ 为 n 个单次基本几何变换矩阵。

进行复合变换时，需要注意矩阵相乘的顺序。由于矩阵乘法不满足交换律，因此通常 $\boldsymbol{T}_1\cdot\boldsymbol{T}_2\neq\boldsymbol{T}_2\cdot\boldsymbol{T}_1$。在复合变换中，矩阵相乘的顺序不可交换。通常先计算出 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_0\cdot\boldsymbol{T}_1\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{T}_{n-1}$，再计算 $\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{T}$。

5.3.2 相对于任意参考点的二维几何变换

前面已经定义，二维基本几何变换是相对于坐标原点进行的平移、比例、旋转、反射和错

切 5 种变换，但在实际应用中常会遇到参考点不在坐标原点的情况。相对于任意一个参考点的变换方法为首先将参考点平移到坐标原点，对坐标原点进行二维基本几何变换，然后再将参考点平移回原位置。在 5 种变换中，比例变换和旋转变换就是与参考点相关的变换。

例 5-1 一个由顶点 $P_0(10,10)$，$P_1(30,10)$ 和 $P_2(20,25)$ 定义的三角形，如图 5-7 所示，相对于参考点 $Q(10,25)$ 逆时针旋转 30°，求变换后的三角形顶点坐标。

(1) 将 Q 点平移至坐标原点，如图 5-8 所示。

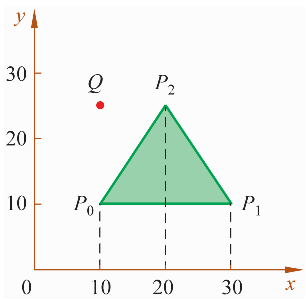


图 5-7 示例图

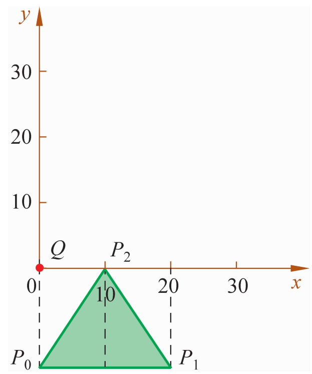


图 5-8 平移变换

变换矩阵

$$\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & -25 & 1 \end{bmatrix}$$

变换后 3 个顶点的齐次坐标为

$$\begin{bmatrix} x_0' & y_0' & 1 \\ x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 1 \\ 30 & 10 & 1 \\ 20 & 25 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & -25 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -15 & 1 \\ 20 & -15 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 三角形相对于坐标原点逆时针方向旋转 30°，如图 5-9 所示。变换矩阵

$$\boldsymbol{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

变换后 3 个顶点的齐次坐标为

$$\begin{bmatrix} x_0'' & y_0'' & 1 \\ x_1'' & y_1'' & 1 \\ x_2'' & y_2'' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -15 & 1 \\ 20 & -15 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 & -12.99 & 1 \\ 24.82 & -2.99 & 1 \\ 8.66 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 将参考点 Q 平移回原位置，如图 5-10 所示。变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 25 & 1 \end{bmatrix}$$

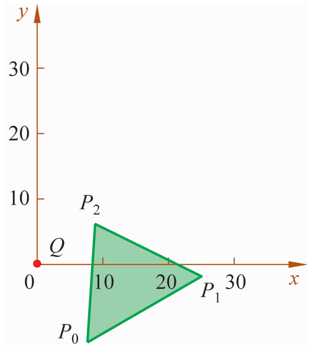


图 5-9　旋转变换

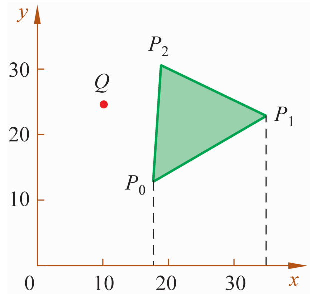


图 5-10　反平移变换

变换后 3 个顶点的齐次坐标为

$$\begin{bmatrix} x'''_0 & y'''_0 & 1 \\ x'''_1 & y'''_1 & 1 \\ x'''_2 & y'''_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 & -12.99 & 1 \\ 24.82 & -2.99 & 1 \\ 8.66 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 25 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.5 & 12.01 & 1 \\ 34.82 & 22.01 & 1 \\ 18.66 & 30 & 1 \end{bmatrix}$$

这样三角形变换后的顶点坐标为 $P_0(17.5,12.01)$，$P_1(34.82,22.01)$ 和 $P_2(18.66,30)$。这里，三角形是将 Q 点作为旋转中心，而不是将坐标系原点作为旋转中心。

图形的旋转变换是相对于某一参考点进行的，这一结论读者一般都比较清楚。同样图形的比例变换也是相对于某一参考点进行的，在应用中如果不注意将会导致错误的结果。

例 5-2　已知正方形的左上角点为 $P_0(10,20)$、右下角点为 $P_1(20,10)$，如图 5-11 所示。正方形分别相对于坐标系原点整体放大 2 倍或相对于正方形中心放大 2 倍。请分别给出变换后的正方形的左上角点和右下角点坐标。

(1) 将正方形相对于坐标系原点整体放大 2 倍，变换矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_0 & y'_0 & 1 \\ x'_1 & y'_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 1 \\ 20 & 10 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 1 \\ 40 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

变换后正方形的左上角点为 $P_0(20,40)$、右下角点为 $P_1(40,20)$，如图 5-12 所示。

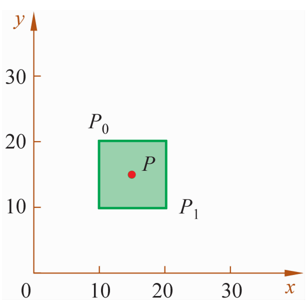


图 5-11　比例变换

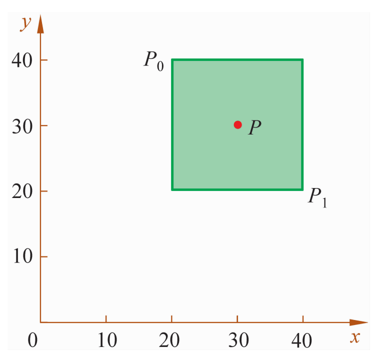


图 5-12　相对于坐标系原点变换

(2) 将正方形相对于正方形中心整体放大 2 倍。

图 5-11 中已知正方形的左上角点与右下角点坐标，可以计算出正方形的中心坐标为 $P(15,15)$。相对于正方形中心的比例变换是复合变换。

首先，将正方形中心点 $P(15,15)$ 平移到坐标系原点，变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -15 & -15 & 1\end{bmatrix}$$

其次，正方形相对于坐标系原点整体放大 2 倍，变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}_2=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

最后，将正方形中心点平移回 $P(15,15)$，变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 15 & 15 & 1\end{bmatrix}$$

正方形整体放大后的顶点的规范化齐次坐标矩阵等于变换前顶点的规范化齐次坐标矩阵乘以变换矩阵

$$\begin{bmatrix}x_0' & y_0' & 1\\ x_1' & y_1' & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0 & y_0 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{T},\quad \text{而 } \boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1\cdot\boldsymbol{T}_2\cdot\boldsymbol{T}_3$$

所以

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x_0' & y_0' & 1\\ x_1' & y_1' & 1\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}10 & 20 & 1\\ 20 & 10 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -15 & -15 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 15 & 15 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}5 & 25 & 1\\ 25 & 5 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

这样正方形整体放大后的左上角点坐标为 $P_0(5,25)$，右下角点坐标为 $P_1(25,5)$，如图 5-13 所示。对比图 5-12 与图 5-13 可见，比例变换是与参考点相关的。

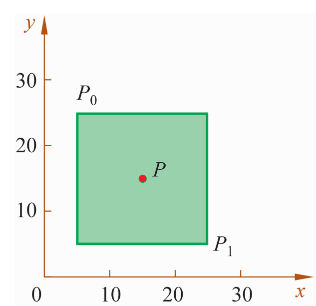


图 5-13　相对于正方形中心点的比例变换

5.3.3　相对于任意方向的二维几何变换

二维基本几何变换是相对于坐标轴进行的平移、比例、旋转、反射和错切这 5 种变换，但在实际应用中常会遇到变换方向不与坐标轴重合的情况。相对于任意方向的变换方法为首先对任意方向做旋转变换，使任意方向与坐标轴重合，然后对坐标轴进行二维基本几何变换，最后做反向旋转变换，将任意方向还原回原来的位置。

例 5-3　图 5-14 所示三角形相对于轴线 $y=kx+b$ 进行反射变换，求每一步相应的变换矩阵。