

第 5 章 数字滤波器的基本结构

5.1 引言

1. 数字滤波器结构的框图及流图表示法。

一个数字滤波器在时域用常系数线性差分方程表示

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad (5.1.1)$$

在 z 域则是用系统函数表示,即将(5.1.1)式取 z 变换可得系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (5.1.2)$$

数字滤波器的功能就是通过一定的运算,如(5.1.1)式所示,把输入变换成输出,这一运算就是“滤波”作用,广义而言,也是信号处理。

可以有两种办法来实现数字滤波:一种是用软件编程来实现,另一种是用专用硬件或用通用的数字信号处理器来实现。

由(5.1.1)式看出,一个数字滤波器实现时的基本运算单元为:加法器、乘法器和延时器。这些基本运算单元可以有两种表示方法——方框图法及信号流图法,如图 5.1 所示。

在本书的各章中都采用信号流图表示法,因为它简单、方便。方框图表示法较为直观,但更为烦琐。在流图表示中,①如果一个节点有两个或两个以上输入,则此节点一定是加法器;②任一节点的节点值是指此节点输出的信号值;③任一节点只有一个输入,有一个或多个输出,则此节点是分支节点。只有输出、没有输入的节点称为源节点,只有输入、没有输出的节点称为阱节点。

2. 实现(5.1.1)式或(5.1.2)式可以有很多方法,例如将(5.1.1)式的差分方程可变换成各种不同的差分方程组,或等效地将(5.1.2)式的分式变换成各种分式的组合,每种都有不同的运算方式,但这些运算的基本单元仍为延迟器、加法器、乘法器组成。因而可以有多种网络结构,而这些网络结构都是指运算结构(而非具体的电路结构)。这些结构都对应于同一差分方程,理论上说它们应该有相同的运算结果,也就是说这些不同的网络结构,在同样的输入情况下,应有完全相同的输出。

但是,实际上,不同的滤波器网络结构,有不同的效果,因而,才会去研究各种不同的

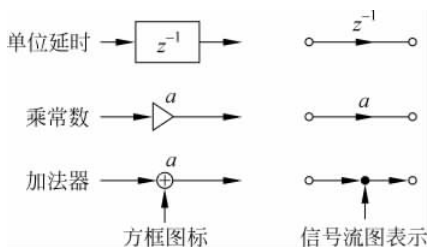


图 5.1 基本运算单元的两表示

网络结构。从效果来看,主要是以下这几个方面的内容会影响人们对某种网络结构的选择。

(1) 计算复杂性。指乘法次数、加法次数、取指、存储的次数,两个数的比较次数。计算复杂性会影响计算速度。

(2) 存储量。指存储系统参数,输入信号、中间计算结果以及输出信号的存储。

(3) 运算误差。主要是指有限字长效应,由于输入输出信号、系统参数、运算过程都受二进制编码长度限制,就会带来各种量化(有限字长)效应产生的误差。所以要研究不同网络结构对有限字长效应的敏感程度,研究需要多少位字长才能达到一定的精度。

(4) 频率响应调节的方便程度,这主要反映在零点、极点的调节方便程度。

以上四点在不同类结构中表现是不一样的。

5.2 无限长单位冲激响应(IIR)滤波器的基本结构

5.2.1 IIR 滤波器的特点

(1) 系统的单位抽样响应 $h(n)$ 是无限长的;

(2) 从(5.1.1)式看,必须至少有某一个 $a_k \neq 0$,也就是说结构上一定存在着输出到输入的反馈,或者说一定是递归型结构;

(3) 从(5.1.2)式看,由于至少有某一个 $a_k \neq 0$,故系统函数 $H(z)$ 在有限 z 平面 ($0 < |z| < \infty$) 上,一定有极点存在;

(4) 在(5.1.2)式中,若只有 b_0 不为零。其他 $b_k = 0 (k=1, 2, \dots, M)$ 则称为全极点型的 IIR 滤波器或称自回归(AR)系统,只要有两个或多个 $b_k \neq 0$,则称为零-极点型的 IIR 滤波器或称自回归滑动平均(ARMA)系统;

(5) IIR 滤波器同一个 $H(z)$ 可以有直接 I 型、直接 II 型、级联型、并联型结构,还有下一节将讨论到的格型结构;

(6) 单位冲激响应 $h(n)$ 为实数,则(5.1.1)式、(5.1.2)式中的所有系数(a_k, b_k)都应为实数。

5.2.2 直接型结构

学习要点

1. 由于各种滤波器结构中所用的基本二阶节单元都是采用直型 II 型结构(典范型结构),所以先介绍直接型结构,主要是直接 II 型结构。

2. 由(5.1.1)式,若先实现各 $x(n-k)$ 的加权和($k=0, 1, \dots, M$)再实现各 $y(n-k)$ 的加权和($k=1, 2, \dots, N$)就得到直接 I 型结构,可见图 5.2(a)。

由于系统是线性系统,故将直接 I 型结构的两个延时链子系统的次序加以交换,并将有相同输出的中间两延时链加以合并,就得到直接 II 型结构(典范型结构),如图 5.2(b)所示。二阶直接 II 型结构($N=2, M=2$ 或 $N=2, M=1$)是最有用的,因为它是级联型结构和并联型结构的基本网络单元。

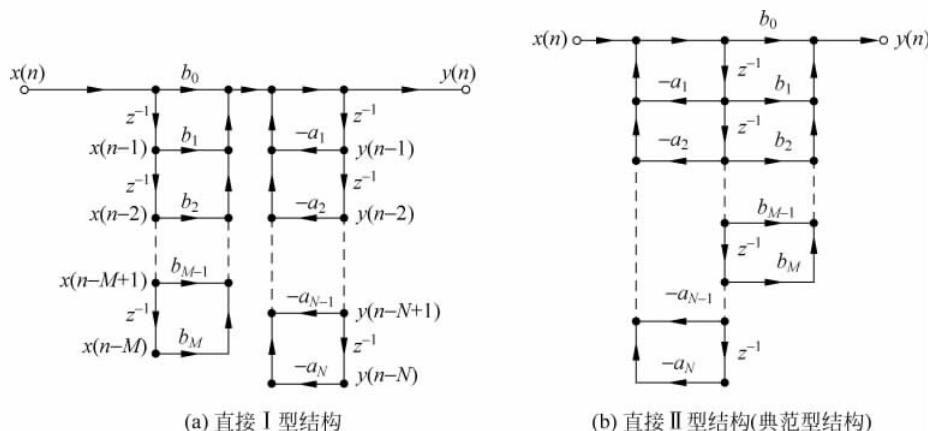


图 5.2 直接型结构

3. 直接 II 型结构的特点(除以下第(1)点外,其他各点也是直接 I 型的特点)。

(1) N 阶差分方程共需 N 个延时单元(当 $N \geq M$,一般都满足这一关系)这是 N 阶滤波器所需最少的延迟单元,故称“典型型”。

(2) 由差分方程(5.1.1)式或系统函数 $H(z)$ 的(5.1.2)式,很容易画出滤波器的这种结构流图。

(3) 缺点 1: 对于高阶滤波器,由于各 a_k 及各 b_k 分别对于滤波器的极点与零点的控制作用不明显,也就是对频率响应的控制作用很不明显,因而调整频率响应较困难。

(4) 缺点 2: 这种结构零点、极点对系数的量化效应较灵敏,因而频率响应会因系数量化产生比其他几种结构更大的偏差。

(5) 缺点 3: 乘法运算的量化误差造成在系统输出端噪声功率比其他几种结构的都要大。

5.2.3 级联型结构

学习要点

1. 将(5.1.2)式的分子多项式、分母多项式分别进行因式分解,将实零点、实极点分别构成一阶因式,而将共轭对极点或共轭对零点组成实系数的二阶因式:

$$(1 - q_k z^{-1})(1 - q_k^* z^{-1}) = 1 - (q_k + q_k^*)z^{-1} + q_k q_k^* z^{-2}$$

若 $q_k = r_k e^{j\omega_k}$ 则 $q_k^* = r_k e^{-j\omega_k}$ (r_k 为实数)

$$\text{则 } (1 - q_k z^{-1})(1 - q_k^* z^{-1}) = 1 - 2r_k z^{-1} \cos \omega_k + r_k^2 z^{-2}$$

最后分子、分母形成一阶实系数因式与二阶实系数因式的连乘形式,再将分子、分母的一个因式组成级联系统中的一个网络。这时,可有多种组合方式,为了充分利用延时单元,可采用分子、分母的二阶因式组合成级联系统的一个二阶网络,而分子、分母的一阶因式组合成级联系统的一个一阶网络(当然也可以分子分母一、二阶因式的交叉组合构成一个级联网络单元),这样可构成若干个二阶网络与若干个一阶网络的级联型结构,级联型结构的示意图见图 5.3(a),其中每个框图 $H_k(z)$ 要么是一阶网络,要么是二阶网络,其中基本的二阶网络系统函数为

$$H_k(z) = \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}} \quad (5.2.1)$$

此式中的全部系数都是实数,当级联的某些二阶节中 α_{2k} 和 $\beta_{2k}=0$ 时,就成为级联的一阶基本节。

级联结构(5.2.1)式的基本一阶网络节与(5.2.2)式的基本二阶网络节可见图 5.3(b)。

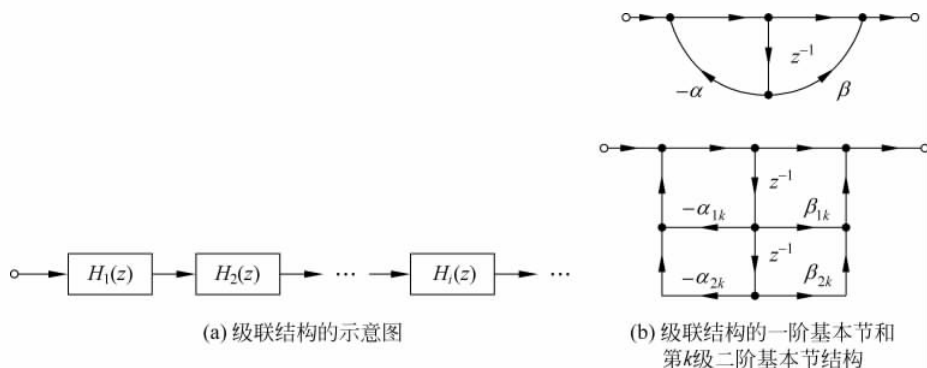


图 5.3 级联型结构

整个级联型系统的系统函数可表示为

$$H(z) = G \prod_k \frac{1 + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2}}{1 + \alpha_{1k}z^{-1} + \alpha_{2k}z^{-2}} \quad (5.2.2)$$

式中各系数包括 G 都是实数,其中一阶、二阶网络的个数,则由具体系统函数 $H(z)$ [见(5.1.2)式]中 M 、 N 的取值(它们决定了零点、极点数目)以及实数零、极点和共轭对零、极点的数目来确定。

2. 由于 $H(z)$ 的分子、分母多项式中,有多个一阶因式、多个二阶因式,因而组成级联的每个二阶网络(或一阶网络)可以有多种组合方式,它们之间又可有多种级联次序,在有限字长(量化)的情况下,可形成的输出量化误差可能是不一样的。

3. 实现级联结构中的每一个一阶节网络及二阶节网络都采用直接 II 型结构。

4. 级联结构的特点。

(1) 有多种分子、分母的二阶节组合,及多种级联次序,很灵活。但采用有限字长实现时,它们的误差是不一样的,有最优化课题。

(2) 调整零、极点直观、方便,从而使频率响应调节较方便。因为每一级二阶子系统 $H_k(z)$ 可独立地确定一对共轭极点(由 α_{1k} 、 α_{2k} 确定)及一对共轭零点(由 β_{1k} 、 β_{2k} 确定)(见 5.2.1 式),而每一级一阶子系统 $H_m(z)$ 则可独立地确定一个实极点及一个实零点[当只有一阶(z^{-1})系数 β, α 时,见图 5.3(b)]。

(3) 级联网络间要有电平的放大与缩小问题。以便使变量值大小合适,因为变量值太大会在运算中产生溢出现象,而变量值太小,则会使信号与量化噪声的比值太小(当然,其他结构也有电平问题)。

(4) 对系数量化效应的敏感度比直接型结构要低。

(5) 由于网络的级联,使得有限字长造成的系数量化误差、运算误差等会逐级积累。

(6) 一般来说输出的噪声功率比直接型低,比并联型高,但某些组合及排序的情况下,其输出噪声可以比并联型低。

5.2.4 并联型结构

学习要点

1. 将因式分解的 $H(z)$ 按极点展开部分分式形式, 并将每一对共轭极点的分式合并成实系数的并联二阶基本节, 就得到 IIR 滤波器的并联型结构, 其最一般表达式为

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 + c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k(1 + g_k z^{-1})}{(1 + d_k z^{-1})(1 + d_k^* z^{-1})} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

其中 $N = N_1 + 2N_2$, 除 d_k 为复数外, 其他系数皆为实数。

可将上式写成更通用的形式

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \sum_{k=1}^K \frac{B_{0k} + B_{1k} z^{-1}}{1 + A_{1k} z^{-1} + A_{2k} z^{-2}} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} \quad (5.2.3)$$

当某些 B_{1k} 、 A_{2k} 为零时, 就得到一些基本的并联一阶节; 当 $M = N$ 时, 等式右端第二个求和式中, 只存在常数 C_0 ; 当 $M < N$ 时, 则只存在第一个求和式, 第二个求和式的多项式为零。

其中, K 个并联结构的二阶基本节的通用表达式为

$$H_k(z) = \frac{B_{0k} + B_{1k} z^{-1}}{1 + A_{1k} z^{-1} + A_{2k} z^{-2}}, \quad k = 1, 2, \cdots, K \quad (5.2.4)$$

$M = N$ 时并联结构的示意图如图 5.4 所示。

并联型结构的一阶基本节、二阶基本节的结构图如图 5.5 所示。

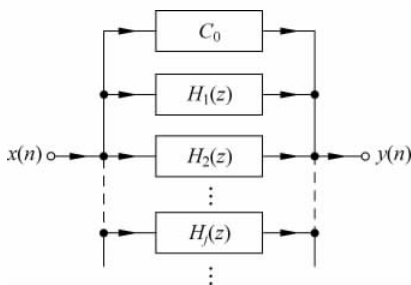


图 5.4 并联结构的示意图 ($M = N$)

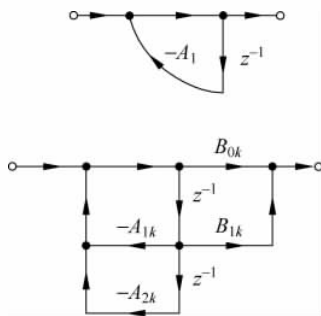


图 5.5 并联结构的一阶基本节和第 k 个二阶基本节结构

2. 并联型结构的特点。

(1) 调整极点方便。因为一阶基本网络的系数决定一个实极点, 二阶基本网络的两个系数决定一对共轭极点。但不能像级联结构那样能方便地调整零点, 故要求有准确传输零点的情况下, 不能采用并联型结构, 而应采用级联型结构;

(2) 和级联型结构一样, 对系数量化误差敏感度低;

(3) 由于网络的并联, 故各基本网络节产生的量化误差不会互相影响, 不会像级联型那

些产生逐级误差的积累;

(4) 信号同时加到各个网络上,因而运算速度比级联型快;

(5) 若有高阶极点时,部分分式展开会很麻烦。但用 MATLAB 工具,可很容易解决这一麻烦。

5.2.5 转置型结构

利用线性时不变系统的转置定理,可以得到以上所有 IIR 滤波器结构的转置结构。

转置定理: 对于线性时不变系统,将其流图的所有支路方向翻转,但支路的增益不变,将输入与输出交换位置,则所形成的新网络即为原网络的转置结构,新结构的系统函数 $H(z)$ 与原系统的是一样的。图 5.6 及图 5.7 画出了图 5.2(b)直接 II 型的转置结构。

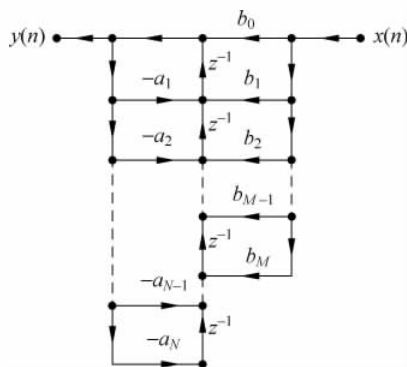


图 5.6 典型型结构的转置

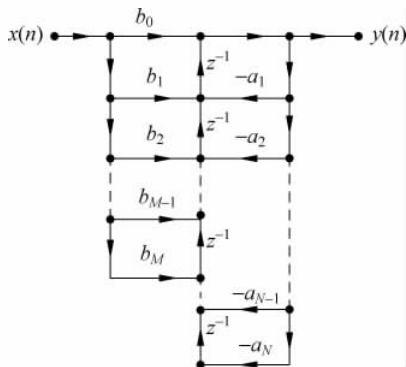


图 5.7 直接 II 型的转置结构(将图 5.6 画成输入在左,输出在右的习惯形式)

【例 5.1】 已知 IIR 滤波器的系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{6 + 1.2z^{-1} - 0.72z^{-2} + 1.728z^{-3}}{8 - 10.4z^{-1} + 7.28z^{-2} - 2.352z^{-3}}$$

试求:

- (1) 系统的差分方程;
- (2) 画出该系统的直接 II 型结构;
- (3) 画出该系统的级联型结构;
- (4) 画出该系统的并联型结构。

解 (1) 由 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ 代入 $H(z)$ 表达式,并求 z 反变换可得系统差分方程为

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{8} [10.4y(n-1) - 7.28y(n-2) + 2.352y(n-3)] \\ &\quad + \frac{1}{8} [6x(n) + 1.2x(n-1) - 0.72x(n-2) + 1.728x(n-3)] \\ &= 1.3y(n-1) - 0.91y(n-2) + 0.294y(n-3) + 0.75x(n) \\ &\quad + 0.15x(n-1) - 0.09x(n-2) + 0.216x(n-3) \end{aligned}$$

(2) 由差分方程可画出直接 II 型结构图如图 5.8 所示。

由图看出,只要将 $H(z)$ 中分母中 z^0 项的系数归一化为 1,则由观察 $H(z)$ 即可画出直接 II 型结构,但需注意,反馈延时链中的系数的符号应与 $H(z)$ 中分母的各相应系数的符号相反。

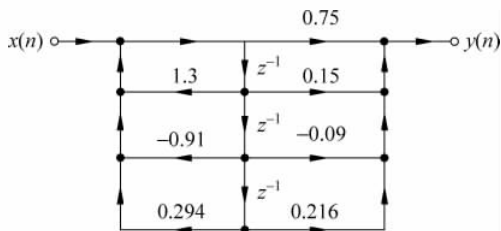


图 5.8 例 5.1 的直接 II 型结构

(3) 级联型结构。

将 $H(z)$ 按零点极点展成因式,为了方便将 $H(z)$ 的分子、分母多项式 z^0 项的系数都归一化为 1,则有

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1 + 0.2z^{-1} - 0.12z^{-2} + 0.288z^{-3}}{1 - 1.3z^{-1} + 0.91z^{-2} - 0.294z^{-3}} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{(1 + 0.8z^{-1})(1 - 0.6z^{-1} + 0.36z^{-2})}{(1 - 0.6z^{-1})(1 - 0.7z^{-1} + 0.49z^{-2})} \end{aligned}$$

其分子、分母中的二阶多项式分别为一对共轭零点与一对共轭极点。级联的两个网络可以有两种组合,一种是将分子、分母的一阶因式组合成级联的一个网络,将分子、分母的二阶因式组合成级联的另一个网络,则有

$$H(z) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1 + 0.8z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}} \cdot \frac{1 - 0.6z^{-1} + 0.36z^{-2}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.49z^{-2}}$$

由此得出如图 5.9 所示的级联型结构,其中每一个级联子网络本身都用直接 II 型结构实现。

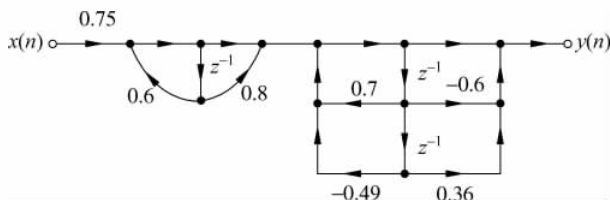


图 5.9 例 5.1 的一种级联型结构

如果将分子(分母)的一阶因式与分母(分子)的二阶因式组成级联型的一个网络,则有

$$H(z) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1 + 0.8z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.49z^{-2}} \cdot \frac{1 - 0.6z^{-1} + 0.36z^{-2}}{1 - 0.6z^{-1}}$$

由此可得如图 5.10 所示的另一种级联型结构,但是,可以看出这种结构比如图 5.9 所示的结构要多用一个延时单元。

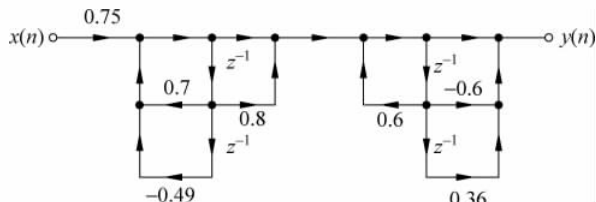


图 5.10 例 5.1 的另一种级联型结构

(4) 并联型结构。

为求并联结构,必须按系统 $H(z)$ 的极点展成部分分式。对于由共轭极点组成的二阶多项式,前面已分析到当共轭极点为 $z_i = re^{j\theta}$ 及 $z_i^* = re^{-j\theta}$, 则有

$$(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1}) = 1 - 2rz^{-1}\cos\theta + r^2z^{-2}$$

因而 $H(z)$ 中分母的二阶多项式可分解为

$$1 - 0.7z^{-1} + 0.49z^{-2} = (1 - 0.7e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - 0.7e^{-j\pi/3}z^{-1})$$

由此,可将 $H(z)$ 展成部分分式(由于 $M=N=3$, 故有常数项)

$$H(z) = A + \frac{B}{1 - 0.6z^{-1}} + \frac{C}{1 - 0.7e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{C^*}{1 - 0.7e^{-j\pi/3}z^{-1}}$$

由于极点 $z=0.7e^{j\pi/3}$ 与 $z=0.7e^{-j\pi/3}$ 是共轭的,故展开式的系数也一定是共轭的。利用

$$\begin{aligned} \frac{H(z)}{z} &= \frac{3}{4} \frac{(1 + 0.8z^{-1})(1 - 0.6z^{-1} + 0.36z^{-2})}{(1 - 0.6z^{-1})(1 - 0.7z^{-1} + 0.49z^{-2})z} \\ &= \frac{3}{4} \frac{(z + 0.8)(z^2 - 0.6z + 0.36)}{(z - 0.6)(z^2 - 0.7z + 0.49)z} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{(z + 0.8)(z^2 - 0.6z + 0.36)}{z(z - 0.6)(z - 0.7e^{j\pi/3})(z - 0.7e^{-j\pi/3})} \end{aligned}$$

有

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 0.6} + \frac{C}{z - 0.7e^{j\pi/3}} + \frac{C^*}{z - 0.7e^{-j\pi/3}}$$

按部分分式法求各系数为

$$A = \frac{H(z)}{z}(z - 0) \Big|_{z=0} = -0.7347$$

$$B = \frac{H(z)}{z}(z - 0.6) \Big|_{z=0.6} = 1.4651$$

$$C = \frac{H(z)}{z}(z - 0.7e^{j\pi/3}) \Big|_{z=0.7e^{j\pi/3}} = 0.133e^{-j0.21\pi}$$

因而 $C^* = 0.133e^{j0.21\pi}$

故

$$\frac{C}{1 - 0.7e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{C^*}{1 - 0.7e^{-j\pi/3}z^{-1}} = \frac{0.21 + 0.025z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.49z^{-2}}$$

由此得到并联型结构的系统函数为

$$H(z) = -0.7347 + \frac{1.4651}{1 - 0.6z^{-1}} + \frac{0.21 + 0.025z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.49z^{-2}}$$

并联型结构图见图 5.11。

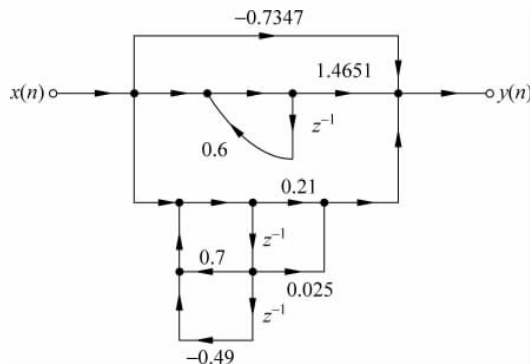


图 5.11 例 5.1 的并联型结构

5.3 有限长单位冲激响应(FIR)滤波器的基本结构

5.3.1 FIR 滤波器的特点

- (1) 系统的单位抽样响应 $h(n)$ 是有限长的, 即 $h(n)$ 在有限个 n 值处不为零;
- (2) 从(5.1.1)式看, 必须全部 $a_k=0(k=1, 2, \dots, N)$, 即结构上没有输出到输入的反馈, 即没有递归结构, 只有非递归结构。但在 FIR 滤波器的频率抽样结构中, 也包含有递归结构;
- (3) 从(5.1.2)式看, 由于全部 $a_k=0$, 故系统函数 $H(z)$ 在 $0<|z|<\infty$ 的有限 z 平面中只有零点, 故又称为全零点系统, 或称滑动平均系统(MA 系统), 系统的全部极点都在 $z=0$ 处;
- (4) 同一个 $H(z)$, 可以有直接型(横截型、卷积型)结构、级联型结构、频率抽样型结构、线性相位型结构、快速卷积型(DFT 型)结构, 还有下一节将讨论到的格型结构, 因为有限 z 平面没有极点, 故没有并联型结构;
- (5) 同 IIR 滤波器一样, $h(n)$ 是实数时, $H(z)$ 中的系数亦为实数;
- (6) FIR 滤波器的最大特点是可以有严格的线性相位, 这对某些信号(例如图像信号)的传输是很重要的。

5.3.2 直接型(横截型、卷积型)结构

学习要点

1. 由于在(5.1.1)式及(5.1.2)式中的全部 $a_k=0(k=1, 2, \dots, N)$ 则有

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

一般都研究 N 点长序列, 即令 $M=N-1$, 将 k 换成 m

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} b_m x(n-m)$$

可以看出, $b_m(m=0, 1, \dots, N-1)$ 就是单位冲激响应序列 $h(m)$, 则上式可写成

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) \quad (5.3.1)$$

这就是 LSI(线性移不变)系统的卷积和关系, 由此式可画出由 $x(n)$ 的延时链构成的横截(横向)结构, 也称卷积结构, 如图 5.10 所示。

由(5.3.1)式可得, N 点长单位冲激响应 $h(n)(0 \leq n \leq N-1)$ 系统的系统函数为 z^{-1} 的 $M=N-1$ 阶多项式

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(n)] = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} b(n)z^{-n} \quad (5.3.2)$$

由(5.3.2)式也可直接画出图 5.12 的 $(N-1)$ 阶横向型结构。

图 5.13 画出了图 5.12 的转置结构。

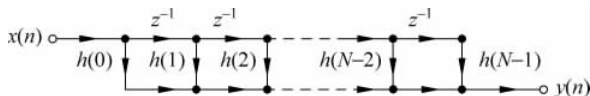


图 5.12 FIR 滤波器的横截型结构

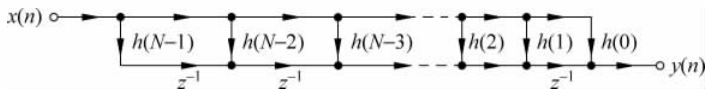


图 5.13 图 5.12 的转置结构

2. FIR 滤波器 $(N-1)$ 阶横向结构共有 N 次乘法, $(N-1)$ 次加法。

5.3.3 级联型结构

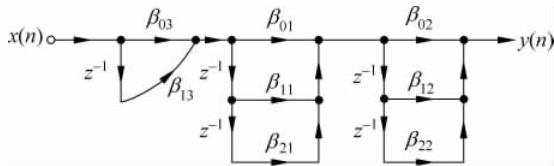
学习要点

1. 将(5.3.2)式的系统函数分解为由一阶实零极点系统与一对共轭复零点组成的实系数二阶子系统的系统函数的乘积。由于一阶子系统可看成二阶子系统的特例,故可以统一用二阶级联基本节子系统的乘积来表示为

$$H(z) = \prod_{k=1}^K (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2}) \quad (5.3.3)$$

其中 $K = \lfloor N/2 \rfloor$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下取整), 各系数 $\beta_{0k}, \beta_{1k}, \beta_{2k}$ 皆为实数, 当某一个 $\beta_{2k} = 0$ 时就得到一个一阶级联基本节。

图 5.14 画出了 $N=6, N-1=5$ 时的 FIR 系统的级联结构图。

图 5.14 FIR 系统的级联型结构($N=6, K=3$)

2. 级联型结构的特点。

(1) 调整传输零点很方便。因为每个实零点可由一阶子系统的两个系数控制; 每一对共轭零点则由二阶子系统的三个系数控制。直接型结构则无此优点。

(2) 级联型结构所需乘法次数比直接型多。

5.3.4 频率抽样型结构

学习要点

1. 频率抽样结构。在 3.5.2 节的频域的插值恢复中已指出频域插值公式(3.5.5)式是 FIR 滤波器频率抽样结构的依据, 即一个有限长序列, 其 z 变换可以用 z 平面单位圆上的 N 个等间隔抽样值来表示, 在(3.5.5)式中, 如果研究的是系统的 $h(n)$ (N 点有限长序列), 则有

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \quad (5.3.4)$$

其中

$$W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$$

$$H(k) = H(z) \Big|_{z=W_N^{-k}} = |H(k)| e^{j\theta(k)}$$

而

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

(5.3.4)式可看成两部分级联组成:

- 级联的第一部分

$$H_c(z) = 1 - z^{-N} \quad (5.3.5)$$

这是一个 FIR 子系统,它是由 N 个延时单元组成的梳状滤波器,此系统在单位圆上有 N 个等间隔的零点

$$H_c(z) = 1 - z^{-N} = 0$$

$$z_i^N = 1 = e^{j2\pi i}, \quad z_i = e^{j\frac{2\pi}{N}i}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$H_c(z)$ 的频率响应为

$$H_c(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega N} = 2je^{-j\frac{\omega N}{2}} \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)$$

故频率响应的幅度为

$$|H_c(e^{j\omega})| = 2 \left| \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \right| \quad (5.3.6)$$

频率响应的相角为

$$\arg[H_c(e^{j\omega})] = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega N}{2} + \arg[\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)] \quad (5.3.7)$$

其中

$$\arg[\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)] = m\pi, \quad \text{当 } \omega = \left(\frac{2m\pi}{N} \sim \frac{2(m+1)\pi}{N}\right), \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.3.8)$$

梳状滤波器子网络 $H_c(z)$ 的结构图、幅度响应 $|H_c(e^{j\omega})|$ 以及相位响应 $\arg[H_c(e^{j\omega})]$ 见图 5.15。

由于其频率响应的幅度是梳齿形状,因而称之为梳状滤波器,在第 6 章中将讨论这种滤波器。梳状滤波器可用来去除交流 50Hz 频率及其各次谐波分量的干扰,在彩色电视及高清晰度电视中可用来将复合(全)电视信号分离出亮度信号及色度信号。

- 级联的第二部分

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}} = \sum_{k=0}^{N-1} H'_k(z) \quad (5.3.9)$$

它是由 N 个一阶 IIR 子网络并联组成的 IIR 系统,每一个 IIR 一阶子网络为

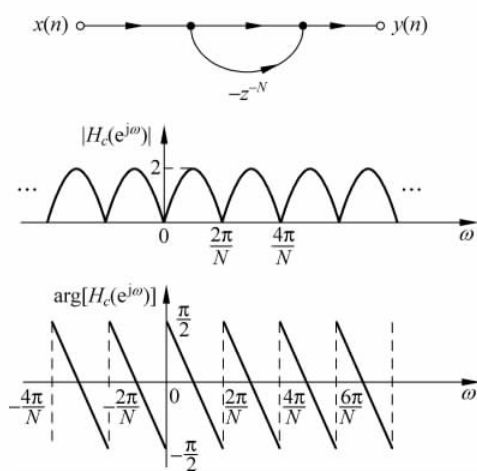


图 5.15 梳状滤波器结构、频率响应幅度及相位响应

$$H'_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (5.3.10)$$

$H'_k(z)$ 的极点为 $z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ 。

此一阶网络在频率 $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ 处响应幅度为无穷大,等效于谐振频率为 $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ 的无损耗谐振器。

- 频率抽样结构的优点是对频率响应的控制方便,第二部分的每个谐振器的极点 $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ ($k=0,1,\dots,N-1$)就和第一部分梳状滤波器 N 个零点中的一个零点相抵消,使得在 $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ 处, $H(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = H(k)$,因而可用抽样值 $H(k)$ 直接控制级联后的 FIR 滤波器的频率响应。
- 由于零极点互相抵消后,在有限 z 平面上 ($0 < |z| < \infty$) 系统函数没有极点,因而它就是一个 FIR 系统。FIR 滤波器的频率抽样型结构如图 5.16 所示。

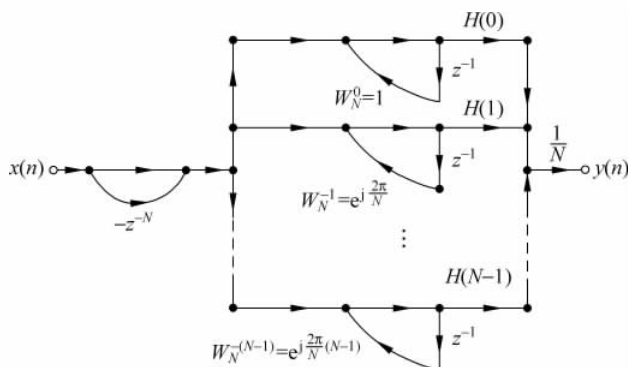


图 5.16 FIR 滤波器的频率抽样型结构

- 频率抽样结构的缺点有两个。

一个缺点是稳定性问题。原来结构的 N 个零点、 N 个极点都在单位圆上 N 个等间隔的相同位置上,但是由于采用有限字长后,量化效应对零点位置没有影响,因为零点只由延时单元决定,而极点由系数 $W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ 决定,系数量化后,极点位置会移动,若极点仍在单位圆上,但移到另外的位置,不能被零点所抵消,则系统就不稳定,因而必须加以改进。

第二个缺点是结构中所乘的系数 $H(k)$ 及 W_N^{-k} 都是复数,运算更加复杂,存储量更多,因而也须加以改进。

2. 修正的频率抽样结构。

(1) 针对以上第一个缺点是将梳状滤波器的零点以及各一阶谐振器的极点都移到单位圆内半径为 r 的圆上, r 是小于 1 又近似等于 1 的正实数 $r \lesssim 1$,则所得到的修正的频率抽样结构的系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_r(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}}$$

由于 $r \lesssim 1$, 且 $r \approx 1$, 则半径为 r 的新抽样点上的值 $H_r(k)$ 可用单位圆 ($r=1$) 上的 $H(k)$ 代替, 即

$$H_r(k) = H(z) \Big|_{z=rW_N^{-k}} \approx H(z) \Big|_{z=W_N^{-k}} = H(k)$$

故有

$$H(z) \approx \frac{1-r^N z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-rW_N^{-k} z^{-1}} \quad (5.3.11)$$

(2) 以下要针对以上的第二个缺点加以改进。即将所乘的系数 $[H(k)]$ 及 N^{-k} 都转化成实数,其依据是 $h(n)$ 是实序列这一特点,当 $h(n)$ 为实序列时有

$$H(k) = H^*((N-k))_N R_N(n) = H^*(N-k) = |H(k)| e^{j\theta(k)} \quad (5.3.12a)$$

另有

$$W_N^{-k} = (W_N^{-(N-k)})^* \quad (5.3.12b)$$

• 利用(5.3.12)式这两个条件,可将(5.3.11)式的求和式中的第 k 项与第 $N-k$ 项加以合并,令合并后的实系数二阶网络表示成 $H_k(z)$

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \frac{H(k)}{1-rW_N^{-k} z^{-1}} + \frac{H(N-k)}{1-rW_N^{-(N-k)} z^{-1}} = \frac{H(k)}{1-rW_N^{-k} z^{-1}} + \frac{H^*(k)}{1-r(W_N^{-k})^* z^{-1}} \\ &= 2 |H(k)| \frac{\cos[\theta(k)] - r \cos\left[\theta(k) - \frac{2\pi k}{N}\right] z^{-1}}{1 - 2r \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \end{aligned} \quad (5.3.13a)$$

其中

$$H(k) = |H(k)| e^{j\arg[H(k)]} = |H(k)| e^{j\theta(k)} \quad (5.3.13b)$$

(5.3.13a)式的 $H_k(z)$ 称为有限品质因数 Q (即有损耗)的二阶谐振器,所谓品质因数 Q 是谐振器的中心频率 f_0 与通频带 Δf_B 的比值,即 $Q=f_0/\Delta f_B$ 。若 $Q=\infty$,则称为无损耗谐振器,它的 $H(z)$ 的极点一定在 z 平面单位圆上。

现在来讨论(5.3.13a)式的 $H_k(z)$,由于它是(5.3.11)求和式中, $k=k$ 与 $k=N-k$ 两项(它们的极点是互为复共轭的)合并而成。以下就 N =奇数, N =偶数分别讨论(5.3.13a)式:

(1) 当 N =奇数时,(5.3.11)式中, $k=0$ 处为 $H(z)$ 的一个实极点,它必然是单独的一项,而 $k=1,2,\dots,N-1$ 处的各项,是复极点,且两两互为复共轭,可合并为(5.3.13a)式的 $H_k(z)$,即有

$$H_0(z) = \frac{H(0)}{1-rz^{-1}}, \quad (k=0 \text{ 代入}(5.3.11) \text{ 式}) \quad (5.3.14a)$$

$$H_k(z), \quad k=1,2,\dots,(N-1)/2 \quad (5.3.14b)$$

(2) 当 N =偶数时,(5.3.11)式中, $k=0$ 及 $k=N/2$ 处为 $H(z)$ 的两个实极点,它们都是单独的项,而 $k=1,2,\dots,N/2-1,N/2+1,\dots,N-1$ 处的各项是复极点,且两两互为复共轭,可合并为(5.3.13a)式 $H_k(z)$,即有

$$\begin{cases} H_0(z) = \frac{H(0)}{1-rz^{-1}} & (k=0 \text{ 代入}(5.3.11) \text{ 式}) \end{cases} \quad (5.3.15a)$$

$$\begin{cases} H_{N/2}(z) = \frac{H(N/2)}{1+rz^{-1}}, & (k=N/2 \text{ 代入}(5.3.11) \text{ 式}) \end{cases} \quad (5.3.15b)$$

$$H_k(z), \quad k=1,2,\dots,N/2-1 \quad (5.3.15c)$$

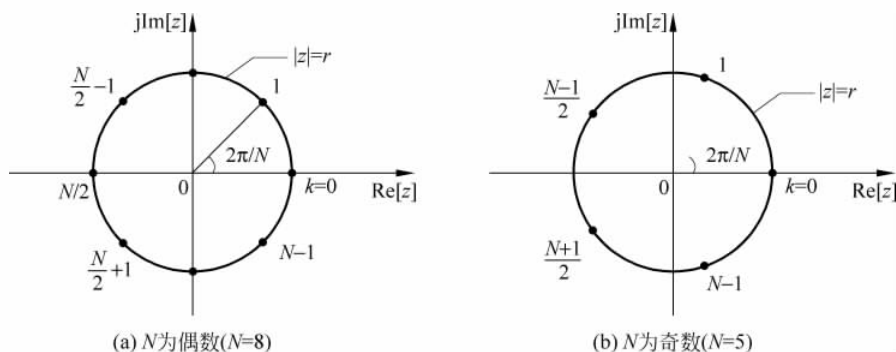


图 5.17 谐振器各个根的位置

• 实际上

$$H(0) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \Big|_{k=0} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \quad (5.3.16a)$$

$$H\left(\frac{N}{2}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \Big|_{k=N/2} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\pi n} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n h(n) \quad (5.3.16b)$$

因而 $H(0)$ 和 $H\left(\frac{N}{2}\right)$ 都是实数。

• 由此得出修正的频率抽样结构的系统函数表达式为

当 N 为偶数时,有

$$\begin{aligned} H(z) &= (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[\frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} + \frac{H\left(\frac{N}{2}\right)}{1 + rz^{-1}} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} 2 |H(k)| \cdot H_k(z) \right] \\ &= (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[H(0) \cdot H_0(z) + H\left(\frac{N}{2}\right) \cdot H_{\frac{N}{2}}(z) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} 2 |H(k)| \cdot H_k(z) \right] \end{aligned} \quad (5.3.17a)$$

其中

$$H_k(z) = \frac{\cos[\theta(k)] - r \cos\left[\theta(k) - \frac{2\pi}{N}k\right] z^{-1}}{1 - 2rz^{-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) + r^2 z^{-2}}, \quad k = 1, 2, \dots, N/2 - 1 \quad (5.3.17b)$$

当 N 为奇数时,有

$$\begin{aligned} H(z) &= (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[\frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2 |H(k)| \cdot H_k(z) \right] \\ &= (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[H(0) \cdot H_0(z) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2 |H(k)| \cdot H_k(z) \right] \end{aligned} \quad (5.3.18a)$$

其中

$$H_k(z) = \frac{\cos[\theta(k)] - r \cos\left[\theta(k) - \frac{2\pi}{N}k\right] z^{-1}}{1 - 2rz^{-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) + r^2 z^{-2}}, \quad k = 1, 2, \dots, (N-1)/2 \quad (5.3.18b)$$

图 5.18 画出了一阶结构的 $H_0(z)$ 、 $H_{\frac{N}{2}}(z)$ 及二阶结构的 $2|H(k)| \cdot H_k(z)$ 的基本流程图。

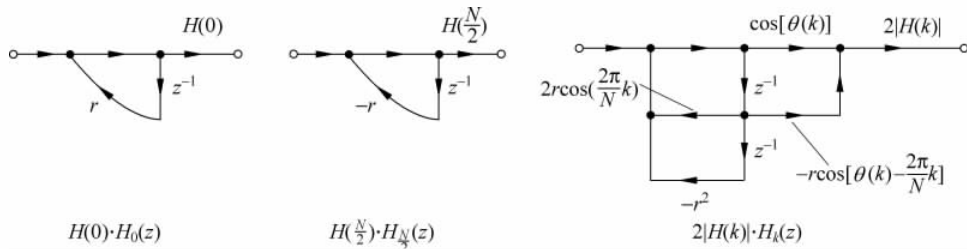


图 5.18 一阶谐振器 $H(0) \cdot H_0(z)$ 、 $H\left(\frac{N}{2}\right) \cdot H_{\frac{N}{2}}(z)$ 及二阶谐振器 $2|H(k)| \cdot H_k(z)$ 的基本流程图(修正的频率抽样结构的基本单元结构)

图 5.19 画出了 N 为偶数时的修正的频率抽样型结构。

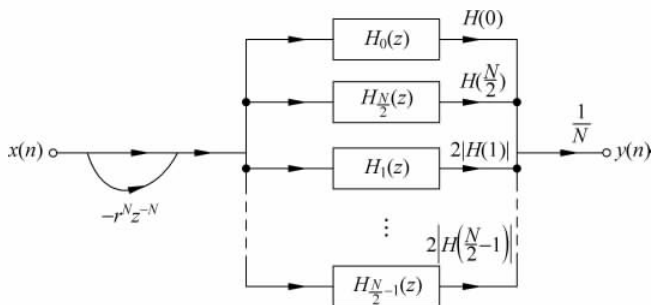


图 5.19 FIR 滤波器的修正的频率抽样结构(N 为偶数)

- $r=1$ 时即为一般(非修正)的频率抽样结构,因而一般的频率抽样结构也可以有实系数的结构。

3. 频率抽样结构所需乘法器及存储器都比较多;它的第一优点是在窄带低通、窄带带通滤波器时,所需频域抽样点比较小,可省掉一些基本一、二阶节,因而可减少运算量,其第二个优点是具有高度模块化结构,每个一、二阶节结构都是相同的,只是所乘的加权系数不同而已,因而可以时分复用,代替一组并列的滤波器。

由于量化效应,使在半径为 r 上的某些极点可能(很大可能)移位,不能被零点抵消,造成有限 z 平面出现极点(当然不能移至单位圆上,否则不稳定),因而变成 IIR 系统了。

5.3.5 快速卷积结构

在 3.6.1 节中已经讨论到用圆周卷积(采用 DFT 方法)计算 $x(n)$ 通过 FIR 系统($h(n)$ 为有限长)的实现方法,也就是说 FIR 滤波器可以有快速(圆周)卷积结构。FIR 滤波器的时域差分方程

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

设 $h(n)$ 长度为 N_1 点 $x(n)$ 长度为 N_2 点,则卷积结果 $y(n)$ 的长度为 N_1+N_2-1 点,若作 DFT

运算其 DFT 的点数必须满足 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 点,则有

$$H(k) = \text{DFT}[h(n)], x(k) = \text{DFT}[x(n)], \text{皆为 } L \text{ 点}$$

$$Y(k) = H(k)x(k)$$

$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)], L \text{ 点}$$

由于 $H(k)$ 可预先算出,存在存储器中,因而有图 5.20 的快速卷积结构。

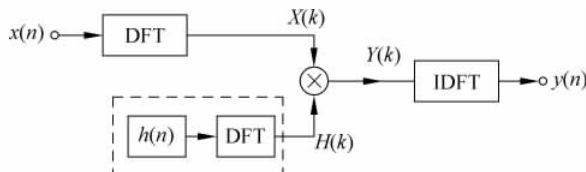


图 5.20 FIR 滤波器的快速卷积结构

- 当 $x(n)$ 是很长(或无限长)序列时,要采用 4.12 节中的分段卷积的重叠相加法或重叠保留法后,再用 DFT 求解。

5.3.6 线性相位 FIR 滤波器的结构

学习要点

1. FIR 滤波器的一大特点,是可以实现严格线性相位特性,这对于数据传输、图像处理等都是非常重要的。

2. FIR 滤波器的单位抽样响应 $h(n)$ 为实数($0 \leq n \leq N-1$),且满足以下任一条件时,系统的频率响应的相位就是严格线性的(见第 8 章的分析)。

偶对称

$$h(n) = h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (5.3.19a)$$

奇对称

$$h(n) = -h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (5.3.19b)$$

其对称中心为 $n = (N-1)/2$ 。

当 N 为奇数时,将(5.3.19a)式、(5.3.19b)式代入 $H(z)$ 表达式中

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{(N-1)/2-1} h(n)[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)}] + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}} \quad (5.3.20)$$

当 N 为偶数时,将(5.3.19a)式、(5.3.19b)式代入 $H(z)$ 表达式中

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)}] \quad (5.3.21)$$

上两式中方括号中的“+”表示 $h(n)$ 满足(5.3.19a)式的偶对称关系,“-”表示 $h(n)$ 满足(5.3.19b)式的奇对称关系。由(5.3.20)式、(5.3.21)式可分别画出两种线性相位 FIR 滤波器的直接型流图结构图 5.21 及图 5.22。但是,对图 5.19, N 为奇数且 $h(n)$ 为奇对称时,将 $n = (N-1)/2$ 代入(5.3.19b)式,有 $h((N-1)/2) = -h(N-1-(N-1)/2) = -h((N-1)/2)$,故有 $h((N-1)/2) = 0$ 。因而对 $h(n)$ 奇对称序列,且 N 为奇数时,图中的 $h((N-1)/2)$ 处的连线应该断开[即 $h((N-1)/2) = 0$],这时,(5.3.20)式中,等式右端最

后一项 $h((N-1)/2)z^{-(N-1)/2}=0$ 。

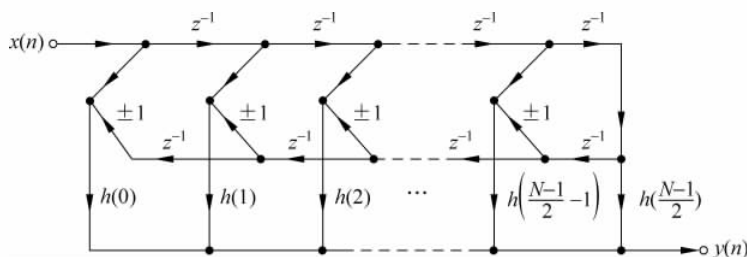


图 5.21 N 为奇数时线性相位 FIR 滤波器的直接型结构

$$\begin{cases} h(n) \text{ 偶对称时 } \pm 1 \text{ 取 } +1; \\ h(n) \text{ 奇对称时 } \pm 1 \text{ 取 } -1, \text{ 且 } h\left(\frac{N-1}{2}\right)=0 \text{ 即 } h\left(\frac{N-1}{2}\right) \text{ 处的连线断开} \end{cases}$$

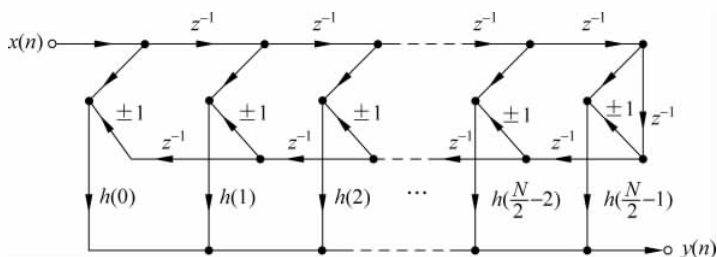


图 5.22 N 为偶数时, 线性相位 FIR 滤波器的直接型结构

$h(n)$ 偶对称时 ± 1 取 $+1$, $h(n)$ 奇对称时 ± 1 取 -1

3. 图 5.21 及图 5.22 两个流图看出, 线性相位情况下, FIR 滤波器的卷积型结构要比一般卷积型结构节约一半数量的乘法次数。

【例 5.2】 已知滤波器系统如图 5.23 所示, 求系统函数 $H(z)$, 并写出系统的差分方程表达式。

解 这一流图并不完全是并联型结构, 三条平行支路中, 上面两条支路是并联的, 而最下面一条支路是反馈支路。

首先将各节点的信号表示标注在图 5.23 上, 由图可知, 由上到下第一条支路有

$$g_1(n) = d_0 p(n), \quad G_1(z) = d_0 P(z)$$

第二条支路有

$$g_2(n) = c_0 p(n-1) + c_1 g_2(n-1), \quad G_2(z) = \frac{c_0 z^{-1}}{1 - c_1 z^{-1}} P(z)$$

第三条支路, 其输入为 $y(n)$, 输出为 $v(n)$ (是反馈支路), 将图 5.23 第三条支路转置后, 即得图 5.24, 由此图看出它的第三条反馈支路, 从输入 $y(n)$ 到输出 $v(n)$, 显然是典型的直接 II 型结构, 其差分方程为

$$v(n) = a_1 v(n-1) + a_2 v(n-2) + b_0 y(n) + b_1 y(n-1)$$

故有

$$V(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} Y(z)$$

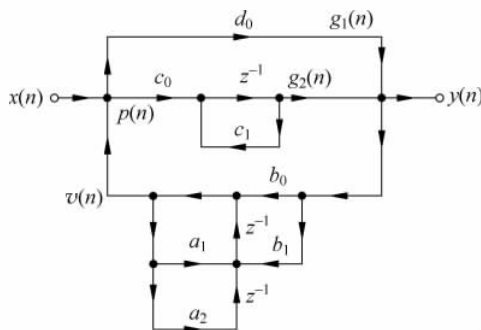


图 5.23

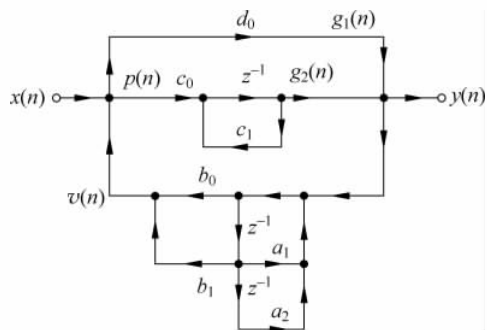


图 5.24

在 $p(n)$ 节点处有

$$p(n) = x(n) + v(n), \quad P(z) = X(z) + V(z)$$

在 $y(n)$ 节点处有

$$y(n) = g_1(n) + g_2(n), \quad Y(z) = G_1(z) + G_2(z)$$

令三条支路的系统函数分别为 $H_1(z)$, $H_2(z)$, $H_3(z)$, 则有

$$H_1(z) = \frac{G_1(z)}{P(z)} = d_0$$

$$H_2(z) = \frac{G_2(z)}{P(z)} = \frac{c_0 z^{-1}}{1 - c_1 z^{-1}}$$

$$H_3(z) = \frac{V(z)}{Y(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

于是有

$$\begin{aligned} Y(z) &= G_1(z) + G_2(z) = [H_1(z) + H_2(z)]P(z) \\ &= [H_1(z) + H_2(z)][X(z) + V(z)] \\ &= [H_1(z) + H_2(z)][X(z) + H_3(z)Y(z)] \\ &= [H_1(z) + H_2(z)]X(z) + [H_1(z) + H_2(z)]H_3(z)Y(z) \end{aligned}$$

由此得出

$$Y(z) = \frac{H_1(z) + H_2(z)}{1 - [H_1(z) + H_2(z)]H_3(z)} X(z)$$

故系数函数为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z) + H_2(z)}{1 - [H_1(z) + H_2(z)]H_3(z)}$$

将 $H_1(z)$, $H_2(z)$, $H_3(z)$ 的表达式代入后, 经化简可得出

$$H(z) = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + B_3 z^{-3}}{1 - A_1 z^{-1} - A_2 z^{-2} - A_3 z^{-3}}$$

由此得出系统的差分方程为

$$\begin{aligned} y(n) &= A_1 y(n-1) + A_2 y(n-2) + A_3 y(n-3) + B_0 x(n) \\ &\quad + B_1 x(n-1) + B_2 x(n-2) + B_3 x(n-3) \end{aligned}$$

其中

$$A_1 = (a_1 + c_1 + c_0 b_0 + d_0 b_1 - c_1 d_0 b_0)/K$$

$$A_2 = (a_2 - a_1 c_1 + c_0 b_1 - c_1 d_0 b_1)/K$$

$$A_3 = -a_2 c_1/K$$

$$B_0 = d_0/K$$

$$B_1 = (c_0 - d_0 c_1 - a_1 d_0)/K$$

$$B_2 = (a_1 d_0 c_1 - a_2 d_0 - a_1 c_0)/K$$

$$B_3 = (a_2 d_0 c_1 - a_2 c_0)/K$$

$$K = 1 - d_0 b_0$$

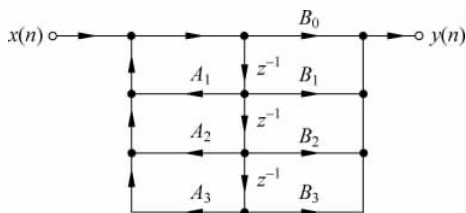


图 5.25 图 5.23 的直接 II 型结构

由此差分方程可得到网络的直接 II 型结构如图 5.25 所示。

【例 5.3】 用来滤波器的网络结构如图 5.26 所示,试求它的系统函数 $H(z)$ 和单位抽样响应 $h(n)$ 。

解 按图上标记的各节点信号值,可得如下关系式

$$V(z) = X(z) + \frac{1}{4}z^{-1}V(z), \quad V(z) = \frac{X(z)}{1 - z^{-1}/4}$$

$$P(z) = X(z)/8 + V(z)$$

$$W(z) = P(z) - 6z^{-1}V(z)$$

$$Y(z) = W(z) + z^{-1}X(z)$$

联立求解可得

$$Y(z) = \left[\frac{1}{8} + z^{-1} + \frac{1 - 6z^{-1}}{1 - z^{-1}/4} \right] X(z)$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{8} + z^{-1} + \frac{1 - 6z^{-1}}{1 - z^{-1}/4} \\ &= \frac{1}{8} + z^{-1} + \frac{1}{1 - z^{-1}/4} - \frac{6z^{-1}}{1 - z^{-1}/4} \end{aligned}$$

由 $H(z)$ 可求得 $h(n)$ 为

$$\begin{aligned} h(n) &= \delta(n)/8 + \delta(n-1) + (1/4)^n u(n) - 6(1/4)^{n-1} u(n-1) \\ &= \delta(n)/8 + \delta(n-1) + \delta(n) + (1/4)^n u(n-1) - 24(1/4)^n u(n-1) \\ &= 9\delta(n)/8 + \delta(n-1) - 23(1/4)^n u(n-1) \end{aligned}$$

上面的解法是一种繁琐的解法,实际上图 5.24 中,是三条支路有用一个输入,而输出连接到同一个节点上的,因而是并联型结构,如图 5.27 所示,因而可直接写出它的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{8} + z^{-1} + \frac{1 - 6z^{-1}}{1 - z^{-1}/4}$$

再求出 $h(n)$,则 $h(n)$ 和 $H(z)$ 和前面的表达式完全一样。

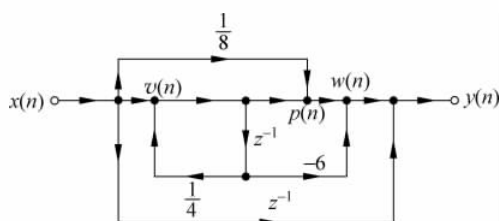


图 5.26

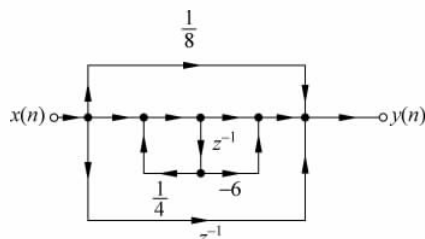


图 5.27 与图 5.26 等效

【例 5.4】 已知滤波器结构如图 5.28 所示,试求它的系统函数。

解 此图初一看,好像是并联结构,但是并联结构必须是同一个输入,如图 5.29 所示。而图 5.28 却不是这样的,所以它并不是并联结构。

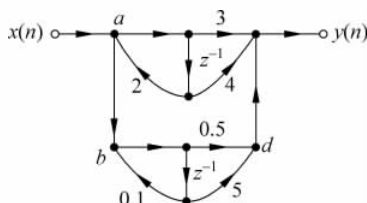


图 5.28 滤波器结构

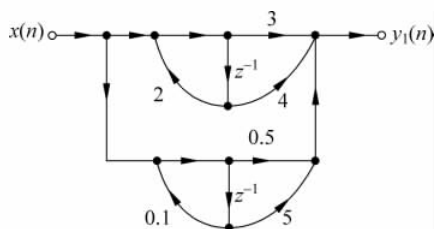


图 5.29 滤波器的并联结构

看图 5.28,令各相加节点(即节点输出处)信号为分别为 $a(n)$ 、 $b(n)$ 、 $d(n)$,则可列出节点信号方程为

$$\begin{aligned} a(n) &= x(n) + 2a(n-1) \\ b(n) &= a(n) + 0.1b(n-1) \\ d(n) &= 0.5b(n) + 5b(n-1) \\ y(n) &= d(n) + 3a(n) + 4a(n-1) \end{aligned}$$

用 z 变换方程表求为

$$\begin{aligned} A(z) &= X(z) + 2z^{-1}A(z) \\ B(z) &= A(z) + 0.1z^{-1}B(z) \\ D(z) &= 0.5B(z) + 5z^{-1}B(z) \\ Y(z) &= D(z) + 3A(z) + 4z^{-1}A(z) \end{aligned}$$

解此联立方程可得图 5.28 滤波器结构的系统函数为

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.5 + 5z^{-1} + (3 + 4z^{-1})(1 - 0.1z^{-1})}{(1 - 0.1z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \\ &= \frac{35 + 8.7z^{-1} - 0.4z^{-2}}{1 - 2.1z^{-1} + 0.2z^{-2}} \end{aligned}$$

而图 5.29 的并联结构的系统函数为

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{Y_1(z)}{X(z)} = \frac{3 + 4z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} + \frac{0.5 + 5z^{-1}}{1 - 0.1z^{-1}} \\ &= \frac{(0.5 + 5z^{-1})(1 - 2z^{-1}) + (3 + 4z^{-1})(1 - 0.1z^{-1})}{(1 - 0.1z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \end{aligned}$$

$$= \frac{3.5 + 7.7z^{-1} - 10.4z^{-2}}{1 - 2.1z^{-1} + 0.2z^{-2}}$$

显然 $H_1(z) \neq H(z)$ 。

【例 5.5】 已知 FIR 滤波器的单位抽样响应为

$$h(n) = \frac{1}{24} \left[1 - \sin\left(\frac{2\pi}{24}n\right) \right] R_{24}(n)$$

试求此滤波器的频率抽样型结构的 $H(z)$ 表达式并画出其流图。

解 $h(n)$ 是 $N=24$ 的有限长序列, 其 DFT 为

$$\begin{aligned} H(k) &= \frac{1}{24} \sum_{n=0}^{23} \left[1 - \sin\left(\frac{2\pi}{24}n\right) \right] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{24} \sum_{n=0}^{23} \left[1 - \frac{e^{j\frac{2\pi}{24}n} - e^{-j\frac{2\pi}{24}n}}{2j} \right] e^{-j\frac{2\pi}{24}nk} \\ &= \frac{1}{24} \sum_{n=0}^{23} \left[e^{-j\frac{2\pi}{24}nk} + \frac{j}{2} e^{j\frac{2\pi}{24}n(1-k)} - \frac{j}{2} e^{-j\frac{2\pi}{24}n(1+k)} \right] \\ &= \frac{1}{24} \left[\sum_{n=0}^{23} e^{-j\frac{2\pi}{24}nk} + \frac{j}{2} \sum_{n=0}^{23} e^{j\frac{2\pi}{24}n(1-k)} - \frac{j}{2} \sum_{n=0}^{23} e^{-j\frac{2\pi}{24}n(1+k)} \right] \end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nm} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nm} = \begin{cases} 1, & m = 0, N \\ 0, & 1 \leq m \leq N-1 \end{cases}$$

故

$$H(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ j/2, & k = 1 \\ -j/2, & k = N-1 = 23 \\ 0, & 2 \leq k \leq 22 \end{cases}$$

即

$$H(k) = |H(k)| e^{j\theta(k)} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{1}{2} e^{j\pi/2}, & k = 1 \\ \frac{1}{2} e^{-j\pi/2}, & k = 23 \\ 0, & 2 \leq k \leq 22 \end{cases}$$

于是按(5.3.17)式, 考虑到 $H\left(\frac{N}{2}\right) = H(12) = 0$, 并有 $r=1$, 则有

$$\begin{aligned} H(z) &= (1 - z^{-24}) \frac{1}{24} \left[\frac{H(0)}{1 - z^{-1}} + 2 |H(1)| \frac{\cos[\theta(1)] - \cos\left[\theta(1) - \frac{2\pi}{24}\right] z^{-1}}{1 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{24}\right) z^{-1} + z^{-2}} \right] \\ &= (1 - z^{-24}) \frac{1}{24} \left[\frac{H(0)}{1 - z^{-1}} - \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right] z^{-1}}{1 - 1.932z^{-1} + z^{-2}} \right] \\ &= (1 - z^{-24}) \frac{1}{24} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{-0.2588z^{-1}}{1 - 1.932z^{-1} + z^{-2}} \right] \end{aligned}$$

图 5.30 画出了这个 FIR 滤波器的频率抽样型结构。

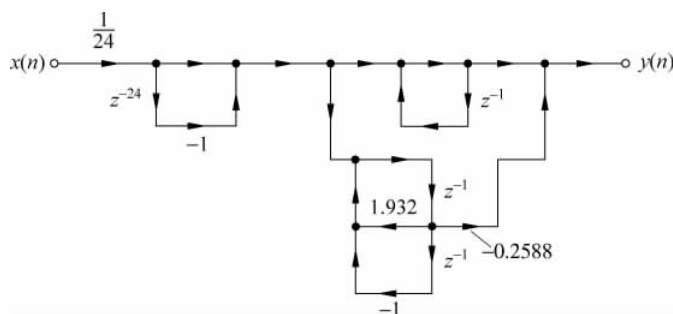


图 5.30 例 5.5 的图

本例中,频率抽样结构需延时器 27 个,计算每个输出需加法器 5 个,乘法器 3 个,若用卷积型结构,需延时器 23 个,计算每个输出需要加法器为 22 个($n=N/4=6$ 时, $h(6)=0$, 故少一次加法,即加法次数成为 $N-2=22$)乘法器为 $N-2=22$ 个($n=N/2$ 若系数 $1/24$ 单独算一次乘法,当 $n=0, N/2$ 时,有 $[1-\sin(2n\pi/24)]=1$,当 $n=N/4$ 时, $[1-\sin(2n\pi/24)]=0$,都不必相乘,故乘法次数为 $N-3+1=22$)。

由此看出,对窄带滤波器,即 $H(k)$ 的个数较少时频率抽样型结构的运算量(乘法、加法)都比直接型结构少得多,但延时器则会稍多一些。

【例 5.6】 如图 5.31 所示,在 z 平面单位圆内有一对共轭极点 $z_p=re^{j\theta}, z_p^*=re^{-j\theta}(r<1)$,在 $z=0$ 处为二阶零点的一个 IIR 系统,试求其网络的系统函数,差分方程及网络结构。

解 由图 5.31 知,此系统的系统函数为

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z^2}{(z-re^{j\theta})(z-re^{-j\theta})} \\ &= \frac{1}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})} \\ &= \frac{1}{1-2rz^{-1}\cos\theta+r^2z^{-2}} \end{aligned}$$

差分方程为 $y(n)=2r\cos\theta \cdot y(n-1)+r^2y(n-2)+x(n)$

网络的结构如图 5.32 所示,这就是有一对共轭极点($z=re^{\pm j\theta}$)及 $z=0$ 处有二阶零点的系统的典型结构图。

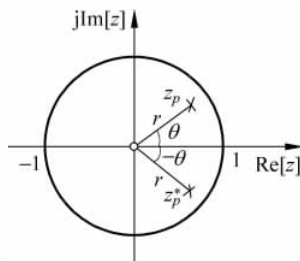


图 5.31

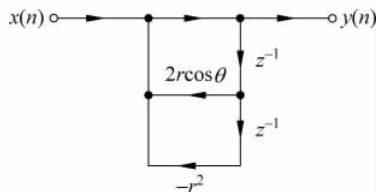


图 5.32

5.4 数字滤波器的格型(格型梯形)结构

格型(格型梯形)滤波器结构可实现 FIR 或 IIR 滤波器。一般格型(格型梯形)滤波器的引出是由研究自适应滤波器、现代谱估计、语言信号处理中,从最小均方误差逼近或最小二乘逼近的分析中而引出的。由于这种结构的以下特点而得到广泛应用。

- (1) 由于格型结构的模块化结构,便于实高速并行处理;
- (2) 一个 m 阶格型滤波器可以产生从 1 阶到 m 阶的 m 个横向滤波器的输出性能;
- (3) 它对有限字长的舍入误差不灵敏;
- (4) 一个 IIR 格型滤波器,同时也可得到一个全通滤波器(幅频响应 $|H(e^{j\omega})|=1$,或 $|H(e^{j\omega})|=\text{常数}$ 的滤波器)。

5.4.1 全零点系统(FIR 系统,又称滑动平均(MA)系统)的格型结构

学习要点

1. 一个 M 阶的 FIR 滤波器的横向结构的系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = B(z) = \sum_{i=0}^M h(i)z^{-i} = 1 + \sum_{i=1}^M b_i^{(M)}z^{-i} \quad (5.4.1)$$

系数 $b_i^{(M)}$ 表示 M 阶 FIR 系统的第 i 个系数($i=1,2,\dots,M$)(即 z^{-i} 项的系数),这里已假定首项系数 $h(0)=1$ 。

全零点 FIR 系统的格型结构可见图 5.33。

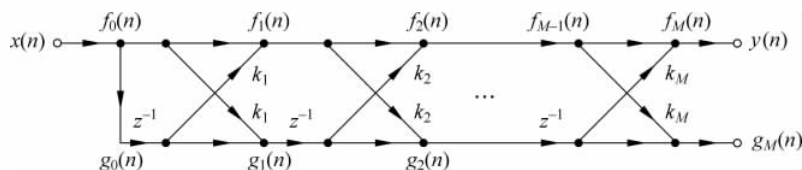


图 5.33 全零点系统(FIR 系统)的格型结构

2. 横向结构和格型结构参数间的关系

横向结构有 M 个参数 $b_i^{(M)}$ [或 $h(i)$], $i=1,2,\dots,M$, 共需 M 次乘法, M 次延时; 图 5.33 格型滤波器只有正馈通路, 没有反馈通路, 故也是 FIR 滤波器, 也有 M 个参数 k_i ($i=1,2,\dots,M$), k_i 称为反射系数, 也有 M 次延时, 但乘法次数是 $2M$ 。

格型滤波器的基本传输单元如图 5.34 所示, 其表达式为

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + k_m g_{m-1}(n-1) \quad (5.4.2)$$

$$g_m(n) = k_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1) \quad (5.4.3)$$

且有

$$f_o(n) = g_o(n) = x(n) \quad (5.4.4)$$

$$f_M(n) = y(n) \quad (5.4.5)$$

定义 $B_m(z)$ 、 $\bar{B}_m(z)$ 分别为由输入 $x(n)$ [$f_o(n)$, $g_o(n)$] 到第 m 个基本格型传输单元上、下输

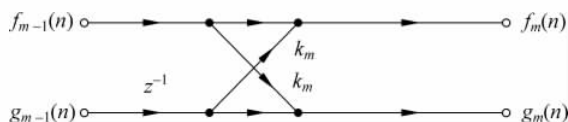


图 5.34 全零点(FIR 系统)格型结构基本传输单元

出 $f_m(n)$ 及 $g_m(n)$ 所对应的系统函数,即

$$B_m(z) = \frac{F_m(z)}{F_o(z)} = \frac{\mathcal{L}[f_m(n)]}{\mathcal{L}[f_o(n)]} = 1 + \sum_{i=1}^m b_i^{(m)} z^{-i} \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (5.4.6)$$

$$\bar{B}_m(z) = \frac{G_m(z)}{G_o(z)} = \frac{\mathcal{L}[g_m(n)]}{\mathcal{L}[g_o(n)]} \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (5.4.7)$$

当 $m=M$ 时

$$B_m(z) = B(z) \quad (5.4.8)$$

将 $m-1$ 级的 $B_{m-1}(z)$ 与图 5.34 的基本格型结构单元级联,即得到 m 级的 $B_m(z)$,即格型结构有着模块化的结构形式。

(1) 首先,我们来看从高阶 $B_m(z)$ 到低一阶的 $B_{m-1}(z)$ 以及反过来从 $B_{m-1}(z)$ 到 $B_m(z)$ 的递推关系,这也就隐含了格型结构的 k_i ($i=1, 2, \dots, M$) 和横向结构的各系数 $b_i^{(m)}$ ($i=1, 2, \dots, m; m=1, 2, \dots, M$) 的递推关系。对(5.4.2)式、(5.4.3)式取 z 变换,可得

$$F_m(z) = F_{m-1}(z) + k_m z^{-1} G_{m-1}(z) \quad (5.4.9)$$

$$G_m(z) = k_m F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z) \quad (5.4.10)$$

将(5.4.9)式除以 $F_o(z)$, (5.4.10)式除以 $G_o(z)$, 考虑到(5.4.6)式及(5.4.7)式的表示方法,可得

$$B_m(z) = B_{m-1}(z) + k_m z^{-1} \bar{B}_{m-1}(z) \quad (5.4.11)$$

$$\bar{B}_m(z) = k_m B_{m-1}(z) + z^{-1} \bar{B}_{m-1}(z) \quad (5.4.12)$$

或者反过来,得到

$$B_{m-1}(z) = \frac{1}{1 - k_m^2} [B_m(z) - k_m \bar{B}_m(z)] \quad (5.4.13)$$

$$\bar{B}_{m-1}(z) = \frac{1}{1 - k_m^2} [-z k_m B_m(z) + z \bar{B}_m(z)] \quad (5.4.14)$$

这四个式子给出了格型结构中从高阶到低一阶或从低阶到高一阶的系统函数的递推关系。应当注意, $B_M(z) = B(z)$, 即包含有 $B(z)$ 在内。

下面再将这四个关系式加以推导,得出 $B_m(z)$ 与 $B_{m-1}(z)$ 的互相递推关系。由(5.4.6)式及(5.4.7)式知

$$B_0(z) = \bar{B}_0(z) = 1 \quad (5.4.15)$$

因而将它代入(5.4.11)式、(5.4.12)式,令 $m=1$, 可得

$$B_1(z) = B_0(z) + k_1 z^{-1} \bar{B}_0(z) = 1 + k_1 z^{-1}$$

$$\bar{B}_1(z) = k_1 B_0(z) + z^{-1} \bar{B}_0(z) = k_1 + z^{-1}$$

也就是满足

$$\bar{B}_1(z) = z^{-1} B_1(z^{-1}) \quad (5.4.16)$$

同样,令 $m=2, 3, \dots, M$, 代入(5.4.11)式、(5.4.12)式,就不难推出

$$\bar{B}_m(z) = z^{-m} B_m(z^{-1}) = z^{-m} \left[1 + \sum_{i=1}^m b_i^{(m)} z^i \right] \quad (5.4.17)$$

在(5.4.6)式及(5.4.17)式中代入 $m=M$, 可得到格型滤波器整个上面支路与下面支路分别对应的系统函数为 $B_M(z)$ 及 $\bar{B}_M(z)$

$$B_M(z) = B(z) = \frac{F_M(z)}{X(z)} = 1 + \sum_{i=1}^M b_i^{(M)} z^{-i} \quad (5.4.18)$$

$$\bar{B}_M(z) = \frac{G_M(z)}{X(z)} = z^{-M} B(z^{-1}) = z^{-M} \left(1 + \sum_{i=1}^M b_i^{(M)} z^i \right) \quad (5.4.19)$$

其中系数 $b_i^{(M)}$ 与 $k_i (i=1, 2, \dots, M)$ 有关(后面将给出它们的关系), 已经证明, 若全部 $k_i < 1$ ($i=1, 2, \dots, M$) 则上面支路 $B(z)$ 的全部零点都在单位圆内, 即 $B(z)$ 是一个最小相位延时的 FIR 滤波器; 而下面支路 $\bar{B}_M(z)$ 的全部零点则在单位圆外[由(5.4.19)式与(5.4.18)式的关系看出], 是最大相位延时的 FIR 滤波器(最小相位延时与最大相位延时滤波器的讨论, 见第6章)。

将(5.4.17)式分别代入(5.4.11)式、(5.4.13)式, 可得

$$B_m(z) = B_{m-1}(z) + k_m z^{-m} B_{m-1}(z^{-1}) \quad (5.4.20)$$

$$B_{m-1}(z) = \frac{1}{1 - k_m^2} [B_m(z) - k_m z^{-m} B_m(z^{-1})] \quad (5.4.21)$$

这是两个重要的从低阶到高阶或从高阶到低阶的递推关系。注意, 这里有 M 阶 FIR 系统的 $B(z)$ 。

(2) 其次, 我们来直接给出格型结构的反射系数与横向滤波器各系数的关系。将(5.4.6)式的 $B_m(z) = 1 + \sum_{i=1}^m b_i^{(m)} z^{-i}$ 以及 $B_{m-1}(z) = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} b_i^{(m-1)} z^{-i}$ 分别代入(5.4.20)式及(5.4.21)式, 利用待定系数法, 可分别得两组递推关系

$$\left. \begin{aligned} b_m^{(m)} &= k_m \\ b_i^{(m)} &= b_i^{(m-1)} + k_m b_{m-i}^{(m-1)} \end{aligned} \right\} \quad (5.4.22)$$

$$\left. \begin{aligned} k_m &= b_m^{(m)} \\ b_i^{(m-1)} &= \frac{1}{1 - k_m^2} [b_i^{(m)} - k_m b_{m-i}^{(m)}] \end{aligned} \right\} \quad (5.4.23)$$

以上两式中 $i=1, 2, \dots, (m-1); m=2, \dots, M$ 。

(3) 综上, 当给出 $H(z) = B(z) = B_M(z)$ 时, 可按以下步骤求出 $k_1, k_2, \dots, k_M$:

- ① 由(5.4.23)式求出 $k_M = b_M^{(M)}$ 。
- ② 从(5.4.23)式, 由 k_M 及系数 $b_1^{(M)}, b_2^{(M)}, \dots, b_M^{(M)}$ 求出 $B_{M-1}(z)$ 的系数 $b_1^{(M-1)}, b_2^{(M-1)}, \dots, b_{M-1}^{(M-1)} = k_{M-1}$, 或者由(5.4.21)式直接求出 $B_{(M-1)}(z)$, 则 $k_{M-1} = b_{M-1}^{(M-1)}$ 。
- ③ 重复②, 可全部求出 $k_M, k_{M-1}, \dots, k_1; B_{M-1}(z), \dots, B_1(z)$ 。

【例 5.7】 一个 FIR 系统的系统函数为

$$H(z) = (1 - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}} z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}} z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})$$

试求其格型结构。

解

$$\begin{aligned} B_3(z) &= H(z) = (1 - 1.1313708z^{-1} + 0.64z^{-1})(1 - 0.7z^{-1}) \\ &= 1 - 1.8313708z^{-1} + 1.4319595z^{-2} - 0.448z^{-3} \end{aligned}$$

这是一个三阶系统,因而

$$b_1^{(3)} = -1.8313708, \quad b_2^{(3)} = 1.4319595, \quad b_3^{(3)} = -0.448, \quad k_3 = b_3^{(3)} = -0.448$$

按照(5.4.23)式,可知

$$b_1^{(2)} = \frac{1}{1 - k_3^2} [b_1^{(3)} - k_3 b_2^{(3)}] = \frac{1}{0.799296} [-1.1898529] = -1.4886262$$

$$b_2^{(2)} = \frac{1}{1 - k_3^2} [b_2^{(3)} - k_3 b_1^{(3)}] = \frac{0.6115053}{0.799296} = 0.7650549$$

$$k_2 = b_2^{(2)} = 0.7650549$$

因而

$$B_2(z) = 1 - 1.4886262z^{-1} + 0.7650549z^{-2}$$

同样可得

$$b_1^{(1)} = \frac{1}{1 - k_2^2} [b_1^{(2)} - k_2 b_2^{(2)}] = \frac{-0.3497454}{0.414691} = -0.8433879$$

$$k_1 = -0.8433879$$

因而

$$B_1(z) = 1 - 0.8433879z^{-1}$$

图 5.35 给出了例 5.7 的格型结构。

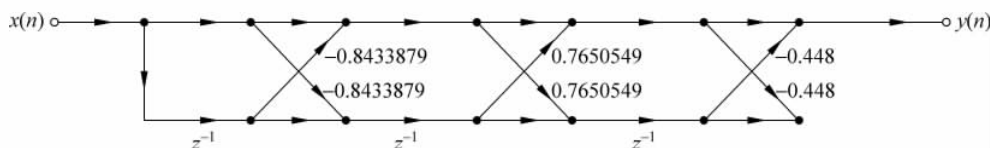


图 5.35 例 5.7 中的全零点型 FIR 滤波器的格型结构

5.4.2 全极点系统(IIR 系统,又称自回归(AR)系统)的格型结构

学习要点

1. 一个 M 阶的全极点的 IIR 滤波器的递归结构的系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M a_i^{(M)} z^{-i}} = \frac{1}{A(z)} \quad (5.4.24)$$

其中, $a_i^{(M)}$ ($i=1, 2, \dots, M$) 表示 M 阶全极点系统的第 i 个系数(即 z^{-i} 项的系数), 这里已满足 z^0 项的系数为 1。

全极点 IIR 的格型结构, 可将(5.4.2)式加以变化后, 重写(5.4.2)式与(5.4.3)式如下

$$f_{m-1}(n) = f_m(n) - k_m g_{m-1}(n-1) \quad (5.4.25)$$

$$g_m(n) = k_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1) \quad (5.4.26)$$

这就是全极点 IIR 系统格型结构的基本单元表达式, 可用图 5.36 来表示, $f_m(n)$ 与 $g_{m-1}(n)$ 分别是上支路与下支路的输入信号, 而 $f_{m-1}(n)$ 与 $g_m(n)$ 分别是上支路与下支路的输出

信号。

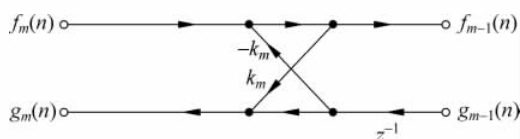


图 5.36 全极点 IIR 系统格型结构的基本单元

对 M 阶系统, 令 $x(n) = f_M(n)$, $f_o(n) = g_o(n) = y(n)$, 则由图 5.36 作为基本单元所构成的 M 阶全极点格型结构如图 5.37 所示。

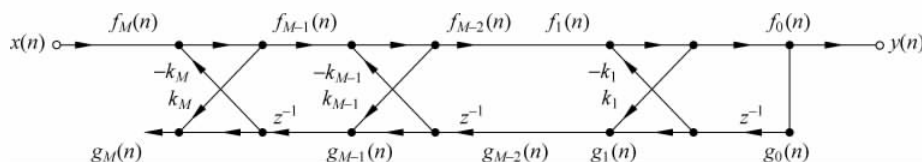


图 5.37 全极点 IIR 系统的格型结构

2. 图 5.37 结构有上、下两个支路输入为 $x(n)$, 输出为 $f_o(n) = y(n)$, 下支路输入为 $g_o(n) = f_o(n) = y(n)$, 输出为 $g_M(n)$ 。定义由 $f_m(n)$ 到 $y(n)$ 的正向传输的系统函数 $\frac{1}{A_m(z)}$, 定义从 $y(n)$ 到 $g_m(n)$ 处的反向传输的系统函数为 $\bar{A}_m(z)$, 即

$$\frac{1}{A_m(z)} = \frac{Y(z)}{F_m(z)} = \frac{\mathcal{Z}[y(n)]}{\mathcal{Z}[f_m(n)]} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^m a_i^{(m)} z^{-i}} \quad (5.4.27)$$

$$\bar{A}_m(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = \frac{\mathcal{Z}[g_m(n)]}{\mathcal{Z}[y(n)]} \quad (5.4.28)$$

当 $m=M$ 时

$$A_M(z) = A(z) \quad (5.4.29)$$

同样, 将 $m-1$ 级的 $B_{m-1}(z)$ 与图 5.36 的基本单元级联, 即可得到 m 级的 $B_m(z)$, 全极点格型结构也有着模块化的结构。

3. 下面, 我们利用与全零点格型滤波器推导中的相同方法, 来导出图 5.37 的全极点格型滤波器的系统函数, 并导出利用 IIR 滤波器的递归结构的系数 $a_i^{(M)}$ (见 (5.4.24) 式) 求得参数 $k_1, k_2, \dots, k_M$ 的方法。我们采用的是递推的方法。

(1) 令图 5.37 中 $M=1$, 即对应于一阶的全极点格型结构, 由 (5.4.25) 式及 (5.4.26) 式 ($m=M=1$) 可知

$$f_o(n) = f_1(n) - k_1 g_o(n-1) \quad (5.4.30)$$

$$g_1(n) = k_1 f_o(n) + g_o(n-1) \quad (5.4.31)$$

由于一阶情况下 (见图 5.37) $M=1$, 有

$$f_o(n) = g_o(n) = y(n)$$

$$f_1(n) = x(n)$$

则 (5.4.30) 式及 (5.4.31) 式可写成

$$y(n) = f_1(n) - k_1 y(n-1) = x(n) - k_1 y(n-1) \quad (5.4.32)$$

$$g_1(n) = k_1 y(n) + y(n-1) \quad (5.4.33)$$

可以看出, (5.4.32)式表示 $x(n)[f_1(n)]$ 为输入, $y(n)$ 为输出的一阶 IIR 系统, (5.4.33)式则表示 $y(n)[g_0(n)]$ 为输入, $g_1(n)$ 为输出的一阶 FIR 系统, 由(5.4.32)式取 z 变换可得

$$\frac{Y(z)}{F_1(z)} = \frac{1}{1 + k_1 z^{-1}}$$

令

$$1 + k_1 z^{-1} = A_1(z)$$

则

$$\frac{Y(z)}{F_1(z)} = \frac{1}{1 + k_1 z^{-1}} = \frac{1}{A_1(z)}$$

同样, 将(5.4.33)式取 z 变换可得

$$\frac{G_1(z)}{Y(z)} = k_1 + z^{-1} = z^{-1}(1 + k_1 z) = z^{-1}A_1(z^{-1})$$

令

$$z^{-1}A_1(z^{-1}) = \bar{A}_1(z)$$

则

$$\frac{G_1(z)}{Y(z)} = \bar{A}_1(z) = z^{-1}A_1(z^{-1})$$

(2) 上面是一阶系统的推导。下面讨论二阶全极点格型结构。在图 5.37 中令 $M=2$, 则由(5.4.25)式及(5.4.26)式可得

$$f_1(n) = f_2(n) - k_2 g_1(n-1) \quad (5.4.34)$$

$$g_2(n) = k_2 f_1(n) + g_1(n-1) \quad (5.4.35)$$

在此二阶情况下有

$$f_0(n) = g_0(n) = y(n)$$

$$f_2(n) = x(n)$$

考虑到(5.4.30)式及(5.4.31)式, 则可将(5.4.34)式及(5.4.35)式变成

$$\begin{aligned} y(n) &= -k_1(1 + k_2)y(n-1) - k_2 y(n-2) + f_2(n) \\ &= -k_1(1 + k_2)y(n-1) - k_2 y(n-2) + x(n) \end{aligned} \quad (5.4.36)$$

$$g_2(n) = k_2 y(n) + k_1(1 + k_2)y(n-1) + y(n-2) \quad (5.4.37)$$

这里可明显看出, (5.4.36)式表示一个二阶 IIR 系统, 输入是 $x(n)[f_2(n)]$, 输出是 $y(n)$; 而(5.4.37)式表示一个二阶 FIR 系统, 输入是 $y(n)$, 输出是 $g_2(n)$ 。

对(5.4.36)式取 z 变换, 可得

$$\frac{Y(z)}{F_2(z)} = \frac{1}{1 + k_1(1 + k_2)z^{-1} + k_2 z^{-2}}$$

令

$$1 + k_1(1 + k_2)z^{-1} + k_2 z^{-2} = A_2(z) \quad (5.4.38)$$

则有

$$\frac{Y(z)}{F_2(z)} = \frac{1}{1 + k_1(1 + k_2)z^{-1} + k_2 z^{-2}} = \frac{1}{A_2(z)} \quad (5.4.39)$$

同样, 对(5.4.37)式取 z 变换, 可得

$$\frac{G_2(z)}{Y(z)} = k_2 + k_1(1 + k_2)z^{-1} + z^{-2}$$

令

$$k_2 + k_1(1 + k_2)z^{-1} + z^{-2} = \bar{A}_2(z)$$

则有

$$z^{-2}A_2(z^{-1}) = \bar{A}_2(z) \quad (5.4.40)$$

从而可得

$$\frac{G_2(z)}{Y(z)} = z^{-2}A_2(z^{-1}) = \bar{A}_2(z) \quad (5.4.41)$$

(3) 由此类推,若定义

$$\frac{Y(z)}{F_m(z)} = \frac{1}{A_m(z)}, \quad \frac{G_m(z)}{Y(z)} = \bar{A}_m(z) \quad (5.4.42)$$

则有

$$\bar{A}_m(z) = z^{-m}A_m(z^{-1}) = z^{-m}\left(1 + \sum_{i=1}^m a_i^{(m)}z^{-i}\right) \quad (5.4.43)$$

若代入 $m=M$ 到(5.4.42)式及(5.4.43)式中,可得到全极点格型滤波器的上面支路(正向传输)与下面支路(反向传输)分别对应的系统函数 $\frac{1}{A_M(z)}$ 及 $\bar{A}_M(z)$ 为

$$H(z) = \frac{1}{A_M(z)} = \frac{1}{A(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M a_i^{(M)}z^{-i}} \quad (5.4.44)$$

$$H_b(z) = \bar{A}_M(z) = \frac{G_M(z)}{Y(z)} = z^{-M}A_M(z^{-1}) = z^{-M}\left(1 + \sum_{i=1}^M a_i^{(M)}z^{-i}\right) \quad (5.4.45)$$

也就是说,图 5.37 的上面支路,即正向(前向)通路[从 $x(n)$ 到 $y(n)$]部分实现了 AR 模型(全极点模型)的 IIR 滤波器,已有人证明,若全部反射系数 $k_i < 1 (i=1, 2, \dots, M)$,则此 IIR 滤波器是稳定的;图 5.37 的下面支路,即反向(后向)通路[从 $y(n)$ 到 $g_M(n)$]是一个 FIR 滤波器的响应。

4. 现在来研究,从 $x(n)$ 输入信号,而输出是 $g_M(n)$ 时的系统函数即从前向通道的输入送进信号,从后向通道的输出得到信号,有

$$H_{AP}(z) = \frac{G_M(z)}{X(z)} = H(z)H_b(z) = \frac{z^{-M}A_M(z^{-1})}{A_M(z)} = \frac{z^{-M}A(z^{-1})}{A(z)} \quad (5.4.46)$$

这是全通系统的系统函数(全通系统即 $|H(e^{j\omega})|=1$)(或常数)的系统,第 6 章 6.2 节中将会讨论全通系统)。所以 AR 型的格型结构,改变其输出就成为全通滤波器的一种网络结构形式。

5. 全极点格型结构与全零点格型结构的基本差分方程(5.4.25)式、(5.4.26)式与(5.4.2)式、(5.4.3)式是一样的,因而全极点系统中各 k_i 与系数 $a_i^m (i=1, 2, \dots, M)$,与全零点系统中完全一样,只不过 a_i^m 代替全零点中的 b_i^m 而已。但需要注意 k_i 的放置次序是互为颠倒的,且全极点中有一个系数是 $-k_i$ (而不是 k_i)。

【例 5.8】 一个全极点系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - 1.8313708z^{-1} + 1.4319595z^{-2} - 0.488z^{-3}}$$

求引全极点系统的格型结构。

解 这个例子的分母多项式和全零点系统的多项式是完全相同的,因而求解方法完全和上一个例子相同。即

$$k_3 = -0.448, \quad k_2 = 0.7650549, \quad k_1 = -0.8433849$$

其格型结构如图 5.38 所示。

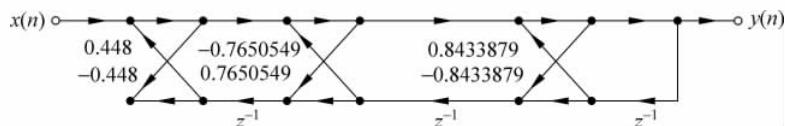


图 5.38 例 5.8 的全极点型 IIR 滤波器的格型结构

5.4.3 零-极点系统(IIR 系统,又称自回归滑动平均(ARMA)系统)的格型梯形结构

学习要点

1. 一个在有限 z 平面($0 < |z| < \infty$)既有极点,又有零点的 IIR 系统的系统函数 $H(z)$ 可表示成(注意 $b_0 \neq 1, a_0 = 1$)

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i^{(N)} z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i^{(N)} z^{-i}} \quad (5.4.47)$$

这一零-极点系统(即 ARMA 系统)的格型梯形结构如图 5.39 所示。

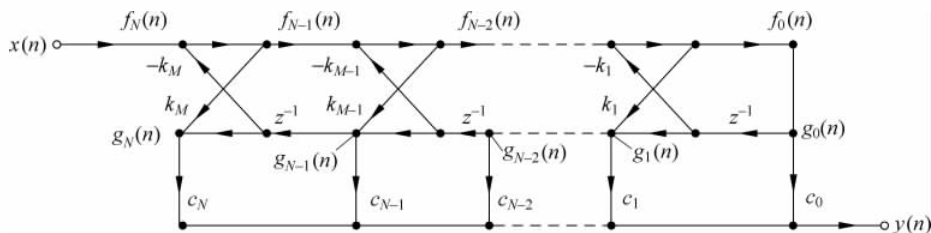


图 5.39 零-极点型 IIR 系统的格型梯形结构

这一结构的特点:

(1) 若 $k_1 = k_2 = \dots = k_N = 0$, 即所有乘 $\pm k_i$ 处的连线全部断开, 则图 5.39 就变成一个 N 阶 FIR 系统的横向结构。

(2) 若 $c_1 = c_2 = \dots = c_N = 0$, 即含 $c_1, c_2, \dots, c_N$ 的连线都断开, 但 $c_0 = 1$, 那么图 5.39 就变成全极点 IIR 格型滤波器结构。

(3) 因而, 图 5.39 的上半部分对应于全极点系统 $\frac{1}{A(z)} = \frac{F_o(z)}{X(z)}$, 下半部分对应于全零点系统。但是, 下半部分无任何反馈, 故参数 $k_1, k_2, \dots, k_N$ 不受下半部分影响, 仍可按全极点系统的方程求出。但上半部分对下半部分有影响, 所以这里的 c_i 和全零点系统的 b_i 不会相同。

2. 求各个 $c_i (i=0, 1, \dots, c_N)$

(1) 分析。由(5.4.28)式可有

$$\bar{A}_m(z) = \frac{G_m(z)}{G_0(z)} \quad (5.4.48)$$

(5.4.28)式中的 $Y(z)$ 在图 5.39 中应为 $G_0(z)$ 。

$\bar{A}_m(z)$ 是由 $g_0(n)$ 至 $g_m(n)$ 的系统函数, 如果令 $\bar{H}_m(z)$ 为由 $x(n)$ 至 $g_m(n)$ 的系统函数, 并将(5.4.48)式代入, 可得

$$\bar{H}_m(z) = \frac{G_m(z)}{X(z)} = \frac{G_0(z)\bar{A}_m(z)}{X(z)} \quad (5.4.49)$$

因为

$$\frac{G_0(z)}{X(z)} = \frac{F_0(z)}{X(z)} = \frac{1}{A(z)} \quad (5.4.50)$$

将(5.4.50)式代入(5.4.49)式, 可得

$$\bar{H}_m(z) = \frac{\bar{A}_m(z)}{A(z)} \quad (5.4.51)$$

从图 5.39 看出, 整个系统的系统函数 $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ 应该是 $\bar{H}_0(z), \bar{H}_1(z), \dots, \bar{H}_N(z)$ 分别与 $c_0, c_1, \dots, c_N$ 加权后相加(并联), 即[下面要将(5.4.43)式代入]

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{m=0}^N c_m \bar{H}_m(z) = \sum_{m=0}^N \frac{c_m \bar{A}_m(z)}{A(z)} \\ &= \sum_{m=0}^N \frac{c_m z^{-m} A_m(z^{-1})}{A(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \end{aligned} \quad (5.4.52)$$

(2) 求解各个 $c_i (i=0, 1, \dots, N)$ 。利用(5.4.52)式

① 先以 $N=2$ 为例, 有

$$B(z) = b_0^{(2)} + b_1^{(2)} z^{-1} + b_2^{(2)} z^{-2} \quad (5.4.53)$$

再考虑到(5.4.52)式, 有

$$B(z) = c_0 A_0(z^{-1}) + c_1 z^{-1} A_1(z^{-1}) + c_2 z^{-2} A_2(z^{-1}) \quad (5.4.54)$$

其中

$$A_0(z^{-1}) = 1, \quad A_1(z^{-1}) = 1 + a_1^{(1)} z^{-1}, \quad A_2(z^{-1}) = 1 + a_1^{(2)} z^{-1} + a_2^{(2)} z^{-2}$$

将各 $A_i(z^{-1})$ 代入(5.4.54)式, 并与(5.4.53)式比较, 令其 z^{-1} 的同幂次项的系数相等, 可得

$$\left. \begin{aligned} c_0 + c_1 a_1^{(1)} + c_2 a_2^{(2)} &= b_0^{(2)} \\ c_1 + c_2 a_1^{(2)} &= b_1^{(2)} \\ c_2 &= b_2^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (5.4.55)$$

利用(5.4.55)式, 先求出 c_2 , 然后向上递推求出 c_1, c_0 。

② 令 $N=3, 4, \dots, N$, 可求得任意 N 的情况下的关系式为

$$\left. \begin{aligned} c_k &= b_k^{(N)} - \sum_{m=k+1}^N c_m a_{m-k}^{(m)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ c_N &= b_N^{(N)} \end{aligned} \right\} \quad (5.4.56)$$

利用(5.4.56)式, 先求出 c_N , 然后顺次递推求出 $c_{N-1}, c_{N-2}, \dots, c_0$ 。

【例 5.9】 已知

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} + 0.2z^{-2} + 0.7z^{-3}}{1 - 1.8313708z^{-1} + 1.4319595z^{-2} - 0.448z^{-3}}$$

试求这个零-极点 IIR 滤波器的格型梯形结构。

解 这个例子中的极点部分与全极点型的例 5.8 一样,按上面的说明,这里的 $k_1, k_2, \dots, k_N$ 可按全极点型的方法求出,实际上就是按例 5.7 的求全零点型的方法求解,把那里的 $b_i^{(M)}$ 换成 $a_i^{(M)}$ 即可。例 5.7 求出的 k_1, k_2, k_3 及 $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_1^{(1)}$ (在那里是 $b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, b_1^{(1)}$) 为

$$k_1 = -0.8433879, \quad k_2 = 0.7650549, \quad k_3 = -0.448$$

$$a_1^{(2)} = -1.4886262, \quad a_2^{(2)} = 0.7650549, \quad a_1^{(1)} = -0.8433879$$

由所给出的 $H(z)$ 可知

$$b_0^{(3)} = 1, \quad b_1^{(3)} = -0.5, \quad b_2^{(3)} = 0.2, \quad b_3^{(3)} = 0.7$$

$$a_1^{(3)} = -1.8313708, \quad a_2^{(3)} = 1.4319595, \quad a_3^{(3)} = -0.448$$

利用(5.4.56)式可求出各 c_i 为

$$c_3 = b_3^{(3)} = 0.7$$

$$c_2 = b_2^{(3)} - c_3 a_1^{(3)} = 1.4819596$$

$$c_1 = b_1^{(3)} - c_2 a_1^{(2)} - c_3 a_2^{(3)} = 0.70637122$$

$$c_0 = b_0^{(3)} - c_1 a_1^{(1)} - c_2 a_2^{(2)} - c_3 a_3^{(3)} = 0.7733219$$

其格型梯形结构如图 5.40 所示。

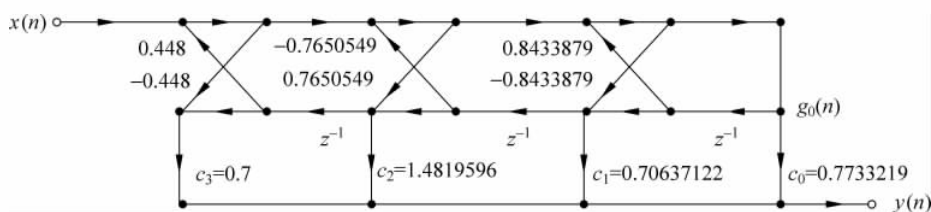


图 5.40 例 5.9 的零-极点型 IIR 滤波器的格型梯形结构

习 题

5.1 设 FIR 滤波器的单位抽样响应为

$$h(n) = a^n R_6(n), \quad 0 < a < 1$$

- (1) 求滤波器的系统函数 $H(z)$ 并画出它的卷积型结构的信号流图;
- (2) 画出它的级联型结构流图(一个 FIR 系统和一个 IIR 系统的级联);
- (3) 用 $H(z)$ 的有理分式表示法,画出直接 II 型结构流图(比(2)的结构要省一个延时器)。

5.2 已知 FIR 滤波器的单位冲激响应为

$$h(n) = \delta(n) + 0.3\delta(n-1) + 0.72\delta(n-2) + 0.11\delta(n-3) + 0.12\delta(n-4)$$

写出它的系统函数 $H(z)$ 并画出其级联型结构实现。

5.3 对图 P5.3 的系统

- (1) 求它的系统函数;
- (2) 如果系统的参数为
 - (a) 若 $a_1 = 1.4, a_2 = -0.64, b_0 = 1, b_1 = 1.8, b_2 = -0.8$
 - (b) 若 $a_1 = 2.4, a_2 = -1.44, b_0 = 1, b_1 = 1.7, b_2 = 2$

画出系统的零-极点分布图,并检验系统的稳定性。

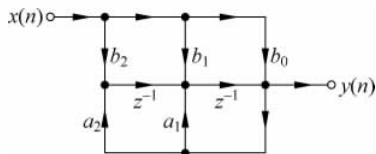


图 P5.3

5.4 用频率抽样结构实现以下系统函数:

$$H(z) = \frac{5 - 2z^{-3} - 3z^{-6}}{1 - z^{-1}}$$

抽样点数 $N=6$, 修正半径 $r=0.9$ 。

5.5 设某 FIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{5}(1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-4})$$

试画出此滤波器的线性相位结构。

5.6 设滤波器差分方程为

$$y(n] = x(n) + x(n-1) + \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2)$$

(1) 试用直接 I 型、典型型及一阶节的级联型、一阶节的并联型结构实现此差分方程;

(2) 求系统的频率响应(幅度及相位);

(3) 设抽样频率为 10kHz, 输入正弦波幅度为 5, 频率为 1kHz, 试求稳态输出。

5.7 写出图 P5.7 所示结构的系统函数及差分方程。

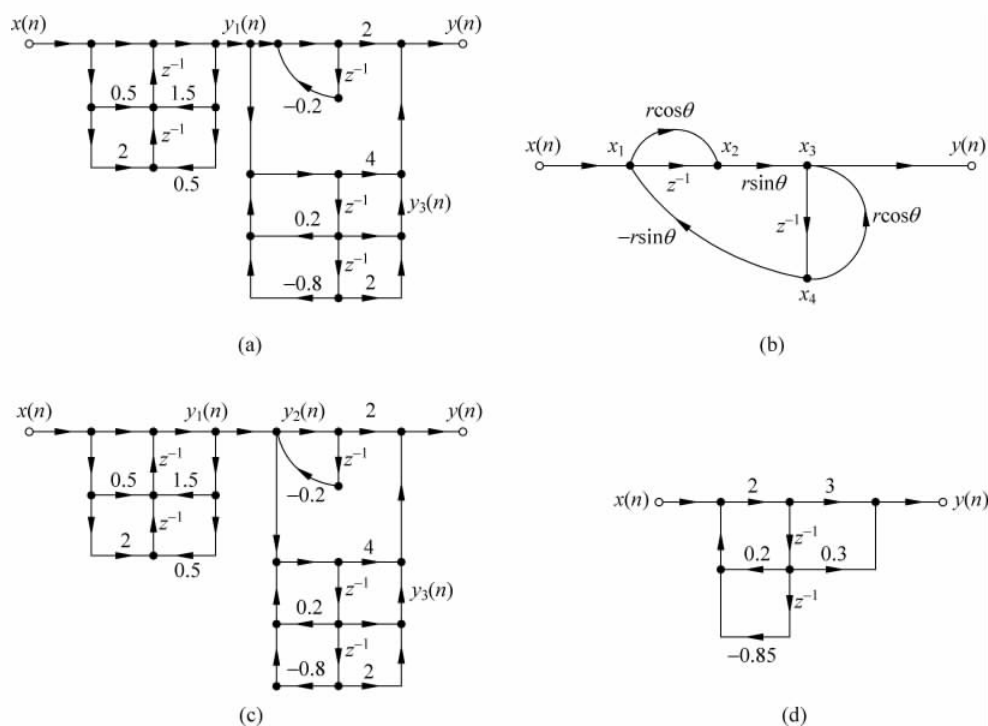


图 P5.7

5.8 已知 $h(n)$ 为实序列的 FIR 滤波器, $N=8$, 其频率响应的抽样值 $H(k)$ ($0 \leq k \leq 7$) 为

$$H(0) = 19, \quad H(1) = 1.5 + j(1.5 + \sqrt{2}), \quad H(2) = 0,$$

$$H(3) = 1.5 + j(\sqrt{2} - 1.5), \quad H(4) = 5$$

(1) 求 $k=5, 6, 7$ 的 $H(k)$ 值;

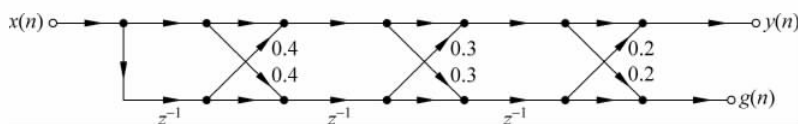
(2) 求其频率抽样结构表达式, 并画出相应的流图;

(3) 求相应的单位冲激响应 $h(n)$ 。

5.9 求图 P5.7(b) 所示网络结构的转置型结构的信号流图, 并求其系统函数试将它与 5.7 题求出的

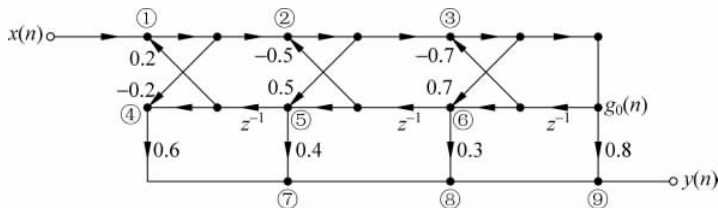
5.10 将图 P5.10 的结构用其基本二阶节为直接 II 型的级联结构实现,并用转置定理将其转换成另一种级联结构实现,画出两种结果的信号流程图。

5.12 已知全零 FIR 格型滤波器各系数为 $k_1=0.6125, k_2=0.6722, k_3=-0.5822$, 试求三阶 FIR 滤波器直接型结构的各系数 $b_i^{(3)}, i=1, 2, 3 (b_0=1)$ 。

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad H_2(z) = \frac{G(z)}{X(z)}$$


5.14 图 P5.14 是一个零-极点格型梯形滤波器(三阶),求系统函数(可用各节点值的矩阵方程求解)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



5.15 已知零-极点格型滤波器各系数为 $k_1 = -0.7251, k_2 = 0.8142, k_3 = -0.6582; c_0 = 1.2543, c_1 = -0.7284, c_2 = -2.15, c_3 = -0.692$ 。求其等效三阶 IIR 滤波器直接型结构

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^3 b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^3 a_i z^{-i}}$$

5.16 图 P5.16 所示的滤波器结构, 包含有直接型、级联型及并联型的组合。试求其总的系统函数 $H(z)$, 并用直接 II 型、级联型和并联型结构来加以表示。

第5章 数字滤波器的基本结构

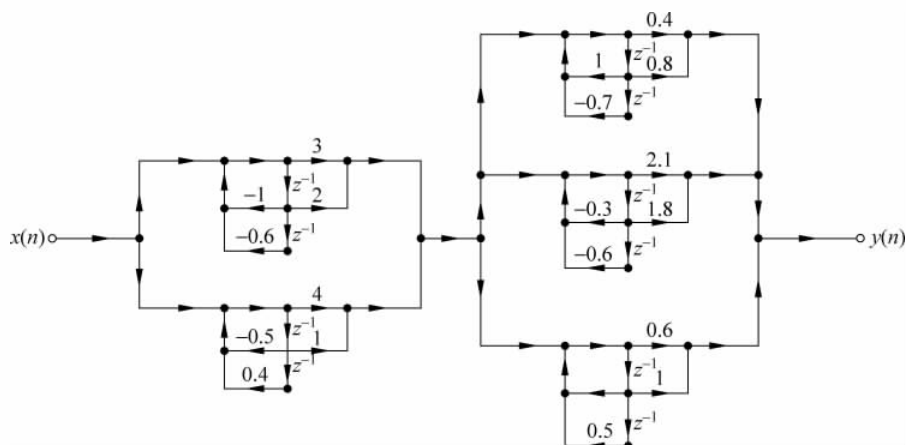


图 P5.16

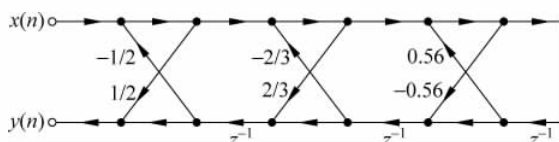


图 P5.17

- (1) 直接 I 型；
- (2) 直接 II 型；
- (3) 包含二阶直接 II 型基本节的级联型结构；
- (4) 包含二阶直接 II 型基本节的并联型结构。

5.18 一个 IIR 滤波器由以下系统函数表征

$$H(z) = 2 \left(\frac{1 + z^{-2}}{1 - 0.6z^{-1} + 0.36z^{-2}} \right) \left(\frac{3 - z^{-1}}{1 - 0.65z^{-1}} \right) \left(\frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.49z^{-2}} \right)$$

用 MATLAB 方法确定并画出以下各结构的流图。

- (1) 直接 I 型；
- (2) 直接 II 型；
- (3) 包含二阶直接 II 型基本节的级联型；
- (4) 包含二阶直接 II 型基本节的并联型；
- (5) 格型梯形结构。

注意此 $H(z)$ 中分子系数有 $(1 + z^{-2})$ 项, 用 MATLAB 表示时, 必须看成 $1 + 0z^{-1} + z^{-2}$, 即要填满 z^{-1} 的各阶的系数。

5.19 一个线性移不变因果系统的差分方程表示为

$$y(n) = \sum_{k=0}^4 \left(\frac{1}{2} \right)^k x(n-k) + \sum_{m=1}^4 \left(\frac{1}{3} \right)^m y(n-m)$$

试确定并画出以下各结构的流图, 并用每种结构计算系统对以下输入 $x(n)$ 的响应。

$$x(n) = u(n), \quad 0 \leq n \leq 100$$

- (1) 直接 I 型；
- (2) 直接 II 型；
- (3) 包含二阶直接 II 型基本节的级联型；

(4) 包含二阶直接Ⅱ型基本节的并联型；

(5) 格型梯形结构。

5.20 一个 IIR 滤波器由以下的系统函数表征

$$H(z) = \left[\frac{-12 - 14.9z^{-1}}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{7}{100}z^{-2}} \right] + \left[\frac{21.5 + 23.6z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \right]$$

试确定并画出以下各结构的流图。

(1) 直接Ⅰ型；

(2) 直接Ⅱ型；

(3) 包含二阶直接Ⅱ型基本节的级联型；

(4) 包含二阶直接Ⅱ型基本节的并联型；

(5) 格型梯形结构。