

第 5 章

离散时间系统的相位、 结构与逆系统

我们知道,一个实际的物理信号和一个实际的物理系统是密不可分的。信号的产生、传输及处理离不开系统,系统离开了信号也失去了存在的意义。所以,离散时间系统的分析与综合和离散信号的分析与处理都是数字信号处理中的重要内容。为此,在第 2 章的基础上,本章继续讨论离散系统的分析问题。内容包括离散系统的相频响应、FIR 系统的线性相位特点、全通系统与最小相位系统、FIR 系统的结构与实现、系统的 Lattice 结构及逆系统等。这些内容都是在信号处理中经常要涉及的基本问题。本章之后,将用两章的篇幅讨论离散时间系统的综合,即数字滤波器(digital filter, DF)设计问题。

需要指出的是,本书只涉及离散时间信号和离散时间系统的分析、处理与设计等问题,因此,书中“系统”和“滤波器”这两个词是通用的,也即认为二者是同一事物。当然,“系统”是更广泛的概念,而“滤波器”,特别是数字滤波器,仅是对离散信号作特定滤波处理的离散时间系统,请读者不要混淆。

5.1 离散时间系统的相频响应

由第 2 章可知,离散时间系统的频率响应包含了幅频响应和相频响应两部分。幅频响应反映了信号 $x(n)$ 通过该系统后各频率成分衰减的情况,而相频响应反映了 $x(n)$ 中各频率成分通过该系统后在时间上发生的位移情况。一个理想的离散时间系统,除了具有所希望的幅频响应外,最好还能具有线性相位,这在很多应用领域,如语音合成、波形传输等方面都是非常希望的。

设一个离散时间系统的幅频特性等于 1,而相频特性具有如下的线性相位

$$\arg[H(e^{j\omega})] = -k\omega \quad (5.1.1)$$

式中 k 为常数。上式表明,该系统的相移和频率成正比。那么,当信号 $x(n)$ 通过该系统后,其输出 $y(n)$ 的频率响应

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = e^{-jk\omega} |X(e^{j\omega})| e^{j \arg[X(e^{j\omega})]} \\ &= |X(e^{j\omega})| e^{j \arg[X(e^{j\omega})] - jk\omega} \end{aligned}$$

所以

$$y(n) = x(n - k)$$

这样,输出 $y(n)$ 等于输入在时间上的位移,达到了无失真输出的目的。

$H(e^{j\omega})$ 的更一般的表示形式是 $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$, 其中 $|H(e^{j\omega})|$ 是系统的幅频响应, $\varphi(\omega)$ 是系统的相频响应。如果令 $x(n) = A\cos(\omega_0 n + \theta)$, 则该系统的输出

$$y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \varphi(\omega_0) + \theta) \quad (5.1.2)$$

它和输入 $x(n)$ 具有相同的频率,但是增加了一个相位延迟。为简单起见,假定 $A|H(e^{j\omega_0})| = 1$, 则有

$$y(n) = \cos(\omega_0 n + \varphi(\omega_0) + \theta) = \cos[\omega_0(n + \varphi(\omega_0)/\omega_0) + \theta] \quad (5.1.3)$$

显然,量 $\varphi(\omega_0)/\omega_0$ 表示的是输出相对输入的时间延迟。通常,定义

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} \quad (5.1.4)$$

为系统的相位延迟(phase delay, PD)。如果输入信号由多个正弦信号所组成,且系统的相频响应不是线性的,那么系统的输出将不再是输入信号作线性移位后的组合,这时,输出将发生失真,下面的例子说明了这一现象。

例 5.1.1 若 $x(n) = \cos(\omega_0 n) + \cos(2\omega_0 n)$, 并令 $H(e^{j\omega}) = e^{-jk\omega}$, 那么 $x(n)$ 通过该系统后

$$y(n) = \cos(\omega_0(n - k)) + \cos(2\omega_0(n - k))$$

$x(n)$, $y(n)$ 分别示于图 5.1.1(a) 和 (b), 二者仅在时间轴上移了 k 个抽样周期。若再次令 $|H(e^{j\omega})| = 1$, 而令

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \begin{cases} -\pi/4 & 0 \leq \omega \leq 3\omega_0/2 \\ -\pi & 3\omega_0/2 < \omega \leq \pi \end{cases}$$

则输出

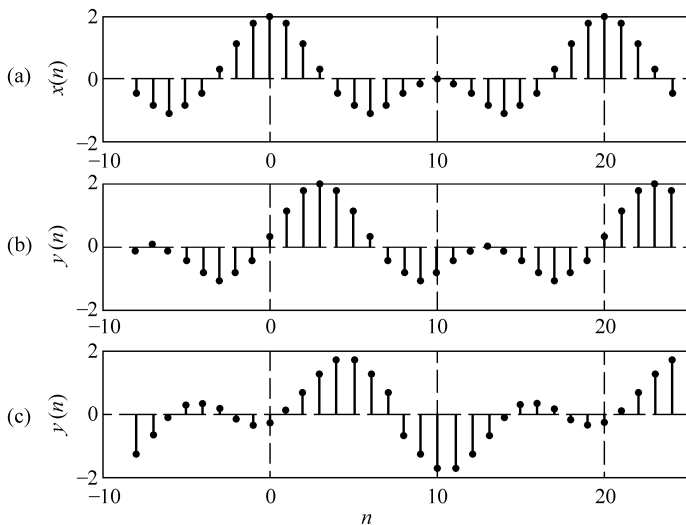
$$y(n) = \cos(\omega_0 n - \pi/4) + \cos(2\omega_0 n - \pi)$$

示于图 5.1.1(c), 由图可见,波形明显地发生了失真。

由该例可以看出相频响应对信号滤波后的影响及线性相位的重要性。再定义

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (5.1.5)$$

为系统的群延迟(group delay, GD)。显然,如果系统具有线性相位,即 $\varphi(\omega) = -k\omega$, 那么,它的群延迟为一常数 k 。因此,群延迟可作为相频响应是否线性的一种度量,同时,它也表示了系统输出的延迟。例如,线性相位 FIR 系统的相频响应一般有 $\varphi(\omega) = -\omega(N-1)/2$ 的形式,式中 N 是 $h(n)$ 的长度,其群延迟为 $(N-1)/2$, 它表示了输出相对输入的

图 5.1.1 系统相频特性对系统输出的影响(图中 $\omega_0 = 0.1\pi$)

延迟量。

令输入信号 $x(n) = x_a(n) \cos(\omega_0 n)$, 式中 $x_a(n)$ 是低频成分, 其最高频率 $\omega_c \ll \omega_0$, $\cos(\omega_0 n)$ 是调制分量, 又称载波信号。显然, $x(n)$ 是一个窄带信号。可以证明, $x(n)$ 通过一个线性系统后的输出^[5,6]

$$y(n) = |H(e^{j\omega_0})| x_a(n - \tau_g(\omega_0)) \cos(\omega_0(n - \tau_p(\omega_0))) \quad (5.1.6)$$

由该式可以看出, 群延迟 $\tau_g(\omega_0)$ 反映了输出信号 envelopes 的延迟, 而相位延迟 $\tau_p(\omega_0)$ 反映了载波信号的延迟。

本书主要关心的是线性相位问题, 有关群延迟和相位延迟的概念不再进一步讨论。顺便指出, 若 $\varphi(\omega) = -k\omega + \beta$, 其中 β 为一常数, 由于其群延迟仍为常数 k , 所以也称其为线性相位。

也许有的读者会问, 可否设计一个数字系统使其具有零相频响应呢? 如果系统的单位抽样响应满足

$$h(n) = h(-n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.1.7)$$

那么

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = h(0) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos(\omega n) \quad (5.1.8)$$

始终为实数, 所以该系统具有零相频响应。但是该系统是非因果系统, 即不是物理可实现系统, 因此它不可能用于实时的信号处理。当然, 对于非实时信号处理, 即数据是一个已采集好的数据块时, 这样的零相位系统是可行的。

在对信号的滤波方法上采取一些特殊措施也可做到“零相位”滤波, 如图 5.1.2 所示,

图中最后输出 $y(n)$ 的傅里叶变换

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= W^*(e^{j\omega}) = [V(e^{j\omega})H(e^{j\omega})]^* = [U^*(e^{j\omega})H(e^{j\omega})]^* \\ &= U(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})|H(e^{j\omega})|^2 \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

可见输出和输入有着相同的相位。但是,为实现这一点,需要将第一次滤波后的输出做时间反转后再通过同一个滤波器,然后再做一次时间反转。显然,这样做是非常浪费时间的。

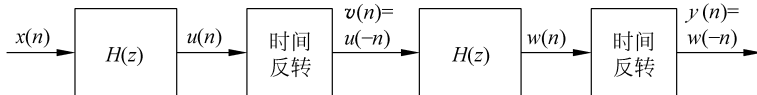


图 5.1.2 零相位滤波的实现

5.2 FIR 系统的线性相位特性

我们在第 2 章给出了 FIR 系统和 IIR 系统的定义及部分性质。由于 FIR 系统是全零点的系统,其单位抽样响应为有限长,因此容易实现某种对称性,从而获得线性相位。而 IIR 系统是极零系统,其单位抽样响应为无限长,很难实现线性相位。因此,今后谈到线性相位时,无例外地指的都是 FIR 系统。

现在来证明,当 FIR 系统的单位抽样响应满足

$$h(n) = \pm h(N-1-n) \quad (5.2.1)$$

时,该系统具有线性相位。由于 $h(n)$ 有奇、偶对称,而 N 可能取偶数,也可能取奇数,所以式(5.2.1)对应的共有四种情况。

1. $h(n) = h(N-1-n)$, 且 N 为奇数

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n) e^{-j\omega n} + \sum_{n=(N+1)/2}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j(N-1)\omega/2} \end{aligned}$$

对上式中间一项,令 $m = N-1-n$, 并利用 $h(n)$ 的对称性,有

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n) e^{-j\omega n} + \sum_{m=0}^{(N-3)/2} h(N-1-m) e^{-j(N-1-m)\omega} + h\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j(N-1)\omega/2} \\ &= e^{-j(N-1)\omega/2} \left\{ 2 \sum_{m=0}^{(N-3)/2} h(m) \cos\left(\frac{N-1}{2} - m\right)\omega + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

再令 $n = (N-1)/2 - m$, 得

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(N-1)\omega/2} \left\{ 2 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \cos(\omega n) + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\} \quad (5.2.2)$$

令

$$a(n) = \begin{cases} h\left(\frac{N-1}{2}\right) & n = 0 \\ 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) & n = 1, 2, \dots, (N-1)/2 \end{cases} \quad (5.2.3)$$

则

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(N-1)\omega/2} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos(\omega n) \quad (5.2.4)$$

显然, $H(e^{j\omega})$ 具有线性相位, 即

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \varphi(\omega) = -(N-1)\omega/2 \quad (5.2.5)$$

令

$$H_g(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos(\omega n) \quad (5.2.6)$$

为系统的增益, 它是 ω 的实函数, 可以取负值, 并有 $|H(e^{j\omega})| = |H_g(e^{j\omega})|$ 。这样, 式(5.2.4)又可表示为

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)} H_g(e^{j\omega})$$

2. $h(n) = h(N-1-n)$, 且 N 为偶数

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n) e^{-j\omega n} + \sum_{n=N/2}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \\ &= e^{-j(N-1)\omega/2} \left\{ \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n) \left[\exp\left[j\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right] + \exp\left[-j\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right] \right] \right\} \\ &= e^{-j(N-1)\omega/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right] \end{aligned}$$

令 $m = N/2 - n$, 然后再把变量换成 n , 则上式变成

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(N-1)\omega/2} \sum_{n=1}^{N/2} 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right] \quad (5.2.7)$$

令

$$b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (5.2.8)$$

则

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(N-1)\omega/2} \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right] \quad (5.2.9)$$

其相频响应仍如式(5.2.5)所示。

3. $h(n) = -h(N-1-n)$, 且 N 为奇数

由于这时的 $h(n)$ 以中心 $\left(\frac{N-1}{2}\right)$ 为对称, 所以必有 $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$, 仿照式(5.2.2)和式(5.2.7)的导出过程, 可得

$$H(e^{j\omega}) = \exp\left[j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)\right] \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin(n\omega) \quad (5.2.10a)$$

式中

$$c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \quad (5.2.10b)$$

相频特性

$$\arg[H(e^{j\omega})] = -(N-1)\omega/2 + \pi/2 \quad (5.2.10c)$$

4. $h(n) = -h(N-1-n)$, 且 N 为偶数

$$H(e^{j\omega}) = \exp\left[j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)\right] \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right] \quad (5.2.11a)$$

式中

$$d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, N/2 \quad (5.2.11b)$$

相频响应仍由式(5.2.10c)给出。

由上面的讨论可知, 当 FIR DF 的抽样响应满足对称时, 该滤波器具有线性相位。显然, 上面 1, 2 两种情况 $h(n)$ 满足偶对称, 3, 4 两种情况 $h(n)$ 满足奇对称。当 $h(n)$ 奇对称时, 通过该滤波器的所有频率成分将产生 90° 的相移。这相当于将该信号先通过一个 90° 的相移器, 然后再做滤波。由于其幅频特性是正弦信号的组合, 所以 3, 4 两种情况的 FIR 滤波器的幅频特性近似于差分器的幅频特性。因此, 当设计一般用途的滤波器时, $h(n)$ 多取偶对称, 长度 N 也往往取为奇数。

顺便指出, 在有的文献中, 上述四种类型的滤波器又依次被称为类型 I、类型 II、类型 III 及类型 IV 滤波器。

5.3 具有线性相位特性的 FIR 系统的零点分布

由 5.2 节讨论的 $h(n)$ 的对称条件可知

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n)z^{-n}$$

令 $m=N-1-n$, 代入上式, 得

$$H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \quad (5.3.1)$$

式中正号对应偶对称, 负号对应奇对称。由上式可以看出, $H(z^{-1})$ 的零点也是 $H(z)$ 的零点, 反之亦然。若记 $H(z)$ 的一个零点 $z_k = r_k e^{j\varphi_k}$, 则当 r_k, φ_k 取不同值时, z_k 处在不同的位置。例如:

- ① 当 $\varphi_k \neq 0$ 和 π , 且 $r_k < 1$ 时, z_k 在单位圆内;
- ② 当 $\varphi_k = 0$ 和 π , 且 $r_k < 1$ 时, z_k 在实轴上;
- ③ 当 $\varphi_k \neq 0$ 和 π , 且 $r_k = 1$ 时, z_k 在单位圆上;
- ④ 当 $\varphi_k = 0$ 和 π , 且 $r_k = 1$ 时, z_k 在实轴和单位圆的交点上。

在①情况下, $H(z^{-1})$ 的零点, 即 $z_k^{-1} = \frac{1}{r_k} e^{-j\varphi_k}$ 也是 $H(z)$ 的零点, 它和 z_k 是以单位圆为镜像对称的, 又因为 $h(n)$ 一般都是实数, 因此, $H(z)$ 的复数零点应当成对出现, 即

$$z_k^* = r_k e^{-j\varphi_k} \quad (5.3.2)$$

也是 $H(z)$ 的零点, 由于镜像对称, 所以

$$(z_k^*)^{-1} = \frac{1}{r_k} e^{j\varphi_k} \quad (5.3.3)$$

当然也是 $H(z)$ 的零点。这就是说, 如果 $H(z)$ 有一个零点 z_k , 那么 $z_k^{-1}, z_k^*, (z_k^*)^{-1}$ 也都是 $H(z)$ 的零点。这四个零点是同时存在的, 它们可以构成一个四阶系统, 记之为 $H_k(z)$, 则

$$H_k(z) = (1 - z^{-1} r_k e^{j\varphi_k})(1 - z^{-1} r_k e^{-j\varphi_k}) \left(1 - z^{-1} \frac{1}{r_k} e^{j\varphi_k}\right) \left(1 - z^{-1} \frac{1}{r_k} e^{-j\varphi_k}\right)$$

展开后得

$$\begin{aligned} H_k(z) = & 1 - 2 \left(\frac{r_k^2 + 1}{r_k} \right) \cos\varphi_k z^{-1} + \left[r_k^2 + \frac{1}{r_k^2} + 4\cos^2\varphi_k \right] z^{-2} \\ & - 2 \left(\frac{r_k^2 + 1}{r_k} \right) \cos\varphi_k z^{-3} + z^{-4} \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

在②情况下, $z_k = r_k$, 它无共轭零点存在, 但有镜像零点 $z_k^{-1} = \frac{1}{r_k}$ 。所以, 它可构成一个二阶系统, 记之为 $H_m(z)$, 则

$$H_m(z) = (1 - z^{-1} r_k) \left(1 - z^{-1} \frac{1}{r_k}\right) \quad (5.3.5)$$

在③情况下, $z_k = e^{j\varphi_k}$, 它无镜像对称零点, 但有共轭零点 $z_k^* = e^{-j\varphi_k}$, 也可以构成一个二阶系统, 记之为 $H_l(z)$, 则

$$H_l(z) = (1 - z^{-1} e^{j\varphi_k})(1 - z^{-1} e^{-j\varphi_k}) \quad (5.3.6)$$

在④情况下, z_k 既无镜像零点, 也无共轭零点。它构成的是最简单的一阶系统, 记之

为 $H_n(z)$, 显然 $H_n(z) = (1 \pm z^{-1})$ 。这样, 一个具有线性相位的 FIR 数字滤波器, 其转移函数可表为上述各式的级联, 即

$$H(z) = \left[\prod_k H_k(z) \right] \left[\prod_m H_m(z) \right] \left[\prod_l H_l(z) \right] \left[\prod_n H_n(z) \right] \quad (5.3.7)$$

这些一阶、二阶、四阶子系统(见式(5.3.4))都有对称的系数, 因此它们也都是具有线性相位的子系统, 这样就为实现 $H(z)$ 提供了方便。图 5.3.1 画出了 $H(z)$ 零点位置示意图。

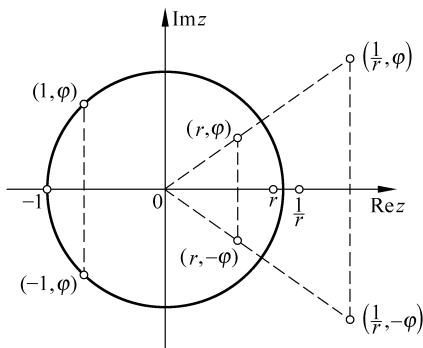


图 5.3.1 线性相位 FIR 滤波器零点位置示意图

一个 FIR 系统, 如果其零点具有图 5.3.1 所示的对称性或满足式(5.3.1), 我们称这样的 $H(z)$ 为镜像对称的多项式(mirror-image polynomial, MIP)。现在进一步分析一下这些 MIP 在 $z=1$ 或 $z=-1$ 处幅频响应的特点。

对类型 I 滤波器, 由于 N 为奇数, 故 $(N-1)$ 为偶数, 由式(5.3.1), 当 $z=1$ 和 -1 时,

$$H(1) = (1)^{-(N-1)} H(1^{-1}) = H(1)$$

$$H(-1) = (-1)^{-(N-1)} H((-1)^{-1}) = H(-1)$$

所以, 无论 $z=1$ 还是 $z=-1$ 都会保证式(5.3.1)成立。若 $H(z)|_{z=1} = 0$, 那么该系统将具有高通或带通型的幅频特性; 若 $H(z)|_{z=-1} = 0$, 那么该系统将具有低通或带通型的幅频特性。

对类型 II 滤波器, 由于 N 为偶数, 故 $(N-1)$ 为奇数, 类似上述情况, 有

$$H(1) = H(1)$$

$$H(-1) = (-1)^{-(N-1)} H((-1)^{-1}) = -H(-1)$$

所以, z 可以为 1, 但不能为 -1 。也就是说, $H(z)$ 在 $z=-1$ 处一定要有零点以保证 $H(-1)=0$, 即 $H(e^{j\pi})=0$ 。因此, 该系统可以具有低通或带通型的幅频特性, 但不能具有高通或带阻型的幅频特性。

对类型 III 滤波器, $(N-1)$ 为偶数, 有

$$H(1) = -1^{-(N-1)} H(1^{-1}) = -H(1)$$

$$H(-1) = -(-1)^{-(N-1)} H((-1)^{-1}) = -H(-1)$$

所以,这种类型的滤波器在 $z=1$ 和 $z=-1$ 处都要有零点;同理,对类型 IV 滤波器,它在 $z=1$ 处也一定要有零点。

由式(5.2.2)和式(5.2.9)可知,类型 I, II 滤波器的幅频特性是 $\cos(\omega n)$ 的线性组合,它是 ω 的偶函数,且在 $\omega=0$ 时的值为 1,这两种情况下的 $h(n)$ 也都是偶对称的,因此,它们适合我们通常所说的低通、高通、带通和带阻型滤波器。由于类型 II 滤波器在设计高通和带阻滤波器时的限制,因此 N 一般都取为奇数。与此相对比,类型 III, IV 滤波器只适用于一些特殊意义上的滤波器,如差分器、希尔伯特变换器等。

5.4 全通系统与最小相位系统

我们在 5.2 节与 5.3 节集中讨论了 FIR 系统在一定约束条件下的线性相位性质,本节则集中讨论一些特殊的 IIR 系统以及它们相应的相位性质。

5.4.1 全通系统

如果一个因果系统的幅频响应对所有的频率都等于 1 或一个常数,即

$$|H_{\text{ap}}(e^{j\omega})| = 1, \quad 0 \leq |\omega| < \pi \quad (5.4.1)$$

我们称该系统 $H_{\text{ap}}(z)$ 为全通系统。一个最简单的全通系统是 $H_{\text{ap}}(z) = z^{-k}$, 由该系统得到的输出信号是输入信号的简单延迟。另一个简单的全通系统为

$$H_{\text{ap}}(z) = \frac{1 - \lambda^{-1} z^{-1}}{1 - \lambda z^{-1}}, \quad |\lambda| < 1 \quad (5.4.2)$$

这是一个一阶的全通系统。它的极点在 $z=\lambda$ 处,而零点在 $z=1/\lambda$ 处,极点和零点是以单位圆为镜像对称的。很容易证明,该系统的幅频响应与相频响应分别是

$$|H_{\text{ap}}(z)|^2 = H_{\text{ap}}(z)H_{\text{ap}}(z^{-1}) = \lambda^{-2} \quad \text{或} \quad |H_{\text{ap}}(e^{j\omega})|^2 = \lambda^{-2} \quad (5.4.3a)$$

$$\arg[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})] = \arctan\left[\frac{-(\lambda - \lambda^{-1})\sin\omega}{2 - (\lambda + \lambda^{-1})\cos\omega}\right] \quad (5.4.3b)$$

一个二阶全通系统的转移函数为

$$H_{\text{ap}}(z) = \frac{(1 - \lambda^{-1} z^{-1})(1 - (\lambda^{-1})^* z^{-1})}{(1 - \lambda z^{-1})(1 - \lambda^* z^{-1})} \quad (5.4.4)$$

式中 λ 为复数, 且 $|\lambda| < 1$ 。显然, 它有一对位于单位圆内的共轭极点, 一对共轭零点和极点以单位圆为镜像对称。一般而言, 一个高阶的全通系统可表示为

$$H_{\text{ap}}(z) = \pm \prod_{k=1}^N \left[\frac{z^{-1} - \lambda_k^*}{1 - \lambda_k z^{-1}} \right], \quad |\lambda_k| < 1 \quad (5.4.5)$$

一个 N 阶全通系统的转移函数也可表示为^[6,7]

$$H_{\text{ap}}(z) = \pm \frac{a_N + a_{N-1}z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-(N-1)} + z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}} \quad (5.4.6)$$

式中系数 a_1, a_2, \dots, a_N 均为实数。若定义上式的分母多项式为 $A(z)$, 则

$$H_{\text{ap}}(z) = \pm \frac{z^{-N}A(z^{-1})}{A(z)} \quad (5.4.7)$$

所以全通系统的分子分母多项式是互为镜像的多项式。读者不难证明

$$H_{\text{ap}}(e^{j\omega})H_{\text{ap}}^*(e^{j\omega}) = |H_{\text{ap}}(e^{j\omega})|^2 = 1 \quad (5.4.8)$$

式(5.4.5)和式(5.4.6)都是全通系统的表达形式, 一个是一阶系统的级联形式, 一个是高阶有理多项式的形式。应注意, 式(5.4.5)的幅平方响应不一定等于 1。

由式(5.4.5)和式(5.4.6), 可总结出全通系统的一些特点:

- ① 全通系统是 IIR 系统(不考虑 $H_{\text{ap}}(z) = z^{-k}$ 这样最简单的形式);
- ② 全通系统的极点数和零点相等;
- ③ 为保证系统稳定, 所有的极点都应在单位圆内, 因此, 所有的零点都在单位圆外;
- ④ 极点和零点是以单位圆镜像对称的;
- ⑤ 由于全通系统的每一对极零点都是镜像对称的, 且零点在单位圆外, 因此, 当 ω 由零变到 π 时, 相频响应 $\varphi(\omega)$ 是单调递减的;
- ⑥ 由式(5.1.5)关于群延迟的定义及特点⑤可知, 全通系统的群延迟始终为正值。

我们在 5.3 节已指出, 由于 IIR 系统的单位抽样响应无限长, 因此无法使其具有对称性, 这样, IIR 系统无法做到线性相位。在实际工作中, 可以用一个全通系统和已设计好的 IIR 系统相级联, 在不改变幅频响应的情况下对相频响应做某种矫正, 使其尽可能地接近线性相位或常数相位。

例 5.4.1 图 5.4.1 和图 5.4.2 分别是一阶和三阶全通系统的极零图、幅频响应、相频响应和单位抽样响应。对图 5.4.1, 极点位置 $\lambda = -0.8$; 对图 5.4.2, 三个极点位置分别是 $0.8e^{j\pi/4}$, $0.8e^{-j\pi/4}$ 及 -0.8 。从这两个图可以看到全通系统极点和零点的镜像对称关系、幅频响应的不变及相频响应的单调下降等特点。