

引 论

0.1 隔振、消振和减振

如果把产生激振力的物体叫做振源体,那么,需要降低其振动强度的物体就应该叫做减振体。利用这两个专业术语表述,可将常用的减振措施归纳为以下三类。

1. 抑制振源强度

例如,高速转子实现动平衡,减小不平衡质量产生的激振力;降低路面的不平度,减轻车轮受到的激励;减小高层建筑的迎风面积,降低它的风载;在结构物的基础与地基之间,安装滚动装置或铅-橡胶隔振器,限制地震给予结构物的动荷载。上述各项技术是工程中抑制振源强度常用的有效方法。

2. 隔振

把软垫放在振源体和减振体之间,利用其弹性变形,减轻振源对减振体的激励,此种技术措施称为隔振。隔振采用的装置叫隔振器。例如,作为车轮外缘的充气轮胎,锻锤砧座下的木块,包装仪器的泡沫塑料填充物等,都是经常使用的隔振器。

3. 消振

减振体上附加特殊的装置,依靠它和减振体间的作用力吸收振动系统的动能,降低减振体的振动强度,就是消振。消振采用的特殊装置叫做消振器。例如,发动机舱粘贴的高阻尼粘弹性材料,在高挠性建筑物顶部安装弹簧支承的活动质量构成的动力消振器,都是常用的消振装置。

显然,通过抑制振源强度,残余振动强度达到了预期的水平,就无须隔振和消振了,可见抑制振源是解决减振问题的上策。如果抑制振源强度之后,残余振动的水平还不能达到预期的要求,这时就要采取隔振措施。因此,隔振技术只是解决减振问题的中策。上述两种措施都不能达到减振要求,就得采用合适的消振装置减振,进一步降低残余振动的水平。由此可见,消振技术应该是解决减振问题的下策。

图 0.1 中的方框 I、II、III、IV 分别表示振源体、隔振器、减振体和消振器,方框之间的直线表示它们的相互作用,箭头表示作用的方向。针对方框 I、II、III、IV 采取的技术措施,分别为抑制振源强度、隔振和消振不同的减振方案,显示出三类减振措施的区别。

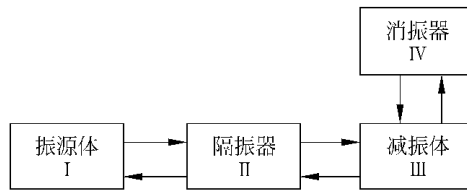


图 0.1

振源的物理背景多种多样。与此相关,抑制振源强度的技术措施各不相同,涉及面太广,不能用有限的篇幅一一表述。因此,本书限于研究隔振和消振的原理,不去研究抑制振源强度的问题。既然隔振和消振的目标都是降低减振体的残余振动强度,可以把它们统称为减振,把两者的基本原理统称为减振原理。

按照力学理论,隔振和消振都是动力学系统的响应问题,研究方法基本相同。可是,从工程技术方面看,这两种技术采用的减振装置却不相同。因此,减振问题需要分类,相关的理论研究才能深入。

(1) 根据激励作用随时间变化的规律,常见的激励力分为以下三类,与其相应存在三类减振问题。

① 周期激励力

此类激励力是时间的周期性函数。例如,冲床的曲柄连杆机构滑块产生的惯性力,自动冲压时,冲头和冲模间的作用力,就是接近周期变化的激励力。简谐激励是一种特殊的周期性激励,用正弦或余弦函数表示,分析研究尤其方便。例如,高速转子不平衡质量产生的离心力,它的水平分力和铅垂分力都是简谐激励力。

② 随机激励力

作用在飞行器和建筑物上的风载,粗糙路面对运动车辆的激励,波浪对船舶的激励,勘探钻头遇到的岩石阻力,都包含不确定的随机分量,这类激励都是随机激励力。

③ 冲击激励力

冲击激励的持续时间很短,远远小于受力物体的固有周期。防爆结构承受的爆炸力,落地与落水结构承受的碰撞力,助推器给予导弹的反推力,都是冲击激励力。

(2) 根据减振系统内是否安装专用的能量装置,减振技术可以分为两大类^[1,2]。

① 被动减振

被动减振也叫无源减振,没有安装专用能源装置提供能量,通过给减振系统做负功,消耗它的振动能量,实现减振。例如,车辆的悬挂系统和充气轮胎为车架隔振,发动机舱壁粘贴高阻尼材料,减小舱壁的振动,都属于被动减振。

② 主动减振

主动减振也叫有源减振。顾名思义,这种减振系统安装了专用能源装置,后者提供能量支持控制系统运行,实现减振。例如,超精密仪器的测试设备,需要特殊的伺服系统隔振;高速飞机安装主动控制系统,消除机翼的颤振,都属于主动减振。

(3) 根据减振体是否是分析研究时列写运动方程的对象,隔振系统分为两类^[1,2]。

① 消极隔振系统

例如,弹性系统悬挂的车架,隔振器支承的精密仪器,它们既是减振体,也是分析研究时

列写运动方程的对象。这类隔振系统叫做消极隔振系统。如前所述,消极隔振依靠隔振器的弹性变形,减轻振源的激励强度,从而减轻减振体的振动强度。

② 积极隔振系统

例如,锻锤砧座下的弹性基础,让砧座有较大的运动速度,缓和周边地面受到的冲击。显然,周边地面是减振物体,但它不是分析研究时列写运动方程的对象。这类隔振系统叫做积极隔振系统。

上述两类隔振的区别,可用分析研究的隔振系统的方框图说明(见图 0.2)。事实上,在图 0.2 中,振源、减振体、隔振器和环境都用方框表示,直线则表示它们之间的相互作用。

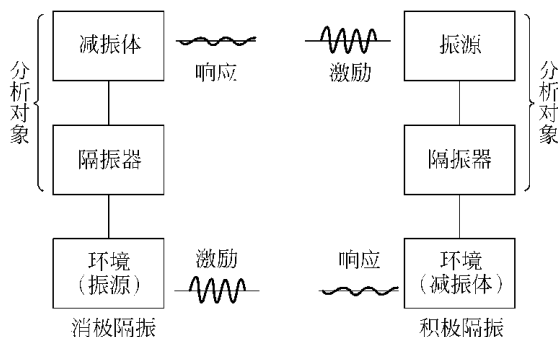


图 0.2

(4) 根据消振器和减振体间的作用力的组成和特性分类,常用的消振技术有以下几类。

① 阻尼消振

单纯依靠阻尼力耗散振动系统的能量实现消振,叫做阻尼消振。在发动机舱壁上粘贴高阻尼材料,就是常用的一种阻尼消振技术^[3,4]。

② 动力调谐消振

它是专门设计的一类消振装置,主要部件是产生惯性力的质量和产生恢复力的弹簧,而且,其固有频率接近需要减振的振动系统的共振频率,此种装置能够抑制受到简谐激励的振动系统的共振。许多输送流体的管道和恒速转动的机器,经常利用它抑制共振。

③ 阻尼动力消振

阻尼动力消振装置的结构很简单,只是一个在粘性阻尼液内旋转的质量,依靠它运动产生的惯性力和阻尼力实现消振。早先的文献曾经称其为 Lanchester Damper。发动机的曲轴和机床的镗杆可以用它消振。

④ 冲击消振

冲击消振装置的结构很简单,由活动质量及其两侧的挡块构成,依靠两者之间的非完全弹性碰撞进行动量交换,同时消耗振动系统的能量,实现消振。

⑤ 主动控制消振

利用专门设计制造的自动控制系统,给振动系统施加控制力,依靠此力做负功实现消振。这种消振技术称为主动控制消振。按照设计时预定的控制力的变化规律,组成主动控制力的成分比被动消振的力更丰富。因此,只要设计正确,主动控制消振技术必定能够取得很好的减振效果^[8]。

0.2 减振技术在工程中的地位

强烈振动对生产活动、科学研究和日常生活都有严重的危害,人们为了消除有害振动,创造了许多简单有效的减振装置。例如,高速车辆的座椅放上软垫,锻锤底座下放置很厚的木块层,这些措施都能取得显著的减振效果。

产业革命之后,工业和运输业广泛使用机器作为原动力,机械振动的危害日益严重,减振要求越发迫切,促使许多工程师和力学家从事减振系统的理论分析和实验研究。到了20世纪初期,针对某些简单减振装置已经做过理论分析^[9~17]。从此减振理论诞生,并得到快速发展,到了20世纪50年代,它已经成为振动理论的一个应用分支^[18]。

从50年代中叶开始,航空、宇航、原子和电子等新兴技术兴起,带动所有工业技术迅速发展。例如,汽轮机、水轮机和电机等动力机械,汽车、火车、船舶和飞机等交通运输工具,以及矿山机械和工程机械等,都沿着高速和重载的方向快速发展,导致的机械振动现象日益强烈,许多产品因此不能够出厂,有些产品因此被市场淘汰。例如,英法合作研制的协和式超音速客机一度停产就是一个最典型的例子。迅速解决减振问题,成为许多行业工程师必须解决的难题。

为了减小各类机电产品的振动强度,对机械零件的制造精度提出更高的要求,这就促进了精密机床和精密加工技术的发展。但是,不管设备本身的精确度等级多高,如果设备的工作环境的振动强度不能达到要求的标准,它们制造的产品也不能达到预期的精度指标。

由于建筑材料和建筑技术的迅速发展,广泛采用高强度建筑材料,几百米高的建筑物大量涌现,成千上万米的大桥日益增多,如果受到巨大的风载,这类高挠性建筑就要产生很大的振幅,不能满足人们对其提出的舒适性指标,一旦遇到强烈的地震,还有倒塌的危险。因此,高挠性建筑的减振早已成为建筑界的重要研究课题。

飞机、导弹、舰艇和战车经常在恶劣的环境中工作。因此,军工部门对减振技术的要求尤其迫切。事实上,主动控制减振技术和阻尼层技术,都是在军工领域率先发展的。毫不夸张地说,军事工业是带动减振技术发展的一个“火车头”。

综上所述,无论是民用工业还是军事工业,其产品性能都与减振技术密切相关。众所周知,产品性能是企业的生命,因此,所有工业部门对减振技术的发展和應用都很重视。无数的工程师和应用力学家被吸引到这个领域工作,进行了大量的实验和理论研究,不断取得新的研究成果,创造出各种各样的减振装置,与此同时,减振理论也在不断发展和丰富。

0.3 减振理论及其任务

完成任何一项减振技术的研究,都应该落实到设计和制造新的减振装置。因此,减振技术涉及多个学科,包括机械设计、材料学、制造工艺、电工和电子技术等。在设计任何减振装置时,先要了解减振系统的工作原理,了解系统内部的力学过程。为此,必须绘制减振系统的结构模型,建立相应的力学模型,列写其运动微分方程,进行分析研究,找到减振装置的减振力,分析减振力的组成,确认该力具有给振动系统做负功的能力,确定此种装置具有良好的减振效果。

一般来说,确定减振装置的原理方案之后,还应该选择最佳的结构参数。这样一来,不仅保证它具有足够大的减振力,而且,该力有足够长的作用行程,从而给减振物体做足够多的负功,保证具有足够的减振效果。为此,还要建立评价减振性能的指标,建立该指标与减振装置参数的数学关系,再用最优化算法,找到减振装置的最佳结构参数。

完成以上两项研究,设计出的减振装置就有坚实的理论基础。因此,挑选上述两方面的研究成果,作为减振理论的基本内容。采取这样的选材原则,即使减振技术不断发展,本书的基本内容也相对稳定。如果某些新发明的减振技术具有新的工作原理,减振理论还是需要补充一些新的内容。近四十年来各种学术刊物和专业技术会议发表的有关论文数量非常巨大,有些论文的研究比较深入,包括减振装置和振动系统的非线性因素的影响,非线性振动系统的冲击响应,多自由度系统和弹性系统的减振器设计计算方法,随机振动理论在减振设计领域的应用,弹性结构最优阻尼的计算方法,主动控制减振系统的设计计算方法等。这些研究成果必然促使减振理论的研究更加深入。主动控制减振技术的应用使得减振理论具有多学科交叉的性质,特别是许多高精度的智能控制的减振装置的发明,都是现代高科技研究成果的结晶。

0.4 本书内容选择和编排

在浩如烟海的文献中,挑选合适的素材编写一本专业理论书,首先要确立选材的基本原则。编者经过充分思考,制定了以下三条原则。

(1) 作为本书的内容,要有实际应用价值。也就是说,优先采用工程中应用的减振装置的理论分析成果,以及具有应用前景的新兴的减振技术。

(2) 为使理论著作具有持久的学术价值,选用研究已经成熟的内容。因此,特别着重典型的减振技术的力学原理,及其减振装置结构参数的计算方法,作为本书的主要内容。

(3) 为了扩大本书读者群,书内及时附加所需的数学知识,主要是第2章的积分变换和第4章的随机过程。这样一来,具有工科大学数学和力学基础的工程技术人员在自学本书的基本内容时,不会存在数学知识方面的困难。

按照上述几条选材原则,将挑选出的素材分为9章。前5章都是无源隔振的内容。其中,第1章建立隔振系统的运动方程,第2章介绍单级无源隔振的基本原理,第3章讨论隔离谐振的若干重要问题,第4章研究随机振动隔离的原理,第5章介绍冲击隔离的原理。此后3章属于无源消振的内容。其中,第6章介绍阻尼消振的原理,第7章研究动力消振,着重分析动力调谐消振原理及其应用,第8章介绍冲击消振原理。第9章讨论主动控制减振的基本原理和设计主动控制减振系统的某些问题。

参考文献

- [1] 振动计算与隔振设计组. 振动计算与隔振设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1976.
- [2] 伊尔因斯基 B. C. 振动与冲击的隔离问题[M]. 高永泉, 译. 北京: 国防工业出版社, 1964.
- [3] 中国科学院力学研究所振动组. 大阻尼结构简介[J]. 机械强度: 第7辑, 1978, 12: 23-29
- [4] 田千里, 等. 振动控制的若干问题[J]. 强度与环境, 1980(3): 16-23.

- [5] Srinivasan A V. Gyroscopic Systems as Vibration Absorbers [J]. J. Eng. Ind. ASME, 1969, 91(4): 1156-1160.
- [6] Sneckenberger J E, et al. Experimental synchronization study of the gyroscopic vibration absorber[J]. J. Eng. Ind. Trans. ASME, 1974, 96(3): 983-987.
- [7] Jones R. The Gyroscopic Vibration Absorber[J]. ASME J. Eng. Ind. ,1967, 89(4): 706-712.
- [8] 丁文镜, 王和祥. 主动减振技术述评[J]. 力学与实践, 1984(6): 2-7.
- [9] Ormon Droyd J, et al. The Theory of the Dynamic Vibration Absorber[J]. Trans. ASME, 1928, 50: 9-22.
- [10] Den Hartog J P. Forced vibrations with combined Coulomb and viscous friction[J]. Trans. ASME, 1931, 53: 107-115.
- [11] Brock J E. Theory of the Damped Dynamic Vibration Absorber for Inertial Disturbance[J]. JAM. ASME, 1949, 16: 86-92.
- [12] Roberson R E. Synthesis of a non-linear dynamic vibration absorber[J]. J. Franklin Inst, 1952, 254: 205-220.
- [13] Pipes L A. Analysis of a Non-linear Dynamic Vibration Absorber [J]. JAM. ASME, 1953, 20: 515-518.
- [14] Arnold F R. Steady-state Behaviour of Systems Provided with Non-linear Dynamic Vibration Absorbers[J]. JAM. ASME, 1955, 22: 487-492.
- [15] Young D. Proceedings of the First U. S. National Congress of Applied Mechanics[C]. 1952: 91-96.
- [16] Mindlin R D. Dynamics of Package Cushioning[J]. J. Bell System Tech, 1947, 24: 353-461.
- [17] Kelly J M. Aseismic Base Isolation[J]. The Shock and Vibration Digest, 1982, 14(5): 17-25.
- [18] Den Hartog J P. 机械振动学[M]. 谈峰, 译. 北京: 科学出版社, 1961.

第 1 章

隔振系统的运动方程

研究任何隔振系统的动态响应,先要建立该系统力学模型,然后列写其运动方程,通过分析研究,给出相应的结论。本章的主要任务是建立单级隔振系统的运动方程。

一般情况下,采取过隔振措施的振动系统不再发生大幅振动。因此,运动基座上的微幅振动的自由刚体可以作为研究单级隔振系统的力学模型,本章的主要内容可以归结为以下几项。

首先,利用经典力学的基本定理,建立自由刚体微幅振动的运动微分方程组并寻找这组方程彼此解耦的参数条件。

其次,分析完全解耦的单级隔振系统,并比较消极隔振和积极隔振两者运动方程的数学结构。

然后,研究两点激励的刚体运动,建立相应的运动方程组,寻找质心运动方程和转动方程彼此解耦的参数条件。

最后,针对两级和多级隔振系统的运动方程,探讨建立隔振系统运动方程的某些一般问题。

1.1 运动基座上微幅振动的刚体

作为隔振对象的隔振体,它的质量和刚度通常比支承它的隔振器大得多,而且,它本身的固有频率通常远高于外激励力的频率。由于满足了这些参数条件,因而不仅能把隔振体简化为刚体,还可以忽略隔振器的质量。这样一来,单级隔振系统一般的力学模型就像图 1.1 表示的那样,是由若干弹簧支承的一个自由刚体^[1]。该图中的一些弹簧代表与其连接的隔振器,后者的一端与隔振体连接,另一端与刚性基座连接。

首先,建立空间参照坐标系,定量描述隔振体和基座的运动。

基座作空间运动时,隔振体受到弹簧变形力的激励,通常要作复杂的空间运动。定量描述此种空间运动,需要建立两个空间坐标系。

(1) 固定在惯性空间的定坐标系 $\bar{O}-XYZ$,其原点 \bar{O} 与刚体在静平衡状态的质心重合;

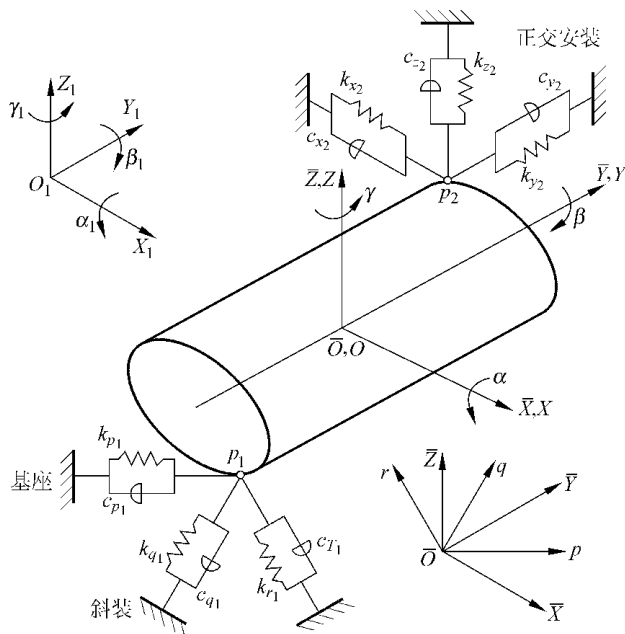


图 1.1

(2) 固定在运动刚体上的动坐标系 $O-XYZ$, 其原点 O 与刚体的质心重合。

当刚体处于静平衡状态时, 动坐标轴 X, Y, Z 与定坐标轴 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 重合。这样一来, 利用原点 O 在相对定坐标系 $\bar{O}-\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ 的这 3 个位移分量, 就能描述刚体质心的运动; 利用动坐标系 $O-XYZ$ 相对定坐标系 $\bar{O}-\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ 间的 3 个转角分量 α, β 和 γ , 就能描述刚体的转动。

此外, 为了定量描述基座的运动, 还要建立一个固结在基座上的运动坐标系 $O_1-X_1Y_1Z_1$ 。当基座静止时, 基座坐标系 $O_1-X_1Y_1Z_1$ 要与定坐标系 $\bar{O}-\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ 重合。

类似于描述隔振体的运动, 描述基座的线运动, 采用坐标原点 O_1 的位移在定坐标轴 \bar{X}, \bar{Y} 和 \bar{Z} 上的 3 个分量 x_1, y_1 和 z_1 ; 描述基座的角振动, 采用动坐标系 $O-XYZ$ 相对定坐标系 $\bar{O}-\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ 间的 3 个转角分量 α_1, β_1 和 γ_1 。

其次, 列写基座运动时隔振器支承的刚体的作用力的解析式。

当基座作一般运动时, 存在 6 个位移分量 $x_1, y_1, z_1, \alpha_1, \beta_1$ 和 γ_1 , 它们使隔振器弹性变形, 产生作用在刚体上的弹性力。例如, 沿着 \bar{X} 轴方向的弹簧变形量为 $x-x_1$ 。显然, 在隔振器与刚体间同时产生 9 个作用力分量。其中, 有 3 个力分量, 它们分别是沿 \bar{X} 轴方向的分力 $-k_{xx}(x-x_1)$, 沿 \bar{Y} 轴方向的分力 $-k_{xy}(x-x_1)$ 和沿 \bar{Z} 轴方向的分力 $-k_{xz}(x-x_1)$; 还有 6 个力偶分量, 它们分别是沿 \bar{Z} 轴的分力对 \bar{X} 轴和 \bar{Y} 轴的两个力偶分量 $k_{zx}(x-x_1)a_y$ 和 $-k_{zy}(x-x_1)a_x$, 沿 \bar{Y} 轴的分力对另两个轴的力偶分量 $k_{yx}(x-x_1)a_z$ 和 $-k_{yz}(x-x_1)a_x$, 和沿 \bar{X} 轴的分力对另两个轴的力偶分量 $k_{zx}(x-x_1)a_y$ 和 $-k_{xy}(x-x_1)a_z$ 。

隔振器的另外 5 个弹性变形分量分别为 $y-y_1, z-z_1, \alpha-\alpha_1, \beta-\beta_1$ 和 $\gamma-\gamma_1$, 按照类似法则, 它们也要产生同样多的分力的分量和力偶分量。因此, 按照上述力元素的分解方法, 总共有 9 个力的分量, 它们构成作用在隔振体上的合力 \mathbf{F} , 和 18 个力偶的分量, 它们构成作用在隔振体上的合力偶 \mathbf{M} 。

然后,根据经典力学的动量定理和动量矩定理,建立以下两个向量运动微分方程:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (1.1)$$

和

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{M} \quad (1.2)$$

式中, m 为刚体的质量; \mathbf{r} 为质心位移向量; $\mathbf{r} = \{x, y, z\}^T$; \mathbf{G} 为刚体的动量矩。由于刚体绕 \bar{X} 、 \bar{Y} 、 \bar{Z} 轴的转角分量 α 、 β 、 γ 均为小量,因而动量矩 \mathbf{G} 可以近似表示为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

式中, I_{xx} 、 I_{yy} 、 I_{zz} 是刚体对 X 、 Y 、 Z 轴的惯性矩; I_{xy} 、 I_{yz} 、 I_{zx} 是对这些轴的惯性积。

最后,把向量运动微分方程(1.1)和(1.2)投影到定坐标轴 \bar{X} 、 \bar{Y} 和 \bar{Z} 上,经过整理,最终得到控制弹性支座上自由刚体运动的 6 个微分方程:

$$\begin{aligned} & m \ddot{x} + \sum k_{xx}(x - x_1) + \sum k_{xy}(y - y_1) + \sum k_{xz}(z - z_1) \\ & + \sum (k_{xz}a_y - k_{xy}a_z)(\alpha - \alpha_1) + \sum (k_{xy}a_z - k_{xz}a_y) \\ & \times (\beta - \beta_1) + \sum (k_{xy}a_z - k_{xz}a_y)(\gamma - \gamma_1) = 0 \end{aligned} \quad (1.4a)$$

$$\begin{aligned} & I_{xx} \ddot{\alpha} - I_{xy} \ddot{\beta} - I_{xz} \ddot{\gamma} + \sum (k_{xz}a_y - k_{xy}a_z)(x - x_1) \\ & + \sum (k_{yz}a_z - k_{yy}a_z)(y - y_1) + \sum (k_{zz}a_y - k_{yz}a_z) \\ & \times (z - z_1) + \sum (k_{yy}a_z^2 + k_{zz}a_y^2 - 2k_{yz}a_ya_z) \\ & \times (\alpha - \alpha_1) + \sum (k_{xz}a_ya_z + k_{yz}a_xa_z - k_{zz}a_xa_y - k_{xy}a_z^2) \\ & \times (\beta - \beta_1) + \sum (k_{xy}a_ya_z + k_{yz}a_xa_y - k_{yy}a_xa_z - k_{xz}a_y^2) \\ & \times (\gamma - \gamma_1) = 0 \end{aligned} \quad (1.4b)$$

$$\begin{aligned} & m \ddot{y} + \sum k_{xy}(x - x_1) + \sum k_{yy}(y - y_1) + \sum k_{yz}(z - z_1) \\ & + \sum (k_{yz}a_y - k_{yy}a_z)(\alpha - \alpha_1) + \sum (k_{xy}a_z - k_{yz}a_x) \\ & \times (\beta - \beta_1) + \sum (k_{yy}a_x - k_{xy}a_y)(\gamma - \gamma_1) = 0 \end{aligned} \quad (1.4c)$$

$$\begin{aligned} & I_{yy} \ddot{\beta} - I_{xy} \ddot{\alpha} - I_{yz} \ddot{\gamma} + \sum (k_{xz}a_z - k_{xz}a_x)(x - x_1) \\ & + \sum (k_{xy}a_z - k_{yz}a_x)(y - y_1) + \sum (k_{xz}a_z - k_{zz}a_x) \\ & \times (z - z_1) + \sum (k_{xz}a_ya_z + k_{yz}a_xa_z - k_{zz}a_xa_y - k_{xy}a_z^2) \\ & \times (\alpha - \alpha_1) + \sum (k_{xx}a_z^2 + k_{zz}a_x^2 - 2k_{xz}a_xa_z)(\beta - \beta_1) \\ & + \sum (k_{xy}a_xa_z + k_{xz}a_xa_y - k_{xx}a_ya_z - k_{yz}a_x^2)(\gamma - \gamma_1) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (1.4d)$$

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{z} + \sum k_{xz}(x - x_1) + \sum k_{yz}(y - y_1) + \sum k_{zz}(z - z_1) \\
 & + \sum (k_{zz}a_y - k_{yz}a_z)(\alpha - \alpha_1) + \sum (k_{xz}a_z - k_{zx}a_x) \\
 & \times (\beta - \beta_1) + \sum (k_{yz}a_x - k_{zx}a_y)(\gamma - \gamma_1) = 0
 \end{aligned} \tag{1.4e}$$

$$\begin{aligned}
 & I_{zz}\ddot{\gamma} - I_{zx}\ddot{\alpha} - I_{yz}\ddot{\beta} + \sum (k_{xy}a_x - k_{xz}a_y)(x - x_1) \\
 & + \sum (k_{yy}a_x - k_{xy}a_y)(y - y_1) + \sum (k_{yz}a_x - k_{zx}a_y) \\
 & \times (z - z_1) + \sum (k_{xy}a_ya_z + k_{yz}a_xa_y - k_{yy}a_xa_z - k_{zx}a_y^2) \\
 & \times (\alpha - \alpha_1) + \sum (k_{xy}a_xa_z + k_{zx}a_xa_y - k_{xz}a_ya_z - k_{yz}a_x^2) \\
 & \times (\beta - \beta_1) + \sum (k_{xz}a_y^2 + k_{yy}a_x^2 - 2k_{xy}a_xa_y)(\gamma - \gamma_1) \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{1.4f}$$

图 1.1 表明,有些隔振器是倾斜安装的。由于它们的倾斜角度不同,即使采用同一型号的隔振器,以上各式中的 6 个劲度系数也不会相同。事实上,以上诸式中的劲度系数 k_{xx} 、 k_{yy} 、 k_{zz} 、 k_{xy} 、 k_{yz} 和 k_{zx} 都随着隔振器倾斜角的变化而变化。作为标准件的隔振器,通常标出的是它沿着主轴方向的三个劲度系数 k_p 、 k_q 和 k_r ,只要确定其主轴 p 、 q 、 r 与定坐标轴 \bar{X} 、 \bar{Y} 、 \bar{Z} 间的夹角(见图 1.1),算出这些角度相应的方向余弦 λ_{xp} 、 λ_{xq} 、 λ_{xr} 、 λ_{yp} 、 λ_{yq} 、 λ_{yr} 、 λ_{zp} 、 λ_{zq} 和 λ_{zr} ,建立隔振器的平衡方程组,就能导出以下的通用公式,利用这些公式,就能算出任意安装角度的隔振器的劲度系数^[2]:

$$\begin{cases}
 k_{xx} = k_p\lambda_{xp}^2 + k_q\lambda_{xq}^2 + k_r\lambda_{xr}^2 \\
 k_{yy} = k_p\lambda_{yp}^2 + k_q\lambda_{yq}^2 + k_r\lambda_{yr}^2 \\
 k_{zz} = k_p\lambda_{zp}^2 + k_q\lambda_{zq}^2 + k_r\lambda_{zr}^2 \\
 k_{xy} = k_p\lambda_{xp}\lambda_{yp} + k_q\lambda_{xq}\lambda_{yq} + k_r\lambda_{xr}\lambda_{yr} \\
 k_{yz} = k_p\lambda_{yp}\lambda_{zp} + k_q\lambda_{yq}\lambda_{zq} + k_r\lambda_{yr}\lambda_{zr} \\
 k_{zx} = k_p\lambda_{zp}\lambda_{xp} + k_q\lambda_{zq}\lambda_{xq} + k_r\lambda_{zr}\lambda_{xr}
 \end{cases} \tag{1.5}$$

列写运动方程(1.4)时,并未考虑隔振器变形运动的粘性阻尼力。如果是滞后阻尼力,只要令式(1.4)中的 6 个劲度系数 k_{xx} 、 k_{yy} 、 k_{zz} 、 k_{xy} 、 k_{yz} 、 k_{zx} 为复数,它们的实部就能描述弹性恢复力,也就是阻尼器的劲度系数;其虚部则描述阻尼力,表示滞后阻尼力的滞后阻尼系数,对此将在第 6 章详细介绍。

如果隔振器具有黏性阻尼力,则需在方程(1.4)中增加阻尼力项。为了节省篇幅,下面列写其中的一个运动微分方程予以说明。

显然,考虑隔振器的粘性阻尼力后,与方程(1.4a)相应的隔振体的一个运动微分方程则应写成

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{x} + \sum c_{xx}(\dot{x} - \dot{x}_1) + \sum k_{xx}(x - x_1) + \dots \\
 & + \sum (c_{xz}a_y - c_{xy}a_z)(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_1) \\
 & + \sum (k_{xz}a_y - k_{xy}a_z)(\alpha - \alpha_1) + \dots = 0
 \end{aligned}$$

式中,阻尼系数

$$c_{xx} = c_p\lambda_{xp}^2 + c_q\lambda_{xq}^2 + c_r\lambda_{xr}^2$$