第 1 章　多元函数及其微分学

上册我们主要讨论一元函数的微分与积分，从这一章起，我们将研究多元函数的微分与积分.

本章是对多元函数讨论的第 1 章，涉及的内容有：

n 维 Euclid 空间；

多元函数（多元向量值函数）的定义、极限、连续性和可微性；

全微分、偏导数和方向导数的概念及计算；

隐函数（隐向量值函数）、参数函数（参数向量值函数）和反函数（反向量值函数）的存在性、光滑性及其微分；

微分的应用，其中包括微分的几何应用：曲面的切平面与法线、曲线的切线与法平面、Taylor 公式、极值与条件极值问题.

对多元函数的研究，可以看成是对一元函数研究的推广，而这些推广的基础是对实轴上的距离（实轴上两点 x，y 间的距离在上册用绝对值 $|x-y|$ 表示）的推广（推广到 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中两点 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$ 间的 **Euclid 距离** $\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|_n$）. 在推广过程中，我们可以看到有些一元函数微分学的概念可以在多元函数中推广，比如：极限、连续、可微；而另外一些概念在多元函数微分学中没有相应的推广，比如：一元函数导数的概念.

$\mathbb{R}^n$ 是 n 元函数定义域所在的空间，所以我们首先讨论 n 维空间 $\mathbb{R}^n$.

1.1　n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$

这里要讨论的 **n 维（实）空间** $\mathbb{R}^n$ 为集合

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

先定义 $\mathbb{R}^n$ 中两种运算：

(1) **加法运算**：$\mathbb{R}^n$ 中的两个元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的加法运算为

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n).$$

（2）**数乘运算**：$\mathbb{R}^n$ 中的一个元素$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与实数 λ 的数乘运算为

$$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

容易验证，集合$\mathbb{R}^n$ 关于上述的加法运算与数乘运算在实数域上构成一个线性空间，其维数为 n.

因此$\mathbb{R}^n$ 中的一个元素既可称为$\mathbb{R}^n$ 中的一个**点**，也可称为$\mathbb{R}^n$ 中的一个**向量**. $\mathbb{R}^n$ 中的点（向量）通常也用 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 等表示.

1.1.1　n 维 Euclid 空间

在上册书中，当自变量 x 趋于实数 a 时，一元函数 $f(x)$以实数 A 为极限（即$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$）的定义为

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall x:0<|x-a|<\delta,\quad |f(x)-A|<\varepsilon.$$

也就是函数值 $f(x)$与实数 A 要多“接近”就可以多“接近”，只要自变量 x 与实数 a 足够“接近”. $|x-a|$与$|f(x)-A|$是刻画 x 与 a 以及 $f(x)$与 A 的“接近”程度的两个量，也就是直线上 x 点与 a 点以及 $f(x)$与 A 的距离.

同样，在$\mathbb{R}^n$ 中我们也需要一个量来刻画两点 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的“接近”程度，这就是$\mathbb{R}^n$ 中的距离. $\mathbb{R}^n$ 中最常见的距离是 Euclid 距离 $\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|_n$.

定义 1.1.1

设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$，它们之间的 **Euclid 距离** $\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|_n$ 定义为

$$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|_n=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

在不会引起混淆的情况下，我们省略 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的距离 $\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|_n$ 中的下标“n”.

容易证明，$\mathbb{R}^n$ 中的上述距离满足以下性质：

（1）**正定性**：$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$ 时，$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|=0$；

（2）**对称性**：$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|=\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\|$；

（3）**三角不等式**：$\forall\boldsymbol{Z}\in\mathbb{R}^n$，$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|\leqslant\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Z}\|+\|\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Y}\|$.

显然，绝对值$|x-y|$就是当 $n=1$ 时实数轴$\mathbb{R}^1$ 上两点 x,y 之间的 Euclid 距离.

带有 Euclid 距离的 n 维线性空间$\mathbb{R}^n$ 称为 **n 维 Euclid 空间**.

1.1.2　n 维 Euclid 空间中的开集与闭集

n 维 Euclid 空间$\mathbb{R}^n$ 中的距离可以导出$\mathbb{R}^n$ 中一点的邻域的概念.

定义 1.1.2 ……………………………………………………………

设 $\boldsymbol{X}_0\in\mathbb{R}^n,\delta>0$，集合

$$B(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|<\delta\}$$

称为 $\boldsymbol{X}_0$ 点的**δ 邻域**. 集合

$$B^{\circ}(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n \mid 0<\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|<\delta\}$$

称为点 $\boldsymbol{X}_0$ 的**去心δ 邻域**.

$n=1$ 时，$B(\boldsymbol{X}_0,\delta)$就是以 $\boldsymbol{X}_0$ 为中心，两边各取长度 δ 的开区间$(\boldsymbol{X}_0-\delta,\boldsymbol{X}_0+\delta)$；

$n=2,3$ 时，$B(\boldsymbol{X}_0,\delta)$分别为以 $\boldsymbol{X}_0$ 为中心，半径为 δ 的圆域和球域(不包含边界).

在邻域的基础上，我们有下列基本概念：

定义 1.1.3 ……………………………………………………………

(1) **内点**：集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，点 $\boldsymbol{X}_0\in\mathbb{R}^n$. 如果存在 $\delta>0$，使得 $\boldsymbol{X}_0$ 的某个邻域 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}_0,\delta)\subset\Omega$，则称 $\boldsymbol{X}_0$ 是集合 Ω 的一个内点.

(2) **边界点**：集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，点 $\boldsymbol{X}_0\in\mathbb{R}^n$. 如果对于任意 $\delta>0$，同时满足

$$B(\boldsymbol{X}_0,\delta)\cap\Omega\neq\varnothing,\quad B(\boldsymbol{X}_0,\delta)\cap(\mathbb{R}^n\backslash\Omega)\neq\varnothing,$$

则称 $\boldsymbol{X}_0$ 为 Ω 的一个边界点，其中$\mathbb{R}^n\backslash\Omega=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{X}\notin\Omega\}$为集合 Ω 的**余集**.

(3) **开集**：若集合 Ω 中的每一点均为内点，则称 Ω 为开集.

(4) **闭集**：若集合 Ω 的余集$\mathbb{R}^n\backslash\Omega$ 为开集，则称 Ω 为闭集.

(5) **内部**：由集合 Ω 的所有内点构成的集合称为 Ω 的内部，记作 $\mathring{\Omega}$.

(6) **边界**：由集合 Ω 的所有边界点构成的集合称为 Ω 的边界，记作$\partial\Omega$.

(7) **闭包**：集合 Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$ 为：$\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$.

在$\mathbb{R}^n$ 中有两个特殊的集合：全集$\mathbb{R}^n$ 和空集$\varnothing$，它们既是开集也是闭集.

对于任意的集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，可以证明 Ω 的内部 $\mathring{\Omega}$ 是开集，Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$ 是闭集.

从上述基本概念还可推出下列性质：

(1) 任意多个开集之并为开集；有限个开集之交为开集.

(2) 任意多个闭集之交为闭集；有限个闭集之并为闭集.

例 1.1.1 ……………………………………………………………

$\forall\boldsymbol{X}_0\in\mathbb{R}^n,\delta>0,B(\boldsymbol{X}_0,\delta)$和 $B^{\circ}(\boldsymbol{X}_0,\delta)$均为开集，其边界为

$$\partial B(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|=\delta\},$$

$$\partial B^{\circ}(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|=\delta\}\cup\{\boldsymbol{X}_0\},$$

其内部为各自集合本身，其闭包均为

$$\overline{B}(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\overline{B^{\circ}}(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|\leqslant\delta\}.$$

与$\mathbb{R}^1$中的集合一样，集合$\Omega\subset\mathbb{R}^n$，若存在实数$M>0$，使得$\forall\,\boldsymbol{X}\in\Omega$，$\|\boldsymbol{X}\|\leqslant M$，则称$\Omega$为**有界集合**. 例 1.1.1 中的集合$B(\boldsymbol{X}_0,\delta)$，$B^\circ(\boldsymbol{X}_0,\delta)$，$\bar{B}(\boldsymbol{X}_0,\delta)$均为有界集合，其中$\bar{B}(\boldsymbol{X}_0,\delta)$为**有界闭集**.

1.1.3　$\mathbb{R}^n$ 中集合的连通性

设集合$\Omega\subset\mathbb{R}^n$，我们很关心集合$\Omega$是不是连成一片的，在数学上，这就是集合连通性的概念. 下面是最简单的一种连通定义：**道路连通**.

定义 1.1.4

集合$\Omega\subset\mathbb{R}^n$称为(道路)**连通**的，如果对于任意的两点$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\Omega$，均有一条完全属于$\Omega$的折线段将两点连接起来；否则，$\Omega$叫做**非**(道路)**连通集**. 例如图 1.1.1.

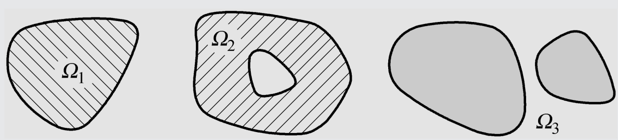

图 1.1.1　Ω_1，Ω_2是连通集，Ω_3是非连通集

定义 1.1.5

$\mathbb{R}^n$中非空的连通开集称为**开区域**，开区域的闭包称为**闭区域**.

例 1.1.2

$D=\{(x,y)\,|\,a<x<b,c<y<d\}$是$\mathbb{R}^2$中的一个开区域；

$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$是$\mathbb{R}^3$中的一个闭区域.

1.1.4　$\mathbb{R}^n$ 中的点列，点列的收敛性以及收敛点列的性质

设$\boldsymbol{X}_k=(x_k^{(1)},x_k^{(2)},\cdots,x_k^{(n)})\in\mathbb{R}^n$，$k=1,2,\cdots$，则$\{\boldsymbol{X}_k\}_{k=1}^{+\infty}$称为$\mathbb{R}^n$中的一个**点列**. 点列通常也记作$\{\boldsymbol{X}_k\}$.

定义 1.1.6

点$\boldsymbol{A}=(a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(n)})\in\mathbb{R}^n$，点列$\{\boldsymbol{X}_k\}$**收敛于**$\boldsymbol{A}$，即$\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{A}$，指的是

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,N\in\mathbb{N}^+,\quad \forall\,k\in\mathbb{N}^+:k>N,\quad \|\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{A}\|<\varepsilon.$$

当$n=1$时，定义 1.1.6 与实数列的收敛定义是一致的.

定理 1.1.1

$\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{A}$的充分必要条件是$\lim\limits_{k\to+\infty}x_k^{(i)}=a^{(i)}$，$i=1,2,\cdots,n$.

证明 显然有不等式

$$\max\{|x_k^{(1)}-a^{(1)}|,|x_k^{(2)}-a^{(2)}|,\cdots,|x_k^{(n)}-a^{(n)}|\}$$
$$\leqslant \|\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_k^{(i)}-a^{(i)})^2} \tag{1.1.1}$$
$$\leqslant |x_k^{(1)}-a^{(1)}|+|x_k^{(2)}-a^{(2)}|+\cdots+|x_k^{(n)}-a^{(n)}|.$$

如果 $\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{A}$,则由不等式(1.1.1)可知:$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall k\in\mathbb{N}^+$:$k>N$,

$$\max\{|x_k^{(1)}-a^{(1)}|,|x_k^{(2)}-a^{(2)}|,\cdots,|x_k^{(n)}-a^{(n)}|\}<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{k\to+\infty}x_k^{(i)}=a^{(i)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

反之,如果

$$\lim_{k\to+\infty}x_k^{(i)}=a^{(i)},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_i\in\mathbb{N}^+,\forall k\in\mathbb{N}^+:k>N_i,\quad |x_k^{(i)}-a^{(i)}|<\frac{\varepsilon}{n},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

由不等式(1.1.1)可知,

$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_n\}\in\mathbb{N}^+,\forall k\in\mathbb{N}^+:k>N,\|\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{A}\|<\varepsilon$,即

$$\lim_{k\to+\infty}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{A}.$$

上述定理告诉我们,点列$\{\boldsymbol{X}_k\}$收敛到$\boldsymbol{A}$ 等价与$\{\boldsymbol{X}_k\}$的 n 个分量构成的 n 个实数列$\{x_k^{(i)}\}_{k=1}^{+\infty}(i=1,2,\cdots,n)$分别收敛到$\boldsymbol{A}$ 的相应分量.例如:

$$\boldsymbol{X}_k=\left(1+\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right)\in\mathbb{R}^2,\quad \lim_{k\to+\infty}\boldsymbol{X}_k=(1,1).$$

与$\mathbb{R}^1$ 一样,我们可以定义$\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 序列:

定义 1.1.7 ……………………………………………………………

设$\{\boldsymbol{X}_k\}$为$\mathbb{R}^n$ 中的点列,如果

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N}^+,\quad \forall l,m\in\mathbb{N}^+:l,m>N,\quad \|\boldsymbol{X}_l-\boldsymbol{X}_m\|<\varepsilon,$$

则称$\{\boldsymbol{X}_k\}$为$\mathbb{R}^n$ 中 **Cauchy 序列**.

容易证明,$\mathbb{R}^n$ 中的点列$\{\boldsymbol{X}_k\}$为 Cauchy 序列的充分必要条件是$\{\boldsymbol{X}_k\}$的 n 个分量构成的 n 个实数列$\{x_k^{(i)}\}_{k=1}^{+\infty}(i=1,2,\cdots,n)$均为 Cauchy 数列,因此有

定理 1.1.2 ……………………………………………………………

$\mathbb{R}^n$ 是**完备**的,即$\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 序列必收敛于$\mathbb{R}^n$ 中的点.

$\mathbb{R}^n$ 中的闭集还有下列性质：

定理 1.1.3 ……………………………………………………………………

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为闭集，$\{\boldsymbol{X}_k\}$ 为 Ω 中的收敛点列，收敛点为 $\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A} \in \Omega$.

证明　假设 $\boldsymbol{A} \notin \Omega$，因为 Ω 是闭集，Ω 的余集$\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 为开集，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 为内点，$\exists \delta > 0$，使得 $\Omega \cap B(\boldsymbol{A}, \delta) = \varnothing$，与 $\lim\limits_{k \to +\infty} \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{A}$ 矛盾.

1.1.5　$\mathbb{R}^n$ 的进一步研究

除了定理 1.1.2(Cauchy 准则)外，在上册的实数理论中，我们研究了实数轴$\mathbb{R}^1$ 的性质：

确界原理：非空有上界(下界)的实数集必有上(下)确界；

单调收敛定理：单调有界实数列必收敛；

Weierstrass 定理：有界实数列必有收敛子列；

以及在习题中出现的**区间套定理**，**有限覆盖定理**等. 这一节，我们将研究这些性质在$\mathbb{R}^n$ 中的推广.

确界原理和单调收敛定理在$\mathbb{R}^n$ 中没有推广，因为当 $n \geqslant 2$ 时，$\mathbb{R}^n$ 中的两个点 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 之间没有大小关系.

定理 1.1.4(Weierstrass 定理) ……………………………………………………

$\mathbb{R}^n$ 中的有界点列必有收敛子点列.

证明　为书写简单起见，我们仅对 $n=3$ 的情况证明，一般的 n 类似.

设$\mathbb{R}^3$ 中的点列$\{\boldsymbol{X}_k\}$为有界点列，即

$$\exists M > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+, \quad \|\boldsymbol{X}_k\| \leqslant M,$$

则$\{\boldsymbol{X}_k\}$的 3 个分量构成的 3 个实数列$\{x_k^{(i)}\}(i=1,2,3)$均为有界数列. 由$\mathbb{R}^1$ 的 Weierstrass 定理，对于$\{\boldsymbol{X}_k\}$的第一个分量构成的实数列$\{x_k^{(1)}\}$，存在收敛子列$\{x_{k_l}^{(1)}\}$，即存在实数 $a^{(1)}$，

$$\lim_{l \to +\infty} x_{k_l}^{(1)} = a^{(1)},$$

$\{\boldsymbol{X}_k\}$的第二个分量构成的实数列$\{x_k^{(2)}\}$的相应的子数列$\{x_{k_l}^{(2)}\}$也是一个有界数列，有收敛子列(数列$\{x_k^{(2)}\}$的子子列)$\{x_{k_{l_m}}^{(2)}\}$，即存在实数 $a^{(2)}$，

$$\lim_{m \to +\infty} x_{k_{l_m}}^{(2)} = a^{(2)},$$

$\{\boldsymbol{X}_k\}$的最后一个分量构成的实数列$\{x_k^{(3)}\}$的相应的子数列$\{x_{k_{l_m}}^{(3)}\}$也是一个有界数列，有收敛子列$\{x_{k_{l_{m_s}}}^{(3)}\}$，即存在实数 $a^{(3)}$，使得

$$\lim_{s \to +\infty} x_{k_{l_{m_s}}}^{(3)} = a^{(3)}.$$

记 $\boldsymbol{A} = (a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$，点列$\{\boldsymbol{X}_k\}$存在子列$\{\boldsymbol{X}_{k_{l_{m_s}}}\}$，使得

$$\lim_{s\to\infty}\boldsymbol{X}_{k_{l_{m_s}}}=\boldsymbol{A},$$

即有界点列$\{\boldsymbol{X}_k\}$存在收敛子点列.

定义了非空集合$\Omega\subset\mathbb{R}^n$的直径:

$$d(\Omega)=\sup\{\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|\mid\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\Omega\}$$

之后,我们可以给出闭集套定理(为简单起见,这里只给出定理的叙述).

定理 1.1.5(闭集套定理)

设$\{F_k\}(k=1,2,3,\cdots)$为闭集族,满足

$$F_1\supset F_2\supset F_3\supset\cdots\supset F_k\supset\cdots$$

且均非空.如果$\lim\limits_{k\to+\infty}d(F_k)=0$,则在集合$\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}F_k$中有且只有一点.

定义 1.1.8

设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$,$\{G_\alpha\}(\alpha\in I)$为开集族,如果$\Omega\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}G_\alpha$,则称$\{G_\alpha\}(\alpha\in I)$为$\Omega$的一个开覆盖.

定理 1.1.6(有限覆盖定理)

设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为有界闭集,$\{G_\alpha\}(\alpha\in I)$为$\Omega$的一个开覆盖,则在$\{G_\alpha\}(\alpha\in I)$中,存在有限个开集$\{G_{\alpha_i}\}$,$\alpha_i\in I,i=1,2,\cdots,N$覆盖$\Omega$:

$$\Omega\subset\bigcup_{i=1}^{N}G_{\alpha_i}.$$

习题 1.1

1. 证明:n维Euclid空间中的距离$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|_n$满足正定性、对称性与三角不等式.

2. 求下列集合Ω的内部、外部、边界和闭包.

(1) Ω为$\mathbb{R}^2$的子集,$\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$;

(2) Ω为$\mathbb{R}^3$的子集,$\Omega=\{(x,y,z)\mid 1\leqslant x^2+y^2+z^2<4\}$.

3. 证明下列命题:

(1) 已知$S\subset\mathbb{R}^n$,则S为开集$\Leftrightarrow S=\mathring{S}$;

(2) 若$S\subset\mathbb{R}^n$为开集,则$S\cap\partial S=\varnothing$;

(3) 任意多个开集之并为开集;有限个开集之交为开集;

(4) 若$A,B\subset\mathbb{R}^n$,记$S=A\cap B$,$T=A\cup B$,则$\mathring{S}=\mathring{A}\cap\mathring{B}$,$\mathring{T}\supset\mathring{A}\cup\mathring{B}$;

(5) 若$A\subset\mathbb{R}^n$,则集合$\mathring{A}$的内部等于$\mathring{A}$.

4. 证明下列命题：

(1) 已知 $S\subset\mathbb{R}^n$，则 S 为闭集 $\Leftrightarrow S=\overline{S}\Leftrightarrow\partial S\subset S$；

(2) 若 $A,B\subset\mathbb{R}^n$，则 $\overline{A}\setminus\overline{B}\subset\overline{A\setminus B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$（事实上它们相等），$\overline{A}\cap\overline{B}\supset\overline{A\cap B}$；

(3) 若 $P_1,P_2,\cdots,P_n\in\mathbb{R}^n$，则 $\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$ 为闭集；

(4) 任意多个闭集之交为闭集；有限个闭集之并为闭集.

5. 证明下列命题：

(1) 已知 $S\subset\mathbb{R}^n$，则 $\mathring{S}$ 等于 S 的余集的闭包的余集；$\overline{S}$ 等于 S 的余集的内部的余集；

(2) 若 $A\subset\mathbb{R}^n$，则 $\overline{A}=A\cup\partial A=\mathring{A}\cup\partial A$，$\mathring{A}=A\setminus\partial A=\overline{A}\setminus\partial A$；$\partial A=\partial(\mathbb{R}^n\setminus A)$；

(3) 若 $A\subset\mathbb{R}^n$，则 $\partial(\mathring{A})$，$\partial(\overline{A})\subset\partial A$；

(4) 若 $A,B\subset\mathbb{R}^n$，则 $\partial(A\cup B)\subset\partial A\cup\partial B$；

(5) $\partial A=\varnothing\Leftrightarrow A$ 既是开集又是闭集.

6. 证明：$\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{X}_k\}$ 为 Cauchy 列当且仅当 $\{\boldsymbol{X}_k\}$ 的 n 个分量构成的 n 个实数列 $\{x_k^{(i)}\}_{k=1}^{+\infty}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 均为 Cauchy 列.

7. 下列集合中，哪些是连通的，哪些是非连通的？

(1) $D=\{(x,y)\mid y\neq 0\}$；　　(2) $D=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 2\}$；

(3) $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\neq 0\}$；　　(4) $\Omega=\{(x,y,z)\mid 1<x^2+y^2+z^2\leqslant 4\}$.

8. 连通的闭集是否为闭区域？如果是，请证明；如果不是，请举出反例.

9. 证明：$\mathbb{R}^n$ 中的收敛点列必为有界点列.

1.2 n 元函数与 n 元向量值函数

n 元函数与 n 元向量值函数是我们这一本书研究的对象，因此我们先给出它们的定义.

1.2.1 n 元函数

定义 1.2.1

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，若一个对应法则满足：对于任意的点 $\boldsymbol{X}\in\Omega$，存在唯一的数值 $y\in\mathbb{R}^1$ 与之对应，则我们将这个对应法则称为一个 **n 元函数**，记作 f，

$$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1,$$
$$\boldsymbol{X}\mapsto y.$$

n 元函数常记作 $y=f(\boldsymbol{X})$，其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为**自变量**（n 元），$y\in\mathbb{R}^1$ 为**因变量**，Ω 为 f 的**定义域**，集合 $\{y\mid\exists\boldsymbol{X}\in\Omega，使\ y=f(\boldsymbol{X})\}$ 为 f 的**值域**.

$n=1,2,3$ 时,分别称为一元、二元、三元函数. 上册书中我们主要研究一元函数.

例 1.2.1

$z=x^2+y^2,(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 为一个二元函数,其定义域为$\mathbb{R}^2$,值域为$[0,+\infty)\subset\mathbb{R}^1$. 函数的图形如图 1.2.1 所示. 我们称这个函数表示的曲面为旋转抛物面.

$z=xy,(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 也是一个二元函数,定义域为整个平面$\mathbb{R}^2$,值域为$\mathbb{R}^1$,函数的图形如图 1.2.2 所示. 我们称这个函数表示的曲面为马鞍面.

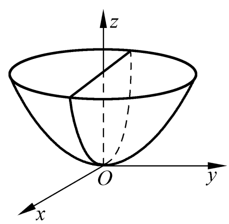

图 1.2.1 旋转抛物面

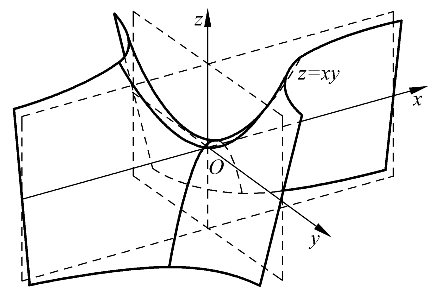

图 1.2.2 马鞍面

$u=\ln(1-z)+\sqrt{z-x^2-y^2},(x,y,z)\in\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为一个三元函数,定义域为 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$,$\Omega$ 的图形如图 1.2.3 所示.

有公共定义域的两个 n 元函数可以定义四则运算.

设 $f(\boldsymbol{X}),g(\boldsymbol{X})$ 均为 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上的多元函数,则可以定义新的函数 $f\pm g,\lambda f,fg,\dfrac{f}{g}$:

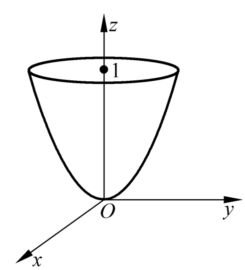

图 1.2.3

$f\pm g:\boldsymbol{X}\mapsto f(\boldsymbol{X})\pm g(\boldsymbol{X})$,

即$(f\pm g)(\boldsymbol{X})=f(\boldsymbol{X})\pm g(\boldsymbol{X})$;

$\lambda f:\boldsymbol{X}\mapsto\lambda f(\boldsymbol{X})$, 即$(\lambda f)(\boldsymbol{X})=\lambda f(\boldsymbol{X})$;

$fg:\boldsymbol{X}\mapsto f(\boldsymbol{X})g(\boldsymbol{X})$, 即$(fg)(\boldsymbol{X})=f(\boldsymbol{X})g(\boldsymbol{X})$;

$\dfrac{f}{g}:\boldsymbol{X}\mapsto\dfrac{f(\boldsymbol{X})}{g(\boldsymbol{X})}$, 即$\left(\dfrac{f}{g}\right)(\boldsymbol{X})=\dfrac{f(\boldsymbol{X})}{g(\boldsymbol{X})}$, $g(\boldsymbol{X})\neq 0$,

以上均为 Ω 上的 n 元函数.

多元函数的表达方式是多种多样的,除了 $y=f(\boldsymbol{X})$(我们称为显式表示)之外,在某些条件下(我们后面会具体给出这些条件),方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$ 也可以确定 y 是$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的函数,我们称之为隐式表示. 除此之外,多元函数还有参数表示法等.

例 1.2.2

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 为二元函数，它的一个隐式表示为

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0, z\geqslant 0.$$

它的一个参数表示法为

$$\begin{cases} x=R\sin\theta\cos\varphi, \\ y=R\sin\theta\sin\varphi, \\ z=R\cos\theta, \end{cases} \quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \varphi\in[0,2\pi),$$

其中 θ,φ 为参数.

1.2.2　$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 的向量值函数

定义 1.2.2

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，一个对应法则满足：对于任意的 $\boldsymbol{X}\in\Omega$，存在唯一的 $\boldsymbol{Y}\in\mathbb{R}^m$ 与之对应，则这种对应法则称为从 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的一个**向量值函数**，

$$\boldsymbol{f}:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,$$
$$\boldsymbol{X}\mapsto\boldsymbol{Y},$$

记作 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$，$\Omega$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 的**定义域**，$\boldsymbol{f}(\Omega)=\{\boldsymbol{Y}\in\mathbb{R}^m \mid \exists\,\boldsymbol{X}\in\Omega,\text{使}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})\}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 的**值域**.

若记 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，则从 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的一个向量值函数

$$\boldsymbol{f}:(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega \quad\mapsto\quad (y_1,y_2,\cdots,y_m),$$

其中每个分量 $y_j(j=1,2,\cdots,m)$ 都是 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的函数（n 元函数），记成

$$y_j=f_j(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega,\quad j=1,2,\cdots,m,$$

因此一个由 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的向量值函数等价于 m 个 n 元函数的联立：

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \qquad\vdots \\ y_m=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n), \end{cases} \quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega,$$

反之亦然. $f_j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 的第 j 个**分量函数**.

例 1.2.3

通常 $\Omega\subset\mathbb{R}^1$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的向量值函数 $(x,y)=\boldsymbol{f}(t)$ 表示平面上的一条曲线. 例如

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases} \quad t\in(-\pi,\pi]$$