

第 1 讲

Young 氏双缝实验→广义 Young 氏 双缝实验→Qubit

——物理概念：“量子力学的核心”

- 1.1 令人为难的 Young 氏双缝实验解释
- 1.2 Young 氏双缝实验解释中常见的错误和缺点
- 1.3 实验中电子究竟是怎样穿过双缝的
- 1.4 Young 氏双缝实验的两个理论计算
- 1.5 各种翻版的 Young 氏双缝实验, 广义 Young 氏双缝实验
- 1.6 关于大强度电子束入射 Young 氏双缝实验问题
- 1.7 分析与结论: 广义 Qubit

1.1 令人为难的 Young 氏双缝实验解释

Young 氏双缝实验是量子力学中最初的、最普通的、最著名的、最奇特的实验, 也是最富于量子力学味道的实验。全部疑惑在于, 实验中可以将入射电子束流强度调得很低, 以致每个电子都是单独穿过狭缝的。显然, 如此实验只涉及每个电子的自身性质, 并不涉及电子集体行为。但集体的结果却是造成了体现波动性的干涉花样。这说明实验中体现波动性的相干现象来自每个电子, 每个电子都是自身干涉的!

总之, 它表面浅显易懂, 其实难以理解和表述; 它很容易利用程差简易说明, 但又难以求解 Schrödinger 方程得到强度分布; 它出现在所有量子力学教材中, 是众所周知的基础性实验, 但人们常常忽略了它许多重要的侧面; 它是量子力学中最古老、最普通的实验, 但近代却又不断出现花样翻新的新版本^①。最后, 正是对它的深入思索导致 Feynman 产生路径积分思想。

由此就能理解 Feynman 的话: **Young 氏双缝实验是量子力学的心脏**。它确实是理解量

^① 比如, 观察单光子在双缝实验中平均路径的文章: *Science*, 2011, 332: 1170。

子力学本质的关键。如果说量子力学是位美女,Young 氏双缝实验就是这位美女捉摸不透的心!

实验中,接收屏某点探测器测到的电子是由电子枪发射并穿过双缝屏到达的。这些电子一个一个究竟是怎样穿过双缝的?

这是一个令人难以回答的问题。不算没穿过去的情况,不外乎两种答案:随机地从上缝或下缝穿过去,从两缝同时穿过去。两种回答都无法选择。

要是回答:“每个电子都是(随机地)从两条缝之一穿过”,即“确定,但不确知”,那么肯定不能产生双缝干涉条纹。这导致否定 Young 氏双缝干涉实验现象,人们不敢如此回答。

要是回答:“每个电子都是从两条缝同时穿过的”,这样一来,产生双缝干涉条纹是没有问题了,但似乎电子被分成了两半,可是谁也没有看到过半个电子。人们不愿意这样回答。



(此图来自 Charles Addams, The New Yorker (1940))

1.2 Young 氏双缝实验解释中常见的错误和缺点

1. 各种错误的回答

经典观念牢固:“电子不是孙悟空,只能从两缝之一穿过去。”

承认没有想清楚:“这是个两难的问题——回答困难。”

绕过去不回答:“缝屏前的入射电子消失了,在缝后接收屏上某处电子被探测到了。”

本质上是经典观念:“电子客观上是在空间某处,只是我们不知道。一旦知道了,状态就会改变。”

用经典观念来概括:“(客观上)是确定的,但(我们)不确知。”

直截了当拒绝回答:“这是个科学之外的问题。”

还是直截了当地拒绝回答:“不必问电子是怎样穿过双缝的,因为那是哲学的东西。我们是研究物理规律的。”

平庸的错误：“一束电子集体构成一个波束，这个波束同时穿过双缝，形成干涉花样。”这实质是主张：“电子的波动性只是电子集体的相干性行为，不承认单个电子有内禀的波动性质。”

引人遐想的错误：“电子是漂浮在波函数海面上的一艘船，它往哪走由海流引导，一旦被发现，则是这艘船的完整的本身。”

有的书似是而非地否定：“说电子从两条缝同时穿过去是不对的。因为，这和电子是个局域性的东西相矛盾。何况，从来没人看到过从两条缝同时穿过去的实验现象。”似乎有理地否定：“又说电子从两条缝同时穿过去，又不能真正明白地测量发现这件事。这是违背科学精神的。”(此条观点见脚注⑥，分析见下面 1.3 小节中第 2。)

还有刻意模仿 Feynman 的话，但却是完全错误的主张：“分立和连续的统一是量子力学的心脏。”(“*This union of the discrete and the continuous is at the heart of quantum mechanics.*”)^②。这的确应验了 Feynman 的另一个说法：

I can safely say that nobody understands quantum mechanics.

2. 不少量子力学书的原理图漏画了电子源和双缝屏间的单缝屏——它提供双缝实验的稳定的初始相位条件(由于不可能制造出几何点状电子源，于是必须保证由电子源上不同点发出的电子到达双缝时所经历的程差是相同的。单缝屏就专为此而设)。请看图 1.1 所示各图：

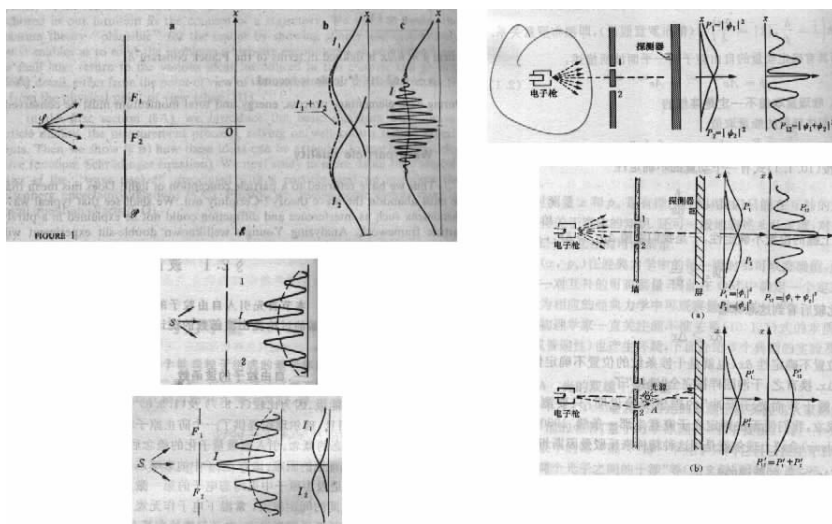


图 1.1

② B. G. Englert. Lecture on quantum mechanics. Vol. basic matters, p. 51. World Sciences Publishing House. 这种主张错误在于：经典物理学的波动力学中也普遍存在分立与连续统一的现象。一维弦振动、二维膜振动和三维微波腔振动都存在分立本征态解的振幅连续叠加问题。

作为对照,下面引用 Feynman 量子力学书中 7 幅双缝实验图(见图 1.2)^③。各图都不厌其烦地画出了单缝,只图 1.2(e)未画,但明白标出平面波入射——初始相差为零,仍是固定的。

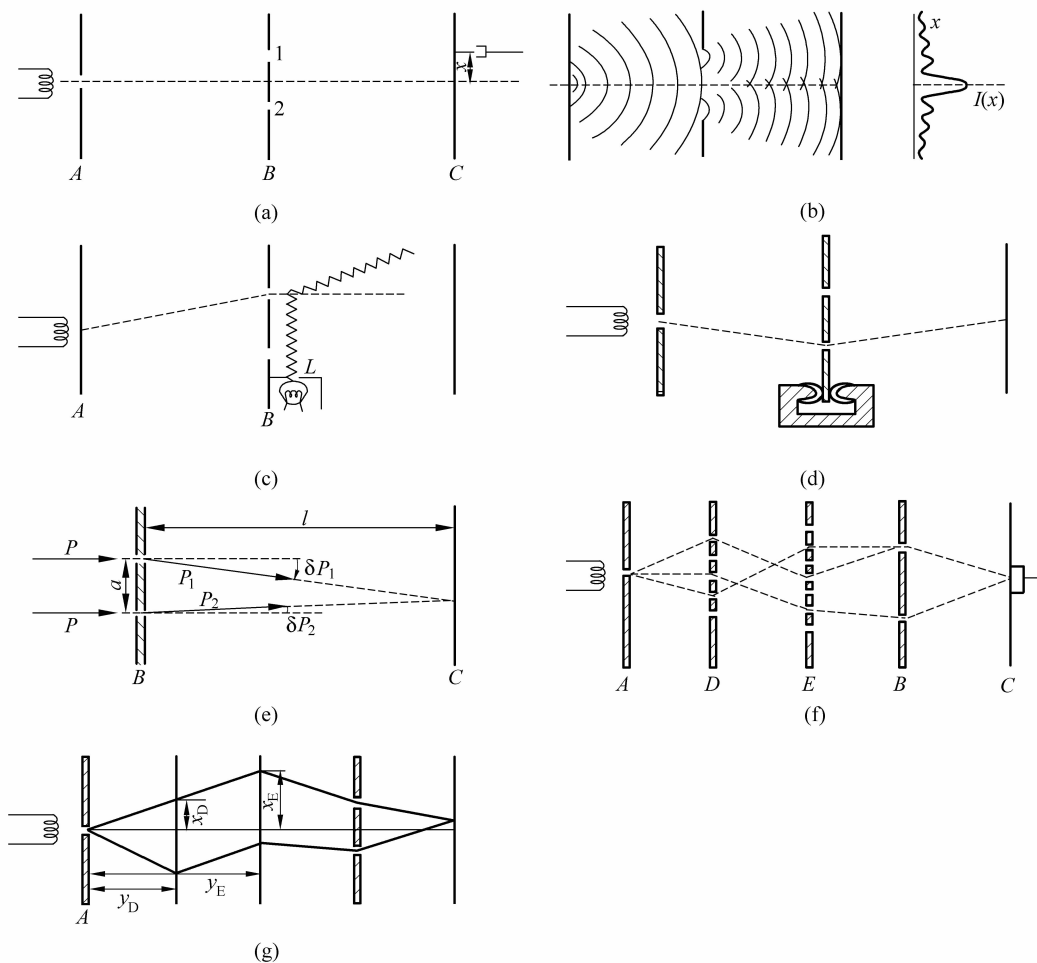


图 1.2

3. 片面解释成为标量的干涉实验。电子是个两分量旋量,不是标量场,所以电子 Young 氏双缝实验应当是个两分量旋量干涉实验。即便光子也有极化,应当考虑含偏振因素的双缝干涉。

^③ R. P. Feynman and A. R. Hibbs. Quantum Mechanics and Path Integrals. McGraw-Hill Book Company, 1965.

4. 只有简单的关于条纹位置的程差估算,缺少关于概率分布的理论计算。
5. 缺少 Young 氏双缝实验的近代翻版的介绍。

1.3 实验中电子究竟是怎样穿过双缝的?

1. 正确的回答

在此实验中,每个电子都是从两条缝同时穿过去的。电子所处状态是两条途径的两种状态的相干叠加: $|\Psi\rangle = c_1 |\text{Yes}\rangle + c_2 |\text{No}\rangle$,表明每个电子都是自身干涉。若进行 which way 测量,必向两者之一塌缩;原则上无法分辨就会发生双态间的干涉。

从本质上说,微观粒子的内禀性质既不是经典“波包”,也不是经典“弹丸(粒子)”。它们的行为只是有时像宏观“波包”,有时又像宏观“弹丸”。人们采用宏观世界的经典物理学语言作不伦不类的比喻就说是“波粒二象性”(仿佛苏州西园五百罗汉堂的济公塑像)。

不同于宏观情况,微观粒子的量子状态像一个个极易破碎的玻璃杯,像一个个非常害羞的小女孩的面孔。对微观粒子作实验观测,将不可避免地干扰观察对象。微观粒子究竟“像”什么与怎样观测有关——观测结果依赖于观测类型(测量哪种类型的力学量)。观测导致状态的塌缩,不同类型的观测导致状态的不同类型的塌缩。不同的观测,需要用不同本征函数族对量子态展开,决定了接着发生的不同的随机塌缩,使人们产生不同的印象。比如,人们对电子的“粒子”形象,追根溯源来源于企图“俘获”电子这一类型的实验;而它的“波动”形象则来源于企图“测量电子动量”这一类型的实验。

务必注意: ①“几点”、“质点”、“轨道”等概念的确有助于精确表达自然规律^④,但归根结底,它们只是欧几里德和牛顿主观思考中想像出来的、人为的、自然界并不存在的东西; ②“测量可以不干扰被测对象”只来源于宏观世界的物理经验。牛顿力学和 Maxwell 电磁理论的经典物理学是在我们身边、离我们最近的物理学,但却不一定是最基本的、最有概括力的物理学。现在的问题是,不要将这些宏观的或主观的思维积习认为是基本的。不要理所当然的、无意识的在思辨时用到微观世界的量子力学中! 西方的科学精髓告诉我们: 进入微观世界时,必须依靠、也只能依靠“实验事实+逻辑推理”。

此处的解释是唯一符合所有实验事实又逻辑自洽的回答。同时,只要无法知道电子从哪个缝过去,就会发生干涉;一旦用任何办法知道每个电子是从哪个缝过去的,干涉花样便会消失。原因是,这时已经有不同的广义好量子数可供区分了^⑤。

2. 回答之难的再一个例证。

文献^⑥中有一段文字可以作为佐证。该处正确说了: *Only when there is no way of*

④ P. A. M. 狄拉克. 量子力学原理. 陈咸亨译. 北京: 科学出版社, 1965: 47.

⑤ E. Buks, et al. Dephasing in electron interference by a “which-path” detector. *Nature*, 1998, 391: 871.

⑥ D. Bouwmeester, A. Ekert and A. Zeilinger. *The Physics of Quantum Information*. Springer-Verlag, 2000: 2.

knowing, not even in principle, through which slit the particle passes, do we observe interference. 接着却错误地强调: as a small warning we might mention that it is not even possible to say that the particle passes through both slits at the same time, although this is a position often held. The problem here is that, on the one hand, this is a contradictory sentence because a particle is a localised entity, and, on the other hand, there is no operational meaning in such a statement. 下面接着又回到正确说法: We also note that one can have partial knowledge of the slit the particle passes at the expense of partial decoherence.

中间一段说法有问题,是因为,文中告诫人们不能说粒子同时穿过两条缝的两条理由都不成立。这两条理由是:

其一,粒子是个局域性的东西,因此不能说它从两条缝同时穿过,说它从两条缝同时穿过是矛盾的;其二,从两条缝同时穿过的说法不具有可操作的意义,因为真要测量究竟从哪条缝穿过,就必定发现是从两缝之一穿过的。

对第一条的辩驳是,有什么理由事先规定微观客体是“局域性的东西”呢? 难道它们的本性是粒子吗?! 难道它们的“粒子面貌”不正是人们总是采用“抓住”这类测量方式将粒子“逼向”位置本征态所造成的吗?! 有什么理由把这一类测量结果当成被测微观客体在测量之前就客观存在的面貌呢?!

对第二条的辩驳是,怎么能说“从两条缝同时通过”的说法“没有可操作意义”呢?! 这种批评是批评者的思想沉湎于“which way”这类实验不能自拔的结果。难道 Young 氏双缝实验、单侧入射时 Mach-Zehnder 干涉仪(见图 1.3)的延迟选择,不都是“具有可操作意义”的实验事实吗?!

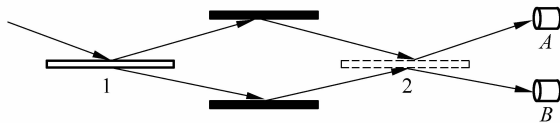


图 1.3 Mach-Zehnder 干涉仪示意图

3. 确实是两路同时过的——Mach-Zehnder 干涉仪与延迟选择

如图 1.3 所示,当一个光子自左入射到半透片 1 上,分解为透射和反射两路,分别经两个全反射镜反射后,这两路光子入射到半透片 2 上,最后进入探测器 A 和 B。设想,在光子通过半透片 1 之后,才决定是否安置半透片 2——延迟选择。这时两种情况的计算结果分别为:

不放置 2: A 和 B 中只有一个接收到该光子,随机、等概率。过 1 后处于两路的叠加态,由于 A、B 的探测迫使其塌缩到两路之一。这导致 AB 中只有一个能探测到该光子。

放置 2: 只有 B 能接收到该光子(详见后面 p. 52,第 6.2 节)。

综合这两方面,可以说,延迟选择暴露了:此光子原来是同时通过两路的。

1.4 Young 氏双缝实验的两个理论计算

1. 极化 Young 氏双缝实验计算

光子、电子都是极化的。所以,Young 氏双缝实验应当是极化的!

假设:入射电子束是极化的,极化方向朝上。同时,在缝屏两缝之一(比如上缝)的后方添加一个小线圈,线圈中通以适当大小的电流,线圈电流所生磁场使得穿过上缝(经过线圈)的电子进动后自旋刚好翻转朝下。这样,到达接收屏上的电子便可以用它们的极化方向来区分了:(未经翻转)自旋仍然朝上的电子是下缝过来的;(经过翻转)自旋朝下的是从上缝过来的。

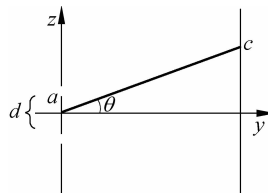


图 1.4

假设:①两缝之间距离 $d \gg$ 缝宽 a , 偏角 θ 很小;②磁场使上缝电子自旋绕 y 轴自 z 偏转 α 角,而下缝过来的电子自旋仍然朝上。于是接收屏上 c 点的旋量波函数为

$$\begin{aligned} |\psi_c\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(e^{iky}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}_1 + e^{i(ky+\beta)}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}e^{i(ky+\frac{\beta}{2})}\begin{pmatrix} e^{-i\beta/2}\cos\alpha + e^{i\beta/2} \\ e^{-i\beta/2}\sin\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

这里,两束之间的相位差 β 和归一化系数 N 为

$$\beta = 2\pi \frac{\delta l}{\lambda} = 2\pi \frac{d\sin\theta}{\lambda}; \quad N = \int_c \langle\psi_c|\psi_c\rangle dc = 1$$

如果只测 $+z$ 方向自旋(即,探测点 c 安放的是对 $+z$ 自旋取向灵敏的探测器),这时必须将 $|\psi_c\rangle$ 按 σ_z 的本征态 $|+z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|-z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 展开。按此重新表述上式:

$$|\psi_c\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}e^{i(ky+\frac{\beta}{2})}\{(e^{-i\beta/2}\cos\alpha + e^{i\beta/2})|+z\rangle + (e^{-i\beta/2}\sin\alpha)|-z\rangle\}$$

测得的强度为

$$I_{+z}(\beta, \alpha) = |\langle +z | \psi_c \rangle|^2 = \frac{1}{N}(1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha)$$

由此表达式可以看出,强度还依赖于自旋转角 α :

- (1) 自旋转角 α 固定,条纹极值 $\beta = 2n\pi \rightarrow d\sin\theta = n\lambda$;
- (2) 如 $\alpha = 0$,条纹随程差(θ 或 β)而变,同前结果;
- (3) 如 $\alpha = \frac{\pi}{2}$,上缝自旋向下,干涉消失,与 β 无关。

如果只测 $+x$ 方向自旋, c 点只安放对 $+x$ 自旋取向灵敏的探测器。这时须将 $|\psi_c\rangle$ 按 σ_x

本征态 $|\pm\hat{x}\rangle$ 展开。由于在 σ_z 表象中,

$$|+\hat{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-\hat{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

于是有

$$\begin{aligned} |\psi_c\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2N}} e^{i(ky + \frac{\beta}{2})} \{ (e^{-i\beta/2}(\cos\alpha + \sin\alpha) + e^{i\beta/2}) |+\hat{x}\rangle \\ &\quad + (e^{-i\beta/2}(\cos\alpha - \sin\alpha) + e^{i\beta/2}) |-\hat{x}\rangle \} \end{aligned}$$

相应探测到的强度将为

$$\begin{aligned} I_{+x} &= |\langle +\hat{x} | \psi_c \rangle|^2 = \frac{1}{2N} |e^{-i\beta/2}(\cos\alpha + \sin\alpha) + e^{i\beta/2}|^2 \\ &= \frac{1}{N} [1 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha + (\sin\alpha + \cos\alpha)\cos\beta] \end{aligned}$$

由此得知:

(1) 干涉极值位置依然由程差 $\beta(\theta)$ 决定, 条纹角间距

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{d}, \quad \lambda \ll d$$

对电子,

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} = 1.23 \times 10^{-7}(\text{cm}) \big|_{E=1\text{eV}}$$

(2) 对 α 的依赖关系略为复杂。

空间干涉花样变成和自旋有关了!

特别是, 即便上下两缝自旋态为 $|\pm z\rangle$ 时,

$$|\pm z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|+x\rangle \pm |-x\rangle\}; \quad |\pm x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|+z\rangle \pm |-z\rangle\}$$

如设想将对极化灵敏的探测器绕(粒子行进方向) y 轴旋转, 就能一再观察到:

某一单缝衍射 $\rightarrow$ 双缝干涉 $\rightarrow$ 另一单缝衍射的循环过程。

若缝宽 a 并不很小于双缝的间距 d , 则应考虑单缝衍射的调制。此效应可近似处理成为乘以下面因子:

$$\text{sinc} \frac{\gamma}{2} \equiv \sin \frac{\gamma}{2} \bigg/ \left(\frac{\gamma}{2} \right), \quad \gamma = \frac{2\pi a \sin\theta}{\lambda}$$

这里 a 为单缝的宽度。例如, 对 $I_{+z}(\beta, \alpha) \Rightarrow I_{+z}(\beta, \alpha, \gamma)$, 有

$$I_{+z}(\beta, \alpha, \gamma) = \text{sinc}^2 \frac{\gamma}{2} \cdot |\langle +z | \psi_c \rangle|^2 = \frac{1}{N} \text{sinc}^2 \frac{\gamma}{2} (1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha)$$

2. 强度分布模型计算

下面给出一个利用模型所做的强度分布的唯象计算^⑦——采用等效势下, 用 Born 近似

⑦ 张永德. 大学物理, 第9期, 1992: 9.

计算接收屏上既有干涉又有衍射的强度分布。设粒子前进方向是 x , 双缝沿 z 方向。于是有

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikx} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') e^{ikx'} d\mathbf{r}'$$

这里, (x, y) 平面取极坐标。 $\mathbf{r}=(\rho, z), \mathbf{r}'=(\rho', z')$ 分别是自双缝之间的 O 点到观察点和势散射点的矢径。 (ρ, ρ') 分别是它们在 $z=0$ 平面上的投影。 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(z-z')^2 + (\rho-\rho')^2}$ 。

令双缝衍射作用为等效势 (a 为等效势衰减长度, d 为等效势衰减长度):

$$V(\rho') = g \left(\frac{e^{-\rho'_1/a}}{\rho'_1} + \frac{e^{-\rho'_2/a}}{\rho'_2} \right), \quad \rho'_1 = \rho' - \frac{d}{2}, \rho'_2 = \rho' + \frac{d}{2}$$

由于 $V(\rho')$ 不含 z' , ψ 的 $d\mathbf{r}'$ 积分对 z' 可先积出。经过一些特殊函数计算, 将结果用 (x, y) 面内的变数 (ρ, θ) 表示:

$$\psi(\rho, \theta) = e^{ikx} - \frac{2mga}{\hbar^2} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho \left(1 + 4k^2 a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)}} e^{ik\rho} \cos\left(\frac{kd}{2} \sin\theta\right)$$

将它写为柱面波散射的形式: $\psi(\rho, \theta) = e^{ikx} + f(\theta) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\rho}}$, 得散射振幅

$$f(\rho, \theta) = -\frac{2mga}{\hbar^2} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho \left(1 + 4k^2 a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)}} \cos\left(\frac{kd}{2} \sin\theta\right)$$

最后得到柱面散射波下的微分散射截面:

$$\frac{d^2\sigma}{d\rho d\theta} = |f(\theta)|^2 = \frac{8\pi m^2 a^2 g^2}{\hbar^4} \frac{1}{k \left(1 + 4k^2 a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)} \cos^2\left(\frac{kd}{2} \sin\theta\right)$$

这就是既考虑两个单缝干涉、又考虑(干涉条纹系列的)包络是两个单缝衍射分布总强度的表达式。其中:

$$(1) \cos^2\left(\frac{kd}{2} \sin\theta\right) = \frac{1}{2} (1 + \cos\beta) \text{ 为双缝干涉因子, 极值条件为 } d\sin\theta = n\lambda.$$

$$(2) \left(1 + 4k^2 a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-1} \text{ 是两个单缝的总衍射因子。此包络稍有误差, 是由于所取等效势不很妥当所致, 并非量子力学原理的缺陷。}$$

1.5 各种翻版的 Young 氏双缝实验, 广义 Young 氏双缝实验

1. 光学半透片: 两个出口处的状态相干叠加

图 1.5 所示为双光子入射, 各自又有两个出口、两种测量选择所造成的状态的相干叠加。设水平极化光子 1 从 a 入射(空间模 a), 半透镜将其相干分解, 反射向 c + 透射向 d ; 垂直极化的另一个光子 2 从 b 入射(空间模 b), 半透镜将其相干分解成反射向 d + 透射向 c 。

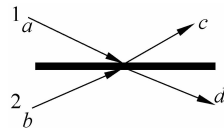


图 1.5

注意,此处每个光子的分解都是相干分解:反射束有 $\pi/2$ 位相跳变,透射束则无^⑧,分束器不改变入射光子的极化状态。于是出射态为

$$|\psi_{12}\rangle_{\text{out}} = |\leftrightarrow\rangle_1 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(i|c\rangle_1 + |d\rangle_1) \cdot |\uparrow\rangle_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|c\rangle_2 + i|d\rangle_2)$$

但是,由于此时两个光子同时到达,出射态中光子的空间模有重叠,按全同性原理必须要对称化。正确的出射态最终应当表述为

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\text{out}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\psi_{12}\rangle_{\text{out}} + |\psi_{21}\rangle_{\text{out}}\} \\ &= \frac{1}{2}\{i|\phi_{(12)}^+\rangle[|c_1\rangle|c_2\rangle + |d_1\rangle|d_2\rangle] + |\phi_{(12)}^-\rangle[|d_1\rangle|c_2\rangle - |c_1\rangle|d_2\rangle]\} \end{aligned}$$

作为对照,这显然类似于双电子同时到达的杨氏双缝——两个电子同时入射到杨氏双缝,各自均按两条缝作相干分解,但要求进行反称化。

2. 各类“which way”的 Young 氏双缝实验

例如,用激发原子代替电子来做 Young 氏双缝实验。这是利用“内部自由度”——用入射原子是否激发作为识别手段,识别每个原子各自从哪一个缝过去的。这是众多“which way”实验中的一类。

由于原子有内部结构——内部自由度,于是可以利用各种激励内部自由度的方法去查明“到底是从哪条缝(或是哪条路径)过来”的“which way”问题。

比如,在两条路径中的一条上(或者,双缝的一条缝后)实施适当波长的激光辐照,使原子共振激发至激发态;而另一条路径上则不照射。与此相应,会合点处则安置对原子是否激发很灵敏的探测器。根据测到的该原子是否激发,就可以判断它是从哪条路径过来的。

所有 which way 实验的总结论:无论双缝、双路、双出口、双态等各种各类 which way 实验,不论用何种方法,只要能够区分“which way”,干涉花样必定消失;只有当实验方案在原理上就无法区分的情况下,干涉现象必定出现。

3. 带 A-B 效应的 Young 氏双缝实验

经典力学中,Maxwell 方程和 Lorentz 力公式都是用场强表达的。全部宏观电磁实验表明,只有规范变换不变的场强才有物理意义。量子力学中,电磁场下 Schrödinger 方程虽然是用电磁势表达的,但由于方程具有定域规范变换不变性,因此人们一直认为,如同经典力学一样,量子力学中也只有电磁场场强才具有可观测的物理效应,电磁势不具有直接可观测的物理效应。

但是,1959 年 Aharonov 和 Bohm 提出,在量子力学中,在某些电磁过程中,具有局域性质(因为是关于空间坐标的微商)的电磁场场强不能有效地描述带电粒子的量子行为,电磁

^⑧ 此结论的论证见第 5 讲。

势有直接可观测的物理效应。下面只对磁 A-B 效应作一简明分析。向电磁 A-B 效应的推广和进一步讨论详见有关文献^⑨。

在缝屏后面两缝之间放置一个细螺线管。通电后管内场强 $\neq 0$ ；但管外场强 $=0$ ，矢势 $\neq 0$ 。这个细螺线管产生一细束磁弦。下面的理论分析表明，相对于没通电的情况来说，通电后，接收屏上干涉花样在包络（干涉条纹极的轮廓线）不变的情况下所有极值位置都发生了移动。电流改变时，峰值位置也跟随改变；电流反向，峰值位置也反向移动。下面对此作一简单分析。

杨氏双缝实验能够做成功必定要求两缝处电子波函数的初始位相差是固定的。不失一般性，假设初始位相差为零，将两缝合并成为 A 点，简化成图 1.6(b)。通电之前，

$$\frac{p^2}{2\mu}\varphi_0(\mathbf{r}) = E\varphi_0(\mathbf{r}), \quad \varphi_0(\mathbf{r}, t) = \varphi_0(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar}$$

c 点的合振幅为 $f_c^{(0)} = f_1^{(0)}(c) + f_2^{(0)}(c)$ 。通电之后 $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ 。于是

$$\begin{cases} \frac{1}{2\mu}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 \varphi(\mathbf{r}) = E\varphi(\mathbf{r}) \\ \varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar} \end{cases}$$

直接验算即知，此方程的解为

$$\varphi(\mathbf{r}) = e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_A^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'} \varphi_0(\mathbf{r})$$

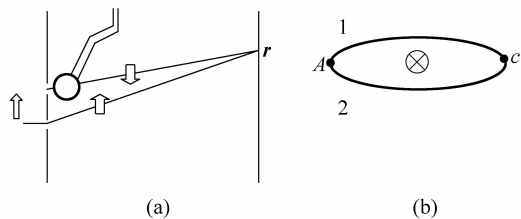


图 1.6

注意，这里的相因子在 $B \neq 0$ 的区域与路径有关（不仅与两端点有关），因而是不可积的；只在 $B=0$ 区域与路径无关（这正说明，磁场毕竟是一种物理的实在，不能通过数学变换将其完全转化为纯粹相因子）。这个相因子存在表明，即使粒子路径限制在磁场强度为零的区域，粒子不受定域的动力学作用，但电磁势（沿粒子路径的路径相关积分）仍会影响到粒子的位相。于是，在通电情况下，c 点的合振幅成为

$$f_c = \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c} \int_{A,1}^c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right\} f_1^{(0)}(c) + \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c} \int_{A,2}^c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right\} f_2^{(0)}(c)$$

^⑨ 张永德. 量子力学. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2010, 第 9 章.

$$= \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c} \int_{A,1}^c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right\} \left\{ f_1^{(0)}(c) + \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c} \oint_{Ac} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right\} f_2^{(0)}(c) \right\}$$

这里,指数线积分的脚标 1 和 2 表示积分分别沿路径 1 和 2 进行。大括号外的相因子是新增加的整体相因子,没有可观测的物理效应,可以略去;但是大括号内的相因子为新增加的内部相因子,它会改变两束电子在 c 点的相对位相差,从而改变双缝干涉的极值位置。

这个内部相因子还可改写为

$$\exp\left\{\frac{ie}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right\} = \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c} \iint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}\right\} = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \varphi\right)$$

指数正比于路径 1 和 2 包围面积内的磁通。相因子不改变单缝衍射的强度分布,条纹移动的同时,诸条纹极值的包络曲线不变。实验很快证实了这一点。注意相因子不含动力学状态参数,与电子动力学状态无关。

4. 中子干涉量度学^⑩: 两条宏观“距离”路径的相干叠加

图 1.7 所示为又一种“which way”实验: 单色热中子束, 于 A 点入射中子干涉仪(整块柱状单晶硅挖成“山”字形)。由于实验经常被安排成逐个中子断续地入射, 于是 Laue 散射使每个中子都被分解成沿透射和衍射两路前进。两路分别在 B 和 C 点经反射后, 交会于 D 点。每次在 D 点的相干叠加都是单个中子沿两条路径的两种状态概率幅的相干叠加! 所以它是一种广义上的 Young 氏双缝实验。其中 AC 束也可穿过横向均匀磁场(空间区间 l)。注意, 这时 B 、 C 两点之间分开为宏观距离(3~5cm), 所以又像下面的 Schrödinger Cat!。假定从 A 到 D 的这两条路径除磁场外完全对称, 在中子极化方向平行于磁场情况下, 点 D 强度的变化关系为(见第 8 讲 8.5 节)

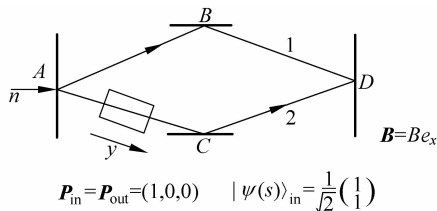


图 1.7

$$I_D(\mathbf{B}) = I_D(0) \cos^2\left(\frac{\rho}{4}\right) = I_D(0) \cos^2\left(\frac{|\mu_n| B l \mu \lambda}{4\pi \hbar^2}\right)$$

这里 $I_D^{(0)} = |\langle \mathbf{r}_D | \psi^{(0)} \rangle|^2$ 为无磁场时 D 点中的子计数强度。结果表明, D 点的中子计数率随磁场的 B 、 l 呈周期变化。干涉仪的两条路径很像天平的两臂, 这种由位相平衡所决定的两分量旋量干涉十分灵敏。各种实验安排创立了高精密度中子干涉量度学, 完成了大量有关检验量子力学基本原理的实验研究和实际测量^⑪。

^⑩ H. Rauch and S. A. Werner. Neutron Interferometry. Oxford Science Publications, 2000. 简单介绍见上面脚注
^⑪ 或本书第 8 讲。

^⑪ 详见本书第 8 讲 8.5 节。

5. 各种宏观“距离”的“Schrödinger Cat 态”

(1) 各种“Schrödinger Cat 态”。要点：一个粒子处于两个不同态的相干叠加态上，而这两个态又要在各种类型意义上为足够的“分开”，以致具有“宏观”的广义的“距离”。例如上面的中子干涉仪中的两路中子态。

(2) 如果这只倒霉的 Schrödinger Cat 是装在透明箱子里的，那将如何呢？——对放射源的连续测量导致量子 Zeno 效应——结果：猫会一直活着！

(3) Schrödinger Cat's Paradox：其实，真正的“死亡”状态与“活着”状态，只是大量原子分子总体的宏观观念。由于大自由度系统不可避免地存在大量相互作用而产生的大量纠缠，造成极快速的退相干，猫的“死亡”状态与“活着”状态之间早已不存在相干叠加态，而是非相干相加的混态。所以佯谬不会出现^⑫。

1.6 关于大强度电子束入射 Young 氏双缝实验问题

这时要考量多个电子同时穿过双缝的情况，必须计及全同性原理的 fermion 反称化效应，出现双缝干涉花样的多体效应。具体分析如下：

鉴于经过双缝到达同一指定探测点的电子空间波函数都相同，于是（同时穿过双缝的）各个电子只剩下自旋指向这个自由度可用于构造全反对称波函数。由 Pauli 不相容原理，用 $1/2$ 自旋电子的两个独立自旋态只能构造双电子反称自旋态，无法构造 3 个及以上电子全反称自旋态。因而不存在 3 个及以上电子的多体双缝干涉效应。而对于两个电子反称自旋态，也只当不是沿 $\pm z$ 轴测量自旋时，才可以发现双电子同时穿过双缝的多体干涉效应。这类似于上面 1.4 节的分析。

1.7 分析与结论：广义 Qubit

1. 无论单粒子或复合粒子杨氏双缝、各种“which way”实验、各类 Schrödinger 猫等，它们可以概括地统称为“广义两能级系统”。系统的两个态矢可以广义地理解为两个能级、两种自旋取向、两种极化方式、两条缝出来、两条路径过来、折射和反射、两个出口、“猫”的死活……，有关实验可以归结为“广义 Young 氏双缝实验”。如果两份概率幅原则上无法区分，将呈现出相干叠加，而当进行“which one”测量时，表现向两者之一的随机塌缩。如果将两个态矢形象地称做 $|\text{Yes}\rangle$ 和 $|\text{No}\rangle$ ，

$$|\Psi\rangle = \alpha |\text{Yes}\rangle + \beta |\text{No}\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

概念上，广义 Young 氏双缝实验等价于“量子位”(quantum bit, qubit)。量子位的量子状态服从“量子逻辑”：既是 Yes 又是 No，既不是 Yes 也不是 No；测量结果，不是 Yes 就是 No。这

^⑫ 张永德. 量子信息物理原理. 北京：科学出版社，2005，第 6 章.

完全不同于“经典 bit 逻辑”：Yes 或 No 只居其一。

2. 只当实验方案原理上无法区分哪一条路(缝、出口、死活、反射折射)——无广义的好量子数(好量子数或“正交特性”)可供识别时,干涉现象才能发生;如果能用某种办法识别得出是哪条路(缝),干涉现象必定消失——已存在可供识别的广义好量子数使两态之间正交,导致干涉消失。如为多粒子情况,“可识别”相应于:按全同性原理进行对(反)称化时,出现的交换矩阵元(此时正是它们显示干涉效应)因正交性而消失。

3. 这类实验中,发生干涉现象的物理根源来自微观粒子的内禀性质——波动性(波粒二象性)。

4. 全同性原理主张:来源不同的全同粒子可以发生干涉!只要从初态→相互作用→测量塌缩到终态的全过程中,不存在可供区分的广义好量子数。所以,Dirac 关于“光子只能自身干涉”的结论^⑬,以及维护 Dirac 结论的“ $1+1 \neq 2$ ”辩护^⑭都是不对的。

5. 全部 which way 实验中塌缩(注意,这是单个粒子自身朝自身两种状态之一的随机选择,并不是在不同粒子间的塌缩与关联塌缩!)过程也是违背相对论性定域因果律的超空间过程!它们一再警示:整个量子理论本质上是空间非定域性的理论——只是披着定域描述的外衣而已!

6. 能作为 qubit 的双态系统必须满足条件:除这两个能级外,其余能级在工作和测量期间的影响可忽略;可施加外控进行相应么正或非么正操控;可随意插入测量;退相干时间短于多次运行时间。



^⑬ P. A. M. 狄拉克. 量子力学原理. 陈咸亨译. 北京: 科学出版社, 1965: 9.

^⑭ A talk of “ $1+1$ is not 2”, included in: Fundamental Problems in Quantum Theory Workshop, Aug. 4-7, 1997, Univ. of Maryland, Baltimore, USA.

第 2 讲

无限深方阱粒子动量波函数的争论

——“量子力学的数学是错的”?!

2.1 无限深方阱模型简单回顾

2.2 Pauli 和 Landau 的矛盾——基态动量波函数的不同解

2.3 矛盾分析与结论

2.4 设想实验的佐证

2.5 产生问题的根源

[附注] Pauli 结果是 Landau 结果在 $a/\hbar \rightarrow \infty$ 时的极限

2.1 无限深方阱模型简单回顾

这个最简单的势阱束缚模型在量子力学书中常有叙述。势函数如下：

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ +\infty, & |x| \geq a \end{cases}$$

相应地，定义在整个 x 轴上的一维 Schrödinger 方程为

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E\psi(x), & |x| < a \\ \psi(x) = 0, & |x| \geq a \end{cases}$$

作为连接条件的边界条件为 $\psi(x)=0 (|x| \geq a)$ 。求解分三个区域进行：

第 I、III 区 $V(x) = +\infty$ ；第 II 区 $V(x) = 0$

坐标波函数求解只需对第 II 区进行。最后，阱中粒子能级和波函数为

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{8ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left[\frac{n\pi}{2a}(x+a)\right], & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$$

将波函数 $\psi_n(x)$ 中的正弦用复指数表示,并近似配以 $\exp\{-iE_n t/\hbar\}$,得

$$\psi_n(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2i\sqrt{a}} [e^{\frac{i}{\hbar}(\frac{n\pi(x+a)}{2a}-E_n t)} - e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{n\pi(x+a)}{2a}+E_n t)}], & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$$

这似乎表明,就阱内情况而言,粒子波函数是两个反向传播的 de Broglie 行波叠加而成的驻波,类似于两端固定的一段弦振动。实际上,这种看法是不严格的。详细分析见 2.3 节。

2.2 Pauli 和 Landau 的矛盾——基态动量波函数的不同解

1. 两种基态动量波函数表达式

显然,这个问题只是一种近似的数学模型。因为势能不可能真为无限大,其变化也不会是严格的阶跃。

有时,边界条件被改写为 $\psi(x)=0(|x|=a)$ 。这两种不同的边界条件写法对求解阱内坐标波函数并无影响。但要注意,后面写法对阱外坐标波函数取值情况未作规定,是含混的。下面分析表明,矛盾正是来源于这个含混^①。

W. Pauli 等人的做法^②: 对于阱内粒子处于基态时求解其动量波函数 $\varphi_1(p)$ 的问题, Pauli 大概想都没有想就简单地认为,阱中粒子处于基态 $n=1$ 时,其动量波函数只含有强度相同、传播相向的两个单色波叠加而成的驻波,动量谱的成分就是同等份额的、动量数值分别是“ $p=\pm\frac{\pi\hbar}{2a}$ ”的两个单色 de Broglie 平面波。于是,他不经推导直接就写出下面动量概率分布:

$$|\varphi_1(p)|^2 = \frac{1}{2}\delta\left(p - \frac{\pi\hbar}{2a}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(p + \frac{\pi\hbar}{2a}\right)$$

实际上,此式并不严格正确,只当波的运动定义在全实轴上时才正确。

L. D. Landau 等人的做法^③: 将上面定义在全实轴上的基态坐标波函数作 Fourier 积分变换,得到无限深方阱中粒子的动量波函数 $\varphi_1(p)$:

① 张永德. 量子力学. 第2版. 北京: 科学出版社, 2010, 第3章.

② W. Pauli. Handbuch der Physik. eds. by H. Geiger and K. Scheel, Vol. 24/1, Springer, Berlin, 1933. 中译本“Pauli 物理学讲义”, 第五卷: 波动力学. 洪铭熙等译. 北京: 人民教育出版社, 1983: 15 及注①。1956—1958 年在苏黎世联邦工业大学物理学位课程两次授课中, 他依然如此讲。

H. Yukawa. Quantum Mechanics. Vol. 1, Yanbo Bookshop, 1978. L. N. Cooper. 物理世界(上、下). 杨基方等译, 北京: 海洋出版社, 1984: 184.

J. M. Domingos, et al. Found. Phys., 1984, 14(2): 147.

③ Л. Д. 朗道, E. M. 栗弗利茨. 非相对论量子力学. 俄文第一版为 1947 年.

$$\varphi_1(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\frac{px}{\hbar}} \psi_1(x)$$

代入 $\psi_1(x)$ 表达式, 注意阱外 $\psi_1(x)$ 为零, 即得阱中粒子动量概率是连续分布

$$|\varphi_1(p)|^2 = \frac{\pi a \cos^2\left(\frac{ap}{\hbar}\right)}{2\hbar} \left[\left(\frac{ap}{\hbar}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \right]^{-2}, \quad -\infty < p < +\infty$$

两种结果很不同! 哪个正确?! 两个都对? 两个都错? 按几年来的讨论情况, 4 种观点全有表述。可见分歧明显、争论激烈^④。

2. 误解列举

事情还并不到此为止。由这两个不同解答出发, 进一步衍生出许多疑问。它们包括:

动量波函数的物理含义问题;

Schrödinger 方程的定义域问题;

动量、角动量、动能、Hamiltonian 等算符的厄米性问题;

QM 解的完备性问题;

QM 数学正确性问题;

QM 理论自洽性问题, 等等。

显然, 争论已经殃及量子力学的基本原理。这些问题起先在国外非主流学术界中讨论, 接着被引进国内, 20 世纪 80—90 年代掀起过不大不小的争论, 发表了不少文章和著作, 出现对 QM 各种程度的否定或曲解(部分文献见脚注^④)。这些争论最后导致《文汇报》(1997 年 12 月 10 日)头版报道(图 2.1)。报道的通栏黑体字标题是

“中国数学家挑战物理学

量子力学逻辑自相矛盾”

可见曾经出现过对 QM 多大的误解!

^④ 国内自 1983 年 6 月起, 在《大学物理》、《光子学报》等有多篇文章。其中一部分为: 《一维无限深势阱内粒子的动量分布》, 两篇文章《《大学物理》, 1994, 7》; 《关于同一问题的不同解法》(《《大学物理》》); 《编者的话》(《《大学物理》》); 《谈谈量子力学中的动量算符》(《《大学物理》》); 《也谈正则动量算符之争》(《《大学物理》》); 《编者的话》(《《大学物理》》); 《也谈一维无限深势阱内粒子(基态)的动量概率分布》(《《大学物理》》, 1998, 7》); 《关于量子力学基础的一个质疑》(《《光子学报》》, 1997, 9》); 《也谈量子力学的基础》(《《光子学报》》, 1998, 4》)。



图 2.1

2.3 矛盾分析与结论

按 QM 的基本原理,波函数、动量算符及 Schrödinger 方程都应当定义在整个(空间)实轴上,而不是只定义在(有限空间的)势阱内。所以,正确的边界条件应当是

$$\psi(x) = 0, \quad |x| \geq a$$

而不是

$$\psi(x) = 0, \quad |x| = a$$

如果相反,认为边界条件可以用后者,并认为物理量算符“只”定义在势阱 $|x| \leq a$ 内,这不仅会给 QM 基本原理解释以及很多算符(比如,动量算符及相关的动能算符、轨道角动量算符等)的厄米性、完备性带来许多不必要的混乱和麻烦,理论处理很烦琐;而且动量波函数的解有两种不同的结果!

前面 2.1 节中曾经说过:阱内粒子波函数是两个行波叠加而成的驻波,类似于两端固定的一段弦振动。但是,这种说法虽然形象,却是近似的! 因为,这两个行波仅仅存在于(定义于)有限区间 $[-a, a]$ 内,而有限长度光波波列不会是严格单色的!^⑤ 这里问题的关键是:关于坐标波函数边界条件的两种不同提法,虽然不影响求解阱内坐标波函数,但却影响阱内粒子的动量波函数! 因为坐标波函数是定域的,动量波函数是非定域的! 这就是说:阱内

⑤ JI. Д. 朗道, E. M. 栗弗利茨, 非相对论量子力学. 俄文第一版为 1947 年.

动量波函数分布不仅依赖于阱内坐标波函数的形状,而且还依赖于阱外坐标波函数的形状。换句话说,它还取决于对阱外坐标波函数的处理——坐标波函数边界条件的正确拟定!

总之,由设定坐标波函数边界条件的分歧——先是 Pauli, 后来是 Landau 等人给出此模型的阱内粒子动量波函数的两种不同结果,由此引发了混乱。Pauli 只是错误地处理了阱外坐标波函数: 由于并不影响阱内坐标波函数求解,含糊的“两端点为零”边界条件被潜意识地推广为“周期零点”边界条件,得到了坐标波函数的周期解。Pauli 解正是此周期解的动量分布——这等于将阱内坐标波函数向全实轴作了周期性延拓。此周期解的阱外部分显然不符合现在阱外坐标波函数的实际情况,其相应的动量分布当然也就不符合阱内现在的问题。

可以证明(见附注): 当比值 $a/\hbar$ 很大(或 n 很大)向经典趋近时, Landau 解将逐渐演变为 Pauli 解(见附注)。这充分说明: Pauli 解仅仅是大阱宽、高激发态的近似解。当然,与此相应,指数上的量 $n \frac{\pi \hbar}{2a}$ 也不是严格的物理动量(特别是当 a 或 n 较小时)。

2.4 设想实验的佐证

如图 2.2 所示,一块无穷大并足够厚的平板,取厚度方向为 z 轴,板上沿 y 方向开一条无限长的缝,沿 x 轴的缝宽为 $2a$ 。电子束由板的下方入射。分离掉电子在 y 和 z 方向的自由运动,单就电子在 x 方向的运动而言,便是一个(沿 x 方向)无限深方阱问题。在板上方放一接收电子的探测屏,观察狭缝穿出的电子在此探测屏上沿 x 方向的偏转,偏转大小将和电子在 x 方向的动量 p_x 数值有关。由此可知^⑥: 如 a 值较小,必定是一个单缝衍射分布。只当 a 值较大向宏观过渡时,分布才逐渐过渡到两条(平行 y 轴的)细线。

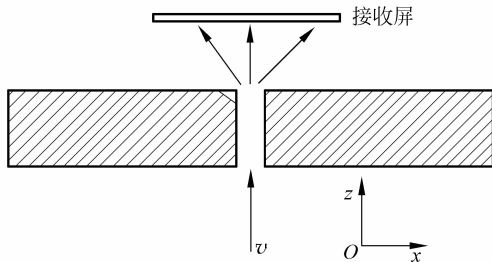


图 2.2

2.5 产生问题的根源

无限深方阱问题只是个模型而已。模型中用到位势的突变和无穷高势垒假设都是对实际物理情况的简化的近似摹写。实际上,物理学中许多常用的数学和物理概念,如: 其小无内的几何点、其大无外的 ∞ 、质点、无头无尾的平面波,等等,都只是一些人为抽象的、理想化的、绝对化的概念。虽然用起来经常很简便,但其实它们在自然界中并不真实存在,有时甚

^⑥ 见脚注①。

至还会惹出麻烦。

Henri Poincare 说^⑦：几何点其实是人的幻想。甚至说：“几何学不是真实的，但是有用的。”按照他对几何学的深刻认识，我们可以说： $V=\infty$ 不是真实的，但是有用的。

从思想方法论来说，全部困惑的根源正在于此：将势垒 $V=\infty$ 这件事看成是物理的真实的了。对它过度的执着干扰了我们对实际物理问题的认识，从而带来许多不必要的困惑和烦恼。文献^⑧也说：理论物理中的很多概念并不代表真实。所以，每当遇到由数学和物理处理的简单化、绝对化、平均化带来问题的时候，返回物理、回归真实，再行考察。记住这点是必要的。

说到底，正如前言中引《道德经》所说（详见本书第 10、14、15 诸讲）：人们能够表述出来的所有理论都只是“可道”之“道”，都只是“相对真理”，无例外地具有各自的局限性和近似性，不必过分认真地将它们看作是“绝对真理”。

〔附注〕 Pauli 结果是 Landau 结果在 $a/\hbar \rightarrow \infty$ 时的极限

证明：利用 δ 函数的一个表达式：

$$\delta(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \beta x}{\pi \beta x^2}$$

由 Landau 结果出发（注意最后极限时有 $p = \pm \frac{\pi \hbar}{2a}$ ）：

$$\begin{aligned} |\varphi_1(p)|^2 &= \frac{\pi a \cos^2\left(\frac{ap}{\hbar}\right)}{2\hbar} \left[\left(\frac{ap}{\hbar}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \right]^{-2} \\ &= \frac{\pi a \cos^2\left(\frac{ap}{\hbar}\right)}{2\hbar} \cdot \frac{\hbar}{2\pi a p} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{ap}{\hbar} - \frac{\pi}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{ap}{\hbar} + \frac{\pi}{2}\right)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{4p} \left\{ \frac{\sin^2\left(\frac{ap}{\hbar} - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{ap}{\hbar} - \frac{\pi}{2}\right)^2} - \frac{\sin^2\left(\frac{ap}{\hbar} + \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{ap}{\hbar} + \frac{\pi}{2}\right)^2} \right\} \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{4p} \left\{ \delta\left(\frac{ap}{\hbar} - \frac{\pi}{2}\right) - \delta\left(\frac{ap}{\hbar} + \frac{\pi}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \delta\left(p - \frac{\pi \hbar}{2a}\right) + \delta\left(p + \frac{\pi \hbar}{2a}\right) \right\} \end{aligned}$$

^⑦ Henri Poincare. 科学与假设. 北京：科学出版社，1989：63, 65.

^⑧ 文小刚. 量子多体理论. 北京：高等教育出版社，2005：19.