第一章　极限与连续

微积分研究的主要对象是函数.因此,熟练掌握函数的有关概念和性质对学好微积分很重要.而极限是数学中的一个重要基本概念,它是学习微积分学的理论基础.因此,掌握好极限和连续的有关概念对后面的学习至关重要.

一、学习指导

(一)函数

1.关于函数概念的几点说明

(1)函数定义的要素之一是对应关系或对应法则.凡函数都有确定的对应关系或对应法则,但不一定有解析式.事实上有很多函数是没有解析式的.如一天 24 小时内每一时刻的气温变化情况.

(2)函数定义的另一要素是定义域.求函数的定义域,应遵循以下两个原则:①在实际问题中,变量应由实际意义确立.②在数学公式中,要使数学公式有意义.

(3)要正确理解记号“f”.如 $y=f(x)=x^2+x$,则 $f(x+1)=(x+1)^2+(x+1)$,而 $f(x^2)=(x^2)^2+x^2$.

(4)若两个函数有相同的定义域,且有相同的对应关系,则这两个函数相等.这里必须强调要同时满足这两个条件.

(5)分段函数.

① 一个分段函数只表示一个函数,不能看成几个函数.

② 分段函数的定义域等于这个函数各“段”区间的并集.

③ 求分段函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值时,要把 $x=x_0$ 代入到 x_0 所在区间相对应的数学公式中去.

2.函数的特性

函数的特性包括奇偶性、单调性、周期性和有界性.

这里要特别强调两点:①不论奇函数或偶函数都是在关于原点的对称区间上讨论的函数特性.离开对称区间就无法谈论函数的奇偶性.②有界函数的界是不唯一的.

3. 反函数

关于反函数，除理解好定义之外，还应掌握以下内容.

(1)函数 $y=f(x)$，若 x 与 y 之间满足一一映射，则函数的反函数一定存在；若 x 与 y 之间不满足一一映射，但若把这个函数限制在定义域的某个区间上，使其能够满足一一映射，则 $y=f(x)$ 在该区间上存在反函数.

(2)求函数 $y=f(x)$ 的反函数一般遵循如下步骤. 先从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$，再在 $x=f^{-1}(y)$ 中把 x 和 y 对调而得 $y=f^{-1}(x)$.

(3) $y=f(x)$ 的图像与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像是同一条曲线；而 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(4)函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的增减性是一致的.

4. 基本初等函数

基本初等函数包括常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

5. 复合函数

学习复合函数时要注意以下几点.

(1)“对于 x 值所对应的 u 值：$u=\varphi(x)$，应使函数 $y=f(u)$ 有意义”是复合函数定义中的重要条件，如果不满足这个条件，就不能够构成复合函数.

例如，$y=\arcsin u$ 而 $u=2+x^2$ 两个函数不能复合，因为当 x 取任何实数时，都有 $u=2+x^2>1$，而 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $|u|\leqslant 1$.

(2)复合函数的中间变量可以不止一个.

(3)把一个复合函数分解成若干个较简单的函数，一般应遵循的原则是，使分解后的每个函数都是基本初等函数的线性组合.

6. 初等函数

由初等函数的定义，可以分解为以下四个条件.

(1)由基本初等函数作为运算和复合的起点.

(2)有限次的四则运算.

(3)有限次的函数复合步骤.

(4)能用一个解析式表示出来.

7. 经济学中的几个常用函数

经济学中常用函数有成本函数，需求函数，供给函数，总收益函数和利润函数等.

二）极限的有关知识

1. 极限的有关概念

(1)数列的极限. 学习数列极限时要注意以下几点.

① 如果数列存在极限，其极限值是唯一的.

② 并不是任何数列都有极限. 有穷数列一定没有极限.

(2)函数的极限. 由于函数自变量的变化趋势有两大类，即 $x\to\infty$ 和 $x\to x_0$，所以函数的极限是分两个类型来定义的.

对于极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，需要说明以下几点.

① 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 存在极限，并不要求 $y=f(x)$ 在 x_0 有定义. 因为我们考察函数的变化趋势时，突出 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 这一过程中的取值情况，因此必须要求 $f(x)$ 在 x_0 的附近有定义. 至于 $f(x)$ 在点 x_0 有无定义，并不影响函数 $f(x)$ 的极限存在. 也就是说 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在，与 $f(x)$ 在点 x_0 有没有定义无关.

例如，函数 $y=f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不存在定义，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

② 由极限的定义，不难得出：$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}c=c$. 这两个极限是今后进行极限运算的重要工具之一，应理解并熟记.

③ 左极限和右极限. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$. 这个结论常用来判定函数在一点 x_0 处的极限是否存在.

例如，函数 $f(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ x+1 & x<0\end{cases}$ 在分段点 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，而 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$. 因为左右极限存在不相等，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

2. 无穷小量和无穷大量

(1)无穷小量. 学习无穷小量要理解以下几点.

① 无穷小量不是一个很小的数，而是一个趋于零的变量.

② 常量中只有零是无穷小量.

③ 无穷小量是和某一极限过程联系着的. 一个函数在这一极限过程中是无穷小量，而在另一极限过程中未必是无穷小量.

(2)无穷小量与具有极限的函数的关系. 即

$\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(\alpha\to 0)$.

(3)无穷小量的阶. 在同一变化过程中，两个无穷小相比较分高阶、低阶、同阶和等价无

穷小.

等价无穷小有一个很有用的性质，在求两个无穷小的比值的极限时，可借助于等价无穷小的代换，简化计算. 但要注意，如果不是乘或除的情况，一般不用等价代换，否则容易导致错误. 例如，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$，不能直接用 x 代替 $\tan x$ 和 $\sin x$.

因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\neq\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}$. 正确的做法是：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}(x\to 0\text{ 时}, \tan x\sim x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

(4)无穷小量与无穷大量的关系. 在同一变化过程中，互为倒数关系.

三)极限的四则运算与两个重要极限

1. 极限的运算法则(略)

2. 两个重要极限

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

注意灵活运用两个重要极限求极限.

四)函数的连续性与间断点

1. 连续的概念

设函数 $y=f(x)$在 x_0 的某邻域$U(x_0)$内有定义，如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$或者$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称 $f(x)$在点 x_0 处连续，称 x_0 为 $f(x)$的一个连续点.

函数在点 x_0 连续的定义中，必须满足三个条件：第一是 $f(x)$在 x_0 及其附近有定义；第二是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；第三是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 只要有一个不满足，$f(x)$在点 x_0 就是间断的.

要注意，关于函数在点 x_0 连续的定义(两种定义)，它们虽然形式不同，但所表达的是同一个概念，本质上并无区别. 由于它们形式不同，在具体使用时，对不同问题要选用不同的定义形式，以求使问题简化.

2. 函数的间断点

由函数 $f(x)$在点 x_0 连续的条件可知，间断点 x_0 至少属于下列三种情况之一：

(1) $f(x_0)$不存在；(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

要注意，在第一类间断点中，如果函数 $f(x)$在点 x_0 的左、右极限都存在且相等，这样的间断点称为可去型间断点，只要补充或改变函数原本的定义，使得 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则补充或改变后的函数在点 x_0 处连续.

3. 初等函数的连续性

一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

如果 $f(x)$是初等函数，在求函数间断点时，根据初等函数的连续性，只要找出 $f(x)$无定义的点就得出全部间断点.

如果 $f(x)$是分段函数，除无定义的点外，它还可能在分段点处间断. 此时，需要研究分段点处左、右极限与函数值的关系，如果它们都存在并且相等，分段点就是连续点，否则是间断点. 例如，

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ 0 & 0<x<1\\ \dfrac{1}{x-2} & 1\leqslant x\leqslant 4,x\neq 2\end{cases}$$

除在无定义点 $x=2$ 间断外，还可能在分段点 $x=0$，$x=1$ 处间断，通过考察 $x=1$，$x=2$ 是间断点，求出函数的间断点，就明确了函数的连续区间. 初等函数的定义区间就是它的连续区间；分段函数在每一段区间内是初等函数，其定义区间不难求得，再考察分段点的连续性，即可确定分段函数的连续区间.

4. 闭区间上连续函数的主要性质

闭区间上连续函数的主要性质有最值性、有界性和介值性.

在应用闭区间上连续函数的性质时，必须注意，“闭区间”和“连续”这两个条件缺一不可.

五）极限在经济工作的应用

搞清楚复利、抵押贷款以及融资等概念，记住公式直接运算.

二、典型例题

例 1 求下列函数的定义域

(1)$y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\log_a(x+1)}$；　　(2)$y=\dfrac{x}{\tan\dfrac{x}{2}}$.

解 (1)要使函数 y 有意义，只须满足$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\x+1>0\\\log_a(x+1)\neq 0\end{cases}$，即$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\x+1>0\\x+1\neq 1\end{cases}$，解得$-1<x\leqslant 2$ 且 $x\neq 0$，所以函数的定义域为$(-1,0)\cup(0,2]$.

(2)要使函数 y 有意义，只须满足$\begin{cases}\dfrac{x}{2}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\\tan\dfrac{x}{2}\neq 0\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，

即$\begin{cases}\dfrac{x}{2}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\\dfrac{x}{2}\neq k\pi\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以函数的定义域为$\{x\mid x\in R$ 且 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})\}$.

例 2 证明函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$为奇函数.

证明 设 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$，

$\because f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})=\log_a\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$，

$\therefore y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$为奇函数.

例 3 求下列极限

(1)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\ln(2-x)}{4\arctan x}$；　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin^2\dfrac{1}{x}$；

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$；　　(4)$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$；

(5)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.

解 (1)由于初等函数在其定义区间内任意点 x_0 都连续，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，

又由于 $1\in(-\infty,2)$，$\therefore\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\ln(2-x)}{4\arctan x}=\dfrac{1^3-\ln 1}{4\arctan 1}=\dfrac{1}{\pi}$.

(2)当 $x\to\infty$ 时，$\sin^2\dfrac{1}{x}\to 0$. 对含有无穷小的正弦求极限时，一般需要把原式变形，然后利用重要极限求出.

$$\lim_{x\to\infty}x^2\sin^2\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{\frac{1}{x}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^2=1.$$

(3)当 $x\to 0$ 时，分子、分母均趋向于无穷小，这时运算法则不能直接使用. 这种情况下，一般要先进行适当的初等变换，然后再求极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=\ln e^2=2.$$

(4)令 $t=e^{\frac{1}{x}}$，则当 $x\to 0^+$ 时，$t\to+\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t-\frac{1}{t}}{t+\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}=1.$

类似这样的题，可以做一个代换，使所求极限简单化.

(5)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 5x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{5\sin 5x(\sqrt{x+4}+2)}=\dfrac{1}{20}.$

例 4　证明方程 $e^x=3x$ 至少存在一个小于 1 的正根.

证明　设 $f(x)=e^x-3x$，则 $f(1)=e-3<0$.

又∵ $f(0)=1>0$，∴ $f(1)$ 和 $f(0)$ 异号，由零点定理得，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$，即原方程至少有一个小于 1 的正根.

三、同步训练

【同步训练 1-1】

1. 判断题

(1)函数 $y=\lg^{-1}(x-1)$ 的定义域是 $(1,2)\cup(2,+\infty)$.　　(　　)

(2)$y=\begin{cases}2x^2 & x>0\\ 2x+1 & x<0\end{cases}$ 是基本初等函数.　　(　　)

(3)$y=5\sin\left(\pi x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是 2.　　(　　)

(4)$y=u^2$，$u=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$，则 y 表示成 x 的函数为 $y=\log_a x^2$.　　(　　)

(5)$f(x)=5-x$ 与 $g(x)=\dfrac{25-x^2}{5+x}$ 是同一个函数.　　(　　)

2. 填空题

(1)函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & |x|\leqslant 2\\ \sin x & 2<x<3\end{cases}$ 的定义域是________.

(2)函数 $f(x)=(1-x)^{-1}$,则 $f[f(x)]=$________.

(3)初等函数 $y=e^{\tan\sqrt{x}}$ 是由基本初等函数________复合而成的.

(4)若 $f(2x-1)=x(x+1)$,则 $f(x)=$________.

(5)函数 $y=1+\ln x$ 的反函数是________.

(6)设函数 $f(x)=\begin{cases}2-x^2 & x\geqslant 0\\ 2+x & x<0\end{cases}$,则 $f(3)=$________;$f(-5)=$________.

3. 选择题

(1)若 $f(x)=|1+x|+\dfrac{(7-x)(x-1)}{|2x-5|}$,则 $f(-2)$ 等于(　　).

A. 4　　B. 8

C. -2　　D. -4

(2)设函数 $f(x)=x^3-x^2-1$,则 $f[f(0)]$ 等于(　　).

A. -1　　B. -3

C. 0　　D. 1

(3)函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ 的反函数是(　　).

A. $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$　　B. $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$

C. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$　　D. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$

(4)下列函数中,奇函数的是(　　).

A. $y=\ln(1+x^2)$　　B. $y=e^{-x}$

C. $y=x+\sin x$　　D. $y=x\sin x$

(5)下列函数在指定区间上有界的是(　　).

A. $f(x)=2^x, x\in(-\infty,0)$　　B. $f(x)=\cot x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

C. $f(x)=\ln x, x\in(0,1)$　　D. $f(x)=3x^2, x\in(0,+\infty)$

(6)下列函数中为单调函数的是(　　).

A. $y=\arcsin x$　　B. $y=\cos(x+1)$

C. $y=|x-1|$　　D. $y=x^2-x+1$

(7)设 $f(x-1)=x^2+1$,则 $f(x_0+h)$等于(　　).

A. $(x_0+h)^2+1$　　B. $(x_0+h)-1$

C. $(x_0+h)^2-1$　　D. $(x_0+h)^2+2(x_0+h)+2$

(8)设函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,则当 $x\neq1$ 且 $x\neq0$ 时,$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$等于(　　).

A. $\dfrac{x-1}{x}$　　B. $\dfrac{x}{x-1}$

C. $1-x$　　D. x

(9)函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & |x|\leqslant3\\ x^2-9 & 3<|x|<4\end{cases}$ 的定义域是(　　).

A. $[-3,4)$　　B. $(-3,4)$

C. $[-4,4]$　　D. $(-4,4)$

(10)设 $f(x)=\ln x$,$g(x)=x+2$,则 $f[g(x)]$的定义域是(　　).

A. $(-2,+\infty)$　　B. $[-2,+\infty)$

C. $(-\infty,2)$　　D. $(-\infty,2]$

4.求下列函数的定义域

(1)$y=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$;　　(2)$y=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

(3)$y=\ln\sin x$;　　(4)$y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$;

(5)$y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-1}$.

5.判断下列函数的奇偶性

(1)$f(x)=\sin x+\cos x$;　　(2)$f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

6.指出下列函数的复合过程

(1)$y=\sin^2(3x+\dfrac{3}{4}\pi)$;　　(2)$y=\sqrt[3]{\ln\cos2x}$;

(3)$y=\ln[\ln^2\ln^3x]$;　　(4)$y=\tan^5\sqrt[3]{\lg\arcsin x}$;

(5)$y=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}$;　　(6)$y=\cot^3(5x^2-x-1)$;

(7)$y=\sqrt{\arcsin\mathrm{e}^x}$;　　(8)$y=\log_3(\sin\mathrm{e}^x)$.

7.设函数 $f(x)$的定义域是$(0,1]$,求下列函数的定义域

(1)$f(x-2)$;　　(2)$f(\lg x)$.

8.$[f(x)]^2$ 与 $f(x^2)$是否表示同一个函数?举例说明.

9. 若函数 $f(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{2} & x=1\\ 1 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求：$f(0)$，$f(1)$，$f\left(\dfrac{5}{4}\right)$并作图像.

10. 某工厂某产品年产量是 600 台，每台售价 200 元，根据市场预测，当年产量超过 600 台时，超过部分只能打 9 折出售，这样可再多售出 200 台，如果再多生产，本年度就售不出去，试写出本年度的收入函数 R.

11. 有一边长为 a 的正方形铁片，从它的四个角截去相等的方块，然后折起各边做成一个无盖的小盒子，求它的容积与截去小方块边长之间的函数关系式，并指明定义域.

【同步训练 1-2】

1. 判断题

(1)数列 $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$的极限为 0.　　(　　)

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$.　　(　　)

(3)$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$的和为$\dfrac{1}{2}$.　　(　　)

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}=0$.　　(　　)

(5)$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]=0$.　　(　　)

2. 填空题

(1)若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\dfrac{1}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3b_n}{a_n}=$________.

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=5$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=4$，则$\lim\limits_{n\to\infty}[(a_n)^3-3b_n]=$________.

(3)无限循环小数 $0.\dot{5}$ 表示成分数为________.

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n\pi}{n}=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)\sin n\pi}{n^2}=$________.

(5)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=$________.

3. 选择题

(1)数列 $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$的极限是(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 不存在

(2)数列 $a_n=\begin{cases}0 & n\text{ 为奇数}\\ \frac{1}{n} & n\text{ 为偶数}\end{cases}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 等于(　　).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 不存在

(3)若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=5$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3a_n-\frac{b_n}{5}\right)$等于(　　).

A. -8　　B. 8　　C. -2　　D. 2

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-n^2+n+1}{5n^3+n^2-n}=$(　　).

A. $\frac{4}{5}$　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. ∞

(5)已知数列 $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$则其和为(　　).

A. 2　　B. -2　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

(6)若 $1-x+x^2-x^3+\cdots=3(|x|<1)$,则 x 等于(　　).

A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{3}{4}$

4. 求下列各数列的极限

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n^3}\right)\left(5+\frac{1}{n^3}\right)$;

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$;

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\cdots+2n}{(n-1)(n+1)}$;

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})$;

(5)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3+2n^2-1}$;

(6)$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

5. 将下列无限循环小数化成分数.

(1)$0.\dot{4}$;

(2)$0.3\dot{4}\dot{5}$.

6. 已知一个无穷递缩等比数列各项和为 12,而各项平方和为 72,求这个数列的首项和公比,并写出这个数列的通项.

【同步训练 1-3】

1. 判断题

(1)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则 $f(x_0)$存在.　　(　　)

(2)若 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$都存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$也存在.　　(　　)

(3)若 $f(x)$ 极限存在，$g(x)$ 极限不存在，则 $f(x)g(x)$ 的极限一定不存在.　　(　　)

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=1$.　　(　　)

(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\sin 2x$ 不存在，因此 $y=\sin 2x$ 为无界函数.　　(　　)

2. 填空题

(1)若 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$________.

(2)设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & x<2\\ e^x & x\geqslant 2\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=$________.

(3)若 $1-x+x^2-x^3+\cdots=3(|x|<1)$，则 x 等于________.

(4)$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<1\\ 1 & x=1\\ -1 & x>1\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=$________；$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=$________；$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$________.

(5)设 $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

(6)函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{x}\right)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

3. 选择题

(1)函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点有定义是 $y=f(x)$ 在点 x_0 有极限的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分条件也不必要条件

(2)若 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$，则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$(　　).

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. 不存在

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 不存在

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x+4 & x<1\\ 2x-1 & x\geqslant 1\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，问 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在？

5. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}3x+2 & x\leqslant 0\\ x^2+1 & 0<x\leqslant 1\\ \dfrac{2}{x} & x>1\end{cases}$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处极限是否存在？若存在，极限为多少？

【同步训练 1-4】

1. 判断题

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(2^x+x)=1$. （　　）

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+1\right)=1$. （　　）

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cos x)=0\times 1=0$. （　　）

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=0$. （　　）

2. 填空题

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=$________.

(2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan x=$________.

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=$________.

(4) $\lim\limits_{x\to \infty}(2+\dfrac{1}{x^2+1})=$________.

(5) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2^x+1}{4^x+1}=$________.

(6) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3+5}=$________.

3. 选择题

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=$(　　).

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 0　　D. ∞

(2)下列极限运算正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1)}=\dfrac{\infty}{\infty}=1$

B. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}x}=\dfrac{1}{\infty}=0$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}x^2}{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)}=\dfrac{0}{1}=0$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty-\infty=0$

(3)若极限$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+a}{x^3-27}$存在，则常数 a 等于(　　).

A. 27　　B. 6　　C. 3　　D. -3

(4)若$\lim\limits_{x\to \infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right]=0$，则常数 a,b 分别等于(　　).

A. $a=1,b=-1$　　B. $a=-1,b=1$　　C. $a=1,b=1$　　D. $a=-1,b=-1$

4. 求下列各极限

(1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$;

(2) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2-2x-1}$；

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$；

(8) $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{1+u^3}}{1+u}$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；

(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$.

5. 已知$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，求 a，b 的值.

【同步训练 1-5】

1. 判断题

(1)无穷小是很小的数. (　　)

(2)$10\ 000\ 000^{10\ 000\ 000}$是无穷大. (　　)

(3)在同一变化过程中的无穷小与无穷大之积为 1. (　　)

(4)无界函数必为无穷大量. (　　)

(5)若 α 为无穷小($\alpha\neq0$)，则$\dfrac{1}{\alpha}$必为无穷大. (　　)

2. 填空题

(1)已知函数 $f(x)=x^2-3$，当________时，$f(x)$为无穷小.

(2)当 $x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}$是$\dfrac{1}{x^2}$较________阶的无穷小.

(3)当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$是无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为________.

(4)若$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to0}\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)f(x)=$________.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=$________.

(6)变量 $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$，当 $x\to$________时是无穷小.

3. 选择题

(1)下列变量在给定的变化过程中为无穷小的是(　　).

A. $2^x+1(x\to\infty)$

B. $\dfrac{\sin x}{x}(x\to\infty)$

C. $\dfrac{1}{(x-1)^2}(x\to0)$

D. $\dfrac{x-1}{x^2-1}(x\to1)$

(2)当 $x\to0$ 时,下列变量中无穷大的是(　　).

A. 2^{x}　　B. 2^{-x}

C. $\cot x$　　D. $\tan x$

(3)下列式子中错误的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to0^{+}}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to0^{-}}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=-1$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=+\infty$

(4)当 $x\to x_0$ 时,α 和 β 都是无穷小,下列变量中,当 $x\to x_0$ 时,可能不是无穷小的是(　　).

A. $\alpha+\beta$　　B. $\alpha-\beta$

C. $\alpha\cdot\beta$　　D. $\frac{\alpha}{\beta}(\beta\neq0)$

(5)下列变量在给定的过程中哪个是无穷大量(　　).

A. $y=\sin2x\left(x\to\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $y=\frac{1}{\tan(x-3)}(x\to0)$

C. $y=e^{x}(x\to-\infty)$　　D. $y=\arctan\frac{1}{x}(x\to\infty)$

(6)当 $x\to1$ 时,$1-x$ 与 $\sqrt[3]{1-x}$ 相比是(　　).

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 等价无穷小　　D. 同阶(非等价)无穷小

4. 求下列各极限

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin^{2}x}{x+1}$;　　(2)$\lim\limits_{x\to1}(x-1)\arctan\left(\frac{1}{x^{2}-1}\right)$.

5. 当 $x\to1$ 时,两无穷小 $\frac{1-x}{1+x}$ 和 $1-\sqrt{x}$ 哪一个是较高阶的?

6. 验证当 $x\to1$ 时,$\frac{1-x^{3}}{2+x}$ 与 $1-x$ 是等价无穷小.

7. 用等价无穷小代换求下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^{2}}$;　　(2)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan2x}{\arcsin3x}$.

8. 当 $x\to0$ 时,无穷小 $\frac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}}$ 与 kx 等价,求 k 的值.

【同步训练 1-6】

1. 判断题

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$ (　　)

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{x}=\mathrm{e}.$ (　　)

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1.$ (　　)

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$ (　　)

2. 填空题

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x}=$________.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+c}=$________.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to 0}(1-ax)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{2}$，则 $a=$________.

(4) $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin[2\varphi(x)]}{\varphi(x)}=$________.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=$________.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\cot x}=$________.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{x}=$________.

3. 选择题

(1) 下列各式中正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=0$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$

D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sin x}=1$

(2) 下列各式中正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

B. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

D. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{2}mx}{x^{2}}$($m$ 为常数)等于(　　).

A. 0

B. 1

C. m^{2}

D. $\dfrac{1}{m^{2}}$

(4)当 $x\to0$ 时,下列各式中极限为 2 的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\tan x}{2x}$　　B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{x}$　　C. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x}{\sqrt{x}}$　　D. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2^x-1}$

(5)若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{kx}=\mathrm{e}^{-3}$,则 k 等于(　　).

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $-\dfrac{3}{2}$　　D. $-\dfrac{2}{3}$

(6)当 $x\to0$ 时,下列变量中与等价的无穷小是(　　).

A. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$　　B. $2\sin x$　　C. $\ln(1+x)$　　D. $\ln(1+x^2)$

(7)$\lim\limits_{x\to\pi}(1+2\tan x)^{\cot x}$ 的值是(　　).

A. e　　B. e^{-1}　　C. e^2　　D. e^{-2}

(8)$x\to0$ 时,$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的极限的正确运算是(　　).

A. 利用重要极限:$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$

B. 利用乘法法则:$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}=0$

C. 利用无穷小的性质:$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

D. 利用等价无穷小替换:$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$

(9)下列各题运算唯一正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=0$　　B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sin2x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\sin3x}{\lim\limits_{x\to0}\sin2x}=0$

C. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sin2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$　　D. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin3x}{\sin2x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$

(10)下列极限存在的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to0}2^{\frac{1}{x}}$　　B. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos x}{x-\pi}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\lg\sqrt{x^2-1}$　　D. $\lim\limits_{x\to0}\arcsin(\sqrt{4+x^2}-2)$

4. 求下列各极限

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x}{\sin x-2x}$;　　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2x}{n}\right)^n$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{1+x}\right)^{x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{\sin x}{\pi+x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{3}{2}x}{\sin4x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{3}}{\sin^{3}\dfrac{x}{3}}$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$；

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$.

【同步训练 1-7】

1. 判断题

(1)若函数 $f(x)$在点 x_0 处有定义且极限存在,则 $f(x)$在 $x=x_0$ 连续. ( )

(2)设函数 $f(x)$在点 x_0 处连续,函数 $\varphi(x)$在点 x_0 处不连续,则 $f(x)+\varphi(x)$在点 x_0 处不连续. ( )

(3)若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)$与 $f(b)$异号,则在(a,b)内一定有方程 $f(x)=0$ 的根. ( )

(4)函数 $y=\sqrt{\sin x-1}$无连续点. ( )

(5)若 $f(x_0)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. ( )

(6)若函数 $f(x)$在点 x_0 处连续,则下面说法成立:

$f(x)$在点 x_0 处连续$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$. ( )

2. 填空题

(1)函数 $y=\dfrac{1}{x^{2}-2x-3}$的连续区间是________.

(2) $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$在$(-1,2)$内的间断点是________.

(3)设函数 $f(x)$在 x_0 处连续,且 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=2$,则 $f(x_0)=$________.

(4)设函数 $f(x)=\begin{cases}Ax^{2} & x\leqslant2\\ 2x-1 & x>2\end{cases}$,当 $A=$________时,$f(x)$在 $x=2$ 处连续.

(5)函数 $f(x)=\ln(\arcsin x)$的连续区间是________.

(6)方程 $x^{3}-3x+\sin x=0$ 在区间$(1,2)$内,则实根的情况为________.

(7)函数 $y=\dfrac{x}{\sin x}$有________个间断点,间断点可表示为________.

(8)函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续的充分必要条件是________.

(9)函数 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x(x-3)}$ 的间断点是________.

(10)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2\\ A & x=2\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，则 $A=$________.

3. 选择题

(1)函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极限是它在该点连续的一个(　　).

A. 必要条件　　B. 充分条件

C. 充要条件　　D. 无关条件

(2)下列函数在 $x=0$ 处连续的是(　　).

A. $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$　　B. $f(x)=\begin{cases}e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}x & x>0\\ -x & x<0\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

(3)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin bx}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ (a,b 为常数)为连续函数，则 a 等于(　　).

A. 1　　B. 0　　C. b　　D. $-b$

(4)函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$ 的连续区间是(　　).

A. $[1,2)\cup(2,+\infty)$　　B. $(1,2)\cup(2,+\infty)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

(5)$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 的连续区间是(　　).

A. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

(6)$f(x)=\begin{cases}\cos x & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0\\ \sin x & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 在 $x=0$ 处(　　).

A. 极限是 0　　B. 极限是 1　　C. 没有极限　　D. 连续

(7)下列各题在开区间(1,2)内至少有一个实根的是(　　).

A. $2x-5=0$　　B. $2x^2-x+1=0$

C. $x^3-3x-1=0$　　D. $\ln x+2=0$

(8)下列说法正确的是(　　).

A. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义,则 $f(x)$ 在该区间上连续

B. 若 $f(x)$ 在 x_0 处有定义且极限存在,则在该点处连续

C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

D. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一点都连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

(9)下面说法正确的是(　　).

A. 初等函数都是连续函数　　B. 初等函数在其定义区间内是连续的

C. 不是所有的初等函数都是连续函数　　D. 初等函数没有间断点

(10)对于函数 $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ \dfrac{1}{2} & x=1 \\ 1 & 1<x<2 \end{cases}$ 下列说法正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$　　B. 连续区间为 $(0,2)$

C. 定义域为 $(0,1)\cup(1,2)$　　D. $f(2)=1$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax)}{x} & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,求 a 的值.

5. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} 3x & 0\leqslant x<1 \\ 4-x & 1\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}$ 在闭区间 $[0,2]$ 上的连续性,并作图.

6. 求下列函数的连续区间

(1) $f(x)=\lg(2-x)$;　　(2) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$;　　(4) $f(x)=\ln\arctan x$.

7. 求下列函数的间断点

(1) $f(x)=\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$;　　(2) $f(x)=\begin{cases} 1 & x\geqslant 0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$.

8. 求下列函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to e}(x\ln x+2x)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)\sin x$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 3x)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

9. 验证:方程 $4x=2^x$ 有一个根在 0 与 $\dfrac{1}{2}$ 之间.

【同步训练 1-8】(略)

四、自测题

1. 判断题

(1)设 $y=\sqrt{u^2-2}$,而 $u=\sin x$,则 y 是 x 的复合函数.　(　　)

(2)因为函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$在点 $x=0$ 处无定义,所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.　(　　)

(3)设函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处不连续,则 $y=f(x)$在点 x_0 一定没有定义.　(　　)

(4)设函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上连续,则它在(a,b)内一定有最大值和最小值.　(　　)

(5)初等函数 $y=\sqrt{\sin x-1}$在其定义域内连续.　(　　)

(6)函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$是偶函数.　(　　)

(7)函数 $y=2\arcsin\dfrac{2}{x}$的值域是$[-\pi,\pi]$.　(　　)

(8)$y=\sqrt{e^{\frac{1-x}{x}}-1}$的定义域是 $0<x\leqslant 1$.　(　　)

2. 填空题

(1)设 $f(x)=\cos x$,则 $f(-\cos x)=$________.

(2)函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$的反函数 $f^{-1}(x)=$________;$f(x)$的定义域是________.

(3)$y=\sqrt{\lg\dfrac{4x-x^2}{3}}+\dfrac{1}{\lg(2x-3)}$的定义域________.

(4)设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,则 $f\{f[f(x)]\}=$________.

(5)设 $y=\arcsin u$,$u=a^v$,$v=-\sqrt{x}$,则复合后的函数 $y=$________.

(6)函数 $f(x)=x^2-2$,当 $x=$________时,$f(x)$为无穷小.

(7)若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to a}(x-a)f(x)=$________.

(8)当 $x\to 0$ 时,x^2 与 $1-\sqrt{1-2x^2}$ 相比是________无穷小.

(9)函数 $y=\operatorname{arccot}(x^2-1)$是由________复合而成.

(10)当 $a=$________时,则当 $x\to 0$ 时,$\sin^3 x^2\sim x^a$.

3. 选择题

(1)设 $f(x)=3^x$, $g(x)=x^3$,则 $f[g(x)]$等于(　　).

A. x^{3^x}　　B. 3^{x^3}

C. x^{3x}　　D. 3^{3^x}

(2)设函数 $g(x)=1+x$,且当 $x\neq0$ 时,$f[g(x)]=\dfrac{1-x}{x}$,则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$等于(　　).

A. 0　　B. 1

C. 3　　D. -3

(3)当 $x\to0$ 时,与 $3x^2+x^4$ 同阶的无穷小是(　　).

A. x　　B. x^2

C. x^3　　D. x^4

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-2)^3}{x^2+2x-3}=$(　　).

A. 0　　B. 1

C. ∞　　D. 9

(5)设 a 与 x_0 都是确定的常数,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 存在,则(　　).

A. 必有 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=x_0$　　B. 函数 $f(x)$在点 x_0 处一定连续

C. 在 $x\to x_0$ 时,$f(x)+a$ 必是无穷小　　D. 在 $x\to x_0$ 时,$\dfrac{1}{f(x)-a}$必为无穷大

(6)当 $x\to0$ 时,下列函数中,极限为 1 的是(　　).

A. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\frac{1}{2}(x^2+x)}$　　B. $y=\dfrac{\sin(2\sin x)}{\sin x}$

C. $y=\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$　　D. $y=\dfrac{2\arcsin x}{3x}$

(7)函数 $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$的间断点是(　　).

A. $x=2$ 和 $x=3$　　B. $x=3$

C. $x=1$,$x=2$ 和 $x=3$　　D. 无间断点

(8)若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$则下列式子一定成立的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty$

C. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$

(9)当 $x\to 0$ 时，与 $3x^2+x^4$ 同阶的无穷小是(　　).

A. x　　　　B. x^2

C. x^3　　　　Dx^4

(10)方程 $x^3+2x^2-x-2=0$ 在区间$(-3,2)$内(　　).

A. 有一个实根　　　　B. 有两个实根

C. 至少有一个实根　　　　D. 无实根

4. 写出下列函数的复合过程

(1)$y=e^{\arctan x^2}$；　　(2)$y=\ln^2(3x^2+5x-1)$；

(3)$y=\sqrt[3]{\cos^2(4x^2-1)}$；　　(4)$y=\sin^3[\arctan(\ln x)]$；

(5)$y=\cot x^2$；　　(6)$y=\ln(\arctan\sqrt{1+x^2})$.

5. 求下列各函数的极限

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{x^2+2x+1}$；　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(x+1)-\ln x]$；

(3)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$；　　(4)$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2x-1}{x}}$；

(5)$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$；　　(6)$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$；

(7)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2+x^3}$；　　(8)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{x}$；

(9)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$；　　(10)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

6. 证明方程 $x\ln x=1$ 至少有一个介于 1 和 2 之间的实数根.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x & x\geqslant 0 \\ 2x^2+1 & x<0 \end{cases}$，讨论 $f(x)$在 $x=0$ 处的连续性.

8. 当 a,b 为何值时，函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}+a & x>0 \\ 1 & x=0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}+b & x<0 \end{cases}$为连续函数.

9. 若$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+a}{x-3}$极限存在，求 a 的值和极限值.