

符号说明

a 为点、椭圆接触区在 x 方向上的接触半宽; b 为椭圆接触区在 y 方向上的接触半径, 点接触时, $a=b=\left(\frac{3wR_x}{2E}\right)^{\frac{1}{3}}$

a 为 x 方向的特征长度

b 为线接触区半宽, $b=\sqrt{\frac{8wR}{\pi E}}$

b 为 y 方向的特征长度

c_p 为润滑剂比定压热容

c 为 Cameron 粘压公式中的系数, 可近似取为 $\alpha/15$

c_1 和 c_2 为上、下表面材料的比热容

D 为密温系数, $D=-0.00065\text{K}^{-1}$

D_{ij}^{kl} 为二维弹性变形刚度系数

e_k 为椭圆率, $e_k=\frac{R_x}{R_y}$

E 为两接触表面的综合弹性模量, $\frac{1}{E}=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)$

E_1 和 E_2 为对应表面材料的弹性模量

G^* 为材料参数, $G^*=\alpha E$

h 为润滑膜膜厚

h_1 为润滑膜最小膜厚

h_0 为中心膜厚, 将根据载荷平衡条件确定

H 为量纲一化膜厚, 对线接触, $H=\frac{hR}{b^2}$; 对点、椭圆接触, $H=\frac{hR_x}{a^2}$

H_0 为量纲一化中心膜厚

J 为热功当量; 微极流体的惯性系数

k 为润滑剂热传导系数

k_1 和 k_2 为上、下表面材料热传导系数

K_{ij} 为一维弹性变形刚度系数

l 为微极流体的特征长度

L 为微极流体量纲一化特征长度

m 为 y 方向的节点数

n 为 x 方向的节点数; 流变指数, ≤ 1

N 为微极流体耦合系数

p 为压力

p_0 为压力粘度系数, 取 $p_0 = 1.96 \times 10^8$

$1/p_0$ 为 Roelands 粘压公式中的系数 p_0 的倒数, 可取为 $1/p_0 = 5.1 \times 10^{-9}$

p_H 为 Hertz 接触压力, 对线接触, $p_H = \frac{2\tau w}{\pi b}$; 对点接触, $p_H = \frac{3\tau w}{2\pi a^2}$; 对椭圆接

触, $p_H = \frac{3\tau w}{2\pi ab}$

P 为量纲一化压力, $P = p/p_H$

P_{tr} 椭圆接触变形系数, $P_{tr} = \frac{3\tau R_x}{\pi^2 a^2 b E}$

R 为当量曲率半径, $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2}$, 其中外接触取十号, 内接触取一号

R_1 和 R_2 为点、线接触时上、下表面综合曲率半径

R_x 和 R_y 为两表面在 x 和 y 方向上的当量曲率半径

s 为滑滚比, $s = (u_1 - u_2)/u_s$

t 为时间

T 为温度; 量纲一化时间, $T = Ut/b$

T_0 为初始温度, 一般取 $T_0 = 303K$

T^* 为量纲一化温度, $T^* = T/T_0$

$u_s = \frac{u_1 + u_2}{2}$, 为上下两表面沿 x 轴方向的平均速度

u 为流体在 x 方向的速度分量

u_1 和 u_2 分别为下、上表面沿 x 方向的切向速度

U^* 为速度参数, 对线接触, $U^* = \frac{\eta_0 u_s}{ER}$; 对点、椭圆接触, $U^* = \frac{\eta_0 u_s}{ER_x}$

v 为流体在 y 方向的速度分量

v_s 为两表面沿 y 方向的平均速度, $v_s = (v_1 + v_2)/2$

v_1 和 v_2 分别为下、上表面沿 y 方向的切向速度

$v(x)$ 为由于压力产生的弹性变形位移

V^* 为速度参数, $V^* = \frac{\eta_0 v_s}{ER_x}$

w 为载荷, 对线接触, w 为单位长度载荷; 对点或椭圆接触, w 为总载荷

w 为流体在 z 方向的速度分量

W 为量纲一化载荷, 对线接触, $W = \frac{\pi}{2}$; 对点接触, $W = \frac{2\pi}{3}$; 对椭圆接触,

$$W = \frac{2\pi b}{3a}$$

W^* 为载荷参数,对线接触, $W^* = \frac{\tau\omega}{ER}$; 对点、椭圆接触, $W^* = \frac{\tau\omega}{ER_x^2}$

x 为与主速度同向的坐标

x_0 为入口区坐标

x_e 为出口区坐标

X 为 x 方向的量纲一化坐标,对线接触, $X = x/b$; 对点接触, $X = x/a$

X_0 和 X_e 分别为入口处和出口处量纲一化坐标

y 为垂直于主速度方向的坐标

Y 为 y 方向的量纲一化坐标, $Y = y/a$

z 为膜厚方向的坐标; 粘压公式中的系数,对一般的矿物油, z 通常可取 0.68

Z 为 z 方向的量纲一化坐标,对线接触, $Z = \frac{zR}{b^2}$, 对点、椭圆接触, $Z = \frac{zR_x}{a^2}$

α 为润滑油或润滑脂所含基础油的 Barus 粘压公式中的系数; 椭圆接触长度比例系数, $\alpha = a/b$

α_T 为密温方程中的系数,单位为 $^{\circ}\text{C}^{-1}$

β 为 Barus 粘温公式中的粘温系数,对润滑油通常可取 $0.03^{\circ}\text{C}^{-1}$

ΔX 为均分网格下的量纲一化节点间长度, $\Delta X = X_i - X_{i-1}$

ϵ 为 Reynolds 系数,对油润滑, $\epsilon = \frac{\rho^* H^3}{\eta^* \lambda}$; 对脂润滑, $\epsilon = \lambda \frac{H^{(2+1/n)}}{\phi^{*1/n}}$

$$\epsilon_0 = \epsilon_{i-1/2,j} + \epsilon_{i+1/2,j} + \epsilon_{i,j-1/2} + \epsilon_{i,j+1/2}$$

$$\epsilon_{i\pm 1/2} = \frac{1}{2}(\epsilon_i + \epsilon_{i\pm 1})$$

$$\epsilon_{i\pm 1/2,j} = \frac{1}{2}(\epsilon_{i,j} + \epsilon_{i\pm 1,j})$$

ϕ 为塑性粘度

ϕ_0 为润滑脂在常压、常温下塑性粘度

ϕ^* 为量纲一化粘度, $\phi^* = \phi/\phi_0$

γ 为微极流体材料常数

λ 为 ϵ 系数中的参数,对线接触, $\lambda = \frac{12\eta_0 u_s R^2}{b^3 p_H}$, 对点、椭圆接触, $\lambda = \frac{12\eta_0 u_s R_x^2}{a^3 p_H}$,

对脂润滑, $\lambda = \frac{p_H^{1/n} b^{2+1/n}}{2u_s (2+1/n) R^{(1+1/n)} 2^{1/n} \phi_0^{1/n}}$

η 为润滑剂粘度

η_0 为 $p=0$ 、 $T=T_0$ 时的润滑剂粘度

η^* 为量纲一化润滑剂粘度, $\eta^* = \frac{\eta}{\eta_0}$

μ 为牛顿流体的粘度(微极流体)

ρ 为润滑剂密度

ρ_0 为 $p=0$ 、 $T=T_0$ 时的润滑剂密度

ρ^* 为量纲一化润滑剂密度, $\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}$

ρ_1 和 ρ_2 为上、下表面材料的密度

χ 为微极流体的旋转粘度

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 分别为微极流体在 x, y, z 方向上的转动角速度

ν_1 和 ν_2 为两表面材料的泊松比

注：以上符号若在文中另作说明，则此处说明对该部分内容不再有效。

第 1 章 弹性流体动压润滑基本方程

1.1 求解弹流润滑的基本方程

1.1.1 一维弹流润滑 Reynolds 方程

一维等温弹流润滑的 Reynolds 方程如下给出^[1,2]：

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{dp}{dx} \right) = 12u_s \frac{d(\rho h)}{dx} \quad (1.1)$$

没有表面伸缩、密度不随时间变化的一维普遍形式的 Reynolds 方程可以写成：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6(u_0 - u_h) \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + 12\rho(\omega_h - \omega_0) \quad (1.2)$$

式中，最后一项是由密度不随时间变化而从 $\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = \rho(\omega_h - \omega_0)$ 得到的。

为了将普遍形式的 Reynolds 方程(1.2)化成弹流 Reynolds 方程(1.1)，我们来分析两个表面相对滚动时的速度，见图 1.1(a)。在将滚动问题化成与推导普遍 Reynolds 方程的情况相一致的模型时，若以下表面展开两滚动体间的膜厚，则将下表面置为水平，上表面为倾斜，见图 1.1(b)。

对比普遍 Reynolds 方程的情况，可知对下表面来说 $u_0 = u_1$ ，且 $\omega_0 = 0$ 。而上表面由于其速度是倾斜的，必须将其分解成水平和垂直方向的两个分量，如图 1.2 所示。

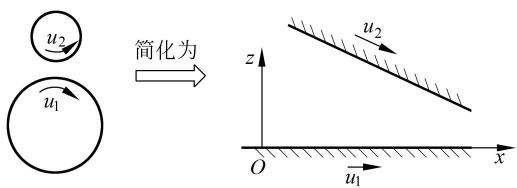


图 1.1 滚动问题的速度分析

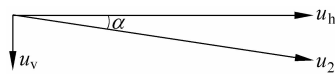


图 1.2 滚动问题上表面速度分解

将速度 u_2 分解后可以得到

$$\begin{cases} u_h = u_2 \cos \alpha \\ u_v = u_2 \sin \alpha = \omega_h \end{cases} \quad (1.3)$$

式中， α 为倾角。

由于只考虑滚动问题中心区的很小区域,因此倾角 α 很小,可以近似地认为 $\cos\alpha \approx 1, \sin\alpha \approx$ 表面斜率 $= \frac{\partial h}{\partial x}$, 所以有

$$\begin{cases} u_h = u_2 \cos\alpha \approx u_2 \\ w_h = u_2 \sin\alpha \approx u_2 \frac{\partial h}{\partial x} \end{cases} \quad (1.4)$$

将所得的 u_0, u_h, w_0 和 w_h 代入普遍 Reynolds 方程(1.2),可得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6(u_1 - u_2) \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + 12\rho u_2 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.5)$$

化简后得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6(u_1 + u_2) \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} = 12u_s \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \quad (1.6)$$

因为, $u_0 = u_1, u_h = u_2$, 所以 $u_0 + u_h = u_1 + u_2 = 2u_s$, 因此式(1.6)与式(1.1)一致。

需要指出: 在式(1.5)化简式(1.6)时, 在第2个等式中利用了 $\rho \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial(\rho h)}{\partial x}$ 。

但事实上在弹流问题中, 润滑剂的密度与压力 p 有关, 所以与坐标 x 是有关的, 因此是一个近似, 但是这个近似不会带来很大的偏差。

1.1.2 二维弹流润滑 Reynolds 方程

与一维等温弹流润滑情况类似, 如果把坐标 x 的方向设成与速度方向一致, 则二维等温弹流润滑 Reynolds 方程可以写成:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12u_s \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \quad (1.7)$$

从理论上来讲, 椭圆接触弹流润滑 Reynolds 方程与点接触弹流润滑 Reynolds 方程都属于二维问题, 因此表达式完全一样, 为式(1.7)。只是在量纲一化处理时需要考虑不同方向的尺寸。

1.1.3 存在两方向速度的二维弹流润滑 Reynolds 方程

有的弹流润滑问题无法将 x 轴的坐标方向与合速度选成一致, 比如速度不与接触椭圆主轴共线, 这时处理的椭圆接触弹流润滑 Reynolds 方程就必须考虑在 x 和 y 两个方向都有速度分量的情况, 这时的 Reynolds 方程可以写成:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12u_s \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + 12v_s \frac{\partial(\rho h)}{\partial y} \quad (1.8)$$

1.1.4 时变弹流润滑 Reynolds 方程

在前面推导得到的弹流润滑 Reynolds 方程的基础上再加入了含时间的挤压项就可以得到时变弹流润滑 Reynolds 方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 12u_s \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + 12\rho \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.9)$$

需要说明的是：由于在推导弹流润滑 Reynolds 方程时，在上式的右端第一项中已经考虑了滚动引起的挤压效应，所以式(1.9)的右端第二项不再考虑，它只考虑因中心下移引起的时变效应。

1.2 不含弹性变形的膜厚方程

1.2.1 线接触膜厚方程

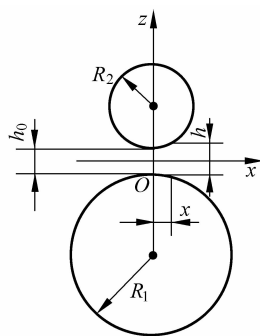
因为考虑弹流时的膜厚方程是从线或点接触简化得到的，因此我们来对线接触的膜厚方程加以推导，这一方法也可以应用到点接触的问题中。

如图 1.3 所示为两圆柱的线接触弹流润滑问题的初始情况。

若设两圆柱的半径分别是 R_1 和 R_2 ，坐标的原点设置在两圆柱中心的连线上， x 轴垂直于此连线，且两圆柱未变形时的间距为 h_0 ，则在 x 处的膜厚 h 可写成：

$$h = h_0 + R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2} + R_2 - \sqrt{R_2^2 - x^2}$$

(1.10) 图 1.3 两圆柱的线接触弹流润滑



将式(1.10)展开，并考虑到 x 与两半径相比足
够小，从而略去高阶项可得

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.11)$$

令式(1.11)中的 $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$ ，其中 R 为当量半径，则式(1.11)可写成常用的线接触膜厚方程：

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2R} \quad (1.12)$$

因此，两圆柱接触的膜厚相当于一个平面与一个当量半径为 R 的圆柱接触时的膜厚。

1.2.2 点接触膜厚方程

类似线接触情况，可以推导出未变形的点接触弹流润滑的膜厚方程：

$$h = h_0 + \frac{x^2 + y^2}{2R} \quad (1.13)$$

需要指出：在推导点接触膜厚方程时，假设两个球体相接触，两球体的曲率半径分别为 R_1 和 R_2 ，这时当量半径的表达式同线接触相似，为 $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ 。

1.2.3 椭圆接触膜厚方程

如果两个接触物体是任意椭球体时，接触变形后的接触区为椭圆，这时可以选择这两个接触体的当量接触主面的曲率半径作为 x 轴和 y 轴，这时未变形的膜厚方程可写成：

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} \quad (1.14)$$

1.3 表面弹性变形

1.3.1 一维弹性变形

在弹流计算过程中，由于需要考虑表面的弹性变形，因此在上一节的膜厚公式中还必须加入弹性变形项，实际的线接触膜厚公式(1.12)应写成：

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2R} + v(x) \quad (1.15)$$

式(1.15)中右端第3项 v 为弹性变形，它是由弹性力学中的表面上的法向分布载荷作用在半无限大平面上引起的表面变形公式而得到的，如图 1.4 所示。这一公式可以写成：

$$v(x) = -\frac{2}{\pi E} \int_{x_0}^{x_e} p(s) \ln(s-x)^2 ds + c \quad (1.16)$$

式中， c 为一待定常数。

在实际计算中， c 可以与式(1.15)中的 h_0 合并，在平衡载荷计算时一起确定。

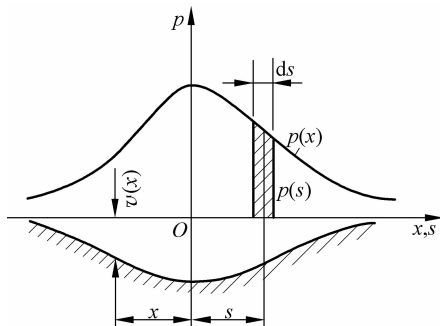


图 1.4 线接触弹性变形

1.3.2 二维弹性变形

类似线接触的弹流计算,点接触膜厚公式中也需要加入弹性变形项,实际的点接触膜厚公式(1.13)应写成:

$$h = h_0 + \frac{x^2 + y^2}{2R} + v(x, y) \quad (1.17)$$

式(1.17)中右端第3项 v 为弹性变形,它是弹性力学中的表面作用法向分布载荷作用在对半无限大空间体上引起的表面变形公式而得到的。这一公式可以写成:

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi E_n} \iint \frac{p(s, t)}{\sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}} ds dt \quad (1.18)$$

类似点接触问题,考虑弹性变形的椭圆接触膜厚方程可写成:

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + v(x, y) \quad (1.19)$$

而对椭圆接触来说,它的弹性变形 $v(x, y)$ 的求解公式与点接触是一样的,因此使用式(1.18)即可。

1.4 粘度和密度随压力和温度变化的方程

1.4.1 粘度变化方程

1. 粘压方程

当液体或气体所受的压力增加时,分子之间的距离减小而分子间的作用力增大,因而粘度增加。通常,当矿物油所受压力超过0.02GPa时,粘度随压力变化会发生十分明显的变化。随着压力的增加粘度的变化率也增加,润滑油在1GPa压力下的粘度较其在常压下的粘度可以升高几个量级。当压力更高时,矿物油将丧失液体性质而变成蜡状固体。由此可知:对于重载荷流体动压润滑,特别是弹性流体动压润滑状态,粘压特性是至关重要的因素之一。

描述粘度和压力之间变化规律的粘压方程主要有

$$\text{Barus} \quad \eta = \eta_0 e^{\alpha p} \quad (1.20)$$

$$\text{Roelands} \quad \eta = \eta_0 \exp\{(\ln \eta_0 + 9.67)[-1 + (1 + p/p_0)^z]\} \quad (1.21)$$

$$\text{Cameron} \quad \eta = \eta_0 (1 + c p)^{16} \quad (1.22)$$

当压力大于1GPa后,用Barus粘压方程得到的粘度值过大,而Roelands粘压方程则更符合实际情况。

粘压系数 α 一般可取 $2.2 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{N}^{-1}$,各类润滑油的粘压系数值在表1.1和表1.2给出。

表 1.1 矿物油的粘压系数 α $10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{N}^{-1}$

温度/ $^{\circ}\text{C}$	环 烷 基			石 蜡 基		
	锭子油	轻机油	重机油	轻机油	重机油	汽缸油
30	2.1	2.6	2.8	2.2	2.4	3.4
60	1.6	2.0	2.3	1.9	2.1	2.8
90	1.3	1.6	1.8	1.4	1.6	2.2

表 1.2 部分基础油在 25°C 时的粘压系数 α $10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{N}^{-1}$

润滑油类型	α	润滑油类型	α
石蜡基	1.5~2.4	烷基硅油	1.4~1.8
环烷基	2.5~3.6	聚醚	1.1~1.7
芳香基	4~8	芳香硅油	3~5
聚烯烃	1.5~2.0	氯化烷烃	0.7~5
双酯	1.5~2.5		

2. 粘温方程

当考虑温度对粘度的影响时,通常采用 Barus 方程表达如下:

$$\eta = \eta_0 \exp[-\beta(T - T_0)] \quad (1.23)$$

下面的 Roelands 方程虽然较 Barus 方程略微复杂,但是更符合实际些:

$$\eta = \eta_0 \exp\left\{(\ln \eta_0 + 9.67) \left[\left(\frac{T - 138}{T_0 - 138} \right)^{-1.1} - 1 \right] \right\} \quad (1.24)$$

3. 粘度随压力和温度变化的关系式

同时考虑温度和压力对粘度的影响时,通常将粘压和粘温公式组合在一起使用。常用的表达式有:

(1) Barus 与 Reynolds 公式

$$\eta = \eta_0 \exp[\alpha p - \beta(T - T_0)] \quad (1.25)$$

(2) Roelands 公式

$$\eta = \eta_0 \exp\left\{(\ln \eta_0 + 9.67) \left[(1 + p/p_0)^z \times \left(\frac{T - 138}{T_0 - 138} \right)^{-1.1} - 1 \right] \right\} \quad (1.26)$$

式(1.25)较简单,便于运算,而式(1.26)则较准确,因此在实际中使用更多。

1.4.2 密度变化方程

1. 密压方程

润滑剂的密度随压力增大而增加,为了计算方便,描述密度随压力变化常采用如下关系式:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{0.6p}{1 + 1.7p} \right) \quad (1.27)$$