第 3 章　命 题 逻 辑

逻辑是一个常用的术语，平时说话、做事、思考问题等都要合乎逻辑. 比如，一位老师正在学校上课，而要说他在太空漫步就不合乎逻辑，把“逻辑地址”弄错了. 同时，逻辑推理也无处不在，从日常生活中的实际问题的解决到数学定理的证明以及程序正确性验证.

逻辑学是研究思维形式、思维方法及思维规律尤其是推理的学科，早在两千多年前就受到人们的重视，古希腊著名逻辑学家亚里士多德（Aristotle，公元前 384—公元前 322）是形式逻辑的创始人. 形式逻辑，现在称为普通逻辑学，要详细讨论概念（词项）、判断（命题）和各种形式的推理，研究逻辑基本规律等内容.

联合国教科文组织将逻辑学列为与数学、物理学、化学、天文学、地学、生物学同等重要的基础学科，在我国 MBA、MPA 以及工程硕士入学考试加入了逻辑测试题，国内很多大公司、企业招聘高级员工时也开始加试逻辑测试.

德国数学家、哲学家莱布尼茨（G. Leibniz，1647—1716）首先提出用数学方法研究逻辑，就是建立一套表意符号体系，在符号之间进行形式推理. 莱布尼茨是数理逻辑的创始人. 也正因为这样，数理逻辑又称为符号逻辑.

逻辑推理无处不在，从日常生活中的实际问题的解决到数学定理的证明以及程序正确性验证.

除了传统的数理逻辑（内容包括逻辑演算、公理化集合论[13]、模型论、递归论和证明论）外，还出现了各种各样的应用逻辑，如多值逻辑、模态逻辑、归纳逻辑、时序逻辑、动态逻辑、模糊逻辑、非单调逻辑、默认逻辑、数字逻辑、电路逻辑、算法逻辑及程序逻辑等，这些都与计算机科学密切相关，参考有关文献[14].

人们需要学习、思考机器特别是计算机是如何进行逻辑思维的，以便用硬件或软件去模拟（广义下的计算）实现人的逻辑思维，这是一种最好的计算思维（computational thinking）培养形式.

命题逻辑与谓词逻辑是数理逻辑的基础部分. 本章学习命题逻辑，内容涉及集合、映射、运算和关系等.

命题逻辑的研究对象是命题.

3.1　命题的有关概念

计算机的计算过程就是推理过程，而每一步推理离不开判断，判断的对象就是命题.

什么是命题？**命题**（proposition 或 statement）是能判断出真假（或真假程度）的语句. 可以从三个方面去理解：

（1）命题必须是一个完整的句子，包括用数学式子如 $2+3=5$ 代表的语句. 这一点在后面的命题符号化时要注意.

（2）所给语句具有真假意义，即有是否符合客观实际或是否合理之分. 一般来说，只有

陈述句才可能具有真假意义，祈使句、疑问句和感叹句不具有真假意义.

(3) 能判断出真假. 不过，要是将来某时候能判断出真假也行.

【例 3-1】 判断下列语句是否是命题.

(1) 辽宁舰是中国的第一艘航空母舰.

(2) 我喜欢智能手机和平板电脑.

(3) $x>3$.

(4) 立正!

(5) 这朵花真漂亮!

(6) 你要我的手机号码是想给我充话费?

(7) 火星上有生物.

(8) 这句话是假话.

(9) 小王和小李是同学.

(10) 你只有刻苦学习，才能取得好成绩.

解 很显然，(1)和(2)是命题.

(3) 不是命题，因为无法知道变量 x 的取值，进而无法确定其真假.

(4) 是祈使句，它本身没有对错之分，但命令发出后会有终结反应.

(5) 是感叹句，(6)是疑问句，没有真假意义(反诘句如“你也喜欢《潜伏》吗?”除外). 不过，也可以认为(5)是“这朵花漂亮”的强调形式，因而是命题.

在 2005 年，美国“发现”号探测器发现火星上有水，至今尚不知道火星上是否有生物，2012 年着陆火星的“好奇”号正在探测，但我们相信在将来某个时候一定会知道的，因此，(7)被认为是命题. 正如我们把哥德巴赫(C. Goldbach，1690—1764)1742 年猜想“1+1=2”，即“大于 4 的偶数是两个奇素数之和”看作命题一样，现已经对直到 10^{14} 的所有的大于 4 的偶数都已经验证结论是正确的. 1966 年我国数学家陈景润证明了“1+2=3”，即“一个充分大的偶数是一个奇素数和一个不超过两个奇素数乘积的数之和”.

(8) 是悖论，不管承认对还是错都会导致矛盾. 若一个理论中出现悖论，说明该理论有不合理的地方. 为了避免悖论的出现，也许会产生新的研究分支，如公理化集合论等.

(9)和(10)是命题.

虽然，问题的重点不在于判断一个语句是否是命题，特别是命题的真假问题，因为有些判断还涉及概念的内涵问题，但对于初学用符号去研究逻辑的人来说，理解命题概念还是非常必要的.

命题的**真值**(truth)就是命题的逻辑取值. 经典逻辑值只有两个：1 和 0，它们是表示事物状态的两个量. 若一个命题是真命题，其真值为 1；若一个命题是假命题，其真值为 0. 在计算机专业课程中，将逻辑真用 1 表示，逻辑假用 0 表示. 通常规定，1 表示开关处于接通状态，0 表示开关处于断开状态；三极管饱和用 1 表示，三极管截止用 0 表示；在电路分析和设计时规定，1 表示高于逻辑高电平信号，0 表示逻辑低电平信号等. 实际上在数理逻辑中，更多时候逻辑真是用 T(True)，逻辑假用 F(False)表示的.

若一个命题不包含有更小的命题，则称其为**原子命题**(atom)或简单命题，否则称为**复合命题**(compound proposition). 原子命题是命题逻辑研究的基本单位，区分原子命题在后面命题的符号化时是很重要的. 在例 3-1 中，(1)、(2)、(7)、(9)是原子命题，特别注意(9)是

原子命题，不能把它分解为“小王是同学”和“小李是同学”.(10)是复合命题，它包含有两个原子命题“你刻苦学习”和“你取得好成绩”.

通常用小写英文字母 $p, q, r, s, \cdots$ 或带下标 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ 等来表示原子命题，如用 p：$2+3=5$，q：今天我们上课.

现在已经向构造符号体系迈出了第一步.还有的联结词符号将在下节介绍.把 1 和 0 称为**逻辑常量**(logical constant)，今后在逻辑表达式中出现的 $p, q, r, s, \cdots$ 或 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ 等称为**命题变元**(proposition variable)或**逻辑变量**(logical variable).命题变元可以代表任意命题，从取值的角度看，命题变元既可以取 1 也可以取 0.

习　题　3.1

1. 指出下列语句哪些是命题，对于命题指出其真值.

(1) 北京在 2008 年举办奥运会.

(2) 离散数学是计算机专业的必修课.

(3) $x>y$.

(4) 西南大学是一所“211 工程”建设的学校.

(5) 1 是素数.

(6) 读大学就是要学会思考.

(7) 月收入超过 3500 元要上缴个人所得税.

2. 找出下列各命题的所有原子命题，并分别用小写英文字母表示.

(1) 我不去游泳.

(2) 张三一边看书，一边用 iphone 听音乐.

(3) 小李能歌善舞.

(4) 这学期我选修“人工智能”或“模式识别”课程.

(5) 明天去深圳的飞机是上午八点或上午八点半起飞.

(6) 如果我有时间，我就回家去看望我的父母.

(7) 我今天进城，除非天下雨.

(8) 小张既没有外出也没有上网，他在睡觉.

(9) 你只有刻苦学习，才能取得好成绩.

(10) 仅当你走，我留下值班.

3.2　逻辑联结词

命题逻辑中出现的命题，除原子命题外，更多的是复合命题.一方面，复合命题是由原子命题构成的，它需要联结词；另一方面，给定了原子命题，使用**逻辑联结词**(logical connectives)可以将它们构成一个复合命题，这也是逻辑联结词的作用之一.

逻辑联结词类似于自然语言中的连词，但逻辑联结词就是逻辑运算，除在本节对其进行严格定义外，还需要在其后讨论其运算性质.

3.2.1 否定联结词 $\neg p$

设 p 表示一个命题，$\neg p$ 是对命题 p 的**否定**(negation，not)，读作“非 p”.

例如，令 p：$2+3=5$，则 $\neg p$：$2+3\neq 5$. 于是，1 元运算 $\neg$ 的运算表，如表 3-1 所示.

$\neg p$ 也可以用 $\sim p$ 表示，在 C 语言中用 $!p$ 表示，在信息检索中用 $-p$ 表示，在数字逻辑以及计算机组成原理中用 $\bar{p}$ 表示，与其对应的门电路为“非门”.

表 3-1

p	$\neg p$
1	0
0	1

$\neg p$ 是数理逻辑中的标准记号，而在实际应用时常采用 $\bar{p}$ 记号，建议大家对这两种记号都要熟悉.

$\neg$ 是仅有的一个 1 元逻辑运算符，下面讨论的都是 2 元运算符.

3.2.2 合取联结词 $p \wedge q$

令 p：小李能歌，q：小李善舞，则 p 与 q 的**合取**(conjunction，and)$p\wedge q$：小李能歌并且善舞. 合取联结词 $\wedge$ 相当于自然语言中的“并且”、“与”、“和”、“以及”、“不但…而且…”、“虽然…但是…”、“尽管…仍然…”等. 合取联结词 $\wedge$ 的运算表如表 3-2 所示.

表 3-2

p	q	$p\wedge q$	p	q	$p\wedge q$
1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0

注意

(1)“小王和小李是同学”中的“和”没有合取之意.

(2) 在数理逻辑中，合取联结词 $\wedge$ 可以将任意两个命题联结起来以构造出新的命题，如用 p：$2+3=5$，q：今天上课，则 $p\wedge q$：$2+3=5$ 且今天上课. 下面要介绍的其他联结词都是这样理解.

$p\wedge q$ 可用 $p\&q$ 或 $p*q$ 表示，在 C 语言中用 $p\&\&q$ 表示，在数字逻辑以及计算机组成原理中 $p\wedge q$ 用 $p\cdot q$ 表示，并且约定“$\cdot$”可以省略，直接写成 pq，与其对应的门电路为“与门”.

3.2.3 析取联结词 $p \vee q$

令 p：这学期我选修人工智能课程，q：这学期我选修模式识别课程，则 p 与 q 的**析取**(disjunction，or)$p\vee q$：这学期我选修人工智能或模式识别课程. 析取联结词 $\vee$ 相当于自然语言中的“或”. 析取联结词 $\vee$ 的运算表如表 3-3 所示.

表 3-3

p	q	$p\vee q$	p	q	$p\vee q$
1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0

$p \vee q$ 在 C 语言中用 $p \| q$ 表示，在数字逻辑以及计算机组成原理中 $p \vee q$ 用 $p+q$ 表示，与其对应的门电路为“或门”.

否定、合取和析取是 3 种最基本的逻辑运算，是所有程序设计语言涉及的逻辑运算，在信息检索中会经常用到，可以按“(离散数学＋高等数学) * 视频”查询网页.

3.2.4 异或联结词 $p \oplus q$

自然语言中的“或”可能是“**可兼或**”(inclusive or)，它表示两者可同时为真，用析取 $\vee$ 表示即可；也可能是“不可兼或”，它表示两者不能同时为真，换句话说，两者同时为真是假命题. 这就需要异或联结词.

令 p：明天去深圳的飞机是上午 8:00 起飞，q：明天去深圳的飞机是上午 8:30 起飞，则 p 与 q 的**异或**(exclusive or, XOR) $p \oplus q$：明天去深圳的飞机是上午 8:00 或上午 8:30 起飞. 异或联结词 $\oplus$ 的运算表如表 3-4 所示.

表 3-4

p	q	$p \oplus q$	p	q	$p \oplus q$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0

与异或联结词对应的门电路为“异或门”.

对于自然语言中的“或”用 $\vee$ 还是 $\oplus$ 需要仔细分析，一般来说，只要不是非常明显的不可兼就使用 $\vee$.

【例 3-2】 今天晚上我在寝室上自习或去电影院看电影.

解 令 p：今天晚上我在寝室上自习，q：今天晚上我去电影院看电影，则原命题可表示为 $p \vee q$.

【例 3-3】 本学期张三或李四当选为班长.

解 令 p：本学期张三当选为班长，q：本学期李四当选为班长，则原命题可表示为 $p \oplus q$.

3.2.5 条件联结词 $p \rightarrow q$

令 p：我有时间，q：我去看望我的父母，则 $p \rightarrow q$：如果我有时间，我就去看望我的父母. $p \rightarrow q$ 读作“***p* 蕴涵 *q***”(implication)或“***p* 条件 *q***”(conditional)，蕴涵联结词 $\rightarrow$ 相当于自然语言中的“若…则…”、“如果…那么…”等. 蕴涵联结词 $\rightarrow$ 的运算表如表 3-5 所示.

表 3-5

p	q	$p \rightarrow q$	p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1

$p \rightarrow q$ 在模糊逻辑系统中是标准的蕴涵联结词. 蕴涵联结词也可以称为条件联结词，但是与 C 语言中的“条件运算”以及 if-then 语句含义不同.

在 $p \to q$ 中，p 称为**前件**（antecedent），q 称为**后件**（consequent）. 当前件为 1，后件为 1 时，$p \to q$ 为 1；当前件为 1，后件为 0 时，$p \to q$ 为 0，这两种情况下的取值是容易理解的. 又因为我们的 → 是实质蕴涵，规定在前件为 0，后件为 1 时，$p \to q$ 为 1；当前件为 0，后件为 0 时，$p \to q$ 为 1. 这样规定有其合理性，见下面的例子.

【例 3-4】 令 p：太阳从西边出来，q：$2+3=5$，则 $p \to q$："如果太阳从西边出来，那么 $2+3=5$"是真命题.

【例 3-5】 令 p：太阳从西边出来，q：$2+3=4$，则 $p \to q$："如果太阳从西边出来，那么 $2+3=4$"是真命题.

实际上，在根据子集的定义证明 1.1 节的定理 1-1：对于任意集合 A，有 $\varnothing \subseteq A$ 时，就要用到上述实质蕴涵的定义. 同样，在理解关系的自反、反自反、对称、反对称及传递性质时，也要用到上述实质蕴涵的定义.

当然，在现代逻辑中，对蕴涵的不同理解会得到不同的逻辑系统，如由严格蕴涵得出模态逻辑系统[10].

3.2.6 双条件联结词 $p \leftrightarrow q$

令 p：四边形是平行四边形，q：四边形的对边平行，则 $p \leftrightarrow q$：四边形是平行四边形当且仅当该四边形的对边平行. $p \leftrightarrow q$ 读作"***p* 等价 *q***"（equivalence）或"***p* 双条件 *q***"（biconditional），等价联结词 ↔ 相当于自然语言中的"当且仅当"、"充分必要条件"，其英文为 if and only if，缩写为 iff. 等价联结词 ↔ 的运算表如表 3-6 所示.

表 3-6

p	q	$p \leftrightarrow q$	p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1

"p 当且仅当 q"有两层含义：(1)"p 当 q"是指 $q \to p$.（2）"p 仅当 q"是指 $p \to q$. 正因为此，等价联结词 ↔ 又可以称为双蕴涵联结词或双条件联结词.

在数字逻辑等课程中，等价联结词 ↔ 称为"同"，并用"⊙"符号表示，对应"同或门".

【例 3-6】 仅当你走，我留下.

解 令 p：我留下，q：你走，则原命题可表示为 $p \to q$.

在自然语言中，能用到的联结词就是上面 6 个. 但后面将证明，2 元逻辑运算还有下面 3 个，仅给出运算表.

3.2.7 与非联结词 $p \uparrow q$

$p \uparrow q$ 读作"***p* 与非 *q***"（NOT AND），它与下面的或非联结词"↓"（Peirce 箭头）相对应.

与非联结词以 Sheffer 的名字命名，称为 Sheffer 竖，而最初的记号为"|"，所以与非联结词"↑"的运算符号有些地方至今仍使用 Sheffer 竖符号"|". 在数字逻辑以及计算机组成原理中"↑"没有专用的运算符号，"p 与非 q"直接记为 $\overline{p \cdot q}$，对应的门电路为"与非门".

3.2.8 或非联结词 $p\downarrow q$

$p\downarrow q$ 读作"**p 或非 q**"(NOT OR),或非联结词"$\downarrow$"以 Peirce 的名字命名为"Peirce 箭头".

在数字逻辑以及计算机组成原理中"$\downarrow$"没有专用的运算符号,"p 或非 q"直接记为 $\overline{p+q}$,对应的门电路为"或非门".

3.2.9 条件否定联结词 $p\xrightarrow{n}q$

$p\xrightarrow{n}q$ 读作"**p 条件否定 q**"(NOT IF THEN),其中 n 表示否定 not.

"p 条件否定 q"可直接记为 $\neg(p\rightarrow q)$.

上面介绍了 1 个 1 元逻辑运算、8 个 2 元逻辑运算.后面将证明:不同的 1 元逻辑运算和 2 元逻辑运算共 9 个.

要求 理解记忆上述 9 个,特别是最前面的 6 个联结词的运算表.

思考 如何定义 3 元逻辑运算?

习 题 3.2

1. (1) 设 p:现在很多人都有车,求 $\neg p$.

(2) 写出"-2 是偶数或 3 是正数"的否定命题.

(3) 设 p:每个自然数都是整数,求 $p\vee\neg p$.

2. 令 p:今天有雨,q:明天有雨,问 $p\wedge q$,$p\vee q$,$p\rightarrow q$,$p\oplus q$,$p\uparrow q$,$p\downarrow q$ 和 $p\xrightarrow{n}q$ 分别表示什么复合命题?

3. 令 p:我们去图书馆,q:我们去上网,问 $\neg(p\wedge q)$表示什么复合命题?

4. 令 p:我生病,q:我去上课,则"虽然我没有生病,但我不去上课"该如何用符号表示?

5. "张红和张兰是姐妹"中的和与联结词 $\wedge$ 有什么不同?

6. 写出一个命题,它可以表示为 $p\leftrightarrow(\neg q\wedge r)$.

3.3 命题公式及其真值表

有了前面的两节内容,就可以得到命题逻辑的符号体系.由于所讲内容侧重于在后继课程中的应用,我们不给出逻辑演算系统的形式语言的定义.

3.3.1 命题公式的定义

命题公式就是逻辑函数或逻辑表达式,其中的常量是逻辑常量 1 和 0,其中的变元是命题变元或逻辑变量.很快可以看到,这种逻辑函数的取值只可能为 1 或 0.

命题公式是由命题常量、命题变元、逻辑联结词、左圆括号"("及右圆括号")"构成的有意义(well-formed)的符号串,其严格定义常借助于递归定义方式给出.

【定义 3-1】 **命题公式**(proposition formula)集合按下列方法生成:

（1）命题常量 1 和 0 以及命题变元是命题公式.

（2）若 A 是命题公式，则 $(\neg A)$ 是命题公式.

（3）若 A 和 B 是命题公式，则 $(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\oplus B)$，$(A\rightarrow B)$，$(A\leftrightarrow B)$，$(A\uparrow B)$，$(A\downarrow B)$，$(A\xrightarrow{n}B)$ 是命题公式.

（4）有限次应用（1）、（2）、（3）所得到的符号串是仅有的命题公式.

根据命题公式的定义知，p，$(\neg p)$，$(\neg(\neg p))$，$(1\wedge p)$，$(0\vee(\neg p))$，$(\neg(p\rightarrow q))$，$((p\oplus q)\downarrow q)$ 以及 $(((p\vee q)\rightarrow r)\leftrightarrow((\neg r)\rightarrow(p\wedge q)))$ 等是命题公式，而 $(\neg(p\rightarrow))$，$(\neg p\rightarrow q))$ 等不是命题公式.

命题公式可称为**合式公式**（Well-Formed Formula，WFF）或简称为公式，其全称为命题合式公式. 这儿的公式实际上是书写正确、含义清楚的表达式或者说符号串，与以前所学过的公式含义不尽一致. 上面已经谈到，命题公式是逻辑函数（它与形式系统中的 WFF 的定义不尽一致），否则如 $A\wedge 1$ 及 $A\uparrow B$ 等就没有定义，可以借助于函数给命题公式下定义.

命题公式一般用 $A,B,C,\cdots$ 表示. 若命题公式 A 中恰含有 n 个命题变元 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，则可以将 A 记为 $A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$. 显然，命题公式 A 就是命题变元 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的函数.

严格按照命题公式的定义，就会出现很多的括号. 一方面，这些括号使命题公式的结构清晰、含义清楚；而另一方面，括号太多给命题公式的阅读和书写带来不便. 因此，特作如下一些可以省略括号的约定：

（1）最外层的括号可以省略.

在形成最终的命题公式时，所有的中间过程得到的命题公式，包含其本身，都称为该命题公式的**子公式**. 如 $((p\oplus q)\downarrow q)$ 的子公式分别为 $p,q,(p\oplus q)$ 和 $((p\oplus q)\downarrow q)$. 这条约定是说，在最终形成的命题公式 $((p\oplus q)\downarrow q)$ 时，最外层的括号可以不写：$(p\oplus q)\downarrow q$，但在形成过程中的括号是至关重要的.

（2）9 个联结词运算的优先顺序依次为

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \oplus,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ \uparrow,\ \downarrow,\ \xrightarrow{\mathrm{n}}$$

符合本约定的有些括号可以不写. 如命题公式

$$((p\vee q)\rightarrow r)\leftrightarrow((\neg r)\rightarrow(p\wedge q))$$

可以写成

$$(p\vee q\rightarrow r)\leftrightarrow(\neg r\rightarrow p\wedge q)$$

或

$$p\vee q\rightarrow r\leftrightarrow\neg r\rightarrow p\wedge q$$

但这种优先顺序的规定不尽一致，如可以将 $\wedge$ 和 $\vee$ 看作同级别运算等[4]. 也可以按其他课本，只定义 5 个联结词 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$ 从左至右的优先级别[8].

（3）同级运算从左至右依次进行. 如 $p\rightarrow q\rightarrow r$ 是 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$，但很多时候是写成 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ 形式.

注意 *"可以省略"表示也可以不省略，但在有些时候，把命题公式 $p\wedge q\rightarrow r$ 写成 $(p\wedge q)\rightarrow r$ 也许更好.*

实际上，在对命题进行符号化时，只要书写正确的逻辑函数都是命题公式.

3.3.2 命题的符号化

命题的符号化就是使用符号——命题变元、逻辑联结词和括号将所给出的命题表示出

来.一方面说明,符号体系来源于实际问题,另一方面也是给出进一步学习逻辑演算系统的语义解释时的一种标准模型.

命题的符号化的步骤：

(1) 找出所给命题的所有原子命题,并用小写英文字母或带下标表示.

(2) 确定应使用的联结词,进而将原命题用符号表示出来.

【例 3-7】 将下列命题符号化.

(1) 天气很好或很热.

(2) 如果张三和李四都不去,那么我就去.

(3) 仅当你走,我留下.

(4) 我今天进城,除非天下雨.

(5) 你只有刻苦学习,才能取得好成绩.

解 (1) 用 p：天气很好，q：天气很热，则原命题符号化为：$p \vee q$.

本命题中的"或"不是明显的不可兼,所以用"$\vee$".

(2) 用 p：张三去，q：李四去，r：我去，则原命题符号化为：$\neg p \wedge \neg q \rightarrow r$.

注意 *"张三不去"应是复合命题.*

(3) 用 p：你走，q：我留下，则原命题符号化为：$q \rightarrow p$.

(4) 用 p：我今天进城，q：天下雨，则原命题符号化为：$\neg q \rightarrow p$.

"除非"相当于"如果不".

(5) 用 p：你刻苦学习，q：你取得好成绩，则原命题符号化为：$q \rightarrow p$.

3.3.3 命题公式的真值表

对于命题公式 A,若对 A 中出现的每个命题变元都指定一个真值 1 或者 0,就对命题公式 A 进行了一种**真值指派**(assignment)或一个**解释**(interpretation),而在该指派下会求出公式 A 的一个真值.将 A 的所有可能的真值指派以及在每一个真值指派下的取值列成一个表,就得到命题公式 A 的**真值表**(truth table).

【例 3-8】 写出命题公式$(\neg p \vee q) \rightarrow r$ 的真值表.

解 命题公式$(\neg p \vee q) \rightarrow r$ 的真值指派共 8 种,分别为$(p,q,r)=(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0),(0,1,1),(0,1,0),(0,0,1),(0,0,0)$.经过计算知,命题公式$(\neg p \vee q) \rightarrow r$ 在指派下的取值分别为：1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0.因此,命题公式$(\neg p \vee q) \rightarrow r$ 的真值表如表 3-7 所示.

表 3-7

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \rightarrow r$	p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \rightarrow r$
1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0

在列真值表时,最好将中间的计算过程也写出来,如表 3-7 中的第 4 列和第 5 列,它实

际上是按命题公式的形成过程(或者说是按命题公式的层)书写的,关键是列举所有真值指派及在每一种指派下的取值.

正因为这样,在列真值表时主要是所有命题变元及其真值指派和在每种指派下命题公式的取值.在当一个命题公式较复杂时,有些子公式可以省略.也可以将所有命题变元及其真值指派都放在第一列.这实际上是一种简化的真值表.

要求大家能准确写出一个命题公式的真值表,这是本节的重点内容,当然必须牢记联结词的运算表才行.

由表 3-7 知,含 3 个命题变元的命题公式有 $8=2^3$ 种不同的真值指派.很显然,含 2 个命题变元的命题公式有 $4=2^2$ 种不同的真值指派.一般来说,含 $n(n\geqslant 1)$ 个命题变元的命题公式的不同的真值指派有 2^n 种.

思考 设计程序,对于给定的命题公式构造真值表.

3.3.4 命题公式的类型

【定义 3-2】 在任何指派下均取真的命题公式称为**永真式**或**重言式**(tautology);在任何指派下均取假的命题公式称为**永假式**或**矛盾式**(contradiction);至少有一种指派使其为真的命题公式称为**可满足式**(satisfactable formula);至少有一种指派使其为真同时至少有一种指派使其为假的命题公式称为**中性式**或**偶然式**(contingency).

根据定义知,命题公式 $(\neg p\vee q)\rightarrow r$ 为中性式.很容易验证,命题公式 $p\vee\neg p$ 为永真式,$p\wedge\neg p$ 为永假式.

命题公式的分类如下:

$$\text{命题公式}\begin{cases}\text{可满足式}\begin{cases}\text{永真式}\\\text{中性式}\end{cases}\\\text{永假式}\end{cases}$$

显然,A 永真的充要条件是 $\neg A$ 永假;$A\wedge B$ 永真的充要条件是 A 和 B 均永真.

永真式是非常重要的一类命题公式,先看一个例子.

【例 3-9】 证明:命题公式 $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ 是永真式.

证 列出 $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ 的真值表如表 3-8 所示.

表 3-8

p	q	$p\rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p\vee q$	$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

由真值表可知,命题公式 $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ 是永真式.

注意 利用真值表得出一个命题公式的类型是最常用的方法,这种方法可以称为**真值表法**.

真值表法,从理论上来说,是完全可行的,但当命题变元较多时也是极为不方便的,例如