

第 3 章

集 合 论

CHAPTER 3

1. 集合论概述

集合论(set theory)作为数学中最富创造性的伟大成果之一,是在 19 世纪末由德国的康托尔(1845—1918)创立起来的。但是,它萌发、孕育的历史却源远流长,至少可以追溯到两千多年前。

集合论是关于无穷集合和超穷数的数学理论。在数理哲学中,有两种无穷方式历来为数学家和哲学家所关注:一种是无穷过程,称为潜在无穷;另一种是无穷整体,称为实在无穷。集合论的全部历史都是围绕无穷集合而展开的。

埃利亚学派的哲学家芝诺(Zenode,约公元前 490—公元前 430)一共提出 45 个悖论,其中关于运动的四个悖论——二分法悖论、阿基里斯追龟悖论、飞矢不动悖论与运动场悖论尤为著名,前三个悖论都与无穷直接有关。芝诺在悖论中虽然没有明确使用无穷集合的概念,但问题的实质却与无穷集合有关。

希腊哲学家亚里士多德(Aristotle,公元前 384—前 322)考虑过无穷集合,例如整数集合,但他不承认一个无穷集合可以作为固定的整体而存在,对他来说,集合只能是潜在的无穷。他最先提出要把潜在的无穷和实在的无穷加以区别,这种思想在当今仍有重要意义。他认为只存在潜在无穷,如地球的年龄是潜在无穷,但任意时刻都不是实在无穷。他承认正整数是潜在无穷的,因为任何正整数加上 1 总能得到一个新数。对他来说,无穷集合是不存在的。哲学权威亚里士多德把无穷限于潜在无穷之内,如同下了一道禁令,没人敢冒天下之大不韪,以至于影响对无穷集合的研究达两千多年之久。

其实,集合论里的中心难点是无穷集合这个概念本身。从希腊时代以来,这样的集合很自然地引起数学界与哲学界的注意,而这种集合的本质以及看来是矛盾的性质,使得对这种集合的理解没有任何进展。

2. 无穷集合

到了中世纪,随着无穷集合的不断出现,部分能够同整体构成一一对应这个事实也就越来越明显地暴露出来。例如,数学家们注意到把两个同心圆上的点用公共半径连接

起来,就构成两个圆上的点之间的一一对应关系。

近代科学的开拓者伽利略(1564—1642)注意到:两个不等长的线段上的点可以构成一一对应。他又注意到:正整数与它们的平方可以构成一一对应,这说明无穷大有不同的“数量级”。不过伽利略认为这是不可能的。他说,所有无穷大量都一样,不能比较大小。法国大数学家柯西(1789—1857)也同他的前人一样,不承认无穷集合的存在。他认为部分同整体构成一一对应是自相矛盾的事。

科学家们接触到无穷,却又无力去把握和认识它,这的确是向人类提出的尖锐挑战。正如大卫·希尔伯特(1862—1943)在他1926年题为《论无穷》的讲演中所说的那样:“没有任何问题像无穷那样深深地触动人的情感,很少有别的观念能像无穷那样激励理智产生富有成果的思想,然而也没有任何其他概念能像无穷那样需要加以阐明。”面对“无穷”的长期挑战,数学家们不会无动于衷,他们为解决无穷问题而进行的努力,首先是从集合论的先驱者开始的。

数学分析严格化的先驱波尔查诺(1781—1848)也是一位探索实无穷的先驱,他是第一个为了建立集合的明确理论而作出积极努力的人。他明确谈到实在无穷集合的存在,强调两个集合等价的概念,也就是后来的一一对应的概念。他知道,无穷集合的一个部分或子集可以等价于其整体,他认为这个事实必须接受。例如 $0\sim 5$ 的实数通过公式 $y=12x/5$ 可与 $0\sim 12$ 的实数构成一一对应的关系,尽管后面的集合包含前面的集合。为此,他为无穷集合指定超限数,使不同的无穷集合超限数不同。不过,后来康托尔指出,波尔查诺指定无穷集合的超限数的具体方法是错误的。另外,波尔查诺还提出了一些集合的性质,并将它们视为悖论。因此,波尔查诺关于无穷的研究哲学意义大于数学意义。应该说,他是康托尔集合论的先驱。

3. 集合论初创阶段

集合论问世以来,有些数学家拒绝将集合论当作数学的基础,认为这只是一场含有奇幻元素的游戏。

埃里特·比修普驳斥集合论是“上帝的数学,应该留给上帝”。路德维希·维特根斯坦特别对无限的操作有疑问,这也和策梅洛—弗兰克尔集合论有关。维特根斯坦对于数学基础的观点曾被保罗·贝奈斯所批评,且被克里斯平·赖特等人密切研究过。

对集合论最常见的反对意见来自结构主义者,他们认为数学和计算息息相关,但朴素集合论却加入了非计算性的元素。

曾几何时,拓扑理论曾被认为是传统公理化集合论的另一种选择。拓扑理论可以用来解释各种集合论的替代方案,如结构主义、模糊集合论、有限集合论和可计算集合论等。

按现代数学观点,数学各分支的研究对象或者本身是带有某种特定结构的集合(如

群、环、拓扑空间),或者是可以通过集合来定义的(如自然数、实数、函数)。从这个意义上说,集合论可以说是整个现代数学的基础。

集合论或集论是研究集合(由一堆抽象物件构成的整体)的数学理论,包含集合、元素和成员关系等最基本的数学概念。在大多数现代数学的公式化中,集合论提供了如何描述数学物件的语言。

集合论和逻辑与一阶逻辑共同构成了数学的公理化基础,以未定义的“集合”与“集合成员”等术语来形式化地建构数学物件。

在朴素集合论中,集合被当作一堆物件构成的整体之类的自证概念。在公理化集合论中,集合和集合成员并不直接被定义,而是先规范可以描述其性质的一些公理。在此想法之下,集合和集合成员犹如在欧式几何中的点和线,而不被直接定义。

第1节 集合的基本概念

1. 集合的概念

集合作为数学中最原始的概念之一,通常是指按照某种特征或规律结合起来的事物的总体。

定义 1.3.1 集合是具有某种属性的事物的全体,或是一些确定对象的汇总。构成集合的事物或对象,称为集合的元素。

集合用大写字母表示,集合的元素用小写字母表示。

简单地说,集合就是指作为整体的一堆东西,例如全班同学、方程组解的全体、一条直线上的所有点等。

由有限个元素构成的集合称为有限集合,由无限多个元素构成的集合称为无限集合。

2. 集合的表示法

1) 列举法

按任意顺序列出集合的所有元素,并用花括号 $\{\}$ 括起来。如 A 由 a, b, c, d 四个元素组成,写成 $A = \{a, b, c, d\}$ 。

2) 描述法

设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则, A 为满足 $P(a)$ 的一切 a 构成的集合,则记为

$$A = \{a \mid P(a)\}$$

当元素 a 是集合 A 的元素时,记成 $a \in A$; 当元素 a 不是集合 A 的元素时,记成 $a \notin A$ 。

对于集合要注意:

(1) 集合中的元素是确定的,也就是说,对于集合 A ,元素 a 或属于此集合,或不属于此集合,两者必属其一;

(2) 集合中的每个元素均相同则两集合相同,如集合 $\{a, b, c, d\}$ 与集合 $\{a, c, d, b\}$ 是一样的。

3. 全集与空集

由所研究的所有事物构成的集合称为全集,记为 E 。全集是相对的,例如,讨论的问题仅限于正整数,则全体正整数的集合为全集;当讨论的问题包括正整数与负整数时,则全体正整数的集合就不是全集。

不包括任何元素的集合(即元素个数为零的集合)称为空集。若 A 为空集,则记作 $A = \emptyset$ 。

第 2 节 集合间的关系

定义 1.3.2 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,即如果有 $a \in A$,则有 $a \in B$,则称 A 为 B 的子集。记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A 。如果 $B \supseteq A$,且存在元素,使得 $b \in B$,但 $b \notin A$,则称 A 是 B 的真子集,记以 $B \supset A$ 或 $A \subset B$ 。若集合 A, B 不满足 $A \subseteq B$,则称 B 不包含 A ,记以 $A \not\subseteq B$ 。

空集及集合 A 本身都可看成是集合 A 的子集。

定义 1.3.3 集合 A 与集合 B 有相同的元素,则称这两个集合是相等的,记以 $A = B$,否则称这两个集合不相等,记以 $A \neq B$ 。

对于集合的相等与包含关系,可用文氏图(Venn Diagram)表示(图 1.3.1)。

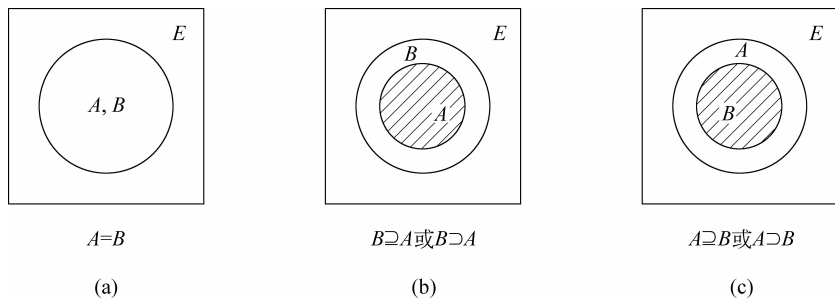


图 1.3.1 相等与包含关系之文氏图

对于集合的相等与包含关系,有以下几个结论。

(1) 对任一集合 A ,必有 $\emptyset \subseteq A$,即空集是任意集合的子集。

- (2) 对任一集合 A , 有 $A \subseteq A$, 即集合 A 是自己的子集。
- (3) 对任一集合 A , 必有 $E \supseteq A$ 。
- (4) 对任一集合 A , 必有 $\emptyset \subseteq A$ 。
- (5) 对于集合 A, B , $A=B$ 的充分必要条件是 $A \supseteq B$ 且 $B \supseteq A$ 。
- (6) 如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$, 即集合的包含关系有传递性。

第3节 集合代数

1. 集合的基本运算

定义 1.3.4 由集合 A, B 的所有元素合并组成的集合, 称为集合 A 与集合 B 的并集, 记以 $A \cup B$ 。

定义 1.3.5 由集合 A, B 的所有公共元素所组成的集合, 称为集合 A 与集合 B 的交集, 记以 $A \cap B$ 。

定义 1.3.6 集合 A, B 若满足 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 是分离的。

定义 1.3.7 由集合 A, B 中所有属于 A 而不属于 B 的元素所组成的集合, 称为集合 A 对集合 B 之差, 记作 $A - B$ 。

例如, $A = \{a, b, c, d, e, f\}, B = \{d, e, f, g, h\}$ 则

$$A - B = \{a, b, c\}$$

定义 1.3.8 全集 E 中所有不属于 A 的元素构成的集合, 称为 A 的补集, 记作 A' , $A' = \{x | x \in E \text{ 且 } x \notin A\}$ 。

定义 1.3.9 集合 A, B 之对称差(或叫布尔和) $A+B$ 可定义为

$$A + B = (A - B) \cup (B - A)。$$

例如, $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$ 则 $A + B = \{1, 2, 5, 6\}$ 。

由此可见 $A+B$ 即 A, B 之所有非公共元素所组成的集合。

以上 5 种运算可用如图 1.3.2 所示的文氏图表示。

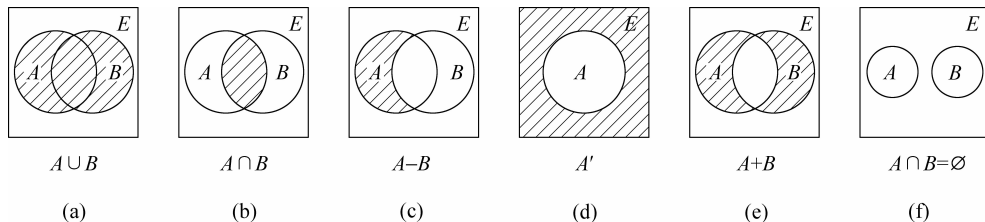


图 1.3.2 基本运算文氏图

2. 并、交、补的基本运算公式

(1) 并、交运算满足交换律,即

$$A \cup B = B \cup A \quad (1.3.1)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (1.3.2)$$

(2) 并、交运算满足结合律,即

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (1.3.3)$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (1.3.4)$$

(3) 并、交运算满足分配律,即

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (1.3.5)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1.3.6)$$

(4) 摩根律(DeMorgan's Law):

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (1.3.7)$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad (1.3.8)$$

关于摩根律(1.3.7)的证明可见文氏图 1.3.3。

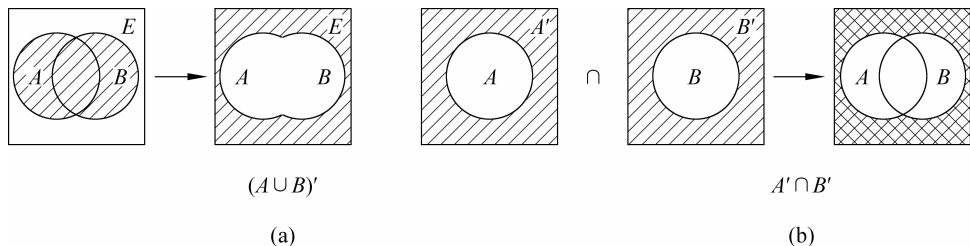


图 1.3.3 摩根律文氏图

3. 其他常用运算结论

$$(1) A \cup \emptyset = A, A \cap E = A, A \cup A' = E, A \cap A' = \emptyset \quad (1.3.9)$$

$$(2) A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A \quad (1.3.10)$$

$$(3) E \cup \emptyset = E, E \cap \emptyset = \emptyset \quad (1.3.11)$$

4. 应用实例

设某图书馆藏书 100 万册,有一读者前往查阅,他希望能了解所有英国 17 世纪以前描写资产阶级革命的长篇小说以及我国 1990 年以前出版的不是描写“文化大革命”的长篇小说,将满足此要求的书用集合论表示。

解: 此题中 E 为该图书馆全部藏书的书名集;

F : 所有英国书的书名集;

G : 所有 17 世纪以前的书的书名集;
 H : 所有描写资产阶级革命的书名集;
 R : 所有长篇小说的书名集;
 S : 所有 1990 年以前出版的书名集;
 C : 所有中国书的书名集;
 K : 所有描写“文化大革命”的书名集。

则读者要了解的书的集合可描述为

$$R \cap [(G \cap H \cap F) \cup (S \cap C \cap K')]$$

第4节 幂集、 n 重有序组及笛卡儿乘积

1. 幂集

定义 1.3.10 由集合 A 的所有子集(包括空集及集合 A 本身)所组成的集合叫作 A 的幂集,记以 2^A 或 $\rho(A)$ 。

定理 1.3.1 若集合 A 为由 n 个元素所组成的有限集,则 $\rho(A)$ 为有限,且由 2^n 个元素组成。

例如, $A = \{a, b, c, d\}$, 则 $\rho(A) = \{\phi, a, b, c, d, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$, 共有 $2^4 = 16$ 个元素。

2. n 重有序组

定义 1.3.11 两个按一定次序排列的客体: a, b 组成一个有序序列,我们叫作有序偶,记以 (a, b) 。

有序偶 (a, b) 中, a, b 分别称为 (a, b) 的第一客体与第二客体。

定义 1.3.12 有序偶 (a, b) 与 (c, d) , 若有 $a = c, b = d$, 则称 (a, b) 与 (c, d) 是相等的。

将有序偶推广到 n 重有序组:

定义 1.3.13 n 个 ($n > 1$) 按一定次序排列的客体 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成一个有序序列,称为 n 重有序组,记以 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 并称 a_i 为该有序组的第 i 个客体。

两个 n 重有序组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, 若有 $a_i = b_i, i = 1, 2, \dots, n$ 则称 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 是相等的。

3. 笛卡儿乘积

设有两个集合 A 与 B , 我们用 A, B 的元素组成有序偶, 以 A 的元素作为有序偶的第

一个客体,以 B 的元素作为第二个客体,用这种方法所组成的所有有序偶的全体构成的一个集合,称为 A 与 B 的笛卡儿乘积。

定义 1.3.14 集合 A, B 之笛卡儿乘积为

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

例如,平面上直角坐标中所有点的集合,可用笛卡儿乘积表示:

$$R \times R = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}$$

其中 R 表示实数集。

定义 1.3.15 集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的笛卡儿乘积可表示为

$$A_1 \times A_2 \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$$

例如,计算机内的字是由固定的 n 个有序二进制所组成的,它的全体可表示成 n 重有序组形式

$$A^n = A \times A \times \cdots \times A = \{(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n) \mid a_i \in A, i = 1, 2, \dots, n\}$$

其中 $A = \{0, 1\}$ 。

第 5 节 实数集、数域

1. 实数集

定义 1.3.16 设 p, q 为整数,且 $q \neq 0$,则所有可由 p/q 表示的数称为有理数;在数轴上不能由 p/q 表示的数称为无理数。

有理数可以表示为有穷小数或无穷循环小数。而无理数为无穷不循环小数。

有理数在数轴上处处稠密,即对数轴任意两个有理点,不论它们的差多么小,都可在它们之间找到无穷多个有理点。但有理点并未充满数轴,有理点之间尚有无穷多个空隙,这些空隙处的点就是无理点,它们对应的数就是无理数。

定义 1.3.17 有理数与无理数全体的集合称为实数集,实数充满数轴而且没有空隙。

2. 数域、实数域

定义 1.3.18 设 P 是由一些复数组成的集合,其中包括 0 与 1,如果 P 中任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 P 中的数,那么 P 就称为一个数域。

例如,所有具有形式 $a + b\sqrt{2}$ 的数(其中 a, b 为任何有理数),构成一个数域,所有整数构成的集合不构成一个数域。

所有实数集合构成一个数域,称为实数域,记作 R 。由全体复数组成的集合构成复数域,记为 C 。

所有数域都包含有理数域 Q 作为它的一部分。

按照所研究的问题,我们常常需要明确规定所考虑的数的范围。数域就是我们规定的所讨论的数的范围。