Chapter 3

第3章　形式命题演算

数理逻辑又称符号逻辑，是数学基础研究不可缺少的组成部分。“利用计算的方法来代替人们思维中的逻辑推理过程”是数理逻辑研究的主要思想基础。早在17世纪，德国数学家莱布尼茨(Leibniz)就曾经设想过建立一种“通用的科学语言”，将推理过程像数学一样用“公式”进行计算并最终得出正确的结论。正是沿着莱布尼茨的这一思想，传统逻辑研究的数学化方法得到发展。以符号为元素、公式为基本对象、形式公理为基础、推理规则为手段，构建逻辑演算形式系统，通过“证明”和“定理”等概念的形式化描述建立形式系统推理机制，并在此基础上讨论形式系统的可靠性、协调性与充分性，是数理逻辑基础研究的主要思想方法。到了19世纪末20世纪初，随着符号系统与理论基础的不断完善，数理逻辑逐步成为一门独立的学科。

数理逻辑包括的内容很多，其中“命题演算”与“谓词演算”是两个最基本、也是最重要的组成部分。本章介绍命题与命题演算的基本概念与基本性质，内容包括构建命题演算形式系统的基本方法、形式系统中的证明与定理、形式系统的演绎推理等相关概念，以及命题演算形式系统的可靠性与充分性分析等。

3.1　命题与命题演算形式系统

3.1.1　命题的概念

命题是数理逻辑中的一个原始概念，是高度抽象的产物。可描述为：

> 命题是用陈述语句表达的有具体意义、无矛盾，且在特定领域与时间范围内能够明确其真假、非真即假的断言。

注意：

(1) 陈述语句是命题表达的基本形式，因此用“疑问”、“感叹”和“祈使”语气表达的内容均不能成为命题；

(2) 命题是断言，凡断言一定是针对特定领域和特定对象的，通常与时间和空间的因素有关。因此将在特定领域与时间范围内能够明确其真假的断言称为命题是有道理的；

(3) “非真即假”是经典逻辑的一个重要特征，因此经典逻辑又称“二值逻辑”。

例如：

(1) 中华民族是伟大的民族。

(2) 北京是中华人民共和国的首都。

(3) 拿破仑是联合国秘书长。

(4) 雪是黑色的。

等都是命题,而下列语句则不是命题。

(5) 今天天气真好啊!(感叹句)

(6) 全体立正!(祈使句)

(7) 最近股市行情如何?(疑问句)

(8) 我正在说谎。(悖论)

其中,(5)、(6)和(7)不是用陈述语句表达的,因而不是命题;(8)“我正在说谎”的表述无法明确其本身内容的真假:如果“我正在说谎”为“真”,那么就表明“我”是在“说谎”,因此,“我”所说的“我正在说谎”就不能为“真”;如果“我正在说谎”为“假”,那么就说明“我”没有“说谎”,因此,“我”所说的“我正在说谎”就该为“真”。

还有一些有争议的陈述,如:

(9) 1+1=10。

该陈述在二进制运算中是对的,而在其他数制的运算中却不正确,也就是说它的“真”与“假”需要有先决条件,因此有些学者认为它不是命题。但是,根据人们对命题的理解,只要在特定的领域可以明确真假,就应该是命题。

(10) 别的星球上存在着生命。

该陈述的真假现在还无人知道,因此有些学者理所当然地认为它不是命题。但是,可以就此陈述从“存在生命”和“不存在生命”两个方面分别做出“假设”,并形成相应的“理论体系”。就像“连续统假设”,目前的数学理论还不能证明其真假,可以认为它是“真”的,也可以认为它“不真”,无论如何“连续统假设”都是一道实实在在的命题。

(11) 张山是个高个子同学。

该陈述中“高个子”是一个模糊的概念,所以有人会认为它不应该是经典逻辑考虑的问题。但我们知道,“高个子”实际上是一个相对的概念,如果在特定环境中考虑一些特殊的对象,明确“张山是个高个子同学”是“对”或“错”应该是没有问题的。

注意:对命题概念的理解和表述因人而异。然而当“命题”被用符号代替,“命题公式”成为考虑的基本对象,命题之间的关系性质与推理演算的基本规律成为关注的主要方面时,人们的思想趋于统一,而最初对命题概念的描述所存在的差异自然而然也就成了“过往烟云”。

上面例子中列出的命题有一个特点,即它们是具有单一主谓结构的陈述句,这样的命题称之为**简单命题**。如果将简单命题用**连词**结合起来,就可得到**复合命题**的概念。

例如:

(1) 中国**不**是超级大国。(否定)

(2) 我**是**教师,你们**也是**教师。(并且)

(3) **不是**小李没来,**就是**小王没来。(或者)

(4) **如果**你刻苦学习,**那么**你就会取得好的成绩。(如果…那么…)

等都是复合命题。

注意：利用连词构造复合语句的方式很多，但基本上都可以归结为上述例子中给出的4种基本形式。

(1) 虽然只有一套主语和谓语，但由于加入了“**否定**”的成分，所以将之规定为复合命题。

(2) 用“是”、“也是”将两个句子组成了一个复合命题，句子的结合关系也可以用“和”、“并且”等连词表达，这样的复合语句称为“**合取**”复合命题。

(3) 用“不是”、“就是”所表示的复合关系有“或”和“或者”之意，这样的复合语句称为“**析取**”复合命题。

(4) 用“如果”、“那么”所表示的复合关系是指在一定的“前提”下可能产生的“结果”，这样的复合语句称为“**条件**”复合命题。

3.1.2 命题的表示与翻译

1. 命题的表示

命题包括简单命题和复合命题。

一般情况下，用小写英文字母 p,q,r 或 $p_1,\cdots,p_n,\cdots$ 表示简单命题，用～(非)、∧(并且)、∨(或)、→(蕴含)表示连词，叫做**联结词**或**逻辑运算符**，分别称为否定词、合取词、析取词和条件(或蕴含)词。简单命题通过联结词～(非)、∧(并且)、∨(或)、→(蕴含)构成复合命题，主要有下列几种基本形式。

- $\sim p_1$(可理解为“非 p_1”，“不是 p_1”等)；
- $p_1 \wedge p_2$(可理解为“p_1 并且 p_2”，“p_1 和 p_2”等)；
- $p_1 \vee p_2$(可理解为“p_1 或者 p_2”，“不是 p_1 就是 p_2”等)；
- $p_1 \rightarrow p_2$(可理解为“p_1 蕴含 p_2”，“如果 p_1，那么 p_2”等)。

注意：

(1) 简单命题又称**原子命题**，原子命题是命题演算中不能再分解的最基本对象。

(2) 原子命题通过联结词形成复合命题，复合命题又可通过联结词继续生成更加复杂的命题形式，例如，$(p_1 \wedge (\sim p_2)) \rightarrow (p_3 \vee p_4)$等。它们统称为**命题公式**，用花体大写英文字母 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}$ 等表示。

(3) 在用联结词形成复杂命题公式的过程中，用括号(和)标明联结词的运算次序，就像四则运算中的“先乘除、后加减”那样，逻辑运算也有先后次序的概念，通常联结词运算的次序约定为～、∧、∨、→等。

(4) 在形如 $p_1 \rightarrow p_2$ 的命题公式中，p_1 称为“前件”或“前提”，p_2 称为“后件”或“结论”。

2. 命题的翻译

命题通常是用自然语言表达的。但在实际应用过程中，如系统分析、设计与开发等，对命题的处理十分重要，形式化表示往往是一个不可缺少的环节。

我们将自然语言表达的命题用命题公式表示的过程，或将命题公式表达的命题含义用自然语言表述的过程统称为命题的翻译。

注意：命题翻译包括“自然语言表达”与“命题公式表示”互相转换的两个方面。在计算

机应用领域，能够将自然语言陈述的“事实”或“需求”用符号化的方法准确地表示出来，是一项非常重要的工作，也是一项需要掌握的技术。因此，下面着重进行介绍。

例 3-1-1 将下列陈述用命题公式表示出来。

(1) 中国不是超级大国。

(2) 我是教师，你们也是教师。

(3) 不是小李没来，就是小王没来。

(4) 如果你刻苦学习，那么你就会取得好的成绩。

翻译：

(1) 用命题符号 p 表示“中国是超级大国”，则“中国不是超级大国”可表示为 $\sim p$。

(2) 用 p 表示“我是教师”，q 表示“你们是教师”，则“我是教师，你们也是教师”可表示为 $p \wedge q$。

(3) 用 p 表示“小李来”，q 表示“小王来”，则“不是小李没来，就是小王没来”可表示为 $(\sim p) \vee (\sim q)$。

(4) 用 p 表示“你刻苦学习”，q 表示“你取得好成绩”，则对应命题可表示为 $p \rightarrow q$。 ■

通过例 3-1-1 可以看出，将自然语言陈述的“事实”用命题公式表示的过程大致分为两个步骤：

首先要认真分析句子，找出句子中的“原子命题”并分别引入命题符号予以表示。需要注意的是，**“原子命题”不能有否定的成分**；其次是仔细分析句子结构，理解和把握“原子命题”之间的逻辑关系，**正确运用联结词**将整个句子用命题公式表示出来。

例 3-1-2 将下列陈述用命题公式表示出来。

(1) 要想稳定台海局势，要么美国不干预，要么中国具有强大的军事力量，而中国具有强大的军事力量就可以遏制美国的干预。

(2) 你要么向东走，要么向西走。

(3) 负负得正。

翻译：

(1) 用命题符号 p 表示“稳定台海局势”，q 表示“美国干预”，r 表示“中国具有强大的军事力量”，则“要想稳定台海局势，要么美国不干预，要么中国具有强大的军事力量，而中国具有强大的军事力量就可以遏制美国的干预”可表示为

$$(p \rightarrow \sim q \vee r) \wedge (r \rightarrow \sim q)$$

注意：句中前半段“要么美国不干预，要么中国具有强大的军事力量”是“稳定台海局势”的必要条件，因此作为条件式 $(p \rightarrow \sim q \vee r)$ 的后件，意为“如果要想稳定台海局势，那么美国不能干预或者中国有强大的军事力量”。句中后半段中的“中国具有强大的军事力量”应理解为“遏制美国的干预”（意为“使美国不干预”，用 $\sim q$ 表示）的充分条件。

(2) 用 p 表示“你向东走”，q 表示“你向西走”。对(2)的第一感觉是命题 p 和 q 具有“或”的关系。仔细分析会发现，这里的“或”与通常人们理解的“或”是有区别的，原因在于“向东”与“向西”不可能同时发生，因此，“你要么向东走，要么向西走”的准确表达应该为：

$$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \quad \text{或者} \quad (p \vee q) \wedge (\sim (p \wedge q))$$

公式$(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)$表示的“或”关系称为“异或”关系，记为$p\bar{\vee}q$，其中联结词$\bar{\vee}$称为“异或联结词”。通常意义下的或$\vee$称为“兼容或”。

(3)“负负得正”看似一个简单句，其实不然。首先该句有“否定”成分，其次该句还蕴含了“一个事物连续否定两次便会回到原先状态”的因果关系，所以“负负得正”可表示为$(\sim(\sim p)\rightarrow p)$，其中命题符号$p$可视为“正”。 ■

命题的翻译不是一件容易的事情，需要经过长期的摸索与实践才能越做越好。以后我们在学习谓词演算时也会遇到类似的问题。然而，在数学基础研究方面，人们更关心的问题是如何建立命题之间的逻辑与推理关系，对此这里引入命题演算形式系统的概念。

3.1.3 命题演算形式系统

1. 逻辑演算形式系统的基本要素

形式系统是现实世界实际事物及其相互间关系高度抽象的产物，形式系统的分析与研究在各类学科中都是一项十分重要的工作。构建形式系统的研究方法称为形式化研究方法，它是将事物的共性与关系研究提升到理论研究高度的重要手段。在数理逻辑中，形式系统通常采用符号化的方法来描述或刻画研究的基本对象，并以“公设”(即公理)为基础，通过“推理规则”的运用来构建整个形式系统的理论体系。构成形式系统的基本要素一般包括以下几方面。

- **符号集**：用于描述形式系统研究的基本对象以及对象间的基本关系和运算。
- **生成规则**：依据明确的“语法”规则，对研究的基本对象进行扩展。在逻辑演算形式系统中，运用生成规则产生的基本对象称为**合适公式**，所有合适公式组成的集合称为公式集。“生成规则”产生的对象全体也称“**集公式**”。
- **公理集**：“公理”是形成形式系统理论体系的基础。“公理”也称“公设”，一般情况下，不同的“公设”所形成的形式系统理论体系是不同的。
- **推理规则**：推理规则是形成形式系统理论体系的形式规则。以公理为基础，运用推理规则产生的结果，称为形式系统的“定理”。由公理和全部定理构成形式系统的理论体系。

2. 命题演算形式系统 *L*

按照构造形式系统的一般方法，给出命题演算形式系统如下定义：

***L* 的符号**。命题演算形式系统使用的符号有$\sim$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、(、)、p_1、p_2等，其中符号$\sim$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$称为逻辑运算符，p_1、p_2等称为命题变元或命题符号，命题变元也可用p、q、r等表示。括号(和)称为技术性符号，用来指明逻辑运算的次序。

***L* 的公式**。L的公式又称L的合适公式(well-formed formula，wff)，依据如下规则生成：

(1) 任意命题变元p_i是wff；

(2) 如果$\mathscr{A}$是wff，则$\sim\mathscr{A}$也是wff；

(3) 如果$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$是wffs，则$\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}$、$\mathscr{A}\vee\mathscr{B}$、$\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}$都是wffs；

(4) 只有经(1)、(2)和(3)产生的公式为wffs。

注意：花体大写英文字母 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}$ 等表示一般意义上的合适公式。合适公式的定义是以归纳的形式给出的，其中(1)是初始部分，又称奠基部分；(2)和(3)为归纳推导部分；(4)则是"界"，指出作为合适公式的必要条件。今后凡是涉及一般合适公式的命题，都可以采用数学归纳法并施归纳于合适公式的结构予以证明。

***L* 的公理**。L 包含如下公理：

(L_1) $\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$

(L_2) $(\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C}))\to((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))$

(L_3) $(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$

(L_4) $\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$

(L_5) $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\to\mathscr{A}$，$\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\to\mathscr{B}$

(L_6) $\mathscr{A}\to\mathscr{A}\vee\mathscr{B}$，$\mathscr{B}\to\mathscr{A}\vee\mathscr{B}$

(L_7) $(\mathscr{A}\to\mathscr{C})\to((\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\vee\mathscr{B}\to\mathscr{C}))$

***L* 的推理规则**。由 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 可得到 $\mathscr{B}$。该推理规则称为假言推理(Modus Ponens)，简称 MP 推理规则。

注意：在命题演算形式系统中，公理以及推理规则都是以形式化的方法给出的，故又称为形式化公理和形式化推理规则，其中出现的公式 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}$ 等可以用任意其他合适公式进行一致性替换。

例如，$(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to((\mathscr{C}\to\mathscr{D})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B}))$可以作为公理 L_1 来使用，而$(\mathscr{C}\vee\mathscr{D})\wedge(\sim\mathscr{C}\wedge\mathscr{D})\to\mathscr{C}\vee\mathscr{D}$ 可以看成公理 L_5；由$(\mathscr{C}\to\mathscr{D})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$和 $\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 经过 MP 推理规则可得到 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 等。

3.2 命题演算形式推理

3.2.1 命题演算形式证明与定理

在形式系统 L 中，从公理出发，经过 MP 推理可不断产生新的"结论"，这一过程称为形式系统 L 的"证明"，"证明"产生的结论称为形式系统的"定理"。具体定义如下：

形式系统中的"证明"是一合式公式的序列

$$\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n \tag{3.2.1}$$

其中，每个公式 $\mathscr{A}_i(1\leqslant i\leqslant n)$或者是形式系统的公理，或者由位于其前面的两个公式 $\mathscr{A}_j$ 和 $\mathscr{A}_k(1\leqslant j,k<i)$经使用 MP 得到。

如果合适公式序列 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n$ 是形式系统的证明，那么该序列中最后一个公式 $\mathscr{A}_n$ 称为形式系统的"定理"，记为$\vdash_L\mathscr{A}_n$。在不会引起混淆的情况下，符号$\vdash_L$中的下标 L 可以省略。

注意：

(1) 如果 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n$ 是形式系统 L 的证明，那么对任意 $k<n$，$\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_k$ 也是 L 的一个证明，因此证明序列中任意公式 $\mathscr{A}_k$ 都是 L 的定理。特别 L 的公理是定理，它的证明是由它自身一个公式组成的公式序列。

(2) 如果称某公式，如 $\mathscr{A}_i$，是由公式 $\mathscr{A}_j$ 和 $\mathscr{A}_k$ 经使用 MP 得到，那么 $\mathscr{A}_j$ 和 $\mathscr{A}_k$ 必定是两个形如 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}\to\mathscr{A}_i$ 的公式，其中 $\mathscr{B}$ 可设为 $\mathscr{A}_j$ 和 $\mathscr{A}_k$ 中的任一个。

(3) 式子$\vdash_L \mathscr{A}_n$中的符号$\vdash_L$并非形式系统L的符号，它用来表示“公式$\mathscr{A}_n$为形式系统的定理”这一说法。

(4) 形式系统的“定理”是一种形式定理，它不同于通常定理的概念，因而不妨称这种定理为“元定理”。

例 3-2-1 下面的公式序列是L的一个证明。

(1) $p_1\rightarrow(p_2\rightarrow p_1)$ //L_1

(2) $(p_1\rightarrow(p_2\rightarrow p_1))\rightarrow((p_1\rightarrow p_2)\rightarrow(p_1\rightarrow p_1))$ //L_2

(3) $(p_1\rightarrow p_2)\rightarrow(p_1\rightarrow p_1)$ //由(1)、(2)MP

由此可以得到$(p_1\rightarrow p_2)\rightarrow(p_1\rightarrow p_1)$是$L$的定理。 ■

例 3-2-2 试证明对任意合适公式$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$有下列式子成立。

(1) $\vdash(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})$

(2) $\vdash(\sim\mathscr{B}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}))$

证明：需要证明公式$(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})$和$\sim\mathscr{B}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A})$是$L$中的定理，就要给出其证明的公式序列。

(1) 证明的公式序列如下：

① $(\mathscr{A}\rightarrow((\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{A}))\rightarrow((\mathscr{A}\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A}))\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A}))$ //L_2

② $\mathscr{A}\rightarrow((\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{A})$ //L_1

③ $(\mathscr{A}\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A}))\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})$ //(1)、(2)MP

④ $\mathscr{A}\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})$ //L_1

⑤ $\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A}$ //(4)、(3)MP

故有$(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})$是$L$的定理，即$\vdash(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})$。

(2) 证明的公式序列如下：

① $(\sim\mathscr{B}\rightarrow(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim\mathscr{B}))$ //L_1

② $(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim\mathscr{B})\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A})$ //L_3

③ $((\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim\mathscr{B})\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}))\rightarrow(\sim\mathscr{B}\rightarrow((\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim\mathscr{B})\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A})))$ //L_1

④ $\sim\mathscr{B}\rightarrow((\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim\mathscr{B})\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}))$ //(2)、(3)MP

⑤ $(\sim\mathscr{B}\rightarrow((\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim\mathscr{B})\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A})))\rightarrow((\sim\mathscr{B}\rightarrow(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim\mathscr{B}))\rightarrow(\sim\mathscr{B}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A})))$ //L_2

⑥ $(\sim\mathscr{B}\rightarrow(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim\mathscr{B}))\rightarrow(\sim\mathscr{B}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}))$ //(4)、(5)MP

⑦ $\sim\mathscr{B}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A})$ //(1)、(6)MP

故有$\vdash(\sim\mathscr{B}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}))$。 ■

注意：要证明一个合适公式是L的定理，通常的方法是构造出“证明”的公式序列。由于L的定理是在公理的基础上产生的，因此在构造“证明”的过程中，凡是已被证明为“定理”的合适公式均可作为“公理”使用。

3.2.2 相对证明与演绎定理

1. 基于假设的证明

L中的证明是从L的公理出发构造证明的公式序列，因而也称是基于公理的证明。有时除了运用公理外，还可以将一些公式(未必是公理)作为“假设”在证明中直接运用，并由此

推出其他的结论(公式),这样的证明过程称为基于假设的证明,具体定义如下:

设 Γ 是一合适公式的集合,其中的公式可以是公理、定理或一般公式。如果合式公式序列 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n$ 满足:每个 $\mathscr{A}_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 或者是形式系统的公理,或者是 Γ 的成员(即 $\mathscr{A}_i\in\Gamma$),或者由位于其前面的两个公式 $\mathscr{A}_j$ 和 $\mathscr{A}_k(1\leqslant j,k<i)$ 经使用 MP 得到,那么该公式序列就称为是由 Γ 推导出的证明(或基于 Γ 的证明)。

如果合适公式序列 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n$ 是由 Γ 推导出的证明,则该序列的最后一个公式 $\mathscr{A}_n$ 称为可由 Γ 推导出的结论(或基于 Γ 的结论),记为 $\Gamma\vdash_L\mathscr{A}_n$ 或 $\Gamma\vdash\mathscr{A}_n$。

注意:

(1) 由 Γ 推导出的证明 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n$ 和一般证明 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n$ 的区别在于:前者可用 Γ 中的公式。如果 Γ 为空集 ϕ 时,那么 $\phi\vdash\mathscr{A}_n$ 和 $\vdash\mathscr{A}_n$ 是一样的,所以基于 Γ 的证明是基于公理证明的推广形式。由于证明的结论是相对于 Γ 中公式的,因此这样的证明称为"相对证明"。

(2) 如果 $\Gamma\vdash_L\mathscr{A}_n$,则在基于 Γ 的证明公式序列 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n$ 中,所使用到的 Γ 中的公式称为"假设"。

例 3-2-3 设 $\Gamma=\{\mathscr{A},(\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))\}$,其中 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}$ 是任意合适公式。试证明 $\Gamma\vdash\mathscr{B}\to\mathscr{C}$。

证明: 构造一个由 Γ 推导出的公式序列(即基于 Γ 的证明),最后产生 $\mathscr{B}\to\mathscr{C}$。

(1) $\mathscr{A}$ //假设(即 $\mathscr{A}\in\Gamma$)

(2) $\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$ //假设(即 $\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C})\in\Gamma$)

(3) $\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$ //L_1

(4) $\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ //(1)、(3)MP

(5) $(\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))\to((\mathscr{B}\to\mathscr{A})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C}))$ //L_2

(6) $(\mathscr{B}\to\mathscr{A})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C})$ //(2)、(5)MP

(7) $\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ //(4)、(6)MP

故有 $\{\mathscr{A},(\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))\}\vdash\mathscr{B}\to\mathscr{C}$,即 $\Gamma\vdash\mathscr{B}\to\mathscr{C}$。 ■

2. 演绎定理

通过上述分析可知,要证明某个公式是 L 的定理就需要构造出证明的公式序列,这通常不是一件容易的事情。相对证明的手段能够在一定程度上为此提供方便。

命题 3.2.1(演绎定理) 如果 $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash\mathscr{B}$,那么 $\Gamma\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{B}$。

分析: $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash\mathscr{B}$ 的含义是有一个公式的序列

$$\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n\quad(\text{源公式序列})$$

其中,$\mathscr{A}_i$ 或是 Γ 中的公式,或是 $\mathscr{A}$,或是公理,或是由排在它前面的两公式 $\mathscr{A}_k,\mathscr{A}_j(k,j<i)$ 经 MP 得到,并且 $\mathscr{A}_n$ 是公式 $\mathscr{B}$。

要证明 $\Gamma\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{B}$,就要给出一个公式序列

$$\mathscr{A}'_1,\mathscr{A}'_2,\cdots,\mathscr{A}'_m\quad(\text{目标公式序列})$$

要求 $\mathscr{A}'_i$ 或是 Γ 的公式,或是公理,或是 $\mathscr{A}'_j$ 与 $\mathscr{A}'_k(j,k<i)$ 经 MP 得到,并且 $\mathscr{A}'_m$ 是公式 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$。

证明: 采用数学归纳法并用归纳于源公式序列的长度(即序列中公式个数)n 的方法证明。

奠基步: $n=1$ 时,源公式序列中只有一个公式,它必为 $\mathscr{B}$。

情形 1 $\mathscr{B}$ 是公理或是 Γ 的公式。则目标公式序列构造如下：

(1) $\mathscr{B}$ //($\mathscr{B}$ 是公理)或($\mathscr{B}\in\Gamma$)

(2) $\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ //L_1

(3) $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ //(1)、(2)MP

注意到上述证明公式序列(1)、(2)、(3)中的公式或是 Γ 的元素，或是公理，或是经 MP 推理所得，且结果为 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$，所以有 $\Gamma\vdash(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$。

情形 2 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$。此时根据例 3-2-2(1)知$\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{A}$，显然有 $\Gamma\vdash(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$。

归纳推导步：假定当源序列的长度$<n$ 时命题成立，考虑长度为 n 的源序列 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n$，其中 $\mathscr{A}_n$ 是公式 $\mathscr{B}$。

情形 1 $\mathscr{B}$ 是公理或是 Γ 的公式。

情形 2 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$。

这两种情形可以仿照奠基步中构造目标公式序列的方法给出基于 Γ 的证明，从而得到 $\Gamma\vdash(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$。

情形 3 $\mathscr{B}$ 在源公式序列中是由某两个先前的公式 $\mathscr{A}_k,\mathscr{A}_j(k,j<n)$经 MP 得到。

在此情况下，$\mathscr{A}_k$ 和 $\mathscr{A}_j$ 必定是两个形如 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}\to\mathscr{B}$ 的公式。不妨假设 $\mathscr{A}_k$ 是 $\mathscr{C}\to\mathscr{B}$，$\mathscr{A}_j$ 是 $\mathscr{C}$。由于 $\mathscr{A}_j$ 和 $\mathscr{A}_k$ 是源公式序列中的公式，因此有

$$\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash\mathscr{A}_j,\quad \Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash\mathscr{A}_k$$

注意到 $k,j<n$，即基于 $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$ 证明的公式序列 $\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_j$ 和 $\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_k$ 的长度均小于 n，因而根据归纳假定就有

$$\Gamma\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{A}_j,\quad \Gamma\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{A}_k$$

即

$$\Gamma\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{C},\quad \Gamma\vdash\mathscr{A}\to(\mathscr{C}\to\mathscr{B})$$

由此可以得到一个基于 Γ 证明的公式序列，使得 $\mathscr{A}\to\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{A}\to(\mathscr{C}\to\mathscr{B})$在该序列中出现。设此序列如下：

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \mathscr{A}_1'\\ \quad\vdots\\ (2)\ \mathscr{A}\to\mathscr{C}\\ \quad\vdots\\ (3)\ \mathscr{A}\to(\mathscr{C}\to\mathscr{B})\end{array}\right\}\text{由 }\Gamma\text{ 推导出的公式序列}$$

在此基础上接着构造公式序列：

① $(\mathscr{A}\to(\mathscr{C}\to\mathscr{B}))\to((\mathscr{A}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B}))$ //L_2

② $(\mathscr{A}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ //(l)、$(l+1)$MP

③ $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ //(k)、$(l+2)$MP

显然整个公式序列是一个基于 Γ 的证明，且最后一个公式为 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$，所以有 $\Gamma\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{B}$。根据数学归纳法原理，命题得证。 ■

注意：演绎定理为构造形式系统 L 的证明带来了方便。例如，在例 3-2-2 中证明$\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 颇费了一番周折，如果运用演绎定理，则由 $\mathscr{A}\vdash\mathscr{A}$ 即刻得到$\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{A}$，可谓方便之极。

演绎定理的“逆”定理也是成立的。

命题 3.2.2 如果 $\Gamma\vdash(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$，则 $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash\mathscr{B}$。

证明：因为 $\Gamma\vdash(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$，所以有一个基于 Γ 的证明，结论为 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$，即：

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \mathscr{A}_1\\ \quad\vdots\\ (k)\ \mathscr{A}\to\mathscr{B}\end{array}\right\}\text{由 }\Gamma\text{ 推导出的公式序列}$$

在此基础上继续构造序列：

$(k+1)$ $\mathscr{A}$ //假设

$(k+2)$ $\mathscr{B}$ //由(k)、$(k+1)$MP

最终得到一个基于 $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$ 的证明，且结论为 $\mathscr{B}$，故 $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash\mathscr{B}$。 ■

注意：命题 3.2.1 和命题 3.2.2 都称为演绎定理。演绎定理为人们提供了一种相对证明的方法和手段，其基本思想是：要证明形如 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 的公式是定理，可以在假设 $\mathscr{A}$ 的基础上证 $\mathscr{B}$。这一证明过程的转换在“增加”更多前提的基础上“简化”了结论，以“一增一简”的变化为我们的证明提供了便利。

利用演绎定理很容易得到下面的命题。

命题 3.2.3 对任意的合适公式 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}$，有 $\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\}\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{C}$。

证明：

(1) $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ //假设

(2) $\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ //假设

(3) $\mathscr{A}$ //假设

(4) $\mathscr{B}$ //(1)、(3)MP

(5) $\mathscr{C}$ //(2)、(4)MP

故 $\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),(\mathscr{B}\to\mathscr{C}),\mathscr{A}\}\vdash\mathscr{C}$，由演绎定理得

$$\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\}\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{C}$$ ■

注意：命题 3.2.3 又称**假言三段论**(Hypothetical Syllogism，HS)。在今后的命题演算中，HS 可以作为推理规则使用。

在 $\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\}\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{C}$ 的基础上，两次运用演绎定理可以得到

$$\vdash(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to((\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))$$

故有公式 $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to((\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))$ 是形式系统 L 的定理。

接下来将通过一些命题的证明给出 L 中一些重要的定理，同时也了解一些构造形式系统 L 证明的基本方法和技巧。

命题 3.2.4

(a) $\sim\sim\mathscr{A}\vdash\mathscr{A}$

(b) $\mathscr{A}\vdash\sim\sim\mathscr{A}$

证明：(a) 的证明序列如下：

① $\sim\sim\mathscr{A}$ //假设

② $\sim\sim\mathscr{A}\to(\sim\sim\sim\sim\mathscr{A}\to\sim\sim\mathscr{A})$ //L_1

③ $(\sim\sim\sim\sim\mathscr{A}\to\sim\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\sim\sim\mathscr{A})$ //L_3

④ $\sim\sim\mathscr{A}\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\sim\sim\mathscr{A})$ //②、③HS

⑤ $(\sim\mathscr{A}\to\sim\sim\sim\mathscr{A})\to(\sim\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})$ //$L3$

⑥ $\sim\sim\mathscr{A}\to(\sim\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})$　　//④、⑤HS

⑦ $(\sim\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})$　　//①、⑥MP

⑧ $\mathscr{A}$　　//①、⑦MP

所以$\sim\sim\mathscr{A}\vdash\mathscr{A}$。

(b) 的证明序列如下：

(1) $\sim\sim(\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A})$　　//由(a)的证明可得

(2) $(\sim\sim\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{A})\to(\mathscr{A}\to\sim\sim\mathscr{A})$　　//L_3

(3) $(\mathscr{A}\to\sim\sim\mathscr{A})$　　//(1)、(2)MP

最后运用演绎定理即可得到 $\mathscr{A}\vdash\sim\sim\mathscr{A}$。 ■

注意：由命题 3.2.4 可知，$\sim\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}\to\sim\sim\mathscr{A}$ 都是形式系统 L 的定理。此表明：一道命题与其否定的再否定后得到的命题是等价的。实际上它们正是所谓“负负得正”的形式化描述。

命题 3.2.5

(a) $\sim\mathscr{B}\to\sim\mathscr{A}\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{B}$

(b) $\mathscr{A}\to\mathscr{B}\vdash\sim\mathscr{B}\to\sim\mathscr{A}$

(c) $\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B}\vdash\mathscr{B}\to\sim\mathscr{A}$

(d) $\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B}\vdash\sim\mathscr{B}\to\mathscr{A}$

证明：

(a) 可以由公理(L_3)运用演绎定理直接得到。

(b) 的证明序列如下：

(1) $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$　　//假设

(2) $\mathscr{B}\to\sim\sim\mathscr{B}$　　//命题 3.2.4(b)

(3) $\mathscr{A}\to\sim\sim\mathscr{B}$　　//(1)、(2)HS

(4) $\sim\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}$　　//命题 3.2.4(a)

(5) $\sim\sim\mathscr{A}\to\sim\sim\mathscr{B}$　　//(4)、(3)HS

(6) $(\sim\sim\mathscr{A}\to\sim\sim\mathscr{B})\to(\sim\mathscr{B}\to\sim\mathscr{A})$　　//L_3

(7) $\sim\mathscr{B}\to\sim\mathscr{A}$　　//(5)、(6)MP

所以 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}\vdash\sim\mathscr{B}\to\sim\mathscr{A}$ 或$\vdash(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to(\sim\mathscr{B}\to\sim\mathscr{A})$。

类似可证(c)和(d)，留作练习。 ■

注意：在数学证明中，一道命题与其逆否命题是等价的，欲证“如果 $\mathscr{A}$ 那么 $\mathscr{B}$”可以通过证“若无 $\mathscr{B}$ 则无 $\mathscr{A}$”完成，后者是前者的逆否命题，所用的证明方法称为“反证法”。命题 3.2.5 中的诸式给出了各种类型反证过程的形式化表示，不妨将它们称为“反证原理”。

命题 3.2.6　$\vdash(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}$。

证明：构造证明序列如下：

(1) $\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}$　　//假设

(2) $\sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))$　　//例 3-2-2(2)

(3) $\sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))\to((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})))$　　//L_2

(4) $(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))$　　//(2)、(3)MP

(5) $\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})$　　//(1)、(4)MP

(6) $(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}$　　//(5)利用反证原理

(7) $\mathscr{A}$　　//(1)、(6)MP

故$(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\vdash\mathscr{A}$，由演绎定理得$\vdash(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}$。■

注意：命题3.2.6是数学证明中一个非常有趣的证明原理的形式化描述，即如果假设$\mathscr{A}$不成立又能推出$\mathscr{A}$成立，那么$\mathscr{A}$就一定成立。这实际上也是一种"反证"的手段，与命题3.2.5表示的"因果命题"反证手段不同的是，本命题是关于单一命题的。

命题3.2.7　设$\mathscr{A}$是合适公式，则对任意合适公式$\mathscr{B}$均有$\mathscr{A},\sim\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}$。

证明：构造证明序列如下：

(1) $\sim\mathscr{A}$　　//假设

(2) $\mathscr{A}$　　//假设

(3) $\sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$　　//例3-2-2(2)

(4) $\mathscr{B}$　　//(1)、(3)MP、(2)MP

故$\mathscr{A},\sim\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}$。■

注意：命题3.2.7告诉我们在数学证明中一个不可忽视的重要问题，那就是"如果将相互矛盾的命题作为前提，那么所有的命题都为真"。如果在一个形式系统中所有的"命题"都为真，那么这个形式系统也就没有任何实际应用价值了。因此，"无矛盾性"是人们建立形式系统的基本要求，无矛盾的形式系统称为是"协调的"。

由命题3.2.7通过演绎定理即可得到下面的结论。

命题3.2.8

(1) $\sim\mathscr{A}\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{B}$

(2) $\mathscr{A}\vdash\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B}$

注意：到目前为止，通过3个例子(例3-2-1、例3-2-2和例3-2-3)和8道命题(命题3.2.1～3.2.8)给出了形式系统L中的一些重要"定理"。这些"定理"在以后构造形式系统L的证明时可以直接使用。需要特别提醒的是：在这些例子和命题的证明构造过程中，只用到了公理(L_1)、(L_2)和$(L3)$。这一点非常重要，它将在以后我们重新认识形式系统L时用到。

命题3.2.9

(1) $\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\vdash\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\to\mathscr{C}$

(2) $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\to\mathscr{C}\vdash\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C})$

证明：

(1) 的证明如下：

① $\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C})$　　//假设

② $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}$　　//假设

③ $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\to\mathscr{A}$　　//L_5

④ $\mathscr{A}$　　//②、③MP

⑤ $\mathscr{B}\to\mathscr{C}$　　//①、④MP

⑥ $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\to\mathscr{B}$　　//L_5

⑦ $\mathscr{B}$　　//②、⑥MP

⑧ $\mathscr{C}$　　//⑤、⑦MP

故有$\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C}),\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\vdash\mathscr{C}$，由演绎定理得$\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\vdash\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\to\mathscr{C}$。

(2) 的证明如下:

① $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ //假设

② $\mathscr{A}$ //假设

③ $\mathscr{B}$ //假设

④ $\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$ //L_4

⑤ $\mathscr{B}\to\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}$ //②、④MP

⑥ $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}$ //③、⑤MP

⑦ $\mathscr{C}$ //①、⑥MP

故有 $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\to\mathscr{C},\mathscr{A},\mathscr{B}\vdash\mathscr{C}$,由演绎定理得 $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\to\mathscr{C}\vdash\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C})$。 ■

命题 3.2.10

(1) $\mathscr{A}\to\mathscr{B}\vdash(\mathscr{A}\wedge\mathscr{C})\to(\mathscr{B}\wedge\mathscr{C})$

(2) $\mathscr{A}\to\mathscr{B}\vdash(\mathscr{C}\wedge\mathscr{A})\to(\mathscr{C}\wedge\mathscr{B})$

证明:

(1) 的证明如下:

① $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ //假设

② $\mathscr{A}\wedge\mathscr{C}$ //假设

③ $\mathscr{A}\wedge\mathscr{C}\to\mathscr{A}$ //L_5

④ $\mathscr{A}$ //②、③MP

⑤ $\mathscr{A}\wedge\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ //L_5

⑥ $\mathscr{C}$ //②、⑤MP

⑦ $\mathscr{B}$ //①、④MP

⑧ $\mathscr{B}\to(\mathscr{C}\to(\mathscr{B}\wedge\mathscr{C}))$ //L_4

⑨ $\mathscr{C}\to(\mathscr{B}\wedge\mathscr{C})$ //⑦、⑧MP

⑩ $\mathscr{B}\wedge\mathscr{C}$ //⑥、⑨MP

故有 $\mathscr{A}\to\mathscr{B},\mathscr{A}\wedge\mathscr{C}\vdash\mathscr{B}\wedge\mathscr{C}$,进而有 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}\vdash(\mathscr{A}\wedge\mathscr{C})\to(\mathscr{B}\wedge\mathscr{C})$。

(2) 的证明如下:

① $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ //假设

② $\mathscr{C}\wedge\mathscr{A}$ //假设

③ $\mathscr{C},\mathscr{A}$ //② L_5 MP

④ $\mathscr{B}$ //③、①MP

⑤ $\mathscr{C}\wedge\mathscr{B}$ //③、④ L_4 MP

故 $\mathscr{A}\to\mathscr{B},\mathscr{C}\wedge\mathscr{A}\vdash\mathscr{C}\wedge\mathscr{B}$,继而有 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}\vdash(\mathscr{C}\wedge\mathscr{A})\to(\mathscr{C}\wedge\mathscr{B})$。 ■

命题 3.2.11

(1) $\mathscr{A}\to\mathscr{B}\vdash\mathscr{A}\vee\mathscr{C}\to\mathscr{B}\vee\mathscr{C}$

(2) $\mathscr{A}\to\mathscr{B}\vdash\mathscr{C}\vee\mathscr{A}\to\mathscr{C}\vee\mathscr{B}$

证明:

(1) 的证明如下:

① $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ //假设

② $\mathscr{A}\vee\mathscr{C}$ //假设

③ $\mathscr{B}\to\mathscr{B}\vee\mathscr{C}$ //L_6

④ $\mathscr{A}\to\mathscr{B}\vee\mathscr{C}$ //①、③HS

⑤ $\mathscr{C}\to\mathscr{B}\vee\mathscr{C}$ //L_6

⑥ $(\mathscr{A}\to\mathscr{B}\vee\mathscr{C})\to((\mathscr{C}\to\mathscr{B}\vee\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\vee\mathscr{C}\to\mathscr{B}\vee\mathscr{C}))$ //L_7

⑦ $(\mathscr{C}\to\mathscr{B}\vee\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\vee\mathscr{C}\to\mathscr{B}\vee\mathscr{C})$ //④、⑥MP

⑧ $\mathscr{A}\vee\mathscr{C}\to\mathscr{B}\vee\mathscr{C}$ //⑤、⑦MP

⑨ $\mathscr{B}\vee\mathscr{C}$ //②、⑧MP

故 $\mathscr{A}\to\mathscr{B},\mathscr{A}\vee\mathscr{C}\vdash\mathscr{B}\vee\mathscr{C}$,由演绎定理得 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}\vdash\mathscr{A}\vee\mathscr{C}\to\mathscr{B}\vee\mathscr{C}$。

(2)的证明留作练习。 ■

注意:命题 3.2.9、命题 3.2.10 和命题 3.2.11 涉及公理 $L_4\sim L_7$,主要反映了合取 $\wedge$ 和析取 $\vee$ 两个逻辑运算的基本性质。

3.3 命题公式的等价与替换

3.3.1 等价命题公式

1. 等价命题公式的定义

设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 是合适公式,用 $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$ 表示公式 $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\wedge(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$的缩写,称为 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的等价式。显然,等价式 $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$ 是合适公式,其中符号↔可读作“等价于”。如果在形式系统 L 中有 $\vdash(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$,则称公式 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 在形式系统 L 中是等价的。

注意:符号↔又称为“等词”,它并非最初给出的形式系统 L 的符号。为更好地揭示命题与命题之间的关系,通过引进一些符号简化命题的表达形式以便讨论和研究是十分必要的,这也是数学形式化研究的重要方法之一。符号↔可视为逻辑运算符并作为联结词使用,运算次序在其他联结词之后。

2. 等价命题公式的基本性质

命题 3.3.1 对任意合适公式 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$,若 $\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}$ 并且 $\mathscr{B}\vdash\mathscr{A}$,则 $\vdash\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$。

证明:

(1) $\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}$ //假设

(2) $\mathscr{B}\vdash\mathscr{A}$ //假设

(3) $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ //(1)演绎定理

(4) $\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ //(2)演绎定理

(5) $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to((\mathscr{B}\to\mathscr{A})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\wedge(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$ //L_4

(6) $(\mathscr{B}\to\mathscr{A})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\wedge(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$ //(3)、(5)MP

(7) $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\wedge(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$ //(4)、(6)MP

(8) $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$ //(7)根据↔的定义

故若有 $\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}\vdash\mathscr{A}$,就有 $\vdash\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$。 ■

注意:和以往构造证明序列有所不同的是:在命题 3.3.1 的证明中,用 $\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}\vdash\mathscr{A}$ 作为假设,这种证明也叫做辅助证明。实际上,假设 $\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}$ 可以看成由 $\mathscr{A}$ 出发推导出 $\mathscr{B}$ 的一个公式序列。

命题 3.3.2 等价命题公式的“自反性”、“对称性”和“传递性”可表达如下。

(1) $\vdash\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{A}$ (2) $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}\vdash\mathscr{B}\leftrightarrow\mathscr{A}$ (3) $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B},\mathscr{B}\leftrightarrow\mathscr{C}\vdash\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{C}$

命题 3.3.3　等价命题公式具有下列推理性质。

(1) $\mathscr{A}\to\mathscr{B},\mathscr{B}\to\mathscr{A}\vdash\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$　　(4) $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}\vdash\mathscr{B}\to\mathscr{A}$

(2) $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}\vdash(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\wedge(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$　　(5) $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B},\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}$

(3) $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{B}$　　(6) $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B},\mathscr{B}\vdash\mathscr{A}$

这些命题的证明不难,有兴趣的读者可以自行证明。

3.3.2　等价命题替换定理

1. 命题公式的子公式

设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 是合适公式,如果满足下列条件,则称 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{C}$ 子公式。

(1) 若 $\mathscr{C}$ 是命题符号 p,则 $\mathscr{A}$ 只能是 p;

(2) 若 $\mathscr{C}$ 是 $\sim\mathscr{M}$,则 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{M}$ 的子公式;

(3) 若 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{M}\to\mathscr{N}$,$\mathscr{M}\wedge\mathscr{N}$ 或 $\mathscr{M}\vee\mathscr{N}$,则 $\mathscr{A}$ 或是 $\mathscr{M}$ 或是 $\mathscr{N}$ 的子公式;

(4) 凡子公式必满足规则(1)、(2)和(3)之一。

例如,公式 $\mathscr{C}$:$(\mathscr{P}\to\mathscr{Q})\to((\mathscr{R}\to\mathscr{Q})\to(\mathscr{P}\to\mathscr{Q}))$,其中公式 $\mathscr{P}\to\mathscr{Q}$ 为其子公式,而且子公式 $\mathscr{P}\to\mathscr{Q}$ 在 $\mathscr{C}$ 中有两处出现。

为了明确 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{C}$ 的子公式这一事实,通常将 $\mathscr{C}$ 写成 $\mathscr{C}_A$ 的形式。

2. 子公式替换

设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{C}_A$ 的子公式,用公式 $\mathscr{B}$ 替换 $\mathscr{C}_A$ 中子公式 $\mathscr{A}$ 的一处或多处出现的过程称为子公式替换,简称公式替换。用公式 $\mathscr{B}$ 替换 $\mathscr{C}_A$ 中子公式 $\mathscr{A}$ 的一处或多处出现后,得到的公式记为 $\mathscr{C}_B$。

注意:子公式替换是用某个公式 $\mathscr{B}$ 去替换另一个公式 $\mathscr{C}_A$ 中的子公式 $\mathscr{A}$,替换的方式可以完全替换,即对子公式 $\mathscr{A}$ 所有出现处都用 $\mathscr{B}$ 进行替换;也可以是局部替换,即对子公式 $\mathscr{A}$ 的某些出现处进行替换,替换后的公式都记为 $\mathscr{C}_B$。

例如,设 $\mathscr{C}_A$ 为 $(\mathscr{P}\to\mathscr{Q})\wedge((\mathscr{P}\to\mathscr{Q})\vee\sim\mathscr{R})$,其中有子公式 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{P}\to\mathscr{Q}$。用公式 $\sim\mathscr{A}\vee\mathscr{B}$(设为 $\mathscr{B}$)去替换其中的子公式 $\mathscr{A}$,则 $\mathscr{C}_B$ 可是 $(\mathscr{P}\to\mathscr{Q})\wedge((\sim\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\vee\sim\mathscr{R})$,也可以是 $(\sim\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\wedge((\sim\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\vee\sim\mathscr{R})$。前者是局部替换,而后者是完全替换。

3. 等价替换定理

命题 3.3.4(替换定理)　设 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}_A$ 是公式,其中 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{C}_A$ 的子公式。将 $\mathscr{C}_A$ 中 $\mathscr{A}$ 的一处或多处出现用 $\mathscr{B}$ 替换后得到公式 $\mathscr{C}_B$,则有 $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}\vdash\mathscr{C}_A\leftrightarrow\mathscr{C}_B$。

注意:替换定理说的是:对一个公式的若干相同部分(子公式)代以一个与该部分等价的公式后,所得到的新公式与原先的公式是等价的。特别地,如果先前公式是 L 的定理,那么等价替换后产生的新的公式也是 L 的定理。

证明:施归纳于 $\mathscr{C}_A$ 的长度(即 $\mathscr{C}_A$ 中含符号的个数)来证明。

奠基步:由于 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{C}_A$ 的子公式,则可假定 $\mathscr{C}_A$ 即为 $\mathscr{A}$。此时 $\mathscr{C}_A$ 经替换后得到的 $\mathscr{C}_B$ 即为 $\mathscr{B}$,于是 $\mathscr{C}_A\leftrightarrow\mathscr{C}_B$ 即为 $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$,显然有 $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}\vdash\mathscr{C}_A\leftrightarrow\mathscr{C}_B$。

归纳推导步:假定 $\mathscr{C}_A$ 的长度为 n,并且命题对所有长度小于 n 的公式成立。根据合适公式的归纳定义,分情形归纳证明。

情形 1　$\mathscr{C}_A$ 为 $\sim\mathscr{M}$,那么 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{M}$ 的子公式,记 $\mathscr{M}$ 为 $\mathscr{M}_A$,经替换后为 $\mathscr{M}_B$,根据归纳假定有 $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}\vdash\mathscr{M}_A\leftrightarrow\mathscr{M}_B$。注意到 $\mathscr{M}_A\leftrightarrow\mathscr{M}_B$ 当且仅当 $\sim\mathscr{M}_A\leftrightarrow\sim\mathscr{M}_B$,所以由 $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$ 可推出 $\mathscr{C}_A\leftrightarrow\mathscr{C}_B$。

情形 2 $\mathscr{C}_A$ 为 $\mathscr{M}_A \wedge \mathscr{N}_A$。由归纳假定，$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ 可推出 $\mathscr{M}_A \leftrightarrow \mathscr{M}_B$ 和 $\mathscr{N}_A \leftrightarrow \mathscr{N}_B$，由此可推出 $\mathscr{M}_A \wedge \mathscr{N}_A \leftrightarrow \mathscr{M}_B \wedge \mathscr{N}_B$，所以有 $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} \vdash \mathscr{C}_A \leftrightarrow \mathscr{C}_B$。

情形 3 $\mathscr{C}_A$ 为 $\mathscr{M}_A \vee \mathscr{N}_A$。由归纳假定，$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ 可推出 $\mathscr{M}_A \leftrightarrow \mathscr{M}_B$，$\mathscr{N}_A \leftrightarrow \mathscr{N}_B$，进而可推出 $\mathscr{M}_A \vee \mathscr{N}_A \leftrightarrow \mathscr{M}_B \vee \mathscr{N}_B$，所以有 $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} \vdash \mathscr{C}_A \leftrightarrow \mathscr{C}_B$。

情形 4 $\mathscr{C}_A$ 为 $\mathscr{M}_A \rightarrow \mathscr{N}_A$。由归纳假定，$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ 可推出 $\mathscr{M}_A \leftrightarrow \mathscr{M}_B$，$\mathscr{N}_A \leftrightarrow \mathscr{N}_B$，进而可推出 $(\mathscr{M}_A \rightarrow \mathscr{N}_A) \leftrightarrow (\mathscr{M}_B \rightarrow \mathscr{N}_B)$，所以有 $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} \vdash \mathscr{C}_A \leftrightarrow \mathscr{C}_B$。

根据归纳法原理，命题成立。 ■

注意：在替换定理的证明中省略了一些证明细节，这些细节可以通过下面命题的证明得到补充。

命题 3.3.5

(1) $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) \vdash \sim \mathscr{A} \leftrightarrow \sim \mathscr{B}$

(2) $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}, \mathscr{C} \leftrightarrow \mathscr{D} \vdash \mathscr{A} \wedge \mathscr{C} \leftrightarrow \mathscr{B} \wedge \mathscr{D}$

(3) $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}, \mathscr{C} \leftrightarrow \mathscr{D} \vdash \mathscr{A} \vee \mathscr{C} \leftrightarrow \mathscr{B} \vee \mathscr{D}$

(4) $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}, \mathscr{C} \leftrightarrow \mathscr{D} \vdash (\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}) \leftrightarrow (\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{D})$

证明：留作练习。

3.4 对偶命题公式

3.4.1 命题公式的对偶式

设 $\mathscr{A}$ 是由命题字符 $p_1, \cdots, p_m$ 或它们的否定 $\sim p_1, \cdots, \sim p_m$ 形成的命题公式，而且只含联结词 $\wedge$ 或 $\vee$。将 $\mathscr{A}$ 中的联结词 $\vee$ 和 $\wedge$ 互换(即 $\vee$ 换成 $\wedge$，$\wedge$ 换成 $\vee$)，同时把每个命题字符与其否定互换(即 p_i 以 $\sim p_i$ 替换，$\sim p_i$ 以 p_i 代换)，所得到的公式称为 $\mathscr{A}$ 的对偶式，记为 $\mathscr{A}'$。

注意：

(1) 在讨论命题公式的对偶式时，只考虑含有逻辑运算 $\sim$、$\wedge$、$\vee$ 的命题公式，但这并不影响对所有的命题公式考虑其对偶式的问题，实际上形如 $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ 的命题公式可以通过 $\sim \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ 表示。

(2) 对偶式定义中是以命题字符 $p_1, \cdots, p_m$ 或 $\sim p_1, \cdots, \sim p_m$ 作为基础给出的，一般情况下，可以一般公式为基础来构造对偶式。

(3) 联结词 $\wedge$ 和 $\vee$ 的连接强度是不同的，在构造对偶式的过程中，要求在两种运算互换后，不能改变原先的运算次序，通常的情况是将 $\wedge$ 用 $\vee$ 替换后，加上括号(和)以明确 $\vee$ 的结合对象。

例如，公式 $\sim \mathscr{A} \wedge (\sim \mathscr{B} \vee \mathscr{B})$ 的对偶式为 $\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \wedge \sim \mathscr{B})$，其中并没有命题符号，而是公式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\sim \mathscr{A}$，$\sim \mathscr{B}$ 等。再例如，$\sim \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \vee (\sim \mathscr{P} \wedge \mathscr{Q})$ 的对偶式应为 $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \wedge (\mathscr{P} \vee \sim \mathscr{Q})$ 而不能写成 $\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \wedge (\mathscr{P} \vee \sim \mathscr{Q})$。

3.4.2 对偶原则

命题 3.4.1 设 $\mathscr{A}$ 是 wff，$\mathscr{A}'$ 是 $\mathscr{A}$ 的对偶式。则有 $\vdash \sim \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{A}'$，即任一公式的否定和它的对偶式是等价的。

证明：施归纳于公式 $\mathscr{A}$ 的形成过程来证明。

奠基步：公式 $\mathscr{A}$ 是命题字符 p，则 $\mathscr{A}'$ 为 $\sim p$，注意到 $\sim\mathscr{A}$ 即为 $\sim p$，于是有 $\vdash\sim p\leftrightarrow\sim p$，故命题成立。

归纳推导步：假定命题对公式 $\mathscr{A}$ 生成过程中前面的公式都成立，考虑公式 $\mathscr{A}$。

情形 1　$\mathscr{A}$ 是 $\sim\mathscr{M}$，那么 $\mathscr{A}'$ 为 $\sim\mathscr{M}'$。对 M 而言，根据归纳假定，有 $\mathscr{M}'\leftrightarrow\sim M$。于是 $\sim A\leftrightarrow\sim(\sim M)\leftrightarrow\sim\mathscr{M}'\leftrightarrow\mathscr{A}'$。

情形 2　$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{M}\wedge\mathscr{N}$，那么 $\mathscr{A}'$ 为 $\mathscr{M}'\vee\mathscr{N}'$。根据归纳假定，$\mathscr{M}'\leftrightarrow\sim M$ 和 $\mathscr{N}'\leftrightarrow\sim N$ 成立。于是有

$$\sim\mathscr{A}\leftrightarrow\sim(\mathscr{M}\wedge\mathscr{N})\leftrightarrow(\sim\mathscr{M})\vee(\sim\mathscr{N})\leftrightarrow\mathscr{M}'\vee\mathscr{N}'\leftrightarrow\mathscr{A}'$$

情形 3　$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{M}\vee\mathscr{N}$，那么 $\mathscr{A}'$ 为 $\mathscr{M}'\wedge\mathscr{N}'$。根据归纳假定，$\mathscr{M}'\leftrightarrow\sim M$ 和 $\mathscr{N}'\leftrightarrow\sim N$ 成立。于是有

$$\sim\mathscr{A}\leftrightarrow\sim(\mathscr{M}\vee\mathscr{N})\leftrightarrow(\sim\mathscr{M})\wedge(\sim\mathscr{N})\leftrightarrow\mathscr{M}'\wedge\mathscr{N}'\leftrightarrow\mathscr{A}'$$

根据数学归纳法原理，命题得证。■

注意：证明中运用了等价运算 $\leftrightarrow$ 的传递性质，并采用了简约化的表达形式。此外，还用到了著名的迪·摩根(D. Mongen)定律，即对任意公式 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 有：

(1) $\vdash\sim(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\leftrightarrow(\sim\mathscr{A})\wedge(\sim\mathscr{B})$

(2) $\vdash\sim(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})\leftrightarrow(\sim\mathscr{A})\vee(\sim\mathscr{B})$

有兴趣的读者可自行证明一下。

由命题 3.4.1 知，对任意只有联结词 $\sim$、$\wedge$、$\vee$ 形成的公式 $\mathscr{A}$，等价命题公式 $\sim\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{A}'$ 是 L 中的定理。

例如，考虑公式 $\sim\mathscr{A}\wedge(\sim\mathscr{B}\vee\mathscr{B})$，其对偶式为 $\mathscr{A}\vee(\mathscr{B}\wedge\sim\mathscr{B})$，则有

$$\vdash\sim(\sim\mathscr{A}\wedge(\sim\mathscr{B}\vee\mathscr{B}))\leftrightarrow(\mathscr{A}\vee(\mathscr{B}\wedge\sim\mathscr{B}))\tag{3.4.1}$$

注意：迪·摩根定律在有关对偶式的计算和证明过程中起着非常重要的作用，一般情况下可以直接用该定律来进行有关命题的证明。例如，式(3.4.1)的证明可以表示为

$$\begin{aligned}\sim(\sim\mathscr{A}\wedge(\sim\mathscr{B}\vee\mathscr{B}))&\leftrightarrow(\sim\sim\mathscr{A}\vee\sim(\sim\mathscr{B}\vee\mathscr{B}))\\&\leftrightarrow\mathscr{A}\vee(\sim\sim\mathscr{B}\wedge\sim\mathscr{B})\\&\leftrightarrow\mathscr{A}\vee(\mathscr{B}\wedge\sim\mathscr{B})\end{aligned}$$

利用命题 3.4.1，即可得到下面的命题。

命题 3.4.2(对偶原则)　设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是只含联结词 $\sim$、$\wedge$、$\vee$ 的命题公式，则 $\vdash\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$ 当且仅当 $\vdash\mathscr{A}'\leftrightarrow\mathscr{B}'$。

证明：由等词 $\leftrightarrow$ 的基本性质知，$\vdash\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$ 当且仅当 $\vdash\sim\mathscr{A}\leftrightarrow\sim\mathscr{B}$，再由命题 3.4.1，即有当且仅当 $\vdash\mathscr{A}'\leftrightarrow\mathscr{B}'$。■

3.5　形式系统再认识

3.5.1　形式系统理论

通过前面的介绍可知，定义一个形式系统需要 4 部分：符号集、公式集、公理集和推理

规则，其中由基本符号按一定的规则产生的公式是形式系统研究的主要对象，而公理集和推理规则是产生形式系统定理的基础。

一个形式系统全部定理组成的集合称为该形式系统的理论。形式系统 L 的理论记为 $\mathrm{Th}(L)=\{\mathscr{A}|\mathscr{A}$ 是 L 的定理，即$\vdash_L\mathscr{A}\}$。

一般情况下，不同的公理集与不同的推理规则所产生的形式系统理论是不同的。

如果两个形式系统 L 和 L' 具有相同的理论，即 $\mathrm{Th}(L)=\mathrm{Th}(L')$，则称它们是等价的，记为 $L\equiv L'$。

3.5.2 形式系统 L 的简化

1. 简化的形式系统 L'

形式系统 L 包括符号集、合适公式集、公理集和推理规则 4 部分。现重新定义一个形式系统 L'如下。

- **L'的符号**：$\sim,\rightarrow,(,),p_1,p_2,\cdots$。
- **L'的公式**：

  (1) p_i 是 wff；

  (2) 如果 $\mathscr{A}$ 是 wff，则$\sim\mathscr{A}$ 也是 wff；

  (3) 如果 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 是 wffs，则 $\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}$ 是 wff；

  (4) 只有经(1)、(2)和(3)产生的公式为 wffs。
- **L'的公理**：

  (L_1) $\mathscr{A}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A})$

  (L_2) $(\mathscr{A}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{C}))\rightarrow((\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{C}))$

  (L_3) $(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim\mathscr{B})\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A})$
- **L'的推理规则**：由 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}$ 可得到 $\mathscr{B}$，即 MP 推理规则。

注意：和形式系统 L 相比，形式系统 L'的符号集中少了合取$\wedge$和析取$\vee$两个逻辑运算符，因而，其合适公式的形成过程变得相对简单。此外，形式系统 L'的公理集中只有 L 公理集中 7 条公理的前 3 条公理，因此，对形式系统 L'的描述从整体上看显得较为简洁。

和形式系统 L 一样，在形式系统 L'中同样可定义“证明”和“定理”的概念。由于 L'的公理是 L 的公理，L'的推理规则也是 L 的推理规则，所以形式系统 L'的“证明”一定是 L 的“证明”，L'的“定理”也一定是 L 的“定理”。因此可得到下面命题。

命题 3.5.1 $\mathrm{Th}(L')\subseteq\mathrm{Th}(L)$。

由于形式系统 L'的“简洁”，容易让人产生一种“误解”，那就是 L'的理论要比 L 的“弱”。但事实并非如此。

2. L 的公式在 L' 中的表示

在 L'中虽然没有合取符号$\wedge$和析取符号$\vee$，但根据逻辑运算之间的关系知道，合取运算$\wedge$和析取运算$\vee$可以通过逻辑运算$\sim$和$\rightarrow$定义。就如同在 L 中引入联结词$\leftrightarrow$一样，在 L'中也可以定义新的逻辑运算。

在 L'中引入逻辑运算符$\wedge$和$\vee$，并用 $\mathscr{A}\vee\mathscr{B}$ 表示公式$\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}$ 的缩写，用 $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}$ 表示公式$\sim(\mathscr{A}\rightarrow\sim\mathscr{B})$的缩写。

在L'中引入逻辑运算符∧和∨后，L的公式在L'中都能加以表示。因此可以认为L'和L有相同的公式集。

3. L的公理在L'中的证明

命题3.5.2　L公理(L_4)、(L_5)、(L_6)和(L_7)是L'的定理，即：

(1) $\vdash_{L'} \mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$

(2) $\vdash_{L'} \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \to \mathscr{A}$($\vdash_{L'} \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \to \mathscr{B}$的证明留作练习)

(3) $\vdash_{L'} \mathscr{A} \to \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$($\vdash_{L'} \mathscr{B} \to \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$的证明留作练习)

(4) $\vdash_{L'} (\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \to ((\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \to (\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \to \mathscr{C}))$

首先注意到，在形式系统L中曾证明了下列命题：

(5) $\vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{A}$(例3-2-2(1))

(6) $\vdash_L (\sim\mathscr{B} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$(例3-2-2(2))

(7) 演绎定理：若$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{B}$，则$\Gamma \vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{B}$

(8) 假言三段论HS：$\mathscr{A} \to \mathscr{B}, \mathscr{B} \to \mathscr{C} \vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{C}$

(9) $\sim\sim\mathscr{A} \vdash_L \mathscr{A}, \mathscr{A} \vdash_L \sim\sim\mathscr{A}$(命题3.2.4)

(10) $\sim\mathscr{B} \to \sim\mathscr{A} \vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{B}, \mathscr{A} \to \mathscr{B} \vdash_L \sim\mathscr{B} \to \sim\mathscr{A}$

$\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B} \vdash_L \mathscr{B} \to \sim\mathscr{A}, \mathscr{A} \to \sim\mathscr{B} \vdash_L \mathscr{B} \to \sim\mathscr{A}$(命题3.2.5)

(11) $\vdash_L (\sim\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$(命题3.2.6)

(12) $\sim\mathscr{A} \vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{B}, \mathscr{A} \vdash_L \sim\mathscr{A} \to \mathscr{B}$(命题3.2.8)

由于这些命题的证明只用到了L的公理(L_1)、(L_2)和(L_3)，因而它们在形式系统L'中也是成立的，并在命题3.5.2的证明过程中可以直接应用。

证明：先证明一道辅助命题。

(13) $\mathscr{A} \vdash_{L'} (\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}) \to \sim\mathscr{B}$

因为假设$\mathscr{A}$和$\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}$可推出$\sim\mathscr{B}$，所以由演绎定理即可得到(13)。

(1)的证明如下：

要证$\vdash_{L'} \mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$，只要证$\vdash_{L'} \mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \sim(\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}))$，根据演绎定理，只要证$\mathscr{A}$，$\mathscr{B} \vdash_{L'} \sim(\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B})$。对此，构造证明序列如下。

① $\mathscr{A}$	//(假设)
② $\mathscr{B}$	//(假设)
③ $\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}) \to \sim\mathscr{B}$	//(13)
④ $(\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}) \to \sim\mathscr{B}$	//①、③MP
⑤ $((\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}) \to \sim\mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \sim(\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}))$	//(10)(反证原理)
⑥ $\mathscr{B} \to \sim(\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B})$	//④、⑤MP
⑦ $\sim(\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B})$	//②、⑥MP

故有$\mathscr{A}, \mathscr{B} \vdash_{L'} \sim(\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B})$，由演绎定理知$\vdash_{L'} \mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \sim(\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}))$。根据$L'$中联结词∧的定义，即有$\vdash_{L'} \mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$。

(2) 要证$\vdash_{L'} \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \to \mathscr{A}$，只要证$\vdash_{L'} \sim(\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}) \to \mathscr{A}$。证明如下：

① $\sim\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B})$	//(6)
② $(\sim\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B})) \to (\sim(\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}) \to \mathscr{A})$	//(10)(反证原理)
③ $\sim(\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}) \to \mathscr{A}$	//①、②MP

(3) 要证$\vdash_{L'} \mathscr{A}\to(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$,只要证$\vdash_{L'} \mathscr{A}\to(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B})$。

由(8)知,$\mathscr{A}\vdash_{L'}\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B}$,再由演绎定理可得$\vdash_{L'}\mathscr{A}\to(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B})$,即$\vdash_{L'}\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$。

(4) 要证明$\vdash_{L'}(\mathscr{A}\to\mathscr{C})\to((\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\vee\mathscr{B}\to\mathscr{C}))$,只要假设 $\mathscr{A}\to\mathscr{C}$、$\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{A}\vee\mathscr{B}$(即$\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B}$),推导出公式 $\mathscr{C}$ 即可。其证明为:

① $\mathscr{A}\to\mathscr{C}$	//假设
② $\mathscr{B}\to\mathscr{C}$	//假设
③ $\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B}$	//假设
④ $(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to(\sim\mathscr{B}\to\mathscr{A})$	//(6)(反证原理)
⑤ $\sim\mathscr{B}\to\mathscr{A}$	//③、④MP
⑥ $\sim\mathscr{B}\to\mathscr{C}$	//⑤、①HS
⑦ $(\sim\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to(\sim\mathscr{C}\to\mathscr{B})$	//(6)(反证原理)
⑧ $\sim\mathscr{C}\to\mathscr{B}$	//⑥、②MP
⑨ $\sim\mathscr{C}\to\mathscr{C}$	//⑧、②HS
⑩ $(\sim\mathscr{C}\to\mathscr{C})\to\mathscr{C}$	//⑦
⑪ $\mathscr{C}$	//⑨、⑩MP

即 $\mathscr{A}\to\mathscr{C}$、$\mathscr{B}\to\mathscr{C}$、$\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B}\vdash_{L'}\mathscr{C}$。由演绎定理以及$\vee$在$L'$中的定义,即可得到$\vdash_{L'}(\mathscr{A}\to\mathscr{C})\to((\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\vee\mathscr{B}\to\mathscr{C}))$。■

由命题 3.5.2 知,在L'中引入联结词$\wedge$和$\vee$后,所有 L 的定理在L'中也是定理,因而有$\mathrm{Th}(L)\subseteq\mathrm{Th}(L')$。再由命题 3.5.1,即可得到如下命题。

命题 3.5.3 $\mathrm{Th}(L')=\mathrm{Th}(L)$,即形式系统 L'与 L 是等价的。

注意:由于形式系统 L'较 L 在公式形成和公理运用等方面要相对简洁,因此在以后对有关命题演算形式系统性质进行分析时,将以 L'作为分析对象,并且将 L'依旧用 L 表示。

3.6 形式系统的进一步讨论

本节讨论简化的形式系统 L,其符号集为$\sim,\wedge,\vee,\to,(,),p_1,p_2,\cdots$,合适公式为命题符号 p_i 或形如$\sim\mathscr{A}$,$\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 的公式,公理为(L_1)、(L_2)、(L_3),推理规则为 MP。

3.6.1 赋值与重言式

1. 赋值的概念

形式系统 L 的赋值是一个函数 v,它的定义域是 L 的合适公式集,值域为集合$\{T,F\}$,并且对任意合适公式 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 满足:(1)$v(\mathscr{A})\neq v(\sim\mathscr{A})$并且(2)$v(\mathscr{A}\to\mathscr{B})=F$ 当且仅当 $v(\mathscr{A})=T$ 并且 $v(\mathscr{B})=F$。

注意:

(1) 当 $\mathscr{A}$ 是 L 的合适公式时,那么 $\mathscr{A}$ 是由一些命题变元 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 经联结词$\sim$和$\to$