CHAPTER 3

第3章

向　　量

在这一章里，我们将把解析几何中的平面向量和空间向量的有关知识推广到一般 n 维向量，并将学习向量的线性相关性、向量组的秩，以及向量的内积、长度、规范正交基的概念，为求解线性方程组打好基础。

3.1　向量与向量组的线性组合

3.1.1　向量、向量组及其线性运算

定义 3.1　由 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的一个 n 元有序数组称为 n 维向量。记为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$或$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$，$a_i$ 称为该向量的第 i 个分量，前者称为 n 维行向量，后者称为 n 维列向量（本书中，所讨论的向量在没有特殊说明时指的都是列向量）。

一般用黑体字母α，β，γ，…或 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…表示列向量，用α^{T}，β^{T}，γ^{T}，…或 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$，…表示行向量，用带有下标的 a_i，b_i，c_i，…表示向量的分量。

分量都为实数的向量称为实向量，分量是复数的向量称为复向量，如不特别声明，本书讨论的都是实向量。

几何里，我们把三维向量的全体所组成的集合 $R^3=\{\boldsymbol{x}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}\mid x,y,z\in\mathbf{R}\}$叫做三维向量空间。类似地，$n$ 维向量的全体所组成的集合 $R^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$叫做 n 维向量空间。

当 $n=1$ 时，一维向量空间 R^1 表示数轴；

当 $n=2$ 时，二维向量空间 R^2 表示平面；

当 $n=3$ 时，三维向量空间 R^3 表示实体空间；

当 $n>3$ 时，n 维向量空间 R^n 没有直观的几何形象。

如果 n 维向量$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$与$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$的对应分量全相等，即 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$，则称向

量α与β相等，记作$\alpha=\beta$。

所有分量都是0的向量称为零向量，记作$\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$。

由n维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$各分量的相反数所构成的向量，称为$\alpha$的负向量。记为$-\alpha=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$。

定义 3.2 若干个同维数的列向量(或同维数的行向量)所组成的集合叫做向量组。

例如一个矩阵$\boldsymbol{A}_{3\times4}=\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\2&0&3&1\\1&2&5&-2\end{pmatrix}$，就可以看成是一个含有4个三维列向量构成的向量组，也可以看成是一个含有3个三维行向量的向量组。反之，一个含有限个向量的向量组总可以构成一个矩阵。例如m个n维列向量所组成的向量组A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$，构成$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$，$m$个$n$维行向量所组成的向量组$B$：$\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{b}_m^{\mathrm{T}}$，构成$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1^{\mathrm{T}}\\b_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\b_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，总之，含有限个向量的有序向量组可以与矩阵一一对应。

定义 3.3 设n维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$\alpha$与$\beta$对应分量的和所构成的$n$维向量称为向量$\alpha$与$\beta$的和，记为$\alpha+\beta$，即

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

由向量的加法及负向量的定义，我们还可以定义向量的减法，记为$\alpha-\beta$，即

$$\alpha-\beta=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)$$

定义 3.4 设k为常数，数k与向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$各分量的乘积所构成的$n$维向量，称为数$k$与向量$\alpha$的乘积，简称数乘，记为$k\alpha$，即

$$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

向量的加法运算和数乘运算，统称为向量的线性运算。

向量的线性运算满足以下运算律：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

(3) $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$

$\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$

(4) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ (k为常数)

$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$ (k,l为常数)

(5) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$

例 3.1 设$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\gamma=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$，求$\alpha-\beta$，$3\alpha+2\beta-\gamma$。

解 由向量的线性运算可知

$$\alpha-\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$3\alpha+2\beta-\gamma=3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

3.1.2 向量组的线性组合

定义 3.5 给定向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$，对于任何一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，表达式

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m$$

称为向量组 A 的一个线性组合，$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为这个线性组合的系数。

给定向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 和向量 $\boldsymbol{b}$，如果存在一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使 $\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m$，则称向量 $\boldsymbol{b}$ 是向量组 A 的线性组合，也称向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示。

例 3.2 将向量 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\5\\-6\end{pmatrix}$ 表示成向量组 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 的线性组合。

解 设存在一组数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3=b$，即 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\-6\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}k_1\\0\\k_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k_2\\k_2\\k_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-k_3\\-k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1+k_2\\k_2-k_3\\k_1+k_2-k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\-6\end{pmatrix}$$

根据向量相等，知$\begin{cases}k_1+k_2=3\\k_2-k_3=5\\k_1+k_2-k_3=-6\end{cases}$，解得$\begin{cases}k_1=-11\\k_2=14\\k_3=9\end{cases}$。

故 $\boldsymbol{b}$ 可表示成向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的线性组合，且 $\boldsymbol{b}=-11\boldsymbol{a}_1+14\boldsymbol{a}_2+9\boldsymbol{a}_3$。

例 3.3 n 维零向量 $\mathbf{0}$ 是任一 n 维向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的线性组合，事实上，取 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，即得 $\mathbf{0}=0\boldsymbol{a}_1+0\boldsymbol{a}_2+\cdots+0\boldsymbol{a}_n$。

例 3.4 向量组中任何一个向量均可由自身向量组线性表示。

证明 设 $\boldsymbol{a}_i$ 为向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 中的任一向量，则总会有下式成立 $\boldsymbol{a}_i=0\boldsymbol{a}_1+0\boldsymbol{a}_2+\cdots+1\boldsymbol{a}_i+\cdots+0\boldsymbol{a}_m$，因此 $\boldsymbol{a}_i$ 可由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示。

定义 3.6 设有两个向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 及 $B:\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$，若向量组 B 中的每个向量都能由向量组 A 线性表示，则称向量组 B 能由向量组 A 线性表示。

定义 3.7 若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示，则称两个向量组等价。

向量组之间的等价关系具有下面三条基本性质：

设向量组 A,B,C 分别是

$$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m;B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s;C:\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$$

(1) 反身性：向量组 A 与向量组 A 等价；

(2) 对称性：若向量组 A 与向量组 B 等价，则向量组 B 与向量组 A 等价；

(3) 传递性：若向量组 A 与向量组 B 等价，向量组 B 与向量组 C 等价，则向量组 A 与向量组 C 等价。

由例 3.2 的求解过程，我们可以得到以下定理：

定理 3.1 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示的充分必要条件是：以 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 为系数列向量，$\boldsymbol{b}$ 为常数列向量的线性方程组有解。

例 3.5 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$，证明向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，并求出表示式。

解 由定理 3.1，考虑以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为系数列向量，以 $\boldsymbol{b}$ 为常数列向量的线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+2x_2-x_3=0\\2x_1+x_2+4x_3=3\\2x_1+3x_2=1\end{cases}$$

由

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&-1&2&1\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得到同解方程组 $\begin{cases}x_1+3x_3=2\\x_2-2x_3=-1\end{cases}$ 即解得 $\begin{cases}x_1=2-3x_3\\x_2=-1+2x_3\end{cases}$

取 $x_3=c$ 得到方程组的一般解 $\begin{cases}x_1=2-3c\\x_2=-1+2c\\x_3=c\end{cases}$ （c 为常数）

由于方程组有解，所以向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。且方程组有无数个解，所以表达式不唯一，即 $\boldsymbol{b}=(2-3c)\alpha_1+(-1+2c)\alpha_2+c\alpha_3$（$c$ 为常数）。

通过例 3.5 的求解过程，我们可以得到定理 3.1 的另外一种表述方式。即

定理 3.1′ 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 的秩等于矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b})$ 的秩。

将向量组 A 和 B 所构成的矩阵依次记作 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 和 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$。向量组 B 能由向量组 A 线性表示，即

$$\beta_j=k_{1j}\alpha_1+k_{2j}\alpha_2+\cdots+k_{mj}\alpha_m=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{mj}\end{pmatrix}\quad(j=1,2,\cdots,l)$$

也就是

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1l}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2l}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{ml}\end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{K}=(k_{ij})_{m\times l}$，便有

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\boldsymbol{K}$$

可见，向量组 B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ 能由向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示充分必要条件是存在矩阵 $\boldsymbol{K}=(k_{ij})_{m\times l}$，使得

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\boldsymbol{K}$$

也就是矩阵方程

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\boldsymbol{X}$$

有解。于是有

定理 3.2 向量组 B：$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 能由向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵方程$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$有解。即向量组 B：$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 能由向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示的充分必要条件是：矩阵 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$的秩等于矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$的秩，即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$。

推论 3.2.1 向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 与向量组 B：$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 等价的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$

证明 因为向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 与向量组 B：$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 能相互线性表示，所以依据定理 3.2 知它们等价的充分必要条件是

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\text{ 且 }R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$$

即

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$$

例 3.6 设 $\alpha_1=(2,1,4,3)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-1,1,-6,6)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,1,-2,7)^{\mathrm{T}},\beta_1=(-1,-2,2,-9)^{\mathrm{T}},\beta_2=(2,4,4,9)^{\mathrm{T}}$，证明向量组$\beta_1,\beta_2$ 能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

证明 记 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2)$。

根据定理 3.2，只要证 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$。为此，对矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$施行初等行变换变为行阶梯形矩阵：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}2&-1&1&-1&2\\1&1&1&-2&4\\4&-6&-2&2&4\\3&6&7&-9&9\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&-2&4\\2&-1&1&-1&2\\4&-6&-2&2&4\\3&6&7&-9&9\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_3-4r_1\\r_4-3r_1}}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1&-2&4\\0&-3&-1&3&-6\\0&-10&-6&10&-12\\0&3&4&-3&-3\end{pmatrix}\overset{r_3-3r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&-2&4\\0&-3&-1&3&-6\\0&-1&-3&1&6\\0&3&4&-3&-3\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&-2&4\\0&-1&-3&1&6\\0&-3&-1&3&-6\\0&3&4&-3&-3\end{pmatrix}\underset{r_4+3r_2}{\overset{r_3-3r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1&-2&4\\0&-1&-3&1&6\\0&0&8&0&-24\\0&0&-5&0&15\end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{8}r_3}{\underset{-\frac{1}{5}r_4}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2 & 4\\0 & -1 & -3 & 1 & 6\\0 & 0 & 1 & 0 & -3\\0 & 0 & 1 & 0 & -3\end{pmatrix}\overset{r_3-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2 & 4\\0 & -1 & -3 & 1 & 6\\0 & 0 & 1 & 0 & -3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可见 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$,故向量组$\beta_1,\beta_2$ 能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

定理 3.3 向量组 B: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ 能由向量组 A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示,则 $R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})$。

证明 因为向量组 B: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ 能由向量组 A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示,所以根据定理 3.2 有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$,而 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\geqslant R(\boldsymbol{B})$,故 $R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})$。

定理 3.4 若 $\boldsymbol{C}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times l}\boldsymbol{B}_{l\times n}$,则矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组能由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示,矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组能由矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示。

证明 记 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\\beta_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\beta_l^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=\begin{pmatrix}\xi_1^{\mathrm{T}}\\\xi_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\xi_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$

则有

$$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)\boldsymbol{B}$$

$$\begin{pmatrix}\xi_1^{\mathrm{T}}\\\xi_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\xi_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\\beta_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\beta_l^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

即矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组能由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示,矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组能由矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示。

练 习 3.1

1. 设 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$ 及 $3\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$。

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}_1=(2,5,1,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{a}_2=(10,1,5,10)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{a}_3=(4,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,满足 $3(\boldsymbol{a}_1-v)+2(\boldsymbol{a}_2+v)=5(\boldsymbol{a}_3+v)$,求$v$ 。

3. 将向量 $\boldsymbol{b}$ 表示为其他向量的线性组合:$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\5\\-6\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$。

4. 已知向量组 B:$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 由向量组 A:$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的线性表示式为

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=-\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$$

试将向量组 A 的向量由向量组 B 的向量线性表示。

3.2　向量组的线性相关性

定义 3.8　向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$，如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$，则称向量组 A 是线性相关的，否则称为线性无关。

例 3.7　由一个向量 $\boldsymbol{a}$ 构成的向量组线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$。

证明　若 $\boldsymbol{a}$ 线性相关，由定义 3.8 可知，存在数 $k\neq0$，使得 $k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，由此可知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；反之，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，任取 $k\neq\boldsymbol{0}$，有 $k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 成立，故 $\boldsymbol{a}$ 线性相关。

由此可得：一个向量 $\boldsymbol{a}$ 构成的向量组线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$。

例 3.8　两个非零向量 α,β 构成的向量组线性相关的充要条件是它们的对应分量成比例。

证明　若两个向量 α,β 线性相关，则有不全为零的数 k_1,k_2，使得 $k_1\alpha+k_2\beta=\boldsymbol{0}$，当 $k_1=0$ 时，有 $k_2\beta=\boldsymbol{0}$，又因为 $\beta\neq\boldsymbol{0}$，即有 $k_2=0$，不符合题意，因此 $k_1\neq0,k_2\neq0$，则有 $\alpha=\dfrac{k_2}{k_1}\beta$，即 α 与 β 的对应分量成比例。

由此可得：两个非零向量 α,β 构成的向量组线性无关的充要条件是它们的对应分量不成比例。

例 3.9　含有零向量的向量组一定线性相关。

证明　向量组 $\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，取一组数 $\lambda\neq0,0,0,\cdots,0$，使得 $\lambda\,\boldsymbol{0}+0\boldsymbol{a}_1+0\boldsymbol{a}_2+\cdots+0\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$ 由定义可知向量组 $\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性相关。

定理 3.5　若向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m(m\geqslant2)$ 线性相关，则向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示。

证明　先证必要性，如果向量组 A 线性相关，则有不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$，因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 不全为 0，不妨设 $\lambda_1\neq0$，有 $\boldsymbol{a}_1=\dfrac{-1}{\lambda_1}(\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m)$ 即 $\boldsymbol{a}_1$ 能由其余 $m-1$ 个向量线性表示。

再证充分性，如果向量组 A 中有某个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示，不妨设 $\boldsymbol{a}_2$ 能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示，即有 $\lambda_1,\lambda_3,\cdots,\lambda_m$ 使得 $\boldsymbol{a}_2=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_3\boldsymbol{a}_3+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m$，于是，$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_3\boldsymbol{a}_3+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+(-1)\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}$，因为 $\lambda_1,\lambda_3,\cdots,\lambda_m,-1$ 不全为 0(至少 $-1\neq0$)，所以向量组 A 线性相关。

假如，设有向量组 $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_2=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_3=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，因为 $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=0$，故 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关。由 $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=0$，易见有

$$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\quad \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3,\quad \boldsymbol{a}_3=-\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$$

用定理 3.5 来判定一个向量组线性相关还是线性无关比较麻烦，下面给出一个相对容易且更直观的判别方法。

定理 3.6　向量组 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{a}_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关的充

分必要条件是：以 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_m$ 为系数列向量的齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$ 有非零解；$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关的充分必要条件是：以 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 为系数列向量的齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$ 仅有零解。

例 3.10 试讨论 n 维单位坐标向量组的线性相关性。

解 n 维单位坐标向量组 $E:\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为系数列向量构成的齐次线性方程组，由行列式的克拉默法则可知，系数行列式 $D=1\neq0$，齐次线性方程组仅有零解，所以知此向量组线性无关。

例 3.11 设 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$，试讨论向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是否线性相关？

解 根据定理 3.6，以 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为系数列向量构成齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ -x_1+2x_2=0 \\ x_1+3x_3=0 \end{cases}$，由行列式的克拉默法则知，系数行列式 $D=7\neq0$，齐次线性方程组只有零解，所以 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关。

例 3.12 已知 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$，试讨论向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 及向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 的线性相关性。

解 根据定理 3.6，以 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为系数列向量构成齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_3=0 \\ x_1+2x_2+4x_3=0 \\ x_1+5x_2+7x_3=0 \end{cases}$，

由 $\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得到同解方程组 $\begin{cases} x_1+2x_3=0 \\ 2x_2+2x_3=0 \end{cases}$。

即解得 $\begin{cases} x_1=-2x_3 \\ x_2=-x_3 \end{cases}$（$x_3$ 为自由未知量），令 $x_3=c$（c 为常数）得方程组的一般解 $\begin{cases} x_1=-2c \\ x_2=-c \\ x_3=c \end{cases}$（$c$ 为常数）。

由于方程组有解，所以向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关，同理可求解向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关。通过定理 3.6 及例 3.12 的求解过程，可以得到定理 3.6 的等价命题。

定理 3.6′ 向量组 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{a}_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关的充分必要条件是：它所构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 的秩小于向量个数 m；向量组线性无关的充分必要条件是：它所构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 的秩等于向量个数 m。

例 3.13 判断向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\-5\\10\end{pmatrix}$ 的线性相关性。

解 对矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 施行初等变换变成阶梯形矩阵，

$$\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-1&3\\-1&2&-5\\2&-4&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-1&3\\0&1&-3\\0&-2&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2<3$，故向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关。

线性相关性是向量组的一个重要性质，下面介绍与之有关的一些定理。

定理 3.7 若向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关，则向量组 B：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1}$ 也线性相关。

证明 因为向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关，则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$，取 $k_{m+1}=0$，于是存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k_{m+1}$，使 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m+k_{m+1}\boldsymbol{a}_{m+1}=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1}$ 线性相关。

推论 3.7.1 若向量组 B：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1}$ 线性无关，则向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 也线性无关。

定理 3.8 当向量组中向量的个数大于向量的维数时，此向量组必线性相关。

证明 设向量组 A：$(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 其中 $a_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})^{\mathrm{T}}$，$j=1,2,\cdots,m$ 且 $m>n$，在齐次线性方程组 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m=0$ 中，有 m 个未知数 n 个方程，由 $m>n$ 可知方程组有非零解，故此向量组线性相关。

推论 3.8.1 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关。

定理 3.9 设向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关，而向量组 B：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}$ 线性相关，则向量 $\boldsymbol{b}$ 必能由向量组 A 线性表示，且表示式唯一。

证明 由于向量组 B：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}$ 线性相关，则存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k_{m+1}$，使得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m+k_{m+1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

如果 $k_{m+1}=0$，有 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，不全为零，这与向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关矛盾，因此

$$k_{m+1}\neq 0,\quad \boldsymbol{b}=\frac{-1}{k_{m+1}}(k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m)$$

即向量 $\boldsymbol{b}$ 必能由向量组 A 线性表示。

再证明表达式唯一，设

$$\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m$$

且

$$\boldsymbol{b}=p_1\boldsymbol{a}_1+p_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+p_m\boldsymbol{a}_m$$

两式相减，有

$$(k_1-p_1)\boldsymbol{a}_1+(k_2-p_2)\boldsymbol{a}_2+\cdots+(k_m-p_m)\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$$

因为向量组 A：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关，所以有

$$k_1-p_1=0,\quad k_2-p_2=0,\cdots,\quad k_m-p_m=0$$

即 $k_1=p_1,k_2=p_2,\cdots,k_m=p_m$，表达式唯一。

例 3.14 设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关，向量组 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关，证明

(1) $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示；

(2) $\boldsymbol{a}_4$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示。

证明 (1) 因为 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关，由定理 3.7 的推论可知 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，而 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关，由定理 3.9 知 $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示。

(2) 反证法，设 $\boldsymbol{a}_4$ 能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示，由(1)可知 $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{a}_4$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示，与已知矛盾，所以 $\boldsymbol{a}_4$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示。

练　习　3.2

1. 设 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$k$ 为任意实数，则（　　）。

A. $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$ 线性相关　　B. $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$ 线性相关

C. $k\boldsymbol{a}_1$ 线性无关　　D. $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$ 线性无关

2. 设 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，则（　　）。

A. $\boldsymbol{a}_2$ 线性无关　　B. $\boldsymbol{a}_1$ 线性无关

C. $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关　　D. $\boldsymbol{a}_1$ 线性相关

3. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关：

(1) $\alpha_1=(2,3)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-1,2)^{\mathrm{T}}$

(2) $\alpha_1=(-1,0,2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-1,-2,7)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$

(3) $\alpha_1=(2,4,1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(3,5,2,-1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(6,-7,8,3,9)^{\mathrm{T}}$

(4) $\alpha_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$

(5) $\alpha_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-2,2,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(3,-5,2)^{\mathrm{T}}$

4. 已知向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1$，试证向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 线性相关。

3.3 向量组的秩

对任意给定的 n 维向量组,在讨论其线性问题时,为了用向量组的局部表示其整体,我们引进极大无关组的概念。

定义 3.9 如果向量组 A 的一个部分组 A_0:$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$,满足下面两个条件:

(1) 向量组 A_0:$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 线性无关;

(2) 向量组 A 的任意一个向量都可以由部分组 A_0:$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 线性表示;

则称部分组 A_0 为向量组 A 的一个极大线性无关组(简称极大无关组)。

可以证明,任何一个含有非零向量的向量组一定存在极大无关组。这样,在有关线性表示的问题中,可以用极大无关组代替原向量组。

例 3.15 设向量组 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$,验证 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 为向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的极大无关组。

解 因为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 的对应分量不成比例,所以它们线性无关,对矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$施行初等行变换变成行阶梯形矩阵

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-1&0\\2&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-1&0\\0&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由定理 3.6′可知 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关,由定义 3.9 知 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 为向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的极大无关组。同理还可以验证 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的极大无关组;$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3$ 为向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的极大无关组。

特别的,若向量组本身线性无关,则此向量组的极大无关组就是它本身。

从这个例子可以看出,一个向量组的极大无关组一般是不唯一的,但是极大无关组所包含的向量的个数是唯一的。我们表述为定理 3.10。

定理 3.10 若向量组有多个极大无关组,则极大无关组中所含向量的个数相同。

定理 3.10 说明了向量组的一个重要的性质,这就是我们下面要引入的向量组的秩的概念。

定义 3.10 向量组 A:$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 的极大无关组所含向量的个数称为向量组的秩。记作 $r_{\boldsymbol{A}}$ 或 $r(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$。

由零向量组成的向量组没有极大无关组,规定它的秩为 0。

对于含有有限个向量的向量组 A:$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$,它可以构成矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$。我们把定义 3.9,3.10 和矩阵的最高阶非零子式以及矩阵秩的定义作比较,就会得到定理 3.11。

定理 3.11 矩阵的秩等于它的行向量组的秩,也等于它的列向量组的秩。

证明 设向量组 A:$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$,$r(\boldsymbol{A})=s$,由矩阵秩的定义可知,$A$ 中存在 s 阶的子式不为零,即 $D_s\neq0$,因此可知 D_s 所在的 s 个列向量线性无关,又 A 中所有的 $s+1$ 阶子式都为零,即 $D_{s+1}=0$,因此可知 D_{s+1}所在的 $s+1$ 个列向量线性相关。从而 D_s 所在的 s 个列是 A 的一个极大无关组,所以列向量组的秩等于 s。

同理可证明，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩也是 s。

推论 3.11.1 矩阵的行向量组的秩等于列向量组的秩。

从上述的证明中可知，若 D_s 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式，则 D_s 所在的 s 个列即是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组；D_s 所在的 s 个行即是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的一个极大无关组。同时，它还提供了求极大无关组的方法：对向量组中的列向量组成的矩阵施行初等行变换化成行阶梯形矩阵，则首非零元所在的列即为极大无关组所在的列。同理，也可以用向量组中各向量为行向量组成矩阵后，通过初等列变换来求向量组的极大无关组。

例 3.16 设向量组 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_5=\begin{pmatrix}-2\\8\\4\\1\end{pmatrix}$，求向量组的秩及它的一个极大无关组。

解 作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5)$，用初等行变换把 $\boldsymbol{A}$ 化成阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5)=\begin{pmatrix}-1&1&0&-1&-2\\2&-1&1&4&8\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&1&1&2&4\\0&0&0&3&5\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1&1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&3&5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $r(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5)=3$，由首非零元所在的列可知，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 为原向量组的一个极大无关组。

例 3.17 求向量组 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$ 的一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示。

解 对矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$ 施以初等行变换，化成行最简形

$$\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由首非零元所在的列可知，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 为一个极大无关组，且 $\boldsymbol{a}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$。

例 3.18 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组，并把不属于极大无关组的列向量用极大无关组线性表示。

解 对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换，化成行最简形

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由首非零元所在的列可知，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 为一个极大无关组，且 $\boldsymbol{a}_3=-\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_5=4\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2-3\boldsymbol{a}_4$，向量组 A 和它自己的极大无关组 A_0 是等价的。因为向量组 A_0 是向量组 A 的一个部分组，故向量组 A_0 总能由向量组 A 线性表示；而由定义 3.9 的条件(2)可知，对于 A 中的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都能由向量组 A_0 线性表示，即向量组 A 能由向量组 A_0 线性表示。所以向量组 A 和极大无关组 A_0 是等价的。我们可以得到下面的结论。

定理 3.12 任一向量组和它的极大无关组等价。

推论 3.12.1 向量组中任意两个极大无关组等价。

在前面介绍过的定理中出现的矩阵的秩都可以改为向量组的秩，因此做题时，可以灵活运用。

练 习 3.3

1. 求下列向量组的秩，并求一个极大无关组：

(1) $\alpha_1=(1,2,-1,4)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(9,100,10,4)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(-2,-4,2,-8)^{\mathrm{T}}$

(2) $\alpha_1=(1,2,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(4,-1,-5,-6)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,-3,-4,-7)^{\mathrm{T}}$

2. 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2，求 a 与 b 的值。

3. 求下列向量组的秩及一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示。

(1) $\alpha_1=\begin{pmatrix} 25 \\ 75 \\ 75 \\ 25 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 31 \\ 94 \\ 94 \\ 32 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 17 \\ 53 \\ 54 \\ 20 \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} 43 \\ 132 \\ 134 \\ 48 \end{pmatrix}$

(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

3.4 向量空间

3.4.1 向量空间的定义

定义 3.11 设 V 是 n 维向量集合，若集合 V 非空，且集合 V 对于 n 维向量的加法及数乘两种运算封闭，即

(1) 对任意的$\alpha, \beta \in V$，有$\alpha+\beta \in V$；

(2) 对任意的$\alpha \in V$，$\lambda \in \mathbf{R}$，有 $\lambda\alpha \in V$。

则称集合 V 是一个向量空间。

例 3.19 $\mathbf{R}^n$ 是一个向量空间。

注：$n=3$ 时，三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 表示实体空间；

$n=2$ 时，二维向量空间 $\mathbf{R}^2$ 表示平面；

$n=1$ 时，一维向量空间 $\mathbf{R}$ 表示平面；

$n>3$ 时，$\mathbf{R}^n$ 没有直观的几何形象。

例 3.20 集合 $V=\{\boldsymbol{x}=(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_2,\cdots,x_n \in \mathbf{R}\}$是否是向量空间。

解 V 是向量空间。

因为若 $\boldsymbol{a}=(0,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}} \in V$，$\boldsymbol{b}=(0,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}} \in V$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}} \in V$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(0,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)^{\mathrm{T}} \in V$$

例 3.21 集合 $V=\{x=(1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_2,\cdots,x_n \in \mathbf{R}\}$是否是向量空间。

解 V 不是向量空间。

因为若 $\boldsymbol{a}=(1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}} \in V$，则 $2\boldsymbol{a}=(2,2a_2,\cdots,2a_n)^{\mathrm{T}} \notin V$

例 3.22 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个已知的 n 维向量，集合 $L=\{\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b} \mid \lambda,\mu \in \mathbf{R}\}$，试判断集合 L 是否为向量空间？

解 L 是向量空间。

因为若 $\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}$，则有 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{a}+(\mu_1+\mu_2)\boldsymbol{b} \in L$

$$k\boldsymbol{x}_1=(k\lambda_1)\boldsymbol{a}+(k\mu_1)\boldsymbol{b} \in L。$$

这个向量空间称为由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所生成的向量空间。

一般地，由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 所生成的向量空间为

$$L=\{\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m \in \mathbf{R}\}。$$

设有向量空间 V_1 及 V_2，若 $V_1 \subset V_2$，则称 V_1 是 V_2 的子空间。

3.4.2 向量空间的基维数

定义 3.12 设 V 是一个向量空间，若 r 个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \in V$。且满足

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

(2) V 中任一向量都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示。

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基，r 称为向量空间 V 的维数，并称 V 是 r 维向量空间。同时称 V 是由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 所生成的向量空间。

由定义 3.12 知：

(1) 若 $V=\{\mathbf{0}\}$，则向量空间 V 没有基，它的维数是 0。

(2) 若将向量空间 V 看作向量组，则由极大无关组的等价定义知，V 的基就是向量组的极大无关组，V 的维数就是向量组的秩。

(3) 若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是向量空间 V 的一个基，则 V 可表示为

$$V=\{\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r \in \mathbf{R}\}$$

此时，向量空间 V 又称由基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 所生成的向量空间。

例 3.23 $\mathbf{R}^n$ 是一个 n 维向量空间，其一个基为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，其维数为 n。

例 3.24 $V=\{\boldsymbol{x}=(0,x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_2,x_3,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$ 是一个 $n-1$ 维向量空间。

定理 3.13 设 V 是 r 维向量空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 V 的一个基，则 V 中任一向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 唯一地线性表示。

证 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 V 的一个基，所以对任意的 $\alpha\in V$，α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示。故

$$r(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r,\alpha)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$$

而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，因此

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=r$$

即线性方程组

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\boldsymbol{x}=\alpha$$

有唯一解。这也表明 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 唯一地线性表示。

定义 3.13 设 V 是 r 维向量空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 V 的一个基，V 中任意向量 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 唯一地线性表示为

$$\alpha=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r$$

数组 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 称为向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 中的坐标。

例 3.25 证明 $\alpha_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,1,3)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并求 $\beta_1=(5,0,7)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-9,-8,-13)^{\mathrm{T}}$ 在这个基中的坐标。

解 要证 $\alpha_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,1,3)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，只需证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，即证 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$。

要求 $\beta_1=(5,0,7)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-9,-8,-13)^{\mathrm{T}}$ 在这个基中的坐标，即求线性方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{x}=\beta_1$ 与 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{x}=\beta_2$ 的解。故对矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$$

$\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换变为行最简形矩阵：

$$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&2&3&5&-9\\-1&1&1&0&-8\\0&3&2&7&-13\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&5&-9\\0&3&4&5&-17\\0&3&2&7&-13\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&5&-9\\0&3&4&5&-17\\0&0&-2&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&2&3&5&-9\\0&3&4&5&-17\\0&0&1&-1&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-4r_3]{r_1-3r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&8&-3\\0&3&0&9&-9\\0&0&1&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&8&-3\\0&1&0&3&-3\\0&0&1&-1&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3\\0&1&0&3&-3\\0&0&1&-1&-2\end{pmatrix}$$

可见 $\boldsymbol{R}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，且 β_1,β_2 在这个基中的坐标依次为

2,3,−1 和 3,−3,−2。

练 习 3.4

1. 设 $\boldsymbol{V}_1=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$，
$\boldsymbol{V}_2=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$，
问 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2$ 是不是 $\boldsymbol{R}^n$ 的子空间，为什么？

2. 试证：由 $\alpha_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间就是 $\boldsymbol{R}^3$。

3. 判断 $\boldsymbol{R}^3$ 中与向量(0,0,1)不平行的全体向量所组成的集合是否构成向量空间。

4. 验证 $\alpha_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,1,3)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基，并将 $\boldsymbol{v}_1=(5,0,7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}_2=(-9,-8,-13)^{\mathrm{T}}$ 用此基来线性表示。

习 题 3

1. 填空题。

(1) 已知 $\alpha=(3,5,7,9)^{\mathrm{T}},\beta=(-1,5,2,0)^{\mathrm{T}}$，且 $2\alpha+3\boldsymbol{x}=\beta$，则 $\boldsymbol{x}=$________。

(2) 当 $k=$________时，向量 $\beta=(1,k,5)^{\mathrm{T}}$ 能由向量 $\alpha_1=(1,-3,2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 线性表示；

(3) 设 $\alpha_1=(k,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,2,3)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，则当 $k=$________时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

(4) 设 $\alpha_1=(2,1,3,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(3,-1,2,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(4,2,6,-2)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(4,-3,1,1)^{\mathrm{T}}$，则 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=$________。

2. 选择题。

(1) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是一组 n 维向量，则下列结论正确的是________。

A. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 不线性相关，就一定线性无关

B. 如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关

C. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geqslant 2)$ 线性相关，则 α_1 能由其余 $m-1$ 个向量 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示

D. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geqslant 2)$ 线性无关的充分必要条件是 α_1 不能由其余 $m-1$ 个 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 向量线性表示

(2) 向量 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则________。

A. 存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$

B. 存在全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$

C. 对 β 的表示式不唯一

D. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关

(3) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充分与必要条件是________。

A. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中有一零向量

B. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任意两个向量的分量对应成比例

C. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中有一个向量是其余向量的线性组合

D. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任意一个向量都是其余向量的线性组合

(4) 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则向量组________。

A. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性无关

B. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

C. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

D. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

(5) 设 $\alpha_1=(1,0,0,k_1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,2,0,k_2)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,2,3,k_3)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(1,1,1,k_4)^{\mathrm{T}}$，其中 k_1,k_2,k_3,k_4 为任意常数，则________。

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关　　B. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

C. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关　　D. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关

3. 设行向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1,2),\boldsymbol{b}=(2,-2,1),\boldsymbol{c}=(-3,3,0)$，试计算 $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，并证明 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$。

4. 将向量 $\boldsymbol{a}$ 表示成 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 的线性组合，其中 $\boldsymbol{a}=(1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{a}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{a}_2=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{a}_3=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{a}_4=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$。

5. 已知向量组 A：$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$B$：$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$，证明 A 组与 B 组等价。

6. 设 $\boldsymbol{b}_1=2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_3=-\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_3$，验证：$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 线性相关。

7. 已知向量组$\alpha_1=(1,1,2,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,0,0,2)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(-1,-4,-8,k)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，求 k。

8. 问 a 取什么值时下列向量组线性相关？

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$$

9. 证明：线性无关向量组的任何部分向量组也是线性无关的。

10. 下列的说法哪些是对的，哪些是错的。如果是对的，证明；如果是错的，举出反例。

(1) 如果当 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ 时，$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关；

(2) 如果 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关，而 $\boldsymbol{a}_{r+1}$不能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性表示，那么 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{a}_{r+1}$线性无关；

(3) 如果 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关，那么其中每一个向量都不是其余向量的线性组合；

(4) 如果 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性相关，那么其中每一个向量都是其余向量的线性组合。

11. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，证明：向量组 $\boldsymbol{b}_1=2\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_3=2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2+4\boldsymbol{a}_3$ 也线性无关。

12. 求下列向量组的秩和一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示。

(1) $\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(1,2,-3)^{\mathrm{T}}$

(2) $\alpha_1=(2,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(-1,1,7,10)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(3,1,-1,-2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(8,5,9,11)^{\mathrm{T}}$

13. 证明：若已知向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 的秩 $r(r<m)$，则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 中任意 r 个线性无关的向量都是极大无关组。

14. 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是一组 n 维向量，已知 n 维单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 能由它们线性表示，证明 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关。

附：向量空间

定义 1 设 V 为 n 维向量的集合，若集合 V 非空，且集合 V 对于加法及数乘两种运算封闭，即：

(1) 若 $\alpha\in V,\beta\in V$，则 $\alpha+\beta\in V$；

(2) 若 $\alpha\in V,\lambda\in\mathbf{R}$，则 $\lambda\alpha\in V$；

则称集合 V 为向量空间。

例 1 三维向量的全体 R^3，是一个向量空间。

解 因为任意两个三维向量的和仍是三维向量，数 λ 乘三维向量也仍是三维向量。

类似地，n 维向量的全体 R^n 也是一个向量空间。

例 2 集合 $V=\{\boldsymbol{x}=(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$ 是否是向量空间。

解 V 是向量空间

因为若 $\boldsymbol{a}=(0,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\in V$，$\boldsymbol{b}=(0,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\in V$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}\in V$

$\lambda\boldsymbol{a}=(0,\lambda\boldsymbol{a}_2,\cdots,\lambda\boldsymbol{a}_n)^{\mathrm{T}}\in V$

例 3 集合 $V=\{x=(1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$ 是否是向量空间。

解 V 不是向量空间

因为若 $\boldsymbol{a}=(1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\in V$，则 $2\boldsymbol{a}=(2,2a_2,\cdots,2a_n)^{\mathrm{T}}\notin V$

例 4 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个已知的 n 维向量，集合 $L=\{\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}\mid\lambda,\mu\in\mathbf{R}\}$，试判断集合 L 是否为向量空间？

解 L 是向量空间

因为若 $\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}$，则有 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{a}+(\mu_1+\mu_2)\boldsymbol{b}\in L$

$k\boldsymbol{x}_1=(k\lambda_1)\boldsymbol{a}+(k\mu_1)\boldsymbol{b}\in L$。

这个向量空间称为由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所生成的向量空间。

一般地，由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 所生成对的向量空间为

$$L=\{\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m\mid\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbf{R}\}$$

定义 2 设有向量空间 V_1 和 V_2，若 $V_1\subset V_2$，就称 V_1 是 V_2 的子空间。

任何由 n 维向量所组成的向量空间 V，总有 $V\subset R^n$，所以这样的向量空间总是 R^n 的子空间。

定义 3 设 V 为向量空间，如果 r 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r\in V$，且满足

(1) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关；

(2) V 中任一向量都可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性表示。

那么，向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 就称为向量空间 V 的一个基，r 称为向量空间 V 的维数，记

为 $\dim V=r$,并称 V 为 r 维向量空间。

注意：

(1) 只含零向量的向量空间称为 0 维向量空间,它没有基。

(2) 若把向量空间 V 看作向量组,则 V 的基也就是 V 的极大无关组,那么 V 的维数就是向量组的秩。

(3) 若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是向量空间 V 的一个基,则 V 可表示为

$$V=\{\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{a}_r \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\in\mathbf{R}\}$$

此时,向量空间 V 又称由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 所生成的向量空间。

例 5 证明单位向量组 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)$;$\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0)$;……;$\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)$是 n 维向量空间 R^n 的一个基。

证明 (1) 知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关;

(2) 对 n 维向量空间 R^n 的任意一向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,有 $\alpha=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$ 即 R^n 中任意一向量都可由单位向量组线性表示。因此,向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 n 维向量空间 R^n 的一个基。