

第3章

线性代数实验

线性代数的基本内容是讲授向量空间和矩阵的理论。该课程对于培养学生的逻辑推理和抽象思维能力、空间直观和想象能力有着重要的作用,是学生从比较具体的数学到抽象的公理化的数学的一个重要过渡。线性代数也是一门应用性很强的课程。线性问题存在于科学技术的各个领域,而某些非线性问题在一定条件下也可以转化为线性问题,因此,线性代数所介绍的方法广泛地应用于各个学科。但是,因为计算的冗余和理论的抽象,线性代数往往被学生认为是比较难学的一门课程。当我们面对线性代数中一些冗繁、乏味的计算时,Mathematica 犹如一条数学专用“索道”能助你“平步青云”。比如将一些数据不友好的高阶行列式的计算和系数不友好的多变量方程组的求解交给计算机去做,既快捷又准确,像一艘数学专用“快艇”载你“乘风破浪”。本章主要介绍 Mathematica 8.0 在线性代数中的应用。

3.1 向量的计算

向量运算可以提高学生对数学运算的理解层次,向量运算涉及的数学元素更多,比如说实数、字母、向量,甚至还可以把几何图形加入到运算当中,向量的应用确实很方便。本节主要介绍如何利用 Mathematica 实现向量的计算。

1. 实验目的

熟练利用 Mathematica 求解向量的基本运算。

(1) 在数学中,把既有大小又有方向的量叫做向量。

(2) 向量的夹角: 已知两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$, 作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 则 $\angle AOB=\theta(0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角, 记作 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 。

(3) 数量积的定义: 已知两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$, 它们的夹角记为 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, 规定 $0 \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \pi$, 定义它们的数量积(或内积)为 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 。

(4) 给定向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 若向量 $\vec{c}$ 满足三个条件:

① $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$, 其中 $\theta = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$;

② $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$ (垂直于 $\vec{a}, \vec{b}$ 所决定的平面);

③ $\vec{c}$ 的正向由 $\vec{a}, \vec{b}$ 按右手规则确定;

则称向量 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积, 记作 $\vec{a} \times \vec{b}$, 即 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ 。

2. 基本语句

下列基本语句中符号 c 为常数,其余符号表示向量。

(1) $c + m$

功能: c 与 m 中每个元素相加。

(2) $c * m$

功能: 数与向量相乘, c 与 m 中每个元素相乘。

(3) $v \pm m$

功能: 向量相加减。

(4) $u \cdot v$ 或 $\text{Dot}[u, v]$

功能: 求向量的数量积。

(5) $\text{Cross}[u, v]$

功能: 求向量的向量积。

(6) $u * v$

功能: 等于 u 与 v 的对应元素相乘所得的向量。

(7) $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

功能: 定义一个 n 维向量 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 这里 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是数或字母。

(8) 向量的长度与夹角

$\text{norm}[\text{vect_}] := \sqrt{\text{Apply}[\text{Plus}, (\text{vect})^2]}$

$\text{angle}[a_ , b_] := \text{ArcCos}[a \cdot b / (\text{norm}[a] * \text{norm}[b])]$

$\text{norm}[\{x_1, x_2, x_3\}]$

功能: 计算三维向量 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的范数(长度)。

$\text{angle}[\{x, y, z\}, \{a, b, c\}]$

功能: 计算三维向量 $\{x, y, z\}$ 与 $\{a, b, c\}$ 的夹角。

3. 典型例题

例 3.1 设 $\vec{a} = \{1, -1, 2\}$, $\vec{b} = \{2, 1, -2\}$, 求 $2 + \vec{a}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, $3\vec{b}$ 。

解 Mathematica 程序:

$a = \{1, -1, 2\};$

$b = \{2, 1, -2\};$

$2 + a$

$a \cdot b$

$\text{Cross}[a, b]$

$3 * b$

运行结果:

$\{3, 1, 4\}$

-3

$\{0, 6, 3\}$

$\{6, 3, -6\}$

例 3.2 设 $\vec{a} = \{-5, -1, 3\}$, $\vec{b} = \{2, 0, 1\}$, $\vec{c} = \{1, 3, -4\}$, 求混合积 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 。

解 Mathematica 程序:

```
a = {-5, -1, 3};
b = {2, 0, 1};
c = {1, 3, -4};
Dot[Cross[a, b], c]
```

运行结果:

24

例 3.3 求向量 $a = (1, 2, 3)$ 与向量 $b = (1, 0, 1)$ 的长度与夹角。

解 Mathematica 程序:

```
norm[ vect_] := Sqrt[Apply[Plus, (vect)^2]]
angle[a_, b_] := ArcCos[a.b/(norm[a] * norm[b])]
norm[{1, 2, 3}]
norm[{1, 0, 1}]
angle[{1, 2, 3}, {1, 0, 1}]
```

运行结果:

$\sqrt{14}$
 $\sqrt{2}$

$\text{ArcCos}[2/\sqrt{7}]$

习题 3.1

1. 已知 $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$, $\vec{b} = \{2, 3, 4\}$, 试求:

(1) $2 + \vec{a}$; (2) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; (3) $\vec{a} \times \vec{b}$; (4) $3\vec{b}$ 。

2. 已知 $\vec{a} = \{4, -2, 4\}$, $\vec{b} = \{6, -3, 2\}$, 试求: 向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的长度与夹角:

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; (2) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot b(\vec{a} + 2\vec{b})$ 。

3.2 矩阵的计算

线性代数的主要内容是对矩阵的处理, 矩阵的运算在其他学科和科学研究中都有重要的应用。传统的教学只能让学生掌握基本概念和原理以及一些简单的计算, 对于一些高阶矩阵的运算就显得无能为力或者效率极低, 而利用 Mathematica 则会有事半功倍的作用。本节主要介绍 Mathematica 命令在矩阵计算方面的应用。

1. 实验目的

熟练利用 Mathematica 求解矩阵的基本运算。

(1) 矩阵的定义: 由 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列矩阵, 简称为 $m \times n$ 矩阵。

(2) 方阵的逆阵。

① 定义: 设 A 是 n 阶方阵, 若存在 n 阶方阵 B , 使得

$$AB=BA=E$$

则称方阵 A 是可逆的, 并称矩阵 B 为 A 的逆矩阵, 简称 A 的逆, 记作 A^{-1} 。

② 求法: 当 $|A| \neq 0$ 时, A^{-1} 存在, 且有 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, 或对 $(A|E)_{n \times 2n}$ 进行初等行变换化为 $(E|A^{-1})$, 即可求 A^{-1} 。

(3) 矩阵的秩。

① 定义: 矩阵 A 中不为 0 的子式的最高阶数为 r , 称数 r 为矩阵 A 的秩, 记 $R(A)=r$ 。

② 求法: 初等变换不改变矩阵的秩。对 A 进行行初等变换化为行阶梯形, 其非零行向量的个数即为 $R(A)$ 。

(4) 矩阵的运算: 主要包括转置、加法、减法、数乘、乘法、方阵的乘法、方阵的逆、方阵的行列式等。

2. 基本语句

(1) $A \pm B$

功能: 将两个同型矩阵相加(减)。

(2) kA

功能: 其中 k 是一个数, A 是一个矩阵, 将数与矩阵做乘法。

(3) $A \cdot B$

功能: 其中乘号“.”使用键盘上的小数点将两个矩阵进行矩阵相乘。

(4) $\text{Inverse}[A]$

功能: 求方阵的逆, 这里 A 必须为方阵。

(5) $\text{Transpose}[A]$

功能: 求矩阵的转置, 这里 A 可以是任意矩阵。

(6) $\text{Det}[A]$

功能: 计算方阵 A 的行列式。

(7) $\text{MatrixPower}[A, n]$

功能: 计算方阵 A 的 n 次幂。

(8) $\text{Minors}[A, n]$

功能: 计算矩阵 A 的所有 n 阶子式的值。

3. 典型例题

例 3.4 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -3 & 9 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$, 求 $A+B$, $2A-B$ 。

解 Mathematica 语句:

```
a = {{1, 3, 7}, {-3, 9, -1}};
b = {{2, 3, -2}, {-1, 6, -7}};
MatrixForm[a+b]
MatrixForm[2a-b]
```

运行结果:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ -4 & 15 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 16 \\ -5 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

例 3.5 求矩阵 (a, b, c) 与 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ 的乘积。

解 Mathematica 语句:

```
A = {a, b, c};
B = {{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}};
MatrixForm[A.B]
```

运行结果:

$$\begin{pmatrix} a+3b+5c \\ 2a+4b+6c \end{pmatrix}$$

例 3.6 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ 的乘积。

解 Mathematica 语句:

```
{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}} . {{1, -3}, {5, 9}}
```

运行结果:

```
{{11, 15}, {23, 27}, {35, 39}}
```

例 3.7 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的乘积及 B^T 。

解 Mathematica 程序:

```
A = {{1, 3, 0}, {-2, -1, 1}};
B = {{1, 3, -1, 0}, {0, -1, 2, 1}, {2, 4, 0, 1}};
```

```
MatrixForm[A.B]
MatrixForm[Transpose[B]]
```

运行结果:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 3.8 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ 的逆。

解 Mathematica 语句:

```
A={{1, 2, 3, 4}, {2, 3, 1, 2}, {1, 1, 1, -1}, {1, 0, -2, -6}};
Inverse[A];
MatrixForm[%]
```

运行结果:

$$\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

例 3.9 求矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆。

解 Mathematica 语句:

```
Inverse[{{a, b}, {c, d}}]
```

运行结果:

$$\left\{ \left\{ \frac{d}{-bc+ad}, -\frac{b}{-bc+ad} \right\}, \left\{ -\frac{c}{-bc+ad}, \frac{a}{-bc+ad} \right\} \right\}.$$

例 3.10 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的 2 次幂及对应的行列式的值。

解 Mathematica 语句:

```
MatrixPower[{{1, 2}, {3, 4}}, 2]
Det[{{1, 2}, {3, 4}}]
```

运行结果:

$$\{\{7, 10\}, \{15, 22\}\}$$

$$-2$$

例 3.11 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的所有二阶子式的值。

解 Mathematica 语句:

```
Minors[{{1, 2, 3}, {2, 3, 4}}, 2]
```

运行结果:

```
{{-1, -2, -1}}
```

习题 3.2

1. 计算三阶行列式 $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ 。
2. 计算四阶行列式 $A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ 。
3. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 12 \\ -4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, 求 $A+B$ 和 $4A+3B$ 。
4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 求 AB 。
5. 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA 。
6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求其转置矩阵 A^T 。
7. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $(AB)^T$, 并验证 $(AB)^T = B^T A^T$ 。
8. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求其逆矩阵 A^{-1} , 并验证 $AA^{-1} = E$ (单位矩阵)。

3.3 矩阵的初等变换

将一个给定矩阵化成行最简形是线性代数中最常见的运算, 广泛运用于求矩阵的秩、解线性方程组、求逆矩阵等。但其运算量非常大, 计算起来容易出错。使用 Mathematica 命令可以直接得出最后结果。

1. 实验目的

熟练利用 Mathematica 命令进行矩阵初等变换。

下述三种变换称为矩阵的初等行变换：

(1) 交换矩阵某两行的对应元素(交换第 i, j 两行对应元素, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$)。

(2) 以非零数 k 乘矩阵某一行的所有元素(第 i 行乘以数 k , 记作 $r_i \times k$)。

(3) 把矩阵的某一行元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上去, 记作 $r_i + kr_j$)。

将上述定义中的“行”改为“列”即为矩阵的初等列变换的定义, 其表示方法与行初等变换相仿, 只要把 r 换成 c 即可。

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换。

矩阵的三种初等变换都可逆, 且它们的逆变换均为与其同类型的初等变换。即

$r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换为 $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$ 的逆变换为 $c_i \leftrightarrow c_j$;

$r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times (\frac{1}{k}), c_i \times k$ 的逆变换为 $c_i \times (\frac{1}{k})$;

$r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j, c_i + kc_j$ 的逆变换为 $c_i + (-k)c_j$ 。

2. 基本语句

RowReduce[m]

功能：给出矩阵 m 的行化简形式。

3. 典型例题

例 3.12 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 2 & 1 & b \end{pmatrix}$, 求 A 的最简形。

解 Mathematica 语句：

$A = \{\{3, 1, a\}, \{2, 1, b\}\};$

RowReduce[A]

% // MatrixForm

运行结果：

$\{\{1, 0, a-b\}, \{0, 1, -2a-3b\}\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a-b \\ 0 & 1 & -2a-3b \end{pmatrix}$

例 3.13 设 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 求 B 的最简形。

解 Mathematica 程序：

$B = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}\};$

RowReduce[B]

```
% // MatrixForm
```

运行结果:

```
{ {1, 0, -1}, {0, 1, 2}, {0, 0, 0} }
```

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 3.14 设 $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$, 求 C 的最简形。

解 Mathematica 程序:

```
C = { {2, -1, -1, 1, 2}, {1, 1, -2, 1, 4}, {4, -6, 2, -2, 4}, {3, 6, -9, 7, 9} };
```

```
RowReduce[C]
```

```
% // MatrixForm
```

运行结果:

```
{ {1, 0, -1, 0, 4}, {0, 1, -1, 0, 3}, {0, 0, 0, 1, -3}, {0, 0, 0, 0, 0} }
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题 3.3

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A 的最简形。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A 的最简形。

3.4 矩阵的秩与向量组的线性相关性

利用 Mathematica 软件编写一个小程序, 可以方便地判别一组向量的线性相关性, 并求出极大无关组。本节介绍使用 Mathematica 命令求解矩阵的秩与向量组的线性相关性。

1. 实验目的

掌握 Mathematica 中求矩阵的秩, 会判断向量组的线性相关性。

矩阵的秩: 如果矩阵 A 中有一个 r 阶子式 $D_r \neq 0$, 且所有的 $r+1$ 阶子式(如果存在)

的值都等于 0, 则称 D_r 为矩阵 A 的一个最高阶非零子式, 其阶数 r 称为矩阵 A 的秩, 记作 $R(A)$ 或 $\text{rank}A$ 。

线性组合: 一个向量可以由另外一个或几个同维数的向量通过线性运算的形式表示出来。一般表达式是 $\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_s \alpha_s$, $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 是常数, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是向量。向量 β 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的关系是向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示或向量 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性组合。

线性相关: 设有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 如果存在 n 个不全为零的常数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使得

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n = 0$$

成立, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关; 如果只有当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 时, 上式才能成立, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关。

最大无关组: 如果在向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中有 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 满足条件:

- ① $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;
- ② 向量组 A 中的任一向量都能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示;

那么称向量组 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 A 的一个最大线性无关向量组, 简称为最大无关组。最大无关组中所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩, 记作 $\text{秩}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = r$, 或 $R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = r$ 。

相关理论:

- ① 矩阵的秩与它的行向量组的秩相等, 也与其列向量组的秩相等;
- ② 向量组线性无关的充要条件是向量组的秩等于向量个数;
- ③ 两个向量组等价的充要条件是以它们为行向量构成的矩阵的行最简形具有相同的非零行。

2. 基本语句

(1) `Minors[A, k]`

功能: 求出矩阵 A 的所有可能的 k 阶子式的值;

(2) `MatrixRank[A]`

功能: 求矩阵 A 的秩。

3. 典型例题

例 3.15 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, 求 A 的秩。

解 Mathematica 语句:

```
A = {{3, 2, -1, 3}, {2, -1, 3, 1}, {7, 0, 5, -1}};
```

```
Minors[A, 2]
```

```
Minors[A, 3]
```

```
RowReduce[A]//MatrixForm
```

```
MatrixRank[A]
```

运行结果:

$$\begin{aligned} & \{\{-7, 11, 9, 5, -1, 8\}, \{-14, 22, 18, 10, -2, 16\}, \{7, -11, -9, -5, 1, -8\}\} \\ & \{0, 0, 0, 0\} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & 2 \end{aligned}$$

可见矩阵 A 有不为零的二阶子式, 且三阶子式都为零, 故 A 的秩为 2。另外, 通过化简行最简形和直接求矩阵 A 的秩也可以得到秩为 2。

例 3.16 求向量组 $\alpha_1 = \{1, 1, 2, 3\}, \alpha_2 = \{1, -1, 1, 1\}, \alpha_3 = \{1, 3, 4, 5\}, \alpha_4 = \{3, 1, 5, 7\}$ 的秩, 并判定它的线性相关性。

解 Mathematica 语句:

```
Clear[A]
A={{1,1,2,3},{1,-1,1,1},{1,3,4,5},{3,1,5,7}};
RowReduce[A]//MatrixForm
```

运行结果:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在此有 3 个非零行, 矩阵的秩为 3, 故行向量组的秩也为 3。而向量组中有 4 个向量, 但它的秩等于 3, 故此向量组线性相关。

例 3.17 求向量组 $\alpha_1 = \{-1, -1, 0, 0\}, \alpha_2 = \{1, 2, 1, -1\}, \alpha_3 = \{0, 1, 1, -1\}, \alpha_4 = \{1, 3, 2, 1\}, \alpha_5 = \{2, 6, 4, -1\}$ 的最大无关组, 并将其他向量用最大无关组线性表示。

解 Mathematica 语句:

```
A={{-1,-1,0,0},{1,2,1,-1},{0,1,1,-1},{1,3,2,1},{2,6,4,-1}};
B=Transpose[A];
RowReduce[B]//MatrixForm
```

运行结果:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见在矩阵 A 的行最简形中有一个全为零的行, 因此向量组线性相关; 再有非零行数为 3, 因此向量组的秩为 3。非零行的首元素位于第一、二、四列, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是向量组的一个最大无关组。第三列的前两个元素分别为 1, 1, 于是 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, 第五列前三个元素分别为 1, 2, 1, 于是 $\alpha_5 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4$ 。

习题 3.4

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 A 的秩, 并求 A 的一个最高阶非零子式。
2. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A 的行最简形 F 。

3.5 线性方程组求解

线性方程组是数学的很多分支都涉及的问题, 对其求解时通常分齐次与非齐次两大类, 以及未知量个数与方程个数相等或不等, 系数矩阵为方阵时还可按行列式是否为零进行分类。如果用初等行变换进行统一处理, 人工求解显得复杂, 而且是同类运算的机械重复, 本节利用 Mathematica 命令实现线性方程组的快速、准确求解。

1. 实验目的

掌握 Mathematica 中解线性方程组的求解语句。

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以用矩阵表示: 令 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\bar{A} = (A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \text{ 则上式可简记为 } AX = b. \text{ 把 } AX = 0 \text{ 称为 } AX = b \text{ 对应的齐次方程组。}$$

程组。

1) 齐次线性方程组

① 有解条件:

当 $R(A) = r = n$ 时, 方程组有唯一解;

当 $R(A) = r < n$ 时, 方程组有无穷多解, 此时方程组有 $n - r$ 个线性无关的解向量。

② 基础解系: $R(A) = r < n, AX = 0$ 的 $n - r$ 个线性无关的解向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 称为

$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系。

③ 通解结构:

$$\mathbf{X}=k_1 \xi_1+k_2 \xi_2+\cdots+k_{n-r} \xi_{n-r}$$

其中 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 称为 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系。

2) 非齐次线性方程组

当 $R(\mathbf{A}) < R(\bar{\mathbf{A}})$ 时, 方程组无解;

当 $R(\mathbf{A})=R(\bar{\mathbf{A}})=r=n$ 时, 方程组有唯一解;

当 $R(\mathbf{A})=R(\bar{\mathbf{A}})=r < n$ 时, 方程组有无穷多解。

通解结构:

$$\mathbf{X}=k_1 \xi_1+k_2 \xi_2+\cdots+k_{n-r} \xi_{n-r}+\eta^*$$

其中 η^* 为非齐次线性方程组的某一特解, $k_1 \xi_1+k_2 \xi_2+\cdots+k_{n-r} \xi_{n-r}$ 为对应的齐次方程组的通解。

2. 基本语句

(1) NullSpace[A]

功能: 求方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系。

(2) Solve[f[x] == 0, x]

功能: 求方程 $f(x)=0$ 的解。

(3) Solve[{eqn1, eqn2, ..., eqnN}, {var1, var2, ..., varN}]

功能: 求方程组的解。

(4) LinearSolve[A, b],

功能: 求线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的一个特解。

(5) t * nullspacebasis + particular

功能: 求非齐次线性方程组的通解, 其中 t 为任意参数。

3. 典型例题

例 3.18 求线性方程组
$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-x_4=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+2x_4=0 \\ 5x_2+7x_3+3x_4=0 \\ 2x_1-3x_2-5x_3-x_4=0 \end{cases}$$
 的基础解系。

解 方程组的矩阵形式为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$, Mathematica 语句:

```
A = {{1, 1, -2, -1}, {3, -2, -1, 2}, {0, 5, 7, 3}, {2, -3, -5, -1}};
NullSpace[A]
```

运行结果:

```
{{-2, 1, -2, 3}}
```

例 3.19 求解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

解 Mathematica 语句:

```
A = {{1, 1, -2, -1}, {3, -2, -3, 2}, {0, 5, 7, 3}, {2, -3, -5, -1}};
NullSpace[A]
```

运行结果:

```
{}
```

解空间的基是一个空集,说明该线性方程组只有零解。

例 3.20 求解线性方程组
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$
 的通解,并指出基础解系。

解 Mathematica 语句:

```
Solve[{3x1+4x2-5x3+7x4==0, 2x1-3x2+3x3-2x4==0, 4x1+11x2-13x3+16x4==0,
7x1-2x2+x3+3x4==0}, {x1, x2, x3, x4}]
```

运行结果:

$$x_3 \rightarrow -\frac{20x_1}{11} + \frac{13x_2}{11}, \quad x_4 \rightarrow -\frac{19x_1}{11} + \frac{3x_2}{11}$$

显然向量中有两个自由分量 x_3, x_4 , 基础解系为 $\xi_1 = \{3, 19, 17, 0\}^T$, $\xi_2 = \{-13, -20, 0, 17\}^T$ 。

例 3.21 求解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 11 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}.$$

解 Mathematica 语句(1):

```
Clear[A, b]
A = {{1, -3, 5}, {2, -1, -3}, {2, 1, -3}};
b = {0, 11, 5};
LinearSolve[A, b]
```

运行结果:

```
{1, -3, -2}
```

Mathematica 语句(2):

```
Solve[{x1-3x2+5x3==0, 2x1-x2-3x3==11, 2x1+x2-3x3==5}, {x1, x2, x3}]
```

运行结果:

$$\{\{x_1 \rightarrow 1, x_2 \rightarrow -3, x_3 \rightarrow -2\}\}$$

可见方程组有唯一的解。

例 3.22 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 5x_2 + 7x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 4 \end{cases}.$$

解 Mathematica 语句:

```
Clear[A, b]
A = {{1, 1, -2, -1}, {3, -2, -1, 2}, {0, 5, 7, 3}, {2, -3, -5, -1}};
b = {4, 2, -2, 4};
nullspacebasis = NullSpace[A]
particular = LinearSolve[A, b]
generalsolution = k * Flatten[nullspacebasis] + Flatten[particular]
```

运行结果:

$$\begin{aligned} &\{\{-2, 1, -2, 3\}\} \\ &\{1, 1, -1, 0\} \\ &\{1-2k, 1+k, -1-2k, 3k\} \end{aligned}$$

于是方程组的通解为:

$$\mathbf{X} = k * \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

注意事项:

① 在 Mathematica 中求解线性方程组的命令共有 3 个: Solve[方程组], LinearSolve[A, b], NullSpace[A]。第一项输入的参数为方程式, 后两项输入的参数是矩阵。

② 注意区分三个命令的不同用途, NullSpace[A] 是用于求齐次方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系, LinearSolve[A, b] 是用于求非齐次方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的一个解向量, 而 Solve[方程组] 对齐次和非齐次均适用。

习题 3.5

1. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系与通解。

2. 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

的通解。

3.6 计算矩阵的特征值与特征向量

用矩阵的特征值与特征向量的定义计算高阶矩阵的特征值和特征向量是很烦琐的, (有关的详细内容, 可参看《线性代数》的有关章节, 在此略) 使用 Mathematica 命令, 就能达到化繁为简的目的。

1. 实验目的

了解矩阵的特征值与特征向量的概念, 会用 Mathematica 求矩阵的特征值与特征向量。

“特征”一词来自德语的 eigen。eigen 一词可翻译为“自身的”、“特定于……的”、“有特征的”或者“个体的”——这强调了特征值对于定义特定的变换有多重要。

定义: 设 A 是 n 阶方阵, 如果有数 λ 和 n 维非零列向量 X , 使得

$$AX = \lambda X$$

那么数 λ 称为方阵 A 的特征值, 非零向量 X 称为 A 的属于(或对应于)特征值 λ 的特征向量。

求法: 把 λ 的 n 次方程 $|A - \lambda E| = 0$ 称为方阵 A 的特征方程, 特征值即为特征方程的根。设 $\lambda = \lambda_i$ 是 A 的一个特征值, 由方程 $(A - \lambda_i E)X = 0$, 求得的非零解 $X = P$, 即为 A 对应于 λ_i 的特征向量。

2. 基本语句

(1) Eigenvalues[A]

功能: 求 A 的数字特征值列表。

(2) Eigenvectors[A]

功能: 求 A 的特征向量列表。

(3) Eigensystem[A]

功能: 求 A 的全部特征值、特征向量, 形式为 $\{\{\text{特征值}\}, \{\text{特征向量}\}\}$ 。

(4) Det[A - x * IdentityMatrix[n]] 或 CharacteristicPolynomial[A, x]

功能: 求 A 的特征多项式。

(5) Eigenvalue[N[A]]

功能: 求 A 的数字特征值的数值解列表。

(6) Eigenvectors[N[A]]

功能: 求 A 的数字特征向量的数值解列表。

(7) JordanDecomposition[A]

功能: 求 A 的相似变换矩阵及若当标准形。

3. 典型例题

例 3.23 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解: Mathematica 语句:

```
Clear[A];
A={{1,1,0,-1},{1,1,-1,0},{0,-1,1,1},{-1,0,1,1}};
Eigenvalues[A]
Eigenvectors[A]
Eigensystem[A]
```

运行结果:

```
{3,-1,1,1}
{{-1,-1,1,1},{1,-1,-1,1},{0,1,0,1},{1,0,1,0}}
{{3,-1,1,1},{-1,-1,1,1},{1,-1,-1,1},{0,1,0,1},{1,0,1,0}}}
```

例 3.24 方阵 A 由前 25 个相邻整数构成,求 A 的特征多项式、特征方程、特征值与特征向量。

解 Mathematica 语句:

```
A=Partition[Range[25], 5];
MatrixForm[%]
CharacteristicPolynomial[A, x]
CharacteristicPolynomial[A, x]==0
Eigenvalues[N[A]]//Chop
Eigenvectors[A]//N;
MatrixForm[%]
```

运行结果:

```

1  2  3  4  5
6  7  8  9 10
11 12 13 14 15
16 17 18 19 20
21 22 23 24 25
250λ3+65λ4-λ5
250λ3+65λ4-λ5=0
{68.6421,-3.4208,0,0,0}
0.157129  0.367847  0.578564  0.789282  1
-1.15713  -0.617847 -0.0785644  0.460718  1
3          -4          0          0          1
2          -3          0          1          0
1          -2          1          0          0
```

例 3.25 设方阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 求一可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

解 Mathematica 语句:

```
A={{4,1,1},{2,2,2},{2,2,2}};
Eigenvalues[A];
jor=JordanDecomposition[A];
MatrixForm[jor[[1]]]
MatrixForm[jor[[2]]]
```

运行结果:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

习题 3.6

1. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。
2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。
3. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

3.7 施密特正交化和二次型的标准化计算

将一个实对称矩阵 A 化为对角型(或将二次型化为标准型),就是求一正交矩阵 P ,使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ 可以综合应用求特征值与特征向量的方法及正交化方法,得到对}$$

角型(或标准型)。本节主要用 Mathematica 命令计算矩阵的对角型(或标准型)矩阵。

1. 实验目的

掌握矩阵正交化和标准化的有关运算命令。

1) 施密特正交化

设有 n 维向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, 记

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

则称实数 $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ 为向量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的内积,也称为点积。若 $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = 0$,则 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 正交。一组两两正交的非零向量所组成的向量组称为正交向量组。

将线性无关向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 化为与之等价的规范正交向量组 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r$ 的方法叫做施密特正交化方法,步骤如下:

(1) 正交化: 取 $\beta_1 = \alpha_1$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\beta_1, \alpha_3]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_3]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2$$

...

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{[\beta_1, \alpha_r]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_r]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2 - \cdots - \frac{[\beta_{r-1}, \alpha_r]}{[\beta_{r-1}, \beta_{r-1}]} \beta_{r-1}$$

容易验证向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 是两两正交的向量组,并且向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可以互相线性表示,所以两向量组等价。

(2) 单位化: 取 $\epsilon_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1, \epsilon_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|} \beta_2, \dots, \epsilon_r = \frac{1}{\|\beta_r\|} \beta_r$, 于是 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r$ 是规范正交向量组,并且与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 等价。

2) 正交矩阵

(1) 定义: 如果 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E}$, 那么称 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵。

(2) 性质: 正交矩阵 $\mathbf{A}$ 的 n 个列(行)向量都是单位向量,且两两正交。

(3) 正交变换: 若 $\mathbf{P}$ 为正交阵,则线性变换 $\mathbf{Y} = \mathbf{P}\mathbf{X}$ 称为正交变换。

3) 方阵 $\mathbf{A}$ 对角化

(1) 相似矩阵: 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 n 阶方阵,若有可逆矩阵 $\mathbf{P}$,使 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{B}$,则称 $\mathbf{B}$ 为 $\mathbf{A}$ 的相似矩阵, $\mathbf{P}$ 称为把 $\mathbf{A}$ 变成 $\mathbf{B}$ 的相似变换矩阵。

(2) 相似矩阵性质:

性质 1 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵, $\mathbf{B}$ 是 $\mathbf{A}$ 的相似矩阵,则① $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的特征值相同;② $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^T$ 的特征值相同。

性质 2 如果 $\mathbf{A}$ 与对角形矩阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似,则 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 即是 $\mathbf{A}$ 的 n 个

特征值。

$\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵,求相似变换矩阵 $\mathbf{P}$,使得 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \Lambda$ 为对角阵,称为把方阵 $\mathbf{A}$ 对角化。

n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 能对角化的充要条件是 $\mathbf{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量。

4) 实对称阵 $\mathbf{A}$ 对角化

对于 n 阶实对称阵,必有正交阵 $\mathbf{P}$,使得 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \Lambda$ 。

正交阵 $\mathbf{P}$ 的求法:

① 求出 $\mathbf{A}$ 的互不相等的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。

② 若 λ_i 是 $r_i (i=1, \dots, s)$ 重根, 可求得 r_i 个线性无关的实特征向量, 然后把它们正交规范化。由 $r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$ 知, 这样的单位正交向量共有 n 个。以它们为列构成的矩阵为正交阵 $\mathbf{P}$ 。

5) 二次型及其标准型

定义: n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型。若记矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ 则称 } \mathbf{A} \text{ 为实二次型 } f \text{ 的矩阵。}$$

二次型的标准化: 只含有平方项的二次型称为标准形, 即

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ny_n^2$$

对任意给定的实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$, 总有正交变换 $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y}$, 使该二次型化为标准形 $f = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \dots + \lambda_ny_n^2$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是二次型 f 的矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 的全部特征值。

6) 正定二次型

如果对所有非零向量 $\mathbf{X}$, 都有

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} > 0 \text{ (或 } \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} < 0 \text{)}$$

成立, 则称 $f = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$ 为正定(负定)二次型, 矩阵 $\mathbf{A}$ 称为正定矩阵(负定矩阵)。

如果对所有非零向量 $\mathbf{X}$, 都有

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \geq 0 \text{ (或 } \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \leq 0 \text{)}$$

成立, 并且有非零向量 $\mathbf{X}_0$, 使 $\mathbf{X}_0^T \mathbf{A} \mathbf{X}_0 = 0$, 则称 $f = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$ 为半正定(半负定)二次型, 矩阵 $\mathbf{A}$ 称为半正定矩阵(半负定矩阵)。

实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 正定的充分必要条件是它的特征值全大于零。

2. 基本语句

在 Mathematica 7.0 及以下版本中, 若要将向量组规范正交化, 则需先调用正交化软件包, 该软件包中提供了利用施密特正交化方法对线性无关向量组正交规范化。在 Mathematica 8.0 及以上版本中不需要调用正交化软件包。

(1) <<LinearAlgebra\Orthogonalization.m

功能: 调用线性代数工具箱中的正交化工具包。

(2) Orthogonalize [v1, v2, ...]

功能: 将向量 $v_1, v_2, \dots$ 单位正交化。

(3) Normalize[v]

功能：将向量单位化。

(4) Projection[v1,v2]

功能：求出向量 v1 在 v2 上的投影。

3. 典型例题

例 3.26 $a_1 = \{1, 2, 3\}$, $a_2 = \{-1, 2, 4\}$, 将向量 a_1 单位化, 并求 a_1 在 a_2 上的投影。

解 Mathematica 语句:

```
Clear[a1, a2]
a1 = {1, 2, 3};
a2 = {-1, 2, 4};
Normalize[a1]
Projection[a1, a2]
```

运行结果:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{\sqrt{2}}{7}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right\} \quad \left\{ -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{20}{7} \right\}$$

例 3.27 设 $a_1 = \{1, 2, -1\}$, $a_2 = \{-1, 3, 1\}$, $a_3 = \{4, -1, 0\}$, 试用施密特正交化过程把这组向量正交规范化。

解 Mathematica 语句:

```
a = {{1, 2, -1}, {-1, 3, 1}, {4, -1, 0}};
Orthogonalize[a]
```

运行结果:

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right\}, \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

例 3.28 设方阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求一可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

解 Mathematica 语句:

第一步, 先求 A 的特征值, 特征向量。

```
Clear[A]
A = {{4, 0, 0}, {0, 3, 1}, {0, 1, 3}};
Eigensystem[A]
```

运行结果:

$$\{\{4, 4, 2\}, \{\{0, 1, 1\}, \{1, 0, 0\}, \{0, -1, 1\}\}\}$$

第二步, 特征向量正交规范化。

$$a = \{\{0, 1, 1\}, \{1, 0, 0\}, \{0, -1, 1\}\}$$

```
P= Transpose[Orthogonalize[a]]
```

运行结果:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

可验证 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ 。

例 3.29 将实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 对角化。

解 Mathematica 语句:

```
A = {{0, 1, 5}, {1, -1, 2}, {5, 2, 3}};
MatrixForm[A]
P = Orthogonalize[Eigenvalues[A]] // N;
MatrixForm[%]
P. A. Inverse[P] // Chop // MatrixForm
```

运行结果:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.569601 & 0.256632 & 0.78083 \\ -0.769908 & -0.165991 & 0.616189 \\ 0.287745 & -0.952149 & 0.103034 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7.30474 & 0 & 0 \\ 0 & -3.78611 & 0 \\ 0 & 0 & -1.51863 \end{pmatrix}$$

例 3.30 求正交变换将二次型。

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_3x_4$$

化为标准形。

解 输入命令:

```
A = {{1, 1, 0, -1}, {1, 1, 1, 0}, {0, 1, 1, -1}, {-1, 0, -1, 1}};
MatrixForm[A]
X = {x1, x2, x3, x4};
Expand[X. A. X]
P = Orthogonalize[Eigenvalues[A]]
P. A. Inverse[P] // MatrixForm
Y = {y1, y2, y3, y4};
Expand[Y. %%. Y]
```

运行结果:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - 2x_1x_4 - 2x_3x_4 + x_4^2$$

$$\left\{ \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, \left\{ 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$$

例 3.31 试求一个正交变换 $\mathbf{X} = \mathbf{PY}$, 将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

化为标准形。

解 输入命令:

```
A = {{0, 1, 1, -1}, {1, 0, -1, 1}, {1, -1, 0, 1}, {-1, 1, 1, 0}};
MatrixForm[A]
X = {x1, x2, x3, x4};
Expand[X.A.X]
P = Orthogonalize[Eigenvalues[A]]
P.A.Inverse[P] // MatrixForm
Y = {y1, y2, y3, y4};
Expand[Y.%%.Y]
```

运行结果:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\}, \left\{ \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) & -\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{3} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) & \frac{3}{4} - \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$-3y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$$

习题 3.7

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 并验证结果。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 并验证结果。

3. 求一个正交变换 $x = Py$, 将下列二次型化为标准形:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$$