第9章

重 积 分

9.1 知识网络图

二重积分化累次积分

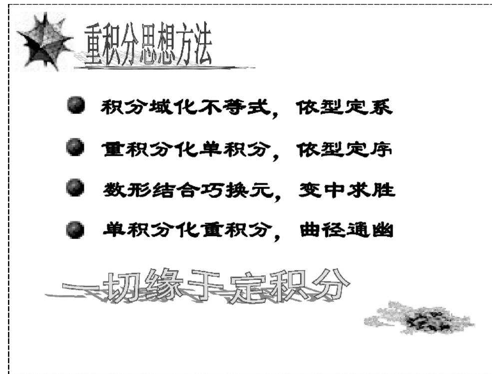
直角坐标	D：可求面积		$I=\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D} C\mathrm{d}\sigma=C\cdot S_D$	
	D: $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$		$I=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$	
	D: $\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x), a\leqslant x\leqslant b$		$I=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$	
	D: $\Psi_1(y)\leqslant x\leqslant \Psi_2(y), c\leqslant y\leqslant \mathrm{d}$		$I=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$	
极坐标	D: $r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta), \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$		$I=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$	
对称性	D关于x轴对称	D_1为D在第一象限部分 $I_1=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$	$f(x,-y)=f(x,y)$	$I=2I_1$
			$f(x,-y)=-f(x,y)$	$I=0$
	D关于x轴对称		$f(-x,y)=f(x,y)$	$I=2I_1$
			$f(-x,y)=-f(x,y)$	$I=0$

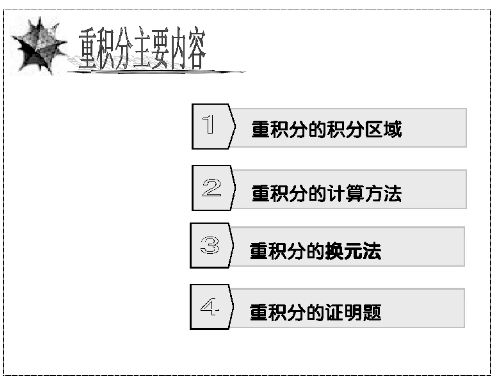
三重积分化累次积分

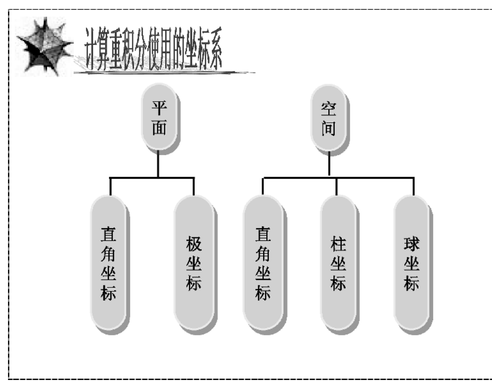
直角坐标	Ω：可求体积		$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} C\mathrm{d}V=C\cdot V_\Omega$	
	Ω: $\begin{cases} z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y) \\ (x,y)\in D \end{cases}$		$I=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$	
	Ω: $\begin{cases} (x,y)\in D_z \\ a\leqslant z\leqslant b \end{cases}$		$I=\int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	
柱坐标	积分域表面用柱面坐标表示时方程简单		$I=\iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$	
球坐标	积分域表面用球坐标表示时方程简单		$I=\iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$	
对称性	Ω关于xOy面对称	Ω_1为Ω对称面某一侧部分 $I=\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}V$	$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$	$I=2I_1$
			$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$	$I=0$
	Ω关于yOz面对称		$f(-x,y,z)=f(x,y,z)$	$I=2I_1$
			$f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$	$I=0$
	Ω关于zOx面对称		$f(x,-y,z)=f(x,y,z)$	$I=2I_1$
			$f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$	$I=0$

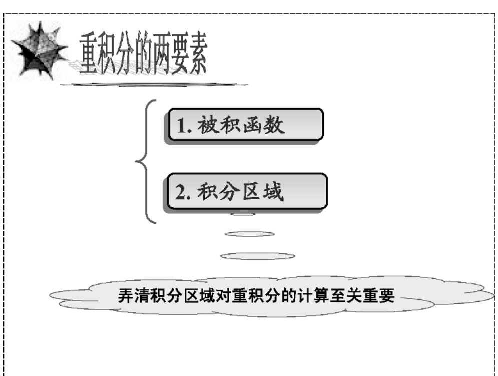
9.2 精品课堂

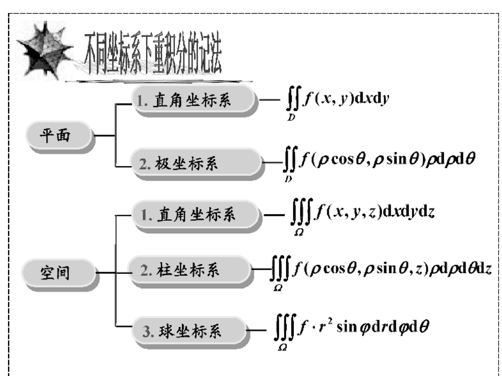

精品课堂
重积分赏析


重积分思想方法
积分域化不等式，依型定系
重积分化单积分，依型定序
数形结合巧换元，变中求胜
单积分化重积分，曲径通幽
一切缘于定积分


重积分主要内容
1 重积分的积分区域
2 重积分的计算方法
3 重积分的换元法
4 重积分的证明题

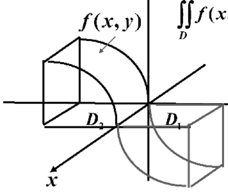

计算重积分使用的坐标系
平面
空间
直角坐标
极坐标
直角坐标
柱坐标
球坐标

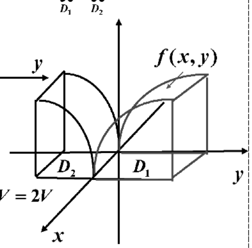

重积分的两要素
1. 被积函数
2. 积分区域
弄清积分区域对重积分的计算至关重要


不同坐标系下重积分的记法
平面
1. 直角坐标系 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
2. 极坐标系 $\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$
空间
1. 直角坐标系 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
2. 柱坐标系 $\iiint\limits_\Omega f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$
3. 球坐标系 $\iiint\limits_\Omega f\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$

二重积分的对称性

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}=V-V=0$$





$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}=V+V=2V$$

三重积分性质类似。

重积分解题思路

画出积分区域（关键）

- 利用对称性简化计算
- 选择积分方法
- 将积分区域用不等式(组)表示
- 化为累次积分（关键）

二重积分的轮换对称性

把刻画积分域的不等式或不等式组中的坐标进行轮换或对换后，积分域不改变，则称该积分域具有轮换对称性。

如果积分区域D关于x, y具有轮换对称性，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint_D[f(x,y)+f(y,x)]\mathrm{d}\sigma$$

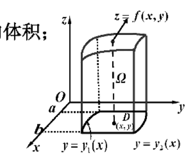
注意：只要求积分区域的对称性，被积函数任意。

重积分几何应用

1. 求面积
2. 求体积

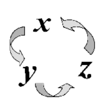
1. $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=S_D$，等于平面区域 D 的面积；
2. $\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}V=V_\Omega$，等于空间区域$\Omega$的体积；
3. $\iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma=V_{曲顶柱体}$

其中曲顶柱体以 $z=f(x,y)$ 为曲顶，区域D为底。



同样，如果积分区域关于x, y, z具有轮换对称性，则

$$\begin{aligned}&\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V\\=&\iiint_\Omega f(y,z,x)\mathrm{d}V\\=&\iiint_\Omega f(z,x,y)\mathrm{d}V\\=&\frac{1}{3}\iiint_\Omega[f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y)]\mathrm{d}V\end{aligned}$$



重积分赏析

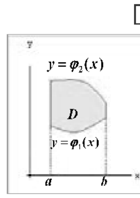
1.重积分的积分区域

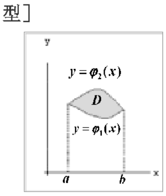
1. 对称性
2. 轮换对称性

简化计算！

（1）平面区域（直角坐标）

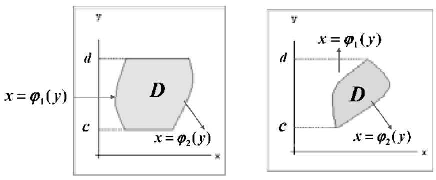
［X-型］





$a\leqslant x\leqslant b,\quad \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$

[Y-型]



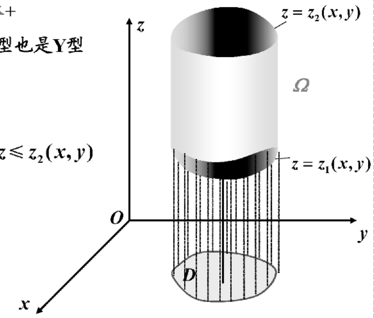
$c\leqslant y\leqslant d,\quad \varphi_1(y)\leqslant x\leqslant \varphi_2(y)$

特殊：柱体+

投影既是X型也是Y型

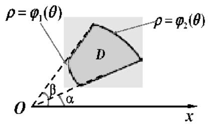
$(x,y)\in D$

$z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)$



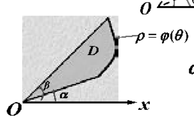
（2）平面区域（极坐标）

[θ-型]

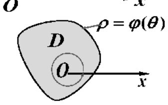


$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,$

$\varphi_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\varphi_2(\theta)$



$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\ 0\leqslant\rho\leqslant\varphi(\theta)$



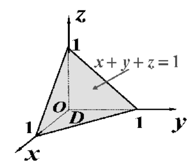
$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant\varphi(\theta)$

特殊：四面体+

投影既是X 型也是Y型

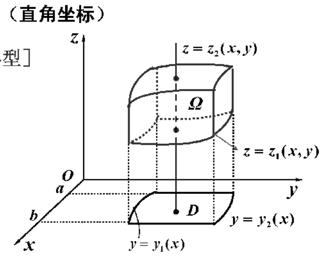
$(x,y)\in D$

$0\leqslant z\leqslant 1-x-y$



（3）空间区域（直角坐标）

[柱体+投影X-型]

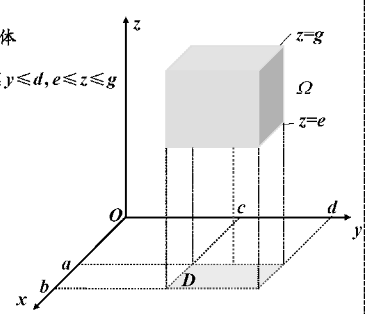


$a\leqslant x\leqslant b, y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$

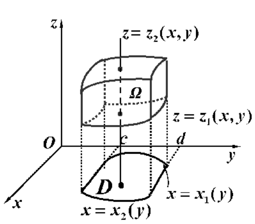
$z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)$

特殊：长方体

$a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d, e\leqslant z\leqslant g$



[柱体+投影Y-型]



$c\leqslant y\leqslant d, x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),$

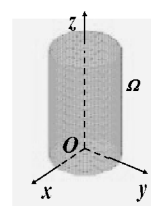
$z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)$

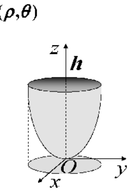
（4）空间区域（柱坐标）

[柱型+投影圆形或扇形等]

$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, \rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta),$

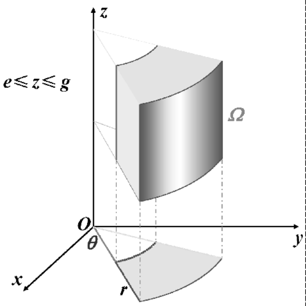
$z_1(\rho,\theta)\leqslant z\leqslant z_2(\rho,\theta)$



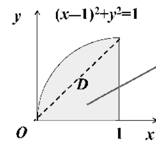


特殊：部分柱体

$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, r_1\leqslant r\leqslant r_2, e\leqslant z\leqslant g$

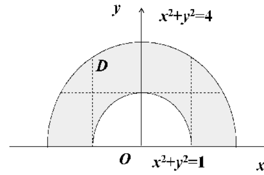


极坐标



D_1：$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}, 0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{\cos\theta}$

D_2：$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta$

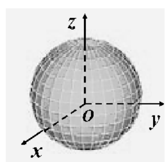


D：$0\leqslant\theta\leqslant\pi, 1\leqslant\rho\leqslant 2$

（5）空间区域（球坐标）

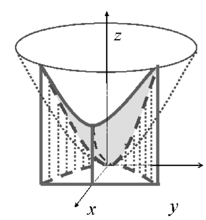
［球型+投影圆形或扇形等］

$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, \varphi_1(\theta)\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2(\theta)$,
$r_1(\theta,\varphi)\leqslant r\leqslant r_2(\theta,\varphi)$



例2　把下列区域用不等式组表示。

Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$，$x=y^2$，$x=1$，$z=0$ 围成。

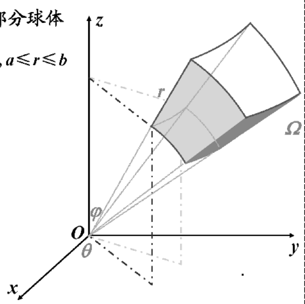


直角坐标

Ω：$0\leqslant x\leqslant 1$，$-\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$，$0\leqslant z\leqslant x^2+y^2$

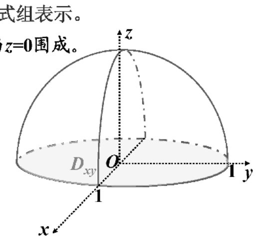
特殊：积分区域是部分球体

$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, \alpha_1\leqslant\varphi\leqslant\beta_1, a\leqslant r\leqslant b$



例3　把积分区域用不等式组表示。

Ω由半径为1的上半球体与z=0围成。

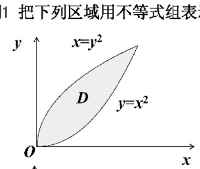


柱坐标　Ω：$0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-\rho^2}$，$0\leqslant\rho\leqslant 1$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$

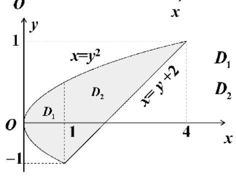
球坐标　Ω：$0\leqslant r\leqslant 1$，$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$

例1　把下列区域用不等式组表示。

直角坐标



D：$0\leqslant x\leqslant 1, x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$



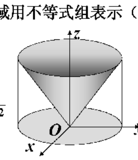
D_1：$0\leqslant x\leqslant 1, -\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$

D_2：$1\leqslant x\leqslant 4, x-2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$

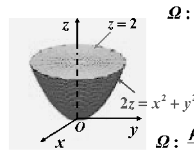
例4　把下列区域用不等式组表示（柱坐标）。

$z=a$

$z=\sqrt{x^2+y^2}$



Ω：$\rho\leqslant z\leqslant a$，$0\leqslant\rho\leqslant a$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$

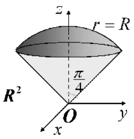


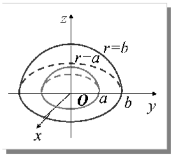
Ω：$\frac{\rho^2}{2}\leqslant z\leqslant 2$，$0\leqslant\rho\leqslant 2$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$

例5 把下列区域用不等式组表示（球坐标）。

$z=\sqrt{x^2+y^2}$

$x^2+y^2+z^2=R^2$





$\Omega: 0\leqslant r\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}R,\ 0\leqslant \varphi\leqslant \frac{\pi}{4},\ 0\leqslant \theta\leqslant 2\pi$

$z=\sqrt{b^2-x^2-y^2}, z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,(0<a<b)$及平面$z=0$围成. $\Omega: a\leqslant r\leqslant b,\ 0\leqslant \varphi\leqslant \frac{\pi}{2},\ 0\leqslant \theta\leqslant 2\pi$

特殊 若积分区域D是正方形 $a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b$,

且有 $f(x,y)=f(x)\cdot f(y)$, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

公式也可逆向运用！

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y}$$

重积分赏析

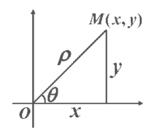
2. 重积分的计算方法

二重积分：极坐标

化直角坐标为极坐标：

直角坐标与极坐标的关系：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$



$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

重积分计算方法

- 二重积分
  - 直角坐标
  - 极坐标
- 三重积分
  - 直角坐标
  - 柱坐标
  - 球坐标

利用对称性简化计算

累次积分

极坐标二重积分化为二次积分：

设$I=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$

1. $D:\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\quad \rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta)$

$$I=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

2. $D:\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\quad 0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta)$

$$I=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

3. $D:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta)$

$$I=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

二重积分：直角坐标

如果积分区域D: $a\leqslant x\leqslant b,\quad \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$,

则 $$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

如果积分区域D: $c\leqslant y\leqslant d,\quad \varphi_1(y)\leqslant x\leqslant\varphi_2(y)$,

则 $$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

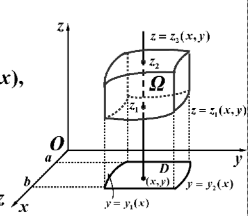
化二重积分为二次积分！

三重积分：直角坐标

如图，区域Ω：

$a\leqslant x\leqslant b, y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$,

$z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)$



$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V$$

$$=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

先一后二

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

化三重积分为三次积分！

● 三重积分：直角坐标（先二后一）

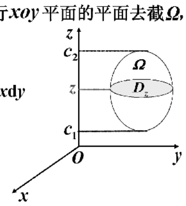
一般步骤：

(1) 把积分区域Ω向某轴（例如z轴）投影，得投影区间$[c_1,c_2]$；

(2) 对$z\in[c_1,c_2]$，用过z轴且平行xoy平面的平面去截Ω，得截面D_z；

(3) 计算二重积分 $\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其结果为z的函数$F(z)$；



(4) 最后计算单积分$\int_{c_1}^{c_2} F(z)\mathrm{d}z$，即得三重积分值.

若被积函数与x,y无关，如$f(x,y,z)=f(z)$，并且用平行于xoy面的平面去截Ω，截面面积易求，用此方法较简单。

计算公式为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{c_1}^{c_2} f(z)\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

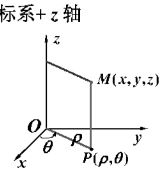
● 三重积分：柱坐标

设$M(x,y,z)$为空间内一点，并设点M在xoy面上的投影P的极坐标为ρ,θ，则这样的三个数ρ,θ,z就叫点M的柱坐标.

可以这样理解：柱坐标系= 极坐标系+ z轴

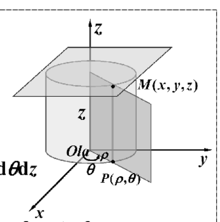
柱坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \\ z=z. \end{cases}$$



区域Ω：

$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta)$,
$z_1(\rho,\theta)\leqslant z\leqslant z_2(\rho,\theta)$



$$\iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\rho\mathrm{d}\rho\int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\mathrm{d}z$$

即先积z，再用极坐标计算投影区域上的二重积分。本方法也属先一后二法。

特别强调

柱坐标化为三次积分计算，一般是先对z积分，再对ρ积分，最后对θ积分。

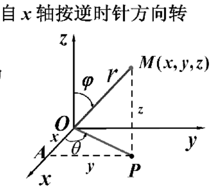
一般地，当积分区域或被积函数含有x^2+y^2或$x^2+y^2+z^2$时，可考虑使用柱坐标。如抛物面与球面围成的区域。

● 三重积分：球坐标

设$M(x,y,z)$为空间内一点，则三个有序的数r，φ，θ就叫做点M的球面坐标，其中r为原点O与点M间的距离，φ为有向线段OM与z轴正向所夹的角，θ为从正z轴来看自x轴按逆时针方向转到有向线段OP的角。

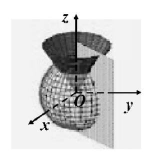
球坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$$



区域Ω：

$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\varphi_1(\theta)\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2(\theta)$,
$r_1(\theta,\varphi)\leqslant r\leqslant r_2(\theta,\varphi)$



$$\iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\mathrm{d}r.$$

一般地，球坐标化为三次积分的积分次序为$r\to\varphi\to\theta$。

特别强调

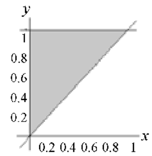
球坐标下三重积分的计算仍然是化为三次积分，当积分区域或被积函数含有x^2+y^2或$x^2+y^2+z^2$时，可考虑使用球坐标。如圆锥面与球面围成的区域。

被积函数含有$x^2+y^2+z^2$可化为r^2；当积分区域为球体$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$时，三个变量的变化范围为 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，$0\leqslant r\leqslant a$。

例6 求 $\iint\limits_D \frac{x\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是以(0,0), (1,1), (0,1)为顶点的三角形。

解 $\int \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$ 无法用初等函数表示

$\therefore$ 积分时必须先积 x,后积 y



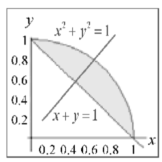
$$\iint\limits_D \frac{x\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\int_0^y x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 y\sin y\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\int_0^1 y\mathrm{d}\cos y$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1)$$

例7 写出积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 的极坐标二次积分形式。

解 画出积分区域，在极坐标系下



圆的方程为 $\rho = 1$

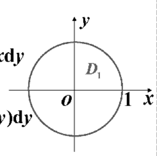
直线的方程为 $\rho = \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$

积分区域 $D: 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} \leqslant \rho \leqslant 1$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

例8 计算 $I = \iint\limits_D (|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D: x^2+y^2 \leqslant 1$

解 积分区域既关于x轴又关于y轴对称，被积函数分别是x、y的偶函数，故



$$I = \iint\limits_D (|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint\limits_{D_1}(|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4\iint\limits_{D_1}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x+y)\mathrm{d}y$$

$$= 4\int_0^1 (x\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{2})\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$$

例9 已知 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\quad (k>0)$

求 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2x^2}-\mathrm{e}^{-3x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$。

解 因为 $\frac{\mathrm{e}^{-2x^2}-\mathrm{e}^{-3x^2}}{x^2} = \int_2^3 \mathrm{e}^{-yx^2}\mathrm{d}y$

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2x^2}-\mathrm{e}^{-3x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}(\int_2^3\mathrm{e}^{-yx^2}\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$

$$= \int_2^3\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx^2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

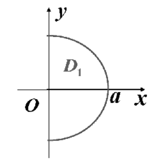
交换积分次序

$$= \int_2^3 \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}\int_2^3\mathrm{d}\sqrt{y} = \sqrt{\pi}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

例10 计算二重积分 $I = \iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中 $D = \{(x,y)|\, x^2+y^2 \leqslant a^2, x \geqslant 0\}$。

解 区域如图，利用对称性



$$I = \iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

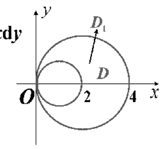
$D_1: 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \rho \leqslant a$

$$原式 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a \frac{1}{1+\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2}\ln(1+a^2)$$

例11 计算 $I = \iint\limits_D (\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$D = \{(x,y)|\ x^2+y^2 \geqslant 2x,\ x^2+y^2 \leqslant 4x\}$

解 $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$



由区域的对称性和被积函数的奇偶性知 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$

并且 $I = 2\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho = \frac{112}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta = \frac{224}{9}$$

例12 计算

$$I = \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x。$$

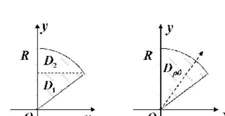
解 先弄清直角坐标系下的积分区域 D,

很明显 $D = D_1 \cup D_2$,

$D_1 = \{\,(x,y)\,|0 \leqslant x \leqslant y, 0 \leqslant y \leqslant \frac{R}{\sqrt{2}}\}$

$D_2 = \{\,(x,y)\,|0 \leqslant x \leqslant \sqrt{R^2-y^2}, \frac{R}{\sqrt{2}} \leqslant y \leqslant R\,\}$

由此，可以画出直角系下的积分区域的图形，



极坐标

$$I = \iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D_{\rho\theta}}\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^R\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{4}(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\rho^2})\Big|_0^R$$

$$= \frac{\pi}{8}(1-\mathrm{e}^{-R^2})$$

例13 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(|\sin x|+|\sin y|+|\sin z|)\mathrm{d}V$

其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$

解 因为 Ω 关于 x,y,z 具有轮换对称性，所以

$$I=3\iiint\limits_{\Omega}|\sin z|\mathrm{d}V$$

又 Ω 关于 xoy 面对称，$|\sin z|$ 关于 z 为偶函数，所以

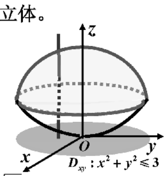
$I=6\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant1\\ z\geqslant0}}\sin z\,\mathrm{d}V$，先二后一法，$D_z: x^2+y^2\leqslant 1-z^2$

$$I=6\int_0^1\sin z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\pi\int_0^1\sin z(1-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=6\pi\left[3-2(\cos1+\sin1)\right]$$

例14 计算 $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是 $x^2+y^2+z^2=4$

与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围的立体。



解 由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\ x^2+y^2=3z\end{cases}$

得交线的投影区域 $x^2+y^2\leqslant 3$

$\Omega: \dfrac{\rho^2}{3}\leqslant z\leqslant\sqrt{4-\rho^2},\ 0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{3},\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt3}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}}z\mathrm{d}z=\frac{13}{4}\pi$$

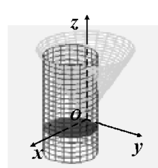
例15 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截，求锥面下方、xOy 面上方、圆柱内的区域 V 的体积。

提示 $V=2V_1$，V_1 为第一卦限部分的体积。柱坐标

解 $V=2\iiint\limits_{V_1}\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{V_1}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\mathrm{d}\rho\int_0^{\rho}\rho\mathrm{d}z$$

$$=\frac{32}{9}$$



例16 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V$，$\Omega$ 是：$x^2+y^2+z^2=1$

及三个坐标面所围成的在第一象限的区域。

解 采用球坐标

$$\Omega: 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant1$$

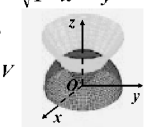
$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{\sin r}{r^2}\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sin r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-\cos1)$$

例17 设 Ω 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

围成的空间区域，求 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}V$。



解 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}V+\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V$

积分域 Ω 关于 yOz 面对称，

被积函数是 x 的奇函数，所以 $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}V=0$。

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=(\theta\Big|_0^{2\pi})\cdot(\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}})\cdot(\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1)=\frac{\pi}{8}$$

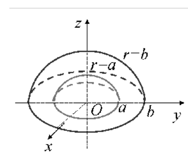
请再用柱面坐标做。

例18 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$ 由两个半球面

$z=\sqrt{b^2-x^2-y^2}$，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,(0<a<b)$ 及

平面 $z=0$ 围成。

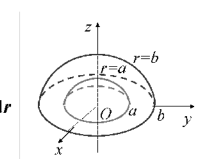
解 Ω 的表达式中含 $x^2+y^2+z^2$，采用球面坐标求积分。



且两球面方程分别为 $r=b$ 和 $r=a\ (a<b)$。

$\Omega: 0\leqslant\theta\leqslant2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2},\ a\leqslant r\leqslant b$

$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$



$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_a^b r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\cdot\int_a^b r^4\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{2}{5}\pi(b^5-a^5)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)\mathrm{d}\cos\varphi$$

$$=\frac{4}{15}\pi(b^5-a^5)$$

重积分赏析

3. 重积分的换元法

重积分的
最高境界

换元

变中求胜

(3)在变换下确定u, v的范围D'；

$\begin{cases}\text{把变换代入}D\text{的边界曲线中，求出}D'\text{的边界线} \\ \text{作图}\end{cases}$

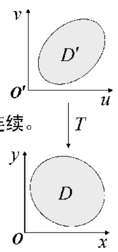
(4)代入变量替换公式，化为关于u,v的二重积分；

(5)用二重积分的方法求出其值。

1. 二重积分的换元法

定理: 设$f(x,y)$在闭域D上连续，变换

$$T:\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}\quad (u,v)\in D'\to D$$



满足(1) $x(u,v)$, $y(u,v)$在D'上一阶导数连续。

(2) 在D'上的雅可比行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0;$$

(3) 变换$T:D'\to D$是一一对应的，

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

x,y的范围　　u,v的范围　　要加绝对值

2. 三重积分的换元法

换元公式 $$\iiint_\Omega f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'} f\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

柱面坐标变换 $$\iiint_\Omega f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'} f\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

球面坐标变换 $$\iiint_\Omega f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'} f\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

注 坐标变换的目的是

(1) 变换后定限简便；

(2) 求积分容易。

面积元素的关系为$\mathrm{d}\sigma=|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

二重积分的换元公式:

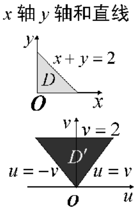
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

例如，直角坐标转化为极坐标时，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & -r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

例19 计算$\iint_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$D$是$x$轴$y$轴和直线$x+y=2$所围成的闭域。



解 令 $u=y-x$, $v=y+x$，则

$$x=\frac{v-u}{2},\ y=\frac{v+u}{2}\quad (D'\to D)$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{-1}{2}$$

$$\therefore \iint_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} \mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\left|\frac{-1}{2}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})v\,\mathrm{d}v=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}$$

利用坐标变换求二重积分步骤:

(1)根据题目的特点(区域及被积函数)确定变换。

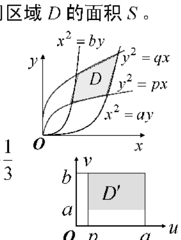
习惯上：设$x=x(u,v)$,　$y=y(u,v)$。

(2)求出$J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$。

若是设$u=u(x,y)$,　$v=v(x,y)$,求J有两种办法:

$\begin{cases}\text{1.先求出}x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ \text{再求}J\\ \text{2.先求出}\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},\text{再求}J=\dfrac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}\end{cases}$

例20 计算由$y^2=px$, $y^2=qx$, $x^2=ay$, $x^2=by$ ($0<p<q$, $0<a<b$)所围成的闭区域D的面积S。



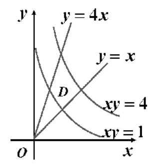
解 令 $u=\dfrac{y^2}{x}$, $v=\dfrac{x^2}{y}$，则

$$D':\begin{cases}p\leqslant u\leqslant q\\ a\leqslant v\leqslant b\end{cases}\longrightarrow D$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore S=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'}|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_p^q\mathrm{d}u\int_a^b\mathrm{d}v=\frac{1}{3}(q-p)(b-a)$$

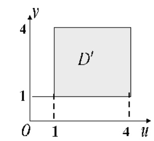
例21　计算 $\iint\limits_D \ln(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是直线$y=x$, $y=4x$和曲线$xy=1$, $xy=4$所围成的闭域。



解　令 $u=xy,\ v=\dfrac{y}{x}$，则

$$D':\begin{cases}1\leqslant u\leqslant 4\\ 1\leqslant v\leqslant 4\end{cases}\longrightarrow D$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\dfrac{2y}{x}}=\frac{1}{2v}$$



所以 $S=\iint\limits_D \ln(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}|J|\ln u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

$$=\int_1^4 \ln u\,\mathrm{d}u\int_1^4\frac{1}{2v}\mathrm{d}v=(8\ln 2-3)\ln 2$$

证明题要点

关键

- 二次积分化二重积分（特殊情况）
- 轮换对称性
- 不等式　$a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2\ (a>0)$
- 重积分保序性

例22　计算

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\cos(x+y+z)^2\,\mathrm{d}V,$$

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant x-y\leqslant 1,\ 0\leqslant x-z\leqslant 1,\ 0\leqslant x+y+z\leqslant 1\}$$

解　曲面坐标变换的目的：①使积分区域变得尽量简单；②简化被积函数及计算。

引入坐标变换

$$\begin{cases}u=x-y\\ v=x-z,\\ w=x+y+z\end{cases}\quad\Rightarrow\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&1&1\end{vmatrix}=3$$

例23　设$f(x)\in C[0,1]$，证明：$\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\mathrm{e}^{-f(y)}\mathrm{d}y\geqslant 1$。

证　$\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\mathrm{e}^{-f(y)}\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}}\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}}(\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}+\mathrm{e}^{f(y)-f(x)})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

轮换对称性

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\cos(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega'}w\cos w^2\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^1 w\cos w^2\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}w$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 w\cos w^2\mathrm{d}w$$

$$=\frac{1}{6}\sin w^2\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{6}\sin 1$$

例24　设$f(x)\in C[0,1]$，证明：$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\pi$。

证　$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}+\mathrm{e}^{f(y)-f(x)})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$$

轮换对称性

重积分赏析

4. 重积分的证明题

另证

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{2!}x^2\geqslant 1+x\qquad(\xi\text{介于}0\text{与}x\text{之间})$$

$$\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\geqslant 1+f(x)-f(y)$$

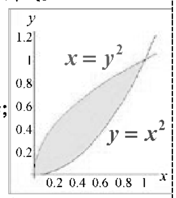
$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(1+f(x)-f(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$$

相等

推广1　设$f(x)\in C[0,a]$，证明：$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\pi a^2$

推广2 设 $f(x)\in C[0,1]$，证明：$\iint\limits_D e^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \frac{1}{3}$，其中$D$由两条抛物线 $y=x^2, x=y^2$ 围成。



题型特点

(1)积分区域关于$y=x$对称，面积已知；

(2)被积函数变量互换后成倒函数，且为正值连续函数。

思路：二次积分化二重积分→轮换对称性→不等式及二重积分保序性→缩小到面积。

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]$$

练习1

$g(x)=1$

设 $f(x)\in C[a,b]$，证明：$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$

练习2

设 $f(x)\in C[0,1]$，证明：$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$

例25 设 $f(x)\in C[a,b]$且 $f(x)>0$，

证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2$

解 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}} f(x)\cdot\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$I=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \frac{1}{2}\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=(b-a)^2$

例27 设$k\geqslant -1$，证明：$\left(\int_0^1\sqrt{1+kx^2}\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 1+\frac{1}{3}k$

证：$\left(\int_0^1\sqrt{1+kx^2}\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1(1+kx^2)\mathrm{d}x$

$=1+\left[\frac{1}{3}kx^3\right]_0^1=1+\frac{1}{3}k \Rightarrow \int_0^1\sqrt{1+kx^2}\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{1+\frac{1}{3}k}$.

$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x$，$\int_0^1\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$，$\int_0^1\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\ (|k|<1)$

这些积分积不出，可估值

例26 证明 $\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]$

（柯西-施瓦兹不等式）

证 $I=\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]$

$=\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b g^2(y)\mathrm{d}y\right]$

$=\iint\limits_D f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D: a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b$

同理 $I=\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]$

$=\left[\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\right]\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]$

$=\iint\limits_D f^2(y)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D: a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b$

例28

设$f(x)\in C[0,1]$，证明：$\left(\int_0^1\frac{f(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{2t}\int_0^1\frac{f^2(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x, (t>0)$

证：$\left(\int_0^1\frac{f(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{t^2+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2+x^2}}\mathrm{d}x\right)^2$

$\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{t^2+x^2}\cdot\int_0^1\frac{f^2(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{t}\arctan\frac{1}{t}\cdot\int_0^1\frac{f^2(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x$

$\leqslant\frac{\pi}{2t}\cdot\int_0^1\frac{f^2(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x$

$\boxed{\left|\arctan\frac{1}{t}\right|<\frac{\pi}{2}}$

则 $2I=\iint\limits_D\left[f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\geqslant\iint\limits_D 2\left[f(x)g(y)\cdot f(y)g(x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y$

$=2\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2$

即 $\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]$

例29 利用二重积分求证 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$

泊松积分

解 $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\ -\infty<y<+\infty}}e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}e^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho^2=\pi$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi} \Rightarrow \int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

学习数学有感

曲径通幽处，

别有洞天来。

例31　设D为$x^2+y^2\leqslant 1$，试证明不等式：

$$\frac{61}{165}\pi \leqslant \iint_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{2}{5}\pi$$

证明

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\pi\int_0^1 r\sin r^3\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\int_0^1 r\left(r^3-\frac{r^9}{3!}+\cdots\right)\mathrm{d}r \end{aligned}$$

而 $2\pi\int_0^1 r\left(r^3-\dfrac{r^9}{3!}\right)\mathrm{d}r=\dfrac{61}{165}\pi$，　$2\pi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=\dfrac{2}{5}\pi$

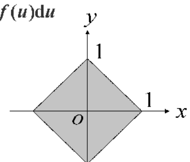
故 $\dfrac{61}{165}\pi\leqslant\iint_D\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\dfrac{2}{5}\pi$

例30　设$f(x)$是连续函数，

证明：$\iint_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}f(u)\,\mathrm{d}u$

证：令 $u=x+y$，$v=x-y$，则

$x=\dfrac{u+v}{2}$，$y=\dfrac{u-v}{2}$ $(D'\to D)$



$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac12 & \frac12\\ \frac12 & -\frac12\end{vmatrix}=-\frac12$$

$$\begin{aligned}\iint_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac12\iint_{\substack{-1\leqslant u\leqslant 1\\ -1\leqslant v\leqslant 1}} f(u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac12\int_{-1}^{1}f(u)\,\mathrm{d}u\cdot\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v \\ &= \int_{-1}^{1}f(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

结束！

9.3　达标实训

本节从实际例子的微元法求解出发，引入二重积分和三重积分的概念，不加证明地指出重积分存在的充分条件。对重积分的性质只加以叙述，省略证明。进而，重点介绍了重积分的经典计算方法及其拓展应用。重积分的计算最终都归结为定积分。学习中要抓住它与定积分之间的联系，注意比较它们的共同点与不同点。通过完成本节达标实训练习，可使读者达到以下要求。

一级达标要求。必须深刻理解重积分的概念和性质；学会利用对称性简化计算；掌握在不同坐标系下化重积分为累次积分的经典计算方法，包括利用直角坐标和极坐标计算二重积分的方法，利用直角坐标、柱面坐标计算三重积分的方法。

二级达标要求。会选择合适的坐标系和恰当的积分次序进行积分；掌握分段函数的二重积分方法；会利用极坐标计算一些特殊积分区域下的二重积分；掌握三重积分的拓展计算方法，包括向不同坐标面方向投影的柱坐标计算方法，利用球坐标和广义球坐标计算三重积分的方法；会计算综合型的重积分问题及某些应用问题。

一级、二级标准是学习“重积分”必须达到的基本要求。

达标实训Ⅰ

9-1 改变下列积分次序。

(1) $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

【解】 由积分上下限画出积分区域 D,如图 9.1 所示积分区域 D 是由上半圆周 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$,$y>0$,抛物线 $y^2=x$,$y>0$;与直线 $x=1$ 三者所围成。

原式$=\int_0^{\frac{1}{2}} dy\int_{y^2}^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x,y)dx+\int_0^{\frac{1}{2}} dy\int_{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{1} f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int_{y^2}^{1} f(x,y)dx$

(2) $\int_0^a dx\int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$

【解】 如图 9.2 所示

原式 $=\int_0^{\frac{a}{2}} dy\int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+\int_{\frac{a}{2}}^{a} dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$

(3) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy$

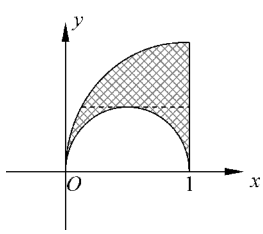


图 9.1

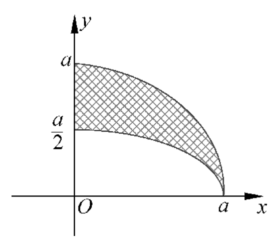


图 9.2

【解】 如图 9.3 所示

原式 $=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$

(4) $\int_{-1}^0 dx\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2} f(x,y)dy$

【解】 如图 9.4 所示

原式 $=\int_0^1 dy\int_{-y}^{y} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$

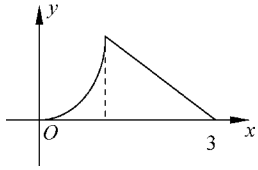


图 9.3

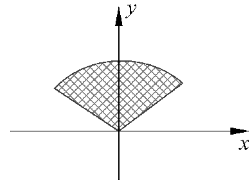


图 9.4

9-2　计算二重积分 $\iint\limits_D y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=1$，$x=2$，$y=2$ 及双曲线 $xy=1$ 所围成的区域。

【解】　采用先 x 后 y 的次序积分（先 y 后 x 将带来困难）

$$原式 =\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{2}y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{1}^{2}y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\mathrm{e}^{xy})\Big|_{\frac{1}{y}}^{2}\mathrm{d}y+\int_{1}^{2}\mathrm{e}^{xy}\Big|_{1}^{2}\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e})\,\mathrm{d}y+\int_{1}^{2}(\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e}^{y})\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4}-\mathrm{e}^{2}$$

9-3　化二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 为二次积分，其中 D 是由 $|x|+|y|\leqslant 1$ 所围成的区域。

【解】

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x-1}^{x+1}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{-y-1}^{y+1}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{y-1}^{1-y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

9-4　计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$x=2y$ 及 $x+y=3$ 围成的三角形区域。

【解】

$$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{2x}\mathrm{d}y+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{3-x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{0}^{1}\left(2x-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left(3-x-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{3}{4}x^{2}\right)\Big|_{0}^{1}+\left(3x-\frac{3}{4}x^{2}\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{3}{2}$$

9-5　计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由曲线 $y=x^{2}$，$y=0$，$x=1$ 所围成的区域。

【解】

$$原式=\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x^{2}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{0}^{1}(x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}})\Big|_{0}^{x^{2}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}(x\mathrm{e}^{x}-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{1}x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{x}-\int_{0}^{1}x\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{x}\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x-\frac{x^{2}}{2}\Big|_{0}^{1}=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

9-6　若区域 D 由 $x^{2}+y^{2}=-2x$ 所围成，则 $\iint\limits_D (x+y)\sqrt{x^{2}+y^{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）。

(A) $\iint\limits_D (x+y)\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(B) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_{0}^{-2\cos\theta}\rho^{3}\,\mathrm{d}\rho$

(C) $2\int_{\pi/2}^{\pi}(\sin\theta+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_{0}^{-2\cos\theta}\rho^{3}\,\mathrm{d}\rho$　　(D) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_{0}^{-2\cos\theta}\rho^{3}\,\mathrm{d}\rho$

【解】　答案是(D)，极坐标系下圆的方程为 $\rho=-2\cos\theta$，由 $\rho\geqslant 0$ 可得 $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$。

9-7　若区域 D 由 $x^{2}+y^{2}=2y$ 所围成，则 $\iint\limits_D (x+y)\sqrt{x^{2}+y^{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________。

(A) $\int_{0}^{\pi}(\sin\theta+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2\sin\theta}\rho^{3}\,\mathrm{d}\rho$　　(B) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2\sin\theta}\rho^{3}\,\mathrm{d}\rho$

(C) $2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2\sin\theta}\rho^{3}\,\mathrm{d}\rho$　　(D) $\iint\limits_D (x+y)\sqrt{2y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

【解】 (A)极坐标系下圆的方程为 $\rho=2\sin\theta$，由 $\rho\geqslant 0$ 可得 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$。

9-8 设 D 是 $y=x^3$，$y=1$，$x=-1$ 围成的有限区域，而 D_1 为 D 的第一象限部分，则 $\iint\limits_D (xy+e^{-x^2}\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(　　)。

(A) $2\iint\limits_{D_1} e^{-x^2}\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(B) $2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(C) $4\iint\limits_{D_1} (xy+e^{-x^2}\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(D) 0

【解】 答案是(A)，如图 9.5 所示由对称性可得。

9-9 选择适当的坐标系计算下列二重积分。

(1) $\iint\limits_D \dfrac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$y\geqslant x$，$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$。

【解】 利用极坐标进行计算，$\iint\limits_D \dfrac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}}\dfrac{\rho\cos\theta\rho\sin\theta}{\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\dfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}}\rho\mathrm{d}\rho=0$

(2) $\iint\limits_D |x|\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant 2y$。

【解】
$$\iint\limits_D |x|\mathrm{d}\sigma=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}|\rho\cos\theta|\rho\mathrm{d}\rho=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^2\cos\theta\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{4}{3}$$

(3) $\iint\limits_D x(y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$x^2+y^2\geqslant 1$，$x^2+y^2\leqslant 2x$。

【解】 积分区域关于 x 轴对称，xy 是关于 y 的奇函数，因此
$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$
如图 9.6 所示
$$D:-\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\quad 1\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta$$

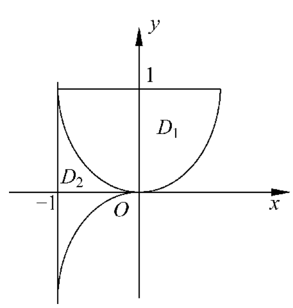


图 9.5

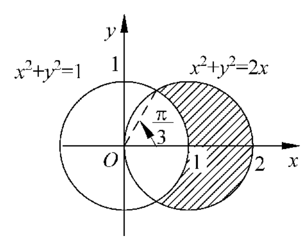


图 9.6

于是 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2}{3}\pi$

故，原式$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2}{3}\pi$。

(4) $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: x^2+y^2\leqslant 1, x+y\geqslant 1$。

【解】 可利用极坐标系，如图 9.7 所示，

$$\text{原式} = \iint\limits_D \frac{\rho\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\rho = 2-\frac{\pi}{2}$$

9-10 求 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

【解】 由于积分区域 D 是一个正方形，坐标轴将 D 分成四个对称的子区域，被积函数 $|xy|$ 是 x 与 y 的偶函数，设 D_1 为 D 在第 1 象限部分，故

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 4\iint\limits_{D_1}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}y\,\mathrm{d}y \\ &= 4\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{1-x}\mathrm{d}x = 2\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

9-11 计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$。

【分析】 由于被积函数不是初等函数，所以需将积分区域 D 分块后再积分。

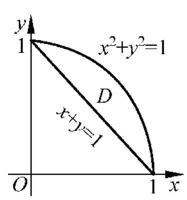


图 9.7

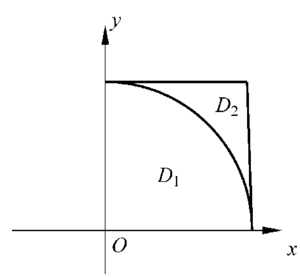


图 9.8

【解】 如图 9.8 所示，将积分区域 D 分成 D_1 和 D_2 两部分，则

$$\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma$$

由于

$$\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{8}$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma - \iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y - \left(-\frac{\pi}{8}\right)\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}$$

所以，$\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{8}+\left(-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$。

9-12 $\iint\limits_{D}(\sqrt{x^2+y^2}+2y^3)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x-1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域。

【解】 如图 9.9 所示，设 $D_1:(x-1)^2+y^2=1$，$D_2:x^2+y^2=4$，由积分区域的对称性和被积函数的奇偶性得 $\iint\limits_{D}2y^3\mathrm{d}\sigma=0$。

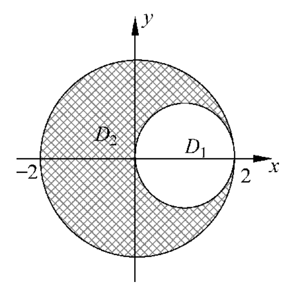


图 9.9

$$\text{故原式}=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma+0$$

$$=\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^2\mathrm{d}\rho-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{16\pi}{3}-\frac{32}{9}$$

9-13 设函数 $f(x)$ 连续，$f(0)=0$，且在 $x=0$ 处可导，求极限

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

【解】 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^t f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho$

$$\text{于是原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi\int_0^t f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho}{t^4}=2\pi\lim_{t\to0^+}\frac{f(t^2)t}{4t^3}=\frac{2\pi}{4}\lim_{t\to0^+}\frac{f(t^2)}{t^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{f(t^2)-f(0)}{t^2-0}=\frac{\pi}{2}f'(0)$$

9-14 计算下列三重积分。

(1) $\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}V$，其中 Ω 由三个坐标面与平面 $2x+y+z=1$ 所围成。

【解】 先对 z 积分，z 的变化范围是 $0\leqslant z\leqslant1-2x-y$，$D$ 可表示为 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，$0\leqslant y\leqslant1-2x$，

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{1-2x}\mathrm{d}y\int_0^{1-2x-y}x\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{1-2x}x(1-2x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}x(1-2x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{96}$$

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\sin(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是平面 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ 和三个坐标平面所围成的区域。

【解】 原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x-y}\sin(x+y+z)\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-1$$

9-15 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是由曲面$z=x^2+y^2$与$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$所围成的区域。

【解】 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ z=\sqrt{2-x^2-y^2}\end{cases}$得投影区域$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1$，利用柱坐标求解，有

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}z\rho\,\mathrm{d}z=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho^4)\mathrm{d}\rho$$

$$=\pi\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{12}\pi$$

9-16 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由$z=x^2+y^2$，$z=4$所围成的立体。

【解】 Ω关于$y=0$对称，y是关于y的奇函数，所以$\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

投影区域为$\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=0\end{cases}$，选择柱坐标，$\Omega\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant\rho\leqslant 2\\ \rho^2\leqslant z\leqslant 4\end{cases}$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^4\mathrm{d}z=\frac{16}{3}\pi$$

9-17 计算积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$其中$\Omega$为立体$x^2+y^2+z^2\leqslant 4$的上半部。

【解】 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$为立体$x^2+y^2+z^2\leqslant 4$的上半部。

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=0+0+\int_0^2z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2z^2(4-z^2)\mathrm{d}z=\frac{64}{15}\pi$$

9-18 计算$I=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$是由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$所围成的闭区域。

【解】 $\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z,D_z:x^2+y^2\leqslant z^2\\ 0\leqslant z\leqslant 1\end{cases}$，利用截面法，有

$$I=\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 zS(D_z)\mathrm{d}z$$

其中 $S(D_z)$是圆域 $D_z:x^2+y^2\leqslant z^2$ 的面积

$$I=\int_0^1\pi z^3\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}。$$

9-19 设空间区域 $\Omega:z\geqslant\sqrt{3(x^2+y^2)},x^2+y^2+z^2\leqslant1$,则 $\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V=($ $)$。

(A) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho$　　(B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho$

(C) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho$　　(D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\mathrm{d}\rho$

【解】 (B)

9-20 设空间区域 $\Omega_1:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant0,\Omega_2:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$,则(　　)。

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}V$　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1}\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}V$

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{\Omega_2}y\mathrm{d}V$　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1}\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}V$

【解】 (B)

9-21 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\mathrm{d}V$,其中 Ω 是球 $x^2+y^2+z^2\leqslant4$。

【解】 因为积分区域 Ω 关于 x,y,z 具有轮换对称性,

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\mathrm{d}V$$

$$=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}[(x^2+z^2)+(x^2+y^2)+(y^2+z^2)]\mathrm{d}V$$

$$=\frac{2}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho=\frac{256\pi}{15}$$

9-22 Ω 是由 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 围成的闭区域,计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+2z)\mathrm{d}V$。

提示:利用对称性可简化计算。

【解】 Ω 关于 yOz 面和 xOz 面对称,故

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+2z)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}V+\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}V+2\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V$$

$$= 0 + 0 + 2\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}V = 2\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}V$$

$$= 2\int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 z \cdot \pi z\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\pi$$

（其中 D_z 为平面 $Z=z$ 与 $z=x^2+y^2$ 所截得的圆）

9-23 计算 $\iiint_{\Omega}(3x^2+y^2+2z^2)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$。

【解】 由轮换对称性可知

$$\iiint_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}V$$

则

$$\iiint_{\Omega}(3x^2+y^2+2z^2)\mathrm{d}V$$

$$= 3\iiint_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}V + \iiint_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}V + 2\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}V$$

$$= 6\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}V = 12\int_0^R z^2 \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 12\int_0^R z^2\pi(R^2-z^2)\mathrm{d}z = \frac{8}{5}\pi R^5$$

9-24 求下列曲面所围成立体的体积。

(1) 由 $z=x+y, z=xy, x+y=1, x=0, y=0$ 所围成的立体体积。

【解】 由题意，$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=\iint_{D}(x+y-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，积分区域 D 是 x 轴，y 轴及直线 $x+y=1$ 围成的三角形，于是

$$V=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}(x+y-xy)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1\left[xy+(1-x)\cdot\frac{1}{2}y^2\right]\Big|_0^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1\left[x(1-x)+(1-x)\cdot\frac{1}{2}(1-x)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^3\mathrm{d}x = \frac{7}{24}$$

(2) 由曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与曲面 $x^2+y^2+z^2=4R^2$ 所围成的立体体积。

【解】 利用球面坐标系计算比较简便，

此时两曲面所围区域 Ω：$\begin{cases} R\leqslant r\leqslant 2R \\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{cases}$

所以体积

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_R^{2R}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\cdot\int_R^{2R}r^2\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_R^{2R}$$

$$=\frac{28}{3}\pi R^3$$

(3) 由椭圆抛物面 $z=4-x^2-\frac{y^2}{4}$ 与平面 $z=0$ 所围成的立体体积。

【解】 考虑到图形的对称性,只需计算第一卦限部分即可

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=4\iint_D\left(4-x^2-\frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故

$$V=4\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{16-4x^2}}\left(4-x^2-\frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^2\left(4y-x^2y-\frac{1}{12}y^3\right)\Big|_0^{\sqrt{16-4x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^2(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=16\pi$$

9-25 求由 $y=2x$,$y=\frac{x}{2}$,$xy=2$ 围成的平面图形的面积。

【解】 设所求面积为 S,由 $\begin{cases}y=\frac{x}{2}\\ xy=2\end{cases}$,得交点(2,1),

$$S=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{2y}\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{2}{y}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{3y}{2}\mathrm{d}y+\int_1^2\left(\frac{2}{y}-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1+2\ln y\Big|_1^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_1^2$$

$$=\frac{3}{4}+2\ln2-\frac{1}{4}(4-1)=2\ln2$$

达标实训Ⅱ

9-26 根据二重积分性质,比较 $\iint_D\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$ 的大小,其中 D 是三角形区域,三顶点分别为(1,0),(1,1),(2,0)。

【分析】 利用保序性求解。可先画出积分区域,在积分区域上比较被积函数的大小,进而判断积分值的大小。

【解】 经过顶点(1,1)与(2,0)的直线方程为 $x+y=2$,由于区域 D 在该直线下方,

所以区域 D 中的点满足 $x+y\leqslant 2$，因而满足 $\ln(x+y)\leqslant 1$。类似地又知区域 D 中的点满足 $x\geqslant 1,y\geqslant 0$，因而满足 $x+y\geqslant 1$，进一步可知 $\ln(x+y)\geqslant 0$，在不等式 $\ln(x+y)\leqslant 1$ 两边乘以 $\ln(x+y)\leqslant 1$ 得 $[\ln(x+y)]^2\leqslant\ln(x+y)$，因而有

$$\iint_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$$

9-27　估计积分 $I=\iint_D(x+y+10)\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 围成的区域。

【分析】　利用积分估值定理求解。可先求被积函数 $f(x,y)=x+y+10$ 在区域 D 的最大值，最小值，即利用拉格朗日乘数法求解。

【解】　在 D 内部，$f_x=1,f_y=1$，因此 $f(x,y)$ 在区域内设有驻点，故最值一定在边界上达到，作 F-函数：

$$F(x,y)=x+y+10+\lambda(x^2+y^2-4)$$

令 $\begin{cases}F_x=1+2\lambda x=0\\F_y=1+2\lambda y=0\\x^2+y^2-4=0\end{cases}$，解得驻点为 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，比较得 $m=10-2\sqrt{2}$，$M=10+2\sqrt{2}$，积分区域的面积 $\sigma=\pi R^2=\pi\cdot 2^2=4\pi$

于是

$$8\pi(5-\sqrt{2})\leqslant I\leqslant 8\pi(5+\sqrt{2})。$$

9-28　改变积分次序 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$。

【分析】　可先根据题中的 Y-型积分画出积分区域图，如图 9.10 所示，再转化成关于 X-型积分区域。

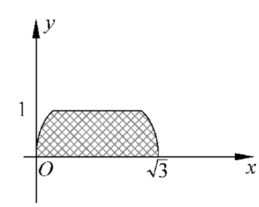


图　9.10

【解】　积分区域 D：$\begin{cases}\frac{1}{2}y^2\leqslant x\leqslant\sqrt{3-y^2}\\0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$

积分区域 $D=D_1\cup D_2\cup D_3$，D_1：$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\0\leqslant y\leqslant\sqrt{2x}\end{cases}$

D_2：$\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\\0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$，$D_3$：$\begin{cases}\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\\0\leqslant y\leqslant\sqrt{3-x^2}\end{cases}$，则

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{3-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$$

9-29　计算下列二次积分。

(1) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y$

【分析】　先对 y 积分有困难，被积函数 $\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$ 的原函数不是初等函数，故需要先交换积分次序，再求解。

【解】 原式$=\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_{y^2}^1 dx=\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}(1-y^2)dy$

$$=\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy-\int_0^1 y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\int_0^1 y\,de^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$=\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy+ye^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy=e^{-\frac{1}{2}}$$

(2) $\int_0^1 x^2dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$

【分析】 先对 y 积分有困难，被积函数 e^{-y^2} 的原函数不是初等函数，故需要先交换积分次序，再求解。

【解】 原式$=\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 e^{-y^2}dy\int_0^y x^2dx$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}dy=\frac{1}{6}\int_0^1 y^2e^{-y^2}dy^2$$

$$\xlongequal{u=y^2}\frac{1}{6}\int_0^1 ue^{-u}du=\frac{1}{6}(-ue^{-u}-e^{-u})\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{6}(1-2e^{-1})$$

(3) $\int_0^1 dy\int_y^1 x^2\sin xy\,dx$

【分析】 按原式所给的次序计算积分，需进行二次分部积分，若交换积分次序，求积分较易，将 D：$\begin{cases}y\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$，重新表示为 D：$\begin{cases}0\leqslant y\leqslant x\\0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$。

【解】 原式$=\int_0^1 dx\int_0^x x^2\sin xy\,dy=\int_0^1 x(-\cos xy)\Big|_0^x dx$

$$=\int_0^1 x(1-\cos x^2)dx$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-\sin x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-\sin 1)$$

9-30 计算 $\iint\limits_{\substack{-1\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}}|y-x^2|\,dxdy$。

【分析】 根据绝对值，将积分区域分成两部分，

$|y-x^2|=\begin{cases}y-x^2, y\geqslant x^2\\x^2-y, y<x^2\end{cases}$，记区域 D 为 $-1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, D=D_1\cup D_2, D_1$：$x^2\leqslant y\leqslant 1, -1\leqslant x\leqslant 1$；$D_2$：$-1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y<x^2$。

【解】 原式$=\iint\limits_{D_1}|y-x^2|\,dxdy+\iint\limits_{D_2}|y-x^2|\,dxdy$

$$=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1(y-x^2)dy+\int_{-1}^1 dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\frac{y^2}{2} - x^2 y\right)\Big|_{x^2}^{1} dx + \int_{-1}^{1}\left(x^2 y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{0}^{x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2} - x^2 + x^4\right)dx = 2\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2} - x^2 + x^4\right)dx$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{11}{15}$$

9-31　求$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma$,其中$D$是由圆$x^2+y^2=4$和$(x+1)^2+y^2=1$所围成的平面区域(如图9.11所示)。

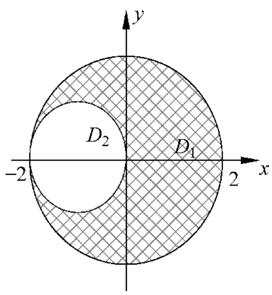


图　9.11

【分析】　利用对称性,在极坐标系下计算二重积分。首先,将积分区域D分为大圆$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$减去小圆$D_2=\{(x,y)\mid (x+1)^2+y^2\leqslant 1\}$,如图,再求解。

【解】　令$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$,$D_2=\{(x,y)\mid (x+1)^2+y^2\leqslant 1\}$。

由对称性,$\iint\limits_D y\,d\sigma = 0$。

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma = \iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma - \iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$$

$$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^2 d\rho - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_0^{-2\cos\theta}\rho^2 d\rho$$

$$= \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{9} = \frac{16}{9}(3\pi-2)$$

所以,$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma = \frac{16}{9}(3\pi-2)$。

9-32　$\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$,其中$D$:$x^2+y^2\leqslant ax$,$x^2+y^2\leqslant ay$($a>0$)的公共部分。

【分析】　利用极坐标求解,画出积分区域图,将积分区域分成两部分求解。

【解】　积分区域如图9.12所示

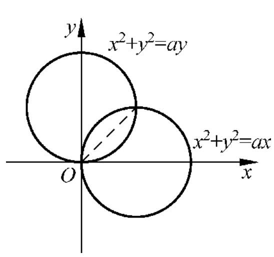


图　9.12

由$\begin{cases}\rho=a\cos\theta\\ \rho=a\sin\theta\end{cases}\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

设$D=D_1+D_2$,其中

$$D_1:\begin{cases}0\leqslant\rho\leqslant a\sin\theta\\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}0\leqslant\rho\leqslant a\cos\theta\\ \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

于是,原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sin\theta}\rho^3 d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho^3 d\rho = \frac{a^4}{64}(3\pi-8)$

9-33　设$f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上连续且单调增加,求证:

$$(b-a)\int_a^b g(x)f(x)dx \geqslant \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$$

【分析】　右端出现了两个积分,若将两个积分的积分变量换成不同符号则可化为二

重积分。

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\int_a^b f(y)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_a^b\int_a^b f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而左边亦可化为二重积分。

$$(b-a)\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这样就化为二重积分的比较了。

【证】 令 $I=(b-a)\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

则 $I=\int_a^b\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_a^b\int_a^b f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\int_a^b f(x)[g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

同样可得 $I=\int_a^b\int_a^b f(y)[g(y)-g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

两式相加得 $2I=\int_a^b\int_a^b[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0$

故 $I=(b-a)\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$

结论得证。

9-34 设函数 $f(x)$为$[0,1]$上的单调减少且大于 0 的连续函数,求证:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

【分析】 从结论出发,做恒等变形,即证明$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$成立。

【证】 令 $I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y-\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\int_0^1 xf(y)f(x)[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同理 $I=\int_0^1\int_0^1 yf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 两边相加整理得

$2I=\int_0^1\int_0^1 f(y)f(x)[x-y][f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\because f(x)>0$ 且在$[0,1]$ 上单调减少

$\therefore (x-y)[f(y)-f(x)]\geqslant 0$

$\therefore I\geqslant 0$ 命题得证。

9-35 曲线$\begin{cases}x^2=2z\\y=0\end{cases}$绕 z 轴一周生成的曲面与 $z=1$,$z=2$ 所围成的立体区域 Ω。

(1) 求$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

(2) 求$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

【分析】 两题都可利用柱坐标系求解。先写出旋转曲面方程,分别找出柱坐标系下三个参数的取值范围,将直角坐标系下的三重积分转化成柱坐标系下的三次积分求解。

【解】 (1) 曲面方程为 $x^2+y^2=2z$,记 $D(z):x^2+y^2\leqslant(\sqrt{2z})^2$,则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\frac{\rho}{\rho^2+z^2}\mathrm{d}\rho\\&=2\pi\int_1^2\frac{1}{2}\ln(\rho^2+z^2)\Big|_0^{\sqrt{2z}}\mathrm{d}z=\pi\int_1^2\ln\left(1+\frac{2}{z}\right)\mathrm{d}z\\&=\pi z\ln\left(1+\frac{2}{z}\right)\Big|_1^2+\pi\int_1^2\frac{2}{2+z}\mathrm{d}z\\&=\pi\ln\frac{4}{3}+2\pi\ln\frac{4}{3}=3\pi\ln\frac{4}{3}\end{aligned}$$

(2) 方法 1 曲面方程为 $x^2+y^2=2z$,记 $D(z):x^2+y^2\leqslant(\sqrt{2z})^2$,则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}(\rho^2+z^2)\rho\,\mathrm{d}\rho\\&=2\pi\int_1^2(z^2+z^3)\mathrm{d}z=\frac{73}{6}\pi\end{aligned}$$

方法 2

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2(\rho^2+z^2)\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^1(\rho^2+z^2)\mathrm{d}z\\&=2\pi\int_0^2\left(2\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5+\frac{8}{3}\rho-\frac{1}{24}\rho^7\right)\mathrm{d}\rho-2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5+\frac{1}{3}\rho-\frac{1}{24}\rho^7\right)\mathrm{d}\rho\\&=\frac{40}{3}\pi-\frac{7}{6}\pi=\frac{73}{6}\pi\end{aligned}$$

9-36 求椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$所围之椭球的体积。

【分析】 利用三重积分求解可考虑对称性,所求积分是第一卦限的 8 倍,$V=8\iint\limits_D z(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$ 表示椭球面在 xOy 坐标面第一卦限的投影区域,再转化成极坐标系求解。

【解】 由于椭球体在空间直角坐标系 8 个卦限上的体积是对称的。令 D 表示椭球面在 xOy 坐标面第一卦限的投影区域,则

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1,x\geqslant0,y\geqslant0\right\}$$

体积 $V=8\iint\limits_D z(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。做广义极坐标变换 $x=a\rho\cos\theta,y=b\rho\sin\theta$,则 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=ab\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$

与 D 相对应的积分区域

$$D^*=\{(\rho,\theta)\mid0\leqslant\rho\leqslant1,0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\}$$

此时 $z=z(x,y)=c\sqrt{1-\rho^2}$，从而

$$V=8\iint_{D^*}z(a\rho\cos\theta,b\rho\sin\theta)ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 c\sqrt{1-\rho^2}\,ab\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=8abc\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho=\frac{4}{3}\pi abc$$

【注】 本题若用三重积分求解可选择广义球坐标变换。

9-37 求 $\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$。

【分析】 可利用截面法求解。将所求积分分成三部分求解，每部分求解时再利用截面法，因为每个截面都是椭圆，相当于截面上的二重积分是相应椭圆的面积，最后计算定积分即可。

【解】 $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}\frac{y^2}{b^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

而 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\iint\limits_{R_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 R_x 为区域 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1-\frac{x^2}{a^2}$，即 $\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\leqslant 1$，其面积为 $\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$，故

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{15}\pi abc$$

同理可得

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{y^2}{b^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc$$

所以

$$I=3\times\frac{4}{15}\pi abc=\frac{4}{5}\pi abc$$

9-38 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$，其中 Ω 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$。

【分析】 利用广义球坐标变换求解，令

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}\quad\text{其中}\quad\begin{cases}0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\end{cases}$$

【解】

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}r^2(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi)\cdot abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi}(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi)\cdot abc\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2)$$

9-39 求 $I = \iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 与 $z\geqslant 0$ 所围区域。

【分析】 做广义球坐标变换。

$$T:\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta & 0\leqslant r<+\infty \\ y = br\sin\varphi\sin\theta & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ z = cr\cos\varphi & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi \end{cases}$$

$$\Omega' = \left\{(r,\varphi,\theta)\,\middle|\, 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\}$$

【解】 $I = \iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} abc^2 r^3\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abc^2 r^3\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}abc^2$$

9-40 设 $F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $f(u)$ 为连续函数，$f'(0)$ 存在，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^5}$。

【分析】 先用球坐标系求解三重积分，再用洛必达法则求出极限。

【解】 $F(t) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t r^2 f(r^2)\,\mathrm{d}r$

$$= 4\pi\int_0^t r^2 f(r^2)\,\mathrm{d}r$$

$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2),\quad F(0)=0$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^5} = \lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{5t^4} = \lim_{t\to 0}\frac{4\pi t^2 f(t^2)}{5t^4} = \frac{4\pi}{5}\lim_{t\to 0}\frac{f(t^2)}{t^2} = \frac{4\pi}{5}\lim_{t\to 0}\frac{f(t^2)-f(0)}{t^2}$$

$$= \frac{4\pi}{5}\lim_{u\to 0}\frac{f(u)-f(0)}{u} = \frac{4\pi}{5}f'(0) = \frac{4}{5}\pi$$

9-41 设平面薄片所占的闭区域 D 是由螺线 $r=2\theta$ 上一段弧 $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成的，它的面密度为 $\rho(x,y)=x^2+y^2$，求该薄片的质量。

【分析】 利用薄片质量公式，直接代入质量公式求解即可。

【解】 $M = \iint\limits_{D}\rho\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\theta}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^5}{40}$

9-42 求密度均匀半球体的质心。

【分析】 利用质心公式，建立适当的坐标系，代入公式求解。

【解】 取半球体的对称轴为 z 轴，原点取在球心上，又设球半径为 a，则半球体所占空间闭区域

$$\Omega = \{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, z\geqslant 0\}$$

显然，质心在 z 轴上，故 $\bar{x}=\bar{y}=0$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega}z\rho\,\mathrm{d}V=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}V$$

其中 $V=\frac{2}{3}\pi a^3$ 为半球体的体积

$$\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{\sin^2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{\pi a^4}{4}$$

因此，$\bar{z}=\frac{3}{8}a$，质心为$\left(0,0,\frac{3}{8}a\right)$。

9-43 求质量为 M，长和宽分别为 a，b 的长方形均匀薄板对长边的转动惯量。

【分析】 利用转动惯量公式，直接代入公式即可求解。

【解】 面密度为$\frac{M}{ab}$，任取子区域 $\mathrm{d}\sigma$，则该子区域对 x 轴的转动惯量

$$I_x=\iint_D\frac{M}{ab}y^2\,\mathrm{d}\sigma=\frac{M}{ab}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b y^2\,\mathrm{d}y=\frac{b^2}{3}M$$

9-44 求密度为 ρ 的均匀球体对于过球心的一条轴 l 的转动惯量。

【分析】 建立适当的坐标系后直接代入转动惯量公式即可求解。

【解】 取球心为坐标原点，z 轴与轴 l 重合，又设球的半径为 a，则球体所占空间闭区域

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\}$$

所求转动惯量即球体对于 z 轴的转动惯量为

$$\begin{aligned}I_z&=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\rho\,\mathrm{d}V\\&=\rho\iiint_{\Omega}(r^2\ \sin^2\varphi\cos^2\theta+r^2\ \sin^2\varphi\sin^2\theta)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\rho\iiint_{\Omega}r^4\ \sin^3\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\,\mathrm{d}r\\&=\rho\cdot2\pi\cdot\frac{a^5}{5}\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{2}{5}\pi a^5\rho\cdot\frac{4}{3}\\&=\frac{2}{5}a^2M\end{aligned}$$

其中 $M=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$ 为球体的质量。

9-45 设面密度为 μ，半径为 R 的圆形薄片 $x^2+y^2\leqslant R^2$，$z=0$，求它对位于 $M_0(0,0,a)(a>0)$处的单位质量的质点的引力。

【分析】 利用引力公式，直接代入公式即可求解。

【解】　由对称性可知引力 $\vec{F}=(0,0,F_z)$

$$F_Z=-Ga\mu\iint\limits_D\frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma$$

$$=-Ga\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=2\pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}-\frac{1}{a}\right)$$

达标自测题

1．二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x x\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$ 的值为(　　)。

(A) 2　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) 4　　(D) $\frac{1}{4}$

2．计算二重积分 $\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y+1)^2}$，其中 $D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$(　　)。

(A) $\ln\frac{3}{2}$　　(B) $\ln\frac{2}{3}$　　(C) $\ln\frac{4}{3}$　　(D) $\ln\frac{3}{4}$

3．二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\cos x}^1 y^4\,\mathrm{d}y$ 的值为(　　)。

(A) $\frac{\pi}{10}+\frac{8}{75}$　　(B) $\frac{8}{75}$　　(C) $\frac{\pi}{10}$　　(D) $\frac{\pi}{10}-\frac{8}{75}$

4．已知 Ω 是由 $z=x,z=-x,z=-y$ 及 $z=1$ 所围的有界闭区域，则 $I=\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}v=$(　　)。

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 5

5．计算二重积分 $\iint\limits_D\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D:|x|\leqslant 2,|y|\leqslant 1$。(　　)

(A) 1　　(B) π　　(C) 2π　　(D) 3π

6．二次积分 $\int_1^3\mathrm{d}x\int_{x-1}^2\sin y^2\,\mathrm{d}y$ 的值为(　　)。

(A) $\frac{1}{2}(1-\cos4)$　　(B) $\frac{1}{2}(1-\cos2)$　　(C) $\frac{1}{3}(1-\cos4)$　　(D) $\frac{1}{3}(1-\cos2)$

7．计算 $\iiint\limits_\Omega xy\,\mathrm{d}V$ 其中 Ω 是由 $z=xy,x+y=1,z=0$ 所围的有界闭区域。(　　)

(A) $\frac{1}{160}$　　(B) $\frac{1}{180}$　　(C) $\frac{3}{170}$　　(D) $\frac{7}{160}$

8．计算二重积分 $\iint\limits_D\sin x\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D:0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$。(　　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

9．设 Ω 是由 $x^2+y^2\leqslant 1$ 及 $0\leqslant z\leqslant 1$ 所确定的闭区域，计算 $I=\iiint\limits_\Omega(z-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}V=$(　　)。

(A) $-\frac{\pi}{6}$　　(B) $\frac{\pi}{6}$　　(C) $-\frac{\pi}{3}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

10. 二重积分$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$(其中 D 是由 $x^2+y^2=2ax$ 与 x 轴所围成的上半部分的闭区域)的值为(　　)。

(A) $\frac{3}{4}\pi a^4$　　(B) πa^4　　(C) $\frac{3}{2}\pi a^4$　　(D) $2\pi a^2$

11. Ω 是 $x\geqslant0,y\geqslant0$ 部分由曲面 $z=3-x^2-y^2$ 及 $z=x^2+y^2-5$ 所围成的闭区域，则$\iiint\limits_\Omega y\,\mathrm{d}V=$(　　)。

(A) $\frac{128}{15}$　　(B) $\frac{49}{15}$　　(C) $\frac{53}{9}$　　(D) $\frac{1}{2}$

12. 二重积分$\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$(其中 D 是由 $x^2+y^2=\pi^2,x^2+y^2=4\pi^2,y=x$，$y=2x$ 所围成的在第一象限内的闭区域)的值是(　　)。

(A) $-3\pi\left(\arctan2-\frac{\pi}{4}\right)$　　(B) $-\frac{3}{4}\pi^2\arctan2$

(C) $-4\pi^2\arcsin2$　　(D) $-2\pi\arccos3$

13. 设 Ω 是由 $bz\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant az\ (a>b>0)$ 所确定的闭区域，则$\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}V=$(　　)。

(A) $\frac{\pi}{12}(a^4-b^4)$　　(B) $\frac{\pi}{12}(a^4+b^4)$　　(C) $\frac{\pi}{12}(a^2-b^2)$　　(D) $\frac{\pi}{5}(a^3-b^4)$

14. 设 Ω 是由 $z=0,x^2+y^2=1$ 以及 $z=x^2+y^2+1$ 所围成的有界闭区域，则$\iiint\limits_\Omega 2z\mathrm{d}V=$(　　)。

(A) $\frac{7\pi}{3}$　　(B) $\frac{\pi}{3}$　　(C) $\frac{3\pi}{2}$　　(D) $\frac{5\pi}{3}$

15. 三重积分$\iiint\limits_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$(其中 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域)的值为(　　)。

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) $\frac{\pi}{5}$　　(C) $\frac{\pi}{8}$　　(D) $\frac{\pi}{10}$

16. 设 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2\leqslant\pi,x^2+y^2\leqslant\frac{\pi}{2},z\geqslant0$ 所确定的闭区域，则$\iiint\limits_\Omega\sin(\pi-x^2-y^2)\cdot z\mathrm{d}z=$(　　)。

(A) $\frac{\pi}{2}(\pi-1)$　　(B) $\frac{\pi}{2}(\pi+1)$　　(C) $\frac{\pi}{4}(\pi-1)$　　(D) $\frac{\pi}{3}(\pi-1)$

17. 二重积分$\iint\limits_D\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$(其中 D 是 $x^2+y^2=4$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域)的值为(　　)。

(A) $\frac{\pi}{2}(3\ln5-2)$　　(B) $\frac{\pi}{4}(5\ln5-4)$　　(C) $\pi\ln3-2$　　(D) $\frac{\pi}{4}\ln5-3$

18. 设积分区域 D 是由 $y=x, y=\frac{x}{2}, x=2$ 所围成的区域，则 $\iint\limits_{D} \mathrm{d}\sigma$ 的值是(　　)。

(A) 2　　(B) 1　　(C) 0　　(D) e

19. 二重积分 $\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$(其中 D 是由 $x^2+y^2=9$ 所围成的闭区域)的值为(　　)。

(A) $\pi(\mathrm{e}^9-1)$　　(B) $\pi\mathrm{e}^7-\mathrm{e}$　　(C) $\pi(\mathrm{e}^5+1)$　　(D) $\pi\mathrm{e}^3+\mathrm{e}$

20. 三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ (其中积分区域 $\Omega=\{(x,y,z)x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$)的值为(　　)。

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

21. 设区域 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$ 的值为 $R=$(　　)。

(A) 0　　(B) $\frac{\pi}{8}$　　(C) 1　　(D) $\frac{\pi}{4}$

9.4 拓展实训

重积分与曲线积分和曲面积分共同构成多元函数积分学，重积分是以一元函数的积分学为基础的，是定积分向多元函数的推广，同时，曲线积分和曲面积分又通过积分学的基本公式转化成重积分，所以，重积分在积分学中占有很重要的地位。重积分分为二重积分和三重积分，通过本部分的拓展实训练习，读者应达到研究生入学数学考试的要求，这部分在近十一年的考研数学中约占到高等数学部分题量10%的比例，历年考研试题的题型大致可归纳为以下几点。

1. 重积分的概念与重积分值的比较；
2. 利用区域对称性与被积函数的奇偶性化简多元函数的积分；
3. 交换积分次序与累次积分的转换；
4. 选用适当的方法计算二重积分；
5. 选用适当的方法计算三重积分；
6. 重积分的综合应用问题。

拓展实训Ⅰ

9-46　设函数 $f(u)$ 连续，区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$，则 $\iint\limits_{D} f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于(　　)。

(A) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy)\mathrm{d}y$　　(B) $2\int_{0}^{2}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(\rho^2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\rho$　　　　(D) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(\rho^2\sin\theta\cos\theta)\rho\mathrm{d}\rho$

【2004 数二】

【分析】

将二重积分化为累次积分的方法是：先画出积分区域的示意图，再选择直角坐标系和极坐标系，并在两种坐标系下化为累次积分。

【详解】

积分区域见图 9.13。

在直角坐标系下，

$$\iint_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}}f(xy)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(xy)\mathrm{d}y$$

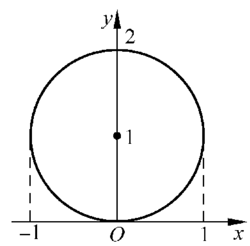


图 9.13

故应排除(A),(B)。

在极坐标系下，$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$，$\iint_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(\rho^2\sin\theta\cos\theta)\rho\mathrm{d}\rho$。

故选(D)。

9-47　设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$f(x)$为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，则 $\iint_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=$(　　)。　【2005 数二】

(A) $ab\pi$　　(B) $\frac{ab}{2}\pi$　　(C) $(a+b)\pi$　　(D) $\frac{a+b}{2}\pi$

【分析】

由于未知 $f(x)$的具体形式，直接化为用极坐标计算显然是困难的。本题可考虑用轮换对称性。

【详解】

由轮换对称性，有

$$\iint_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=\iint_D\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}\sigma$$
$$=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}+\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\right]\mathrm{d}\sigma$$
$$=\frac{a+b}{2}\iint_D\mathrm{d}\sigma=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\frac{a+b}{2}\pi$$

应选(D)。

9-48　设 $I_1=\iint_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint_D\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，$I_3=\iint_D\cos(x^2+y^2)^2\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则(　　)。　【2005 数三】

(A) $I_3>I_2>I_1$　　　　(B) $I_1>I_2>I_3$

(C) $I_2>I_1>I_3$　　(D) $I_3>I_1>I_2$

【分析】

关键在于比较$\sqrt{x^2+y^2}$,x^2+y^2与$(x^2+y^2)^2$在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$上的大小。

【详解】

在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$上,有$0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$,从而有

$$\frac{\pi}{2}>1\geqslant\sqrt{x^2+y^2}\geqslant x^2+y^2\geqslant(x^2+y^2)^2\geqslant 0$$

由于$\cos x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上为单调减函数,于是

$$0\leqslant\cos\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\cos(x^2+y^2)\leqslant\cos(x^2+y^2)^2$$

因此　$\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma<\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma<\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}\sigma$,故应选(A)。

9-49　设$f(x,y)$为连续函数,则$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho$等于(　　)。【2006 数一】

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

【分析】

本题首先由题设画出积分区域的图形,然后化为直角坐标系下累次积分即可。

【详解】

由题设可知积分区域D如图9.14所示,显然是Y-型域,则

原式$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

故选(C)。

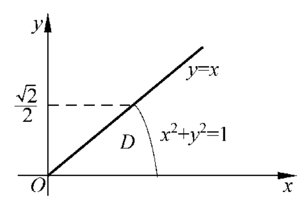


图9.14　积分区域

9-50　设函数$f(x,y)$连续,则二次积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$等于(　　)。【2007 数二】

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$

【分析】

这是交换积分顺序的问题。

【详解】

先将二次积分表成$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,由累次积分限确定区域$D$,如图9.15所示。记$y=\sin x\left(x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)$的反函数是$x=\varphi(y)$,则改换积分顺序得$I=$

$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\varphi(y)}^{\pi} f(x,y)\mathrm{d}x$。由此知(C),(D)不正确。现在的关键是求出 $y=\sin x\left(x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)$ 的反函数。

$y=\sin x=\sin(\pi-x)$,当 $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$ 时 $0\leqslant\pi-x\leqslant\frac{\pi}{2}\Rightarrow \pi-x=\arcsin y$,即 $x=\pi-\arcsin y$。因此 $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$,选(B)。

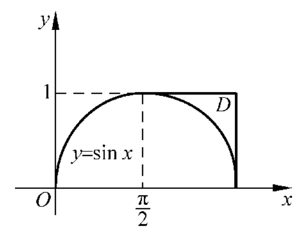


图 9.15

9-51 设 $f(x)$是连续奇函数,$g(x)$是连续偶函数,$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,-\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$则正确的是(　　)。 【2008 数一】

(A) $\iint\limits_D f(y)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$　　(B) $\iint\limits_D f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

(C) $\iint\limits_D [f(x)+g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$　　(D) $\iint\limits_D [f(y)+g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

【分析】

本题考查二重积分的对称性。

【详解】

(A)中 $f(y)$为奇函数,所以 $\iint\limits_D f(y)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。

9-52 设 f 连续且可导,区域 D 如图 9.16 所示阴影部分,则 $F(u,v)=\iint\limits_D\frac{f(u^2+v^2)}{\sqrt{u^2+v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,则$\frac{\partial F}{\partial u}=$(　　)。 【2008 数三】

(A) $vf'(u^2)$　　(B) $uf'(u^2)$　　(C) $vf'(v^2)$　　(D) $uf'(v^2)$

【分析】

用极坐标得 $F(u,v)=\iint\limits_D\frac{f(u^2+v^2)}{\sqrt{u^2+v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^v\mathrm{d}v\int_1^u\frac{f(\rho^2)}{\rho}\rho\,\mathrm{d}\rho=v\int_1^u f(\rho^2)\mathrm{d}\rho$,$\frac{\partial F}{\partial u}=vf'(u^2)$。

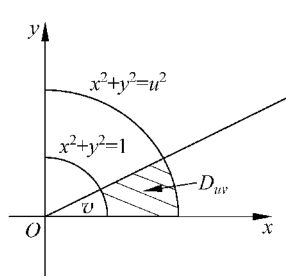


图 9.16

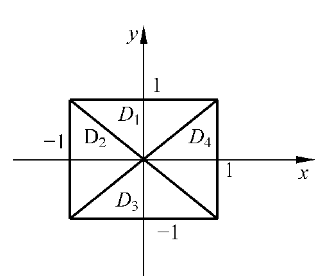


图 9.17 正方形被对角线划分

9-53 如图 9.17 所示,正方形$\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$被其对角线划分为四个区域,$D_K(k=1,2,3,4)$,$I_K=\iint\limits_{D_K}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则 $\max\limits_{1\leqslant K\leqslant 4}\{I_K\}=$(　　)。 【2009 数一】

(A) I_1　　(B) I_2　　(C) I_3　　(D) I_4

【分析】

本题利用二重积分区域的对称性及被积函数的奇偶性。

【详解】

D_2 和 D_4 都关于 x 轴对称，而被积函数是关于 y 的奇函数，所以 $I_2=I_4=0$；D_1 和 D_3 两区域都关于 y 轴对称，$y\cos(-x)=y\cos x$ 即被积函数是关于 x 的偶函数，由积分的保号性，$I_1=2\iint\limits_{\{(x,y)\mid y\geqslant x,0\leqslant x\leqslant 1\}} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$，$I_3=2\iint\limits_{\{(x,y)\mid y\leqslant -x,0\leqslant x\leqslant 1\}} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0$，所以正确答案为(A)。

9-54　设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{4-y} f(x,y)\mathrm{d}x=(\quad)$。

【2009 数二】

(A) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^{4-y} f(x,y)\mathrm{d}y$　　(B) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^{4-x} f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^{4-y} f(x,y)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_y^2 f(x,y)\mathrm{d}x$

【分析】

$\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{4-y} f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分区域为两部分。

$D_1=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,x\leqslant y\leqslant 2\}$，$D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant y\leqslant 2,y\leqslant x\leqslant 4-y\}$

将其写成一块 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant y\leqslant 2,1\leqslant x\leqslant 4-y\}$

故二重积分可以表示为 $\int_1^2\mathrm{d}y\int_1^{4-y} f(x,y)\mathrm{d}x$，故答案 为(C)。

9-55　设区域 D 由曲线 $y=\sin x$，$x=\pm\frac{\pi}{2}$，$y=1$ 围成，则 $\iint(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\quad)$。

【2012 数二】

(A) π　　(B) 2　　(C) -2　　(D) $-\pi$

【分析】

本题考查二重积分的对称性，需要进行区域分割。

【详解】

区域 D 如图 9.18 中的阴影部分所示，为了便于讨论，再引入曲线 $y=-\sin x$ 将区域分为 D_1,D_2,D_3,D_4 四部分。由于 D_1,D_2 关于 y 轴对称，可知在 $D_1\cup D_2$ 上关于 x 的奇函数积分为零，故 $\iint\limits_{D_1\cup D_2} x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；又由于 D_3,D_4 关于 x 轴对称，可知在 $D_3\cup D_4$ 上关于 y 的奇函数为零，故 $\iint\limits_{D_3\cup D_4} x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。

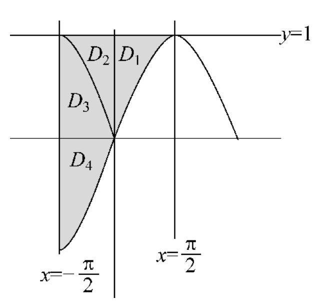


图 9.18　区域 D

因此 $\iint\limits_D(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^1\mathrm{d}y=-\pi$，故选(D)。

9-56 设函数 $f(t)$连续,则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho=($　　$)$。【2012 数三】

(A) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

(B) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

(D) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

【分析】

由 $x\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$ 解得 y 的下界为 $\sqrt{2x-x^2}$,由 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant2$ 解得 y 的上界为 $\sqrt{4-x^2}$,故排除答案(C),(D)。将极坐标系下的二重积分化为 X-型区域的二重积分得到被积函数为 $f(x^2+y^2)$,故选(B)。

9-57 设 $a>0$,$f(x)=g(x)=\begin{cases}a,若\ 0\leqslant x\leqslant1\\0\quad\ 其他\end{cases}$,而 D 表示全平面,则 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________。【2003 数三】

【分析】

本题积分区域为全平面,但只有当 $0\leqslant x\leqslant1$,$0\leqslant y-x\leqslant1$ 时,被积函数才不为零,因此实际上只需在满足此不等式的区域内积分即可。

【详解】

$$I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y-x\leqslant1}a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=a^2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{x+1}\mathrm{d}y=a^2\int_0^1[(x+1)-x]\mathrm{d}x=a^2$$

9-58 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^1x^y\ln x\,\mathrm{d}y=$ ________。【2008 数四】

【分析】

本题为二次积分计算的积分题型。

【详解】

$$\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^1x^y\ln x\,\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}x^y=\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-x\Big|_1^2=\frac{1}{2}$$

9-59 $\iint\limits_D(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________,其中 D:$x^2+y^2\leqslant1$。【2008 数三】

【分析】

本题可利用二重积分的对称性和轮换对称性简化积分计算。

【详解】

$$\iint\limits_D(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 2\pi\rho^2 \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{4}\pi\rho^4\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

9-60　设 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ ________。

【2009 数一】

【分析】

本题考查三重积分的计算，可以用轮换对称性，也可以直接计算。

【详解】

（方法一）由轮换对称性，$\iiint\limits_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2 \cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{4}{15}\pi$$

（方法二）

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi r^2\ \cos^2\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}(-\cos\varphi)\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{-\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{15}\pi
\end{aligned}$$

9-61　设平面区域 D 由 $y = x$，圆 $x^2 + y^2 = 2y$ 及 y 轴所组成，则二重积分 $\iint\limits_{D} xy\,\mathrm{d}\sigma =$ ________。

【2011 数二】

【详解】

积分区域如图 9.19 所示，选择 X-型积分。

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D} xy\,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} y\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_x^{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x(1+\sqrt{1-x^2}-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

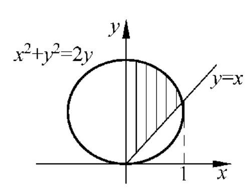


图 9.19　平面区域 D

拓展实训Ⅱ

9-62　求 $\iint\limits_{D}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 所围成的平 面区域（如图 9.20 所示）。

【2004 数三】

【分析】 见达标实训 9-31。

9-63 计算二重积分$\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$。 【2005 数二】

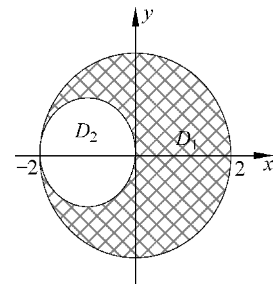


图 9.20

【分析】

被积函数含有绝对值，应当作分区域函数看待，利用积分的可加性分区域积分即可。

【详解】

记 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,(x,y)\in D\}$，$D_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2>1,(x,y)\in D\}$

于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma&=-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\rho^2-1)\rho\mathrm{d}\rho+\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{\pi}{8}+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\rho^2-1)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

9-64 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$，计算二重积分$\iint\limits_{D}\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

【2006 数一】

【分析】

由于积分区域 D 关于 x 轴对称，故可先利用二重积分的对称性结论简化所求积分，又积分区域为圆域的一部分，则将其化为极坐标系下累次积分即可。

【详解】

积分区域 D 关于 x 轴($y=0$)对称，函数 $f(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$是变量 y 的偶函数，函数 $g(x,y)=\frac{xy}{1+x^2+y^2}$是变量 y 的奇函数，则

$$\iint\limits_{D}\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho=\frac{\pi\ln 2}{2}$$

$$\iint\limits_{D}\frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

故$\iint\limits_{D}\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D}\frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi\ln 2}{2}$

9-65 计算二重积分$\iint\limits_{D}\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x,y=1,x=0$ 所围成的平面区域。 【2006 数三】

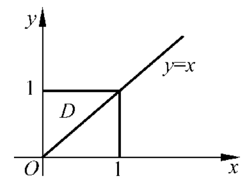


图 9.21　积分区域

【分析】

画出积分域,将二重积分化为累次积分即可。

【详解】

积分区域如图 9.21 所示。因为根号下的函数为关于 x 的一次函数,“先 x 后 y”积分较容易,所以

$$\iint_D \sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^1\frac{1}{y}\left(y^2-xy\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^y\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_0^1 y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{9}$$

9-66　求二重积分$\iint\limits_D \max(xy,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$。

【2008 数二】

【分析】

本题考查二重积分的计算。

【详解】

$$\iint_D \max(xy,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^2 1\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{x}}1\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^2 xy\mathrm{d}y=1+2\ln 2+\frac{15}{4}-\ln 2=\frac{19}{4}+\ln 2$$

9-67　求二重积分$\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2,y\geqslant x\}$。

【2009 数二、数三】

【分析】

本题考查极坐标系下二重积分的计算。

【详解】

由 $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$ 得 $\rho\leqslant 2(\sin\theta+\cos\theta)$,

所以

$$\iint_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}(\rho\cos\theta-\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left[\frac{1}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\rho^3\Big|_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^3\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^3\mathrm{d}(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{8}{3}\times\frac{1}{4}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=-\frac{8}{3}$$

9-68　计算二重积分$\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成。

【2010 数三】

【分析】

画出积分区域的草图,先利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算后再求解。

【详解】

画出积分域草图如图 9.22 所示。

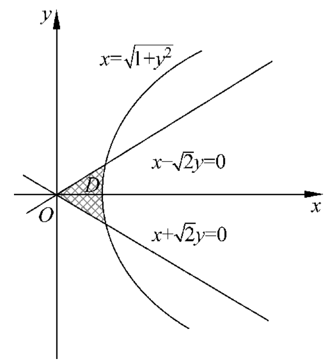


图 9.22 积分区域草图

由上可知,积分域关于 x 轴对称,又被积分函数 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$,其中 $3x^2y+y^3$ 是 y 的奇函数。x^3+3xy^2 是 y 的偶函数,所以

$$\iint_D (x+y)^3\,dxdy = 2\int_0^1 dy\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}(x^3+3xy^2)\,dx$$

$$= 2\int_0^1\left[\frac{(1+y^2)^2-4y^4}{4}+\frac{3y^2(1+y^2-2y^2)}{2}\right]dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1(-9y^4+8y^2+1)\,dy = \frac{14}{15}$$

9-69 计算二重积分 $\iint_D xy\,d\sigma$,其中区域 D 为曲线 $\rho=1+\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 与极轴围成。

【2012 数二】

【详解】

$$\iint_D xy\,d\sigma = \int_0^\pi d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta\cdot\rho\,d\rho$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin\theta\cdot\cos\theta\cdot(1+\cos\theta)^4\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^\pi \cos\theta\cdot(1+\cos\theta)^4\,d\cos\theta$$

令 $u=\cos\theta$ 得,原式 $=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-1}^1 u(1+u)^4\,du=\dfrac{16}{15}$。

9-70 由曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中所围图形的面积为多少?

【2012 数三】

【详解】

以被积函数为 1 的二重积分来求,所以

$$S=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{4}}^{y}dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{4}}^{\frac{4}{y}}dx=\frac{3}{2}+4\ln 2-\frac{3}{2}=4\ln 2$$

9-71 设平面内区域 D 由直线 $x=3y$,$y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成,计算 $\iint_D x^2\,dxdy$。

【2013 数二】

【详解】

$$\iint_D x^2\,dxdy=\int_0^2 x^2\,dx\int_{\frac{x}{3}}^{3x}dy+\int_2^6 x^2\,dx\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}dy=\frac{416}{3}$$

9-72　设函数 $f(x)$连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma},\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\mathrm{d}x}$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$。

(1) 讨论 $F(t)$在区间$(0,+\infty)$内的单调性。(2) 证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$。

【2003 数一】

【分析】

(1)首先利用球坐标和极坐标把分子、分母分别化为累次积分进行计算，再根据导函数 $F'(t)$的符号确定单调性；(2)将待证的不等式做适当的恒等变形后，构造辅助函数，再用单调性进行证明即可。

【详解】

(1) 因为

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{t} f(r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{t} f(r^2)r\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^{t} f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{\int_0^{t} f(r^2)r\mathrm{d}r}$$

$F'(t)=2\dfrac{tf(t^2)\int_0^{t} f(r^2)r(t-r)\mathrm{d}r}{\left[\int_0^{t} f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2}$，所以在$(0,+\infty)$上 $F'(t)>0$，故 $F(t)$ 在$(0,+\infty)$内单调增加。

(2) 因 $G(t)=\dfrac{\pi\int_0^{t} f(r^2)r\mathrm{d}r}{\int_0^{t} f(r^2)\mathrm{d}r}$，要证明 $t>0$ 时 $F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$，只需证明 $t>0$ 时，$F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$，即 $\int_0^{t} f(r^2)r^2\mathrm{d}r\int_0^{t} f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^{t} f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2>0$。令

$$g(t)=\int_0^{t} f(r^2)r^2\mathrm{d}r\int_0^{t} f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^{t} f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2$$

则 $g'(t)=f(t^2)\int_0^{t} f(r^2)(t-r)^2\mathrm{d}r>0$，故 $g(t)$ 在$(0,+\infty)$内单调增加。因为 $g(t)$在 $t=0$ 处连续，所以当 $t>0$ 时，有 $g(t)>g(0)$。又 $g(0)=0$，故当 $t>0$ 时，$g(t)>0$，因此，当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$。

9-73　计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant\pi\}$。

【2003 数三】

【分析】

从被积函数与积分区域可以看出，应该利用极坐标进行计算。

【详解】

做极坐标变换，$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，有

$$\begin{aligned}I&=\mathrm{e}^{\pi}\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\mathrm{e}^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}\rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\sin\rho^2\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\mathrm{e}^{\pi}}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\rho^2}\sin\rho^2\mathrm{d}\rho^2\end{aligned}$$

令 $t=\rho^2$，则 $I=\pi\mathrm{e}^{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t$，记 $A=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}A&=-\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}\\&=-\left(\mathrm{e}^{-t}\sin t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\cos t\mathrm{d}t\right)\\&=-\int_0^{\pi}\cos t\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}\\&=-\left(\mathrm{e}^{-t}\cos t\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t\right)\\&=\mathrm{e}^{-\pi}+1-A\end{aligned}$$

因此 $A=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-\pi})$，$I=\frac{\pi\mathrm{e}^{\pi}}{2}(1+\mathrm{e}^{-\pi})=\frac{\pi}{2}(1+\mathrm{e}^{\pi})$。

9-74 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant0,y\geqslant0\}$，$[1+x^2+y^2]$表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数。计算二重积分 $\iint\limits_{D}xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。【2005 数一】

【分析】

首先应设法去掉取整函数符号，为此将积分区域分为两部分即可。

【详解】

令 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x^2+y^2<1,x\geqslant0,y\geqslant0\}$，

$$D_2=\{(x,y)\,|\,1\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant0,y\geqslant0\}$$

则

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{D_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_1^{2^{\frac{1}{4}}}\rho^3\mathrm{d}\rho\\&=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

9-75 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\leqslant1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\leqslant2\end{cases}$$

计算二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leqslant 2\}$。【2007 数二】

【详解】

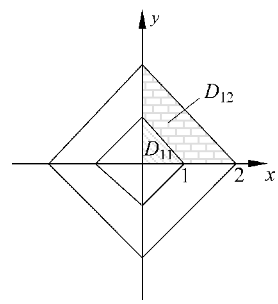


图 9.23　积分区域

D如图 9.23 所示，它关于x轴，y轴对称，又$f(x,y)$对x,y均为偶函数$\Rightarrow\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D_1$是$D$的第一象限部分。

由于被积函数分块表示，将D_1分成$D_1=D_{11}\cup D_{12}$，且$D_{11}:|x|+|y|\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$，$D_{12}:1\leqslant|x|+|y|\leqslant 2,x\geqslant 0,y\geqslant 0$。

于是$\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{11}}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_{12}}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，而

$$\iint\limits_{D_{11}}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x^2\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_{12}}f(x,y)\mathrm{d}\sigma&=\iint\limits_{D_{12}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma\xlongequal[\text{变换}]{\text{极坐标}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\frac{1}{r}r\,\mathrm{d}r\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}\theta\\&=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\qquad\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{12}+\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$

因此

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=4\left[\frac{1}{12}+\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)\right]$$

9-76　$f(x)$是周期为 2 的连续函数，(1)证明对任意实数t都有$\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

(2) 证明$g(x)=\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$是周期为 2 的周期函数。

【2008 数三、数四】

【详解】

(1) $\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_t^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^{t+2}f(x)\mathrm{d}x$

对于$\int_2^{t+2}f(x)\mathrm{d}x$，令$x=2+u$，则$\int_2^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^t f(2+u)\mathrm{d}u$

因为$f(x)$的周期为 2，所以$\int_2^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$

所以$\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_t^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

(2) $$g(x+2)=\int_0^{x+2}\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{x}\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t+\int_x^{x+2}\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$$
$$=g(x)+\int_x^{x+2}\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$$
$$=g(x)+2\int_x^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-\int_x^{x+2}\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

因为

$$\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_x^{x+2}\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_x^{x+2}\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$
$$=t\cdot\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s\Big|_x^{x+2}=2\cdot\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s$$
$$2\int_x^{x+2}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$g(x+2)=g(x)+2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s=g(x)$$

所以 $g(x)$是周期为 2 的周期函数。

9-77 椭球面 S_1 是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成的,圆锥面 S_2 是过点$(4,0)$且与椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成的。(Ⅰ)求 S_1 与 S_2 的方程;(Ⅱ)求 S_1 与 S_2 之间的立体体积。 【2009 数一】

【详解】

(Ⅰ) S_1 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2+z^2}{3}=1$,过点$(4,0)$与$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的切线为两条,由线绕 x 轴旋转体的几何意义,只需求一条即可,切线$\dfrac{xx_0}{4}+\dfrac{yy_0}{3}=1$ 过点$(4,0)$,斜率为 $k=-\dfrac{3x_0}{4y_0}$,得到切点为 $x_0=1,y_0=\pm\dfrac{3}{2},k=\pm\dfrac{1}{2}$,取一条切线 $y=\dfrac{1}{2}x-2$。

得到 S_2 的方程为 $y^2+z^2=\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)^2$。

(Ⅱ) 记 $y_1=\dfrac{1}{2}x-2,y_2=\sqrt{3\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)}$,则

$$V=V_1-V_2=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot3-\int_1^2\pi y_1^2\mathrm{d}x=\frac{9\pi}{4}-\pi\int_1^2 3\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{9\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}=\pi$$

9-78 已知函数 $f(x,y)$具有二阶连续偏导数,且 $f(1,y)=0,f(x,1)=0$, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,计算二重积分 $I=$

$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。　【2011 数一、数二】

【分析】

本题考查二重积分的计算。计算中主要利用分部积分法将需要计算的积分式化为已知的积分式，出题形式较为新颖，有一定的难度。

【详解】

将二重积分$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$转化为累次积分可得

$$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x$$

首先考虑$\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x$，注意这里是把变量 y 看做常数的，故有

$$\begin{aligned}\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x&=y\int_0^1 x\mathrm{d}f'_y(x,y)=xyf'_y(x,y)\big|_0^1-\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}x\\&=yf'_y(1,y)-\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由 $f(1,y)=f(x,1)=0$ 易知 $f'_y(1,y)=f'_x(x,1)=0$。故$\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}x$。

$$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}x$$

对该积分交换积分次序可得

$$-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}y$$

再考虑积分$\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}y$，注意这里是把变量 x 看做常数的，故有

$$\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{d}f(x,y)=yf(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$$

因此

$$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$$

9-79　计算二重积分$\iint\limits_D \mathrm{e}^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由曲线 $y=\sqrt{x}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴所围区域。　【2012 数三】

【分析】

本题考查二重积分的基本计算。

【详解】

由题意知，区域 $D=\left\{(x,y)\mid 0<x\leqslant 1,\sqrt{x}<y<\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right\}$，如图 9.24 所示，所以

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\mathrm{e}^x xy\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 e^x x \left(\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} dx$$
$$= \int_0^1 e^x x \left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 e^x dx - \int_0^1 e^x x^2 dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}$$

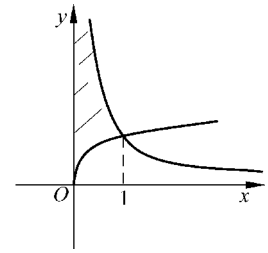


图 9.24 积分区域

9-80 设直线 L 过 $A(1,0,0)$，$B(0,1,1)$两点，将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ，Σ 与平面 $z=0$，$z=2$ 所围成的立体为 Ω。(1)求曲面 Σ 的方程；(2)求 Ω 的形心坐标。 【2013 数一】

【分析】

本题考查空间解析几何中关于旋转曲面的方程问题和三重积分的应用中关于求形心坐标的问题。

【详解】

(1) $\overrightarrow{AB}=\{-1,1,1\}$，曲线 L：$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$

$\forall M(x,y,z)\in\Sigma$，对应于 L 上的 $M_0(x_0,y_0,z)$，则

$$x^2+y^2=x_0^2+y_0^2,\text{由}\begin{cases}x_0=1-z\\ y_0=z\end{cases}\text{得}\Sigma\text{为}x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$$

即旋转曲面方程为 Σ：$x^2+y^2=2z^2-2z+1$。

(2) 由对称性和形心坐标公式，显然 $\bar{x}=0$，$\bar{y}=0$，$\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\,dv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}$

$$\iiint\limits_{\Omega} dv=\int_0^2 dz\iint\limits_{2z^2-2z+1} dx dy=\pi\int_0^2(2z^2-2z+1)dz=\pi\left(\frac{16}{3}-4+2\right)=\frac{10}{3}\pi$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dv=\int_0^2 z\,dz\iint\limits_{2z^2-2z+1} dx dy=\pi\int_0^2(2z^3-2z^2+z)dz=\pi\left(8-\frac{16}{3}+2\right)=\frac{14}{3}\pi$$

$\therefore\ \bar{z}=\dfrac{7}{5}$

形心坐标为$\left(0,0,\dfrac{7}{5}\right)$。

9.5 应用实训

重积分的应用十分广泛，在学习重积分基本理论的基础上，将重积分的应用进行推广，给出它在薄片边长、薄片质量、水桶容量、薄片重心、转动惯量、火山喷发高度、飓风能量、质点引力、卫星覆盖和血液循环等方面的应用。对待每个知识点，可以从不同的角度去理解，并与实际生活结合，真正做到理论与实际相结合。

通过本节的学习，使读者具备三方面能力。掌握重积分的几何和物理意义，并能应用于实际计算；对于重积分的应用领域和常见应用问题有全面的了解，并能利用重积分解决应用问题；具备空间想象能力，娴熟的重积分计算技巧和将理论转化为应用的能力。

9-81　薄片边长问题

在均匀半圆形薄片的直径上，要接上一个一边与直径等长的均匀矩形薄片，为了使整个均匀薄片的重心恰好落在圆心上，问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少？

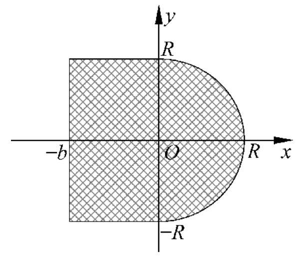


图　9.25

【解】　设旁接矩形的宽度为 b，建立坐标系，如图 9.25 所示，由于要求拼接的平面块形的重心在圆心（坐标原点），故平面块对 y 轴的静力矩应为 0，即有关系式 $M_y=0$。

$$\begin{aligned}M_y&=\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}x\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}x\,\mathrm{d}\sigma\\&=\int_{-b}^{0}\mathrm{d}x\int_{-R}^{R}x\,\mathrm{d}y+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r\cos\varphi\cdot r\mathrm{d}r\\&=-2R\cdot\frac{(-b)^2}{2}+\frac{R^3}{3}\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\&=-Rb^2+\frac{2}{3}R^3\end{aligned}$$

由此推出 $b=\sqrt{\dfrac{2}{3}}R$。

9-82　薄片质量问题

设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$，$y=x$ 和 x 轴所围成，它的面密度 $\rho(x,y)=x^2+y^2$，求该薄片的质量。

【解】　设该薄片的质量为 M，则质量元素 $\mathrm{d}M=\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$

$$\begin{aligned}M&=\iint\limits_D\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma\\&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2-y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}+xy^2\right)\Big|_y^{2-y}\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left[\frac{(2-y)^3}{3}+2y^2-\frac{7}{3}y^3\right]\mathrm{d}y\\&=\left[-\frac{(2-y)^4}{12}+\frac{2}{3}y^3-\frac{7}{12}y^4\right]\Big|_0^1\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

9-83　水桶容量问题

某仪器上有一只圆柱形的无盖水桶，桶高 6cm，半径为 1cm。在桶壁上钻有两个小孔用于安装支架，使水桶可以自由倾斜。两个小孔距桶底 2cm，且两孔连线恰为直径，水可以从两个小孔向外流出。当水桶以不同角度倾斜放置且没有水漏出时，这只水桶最多可

装多少水？

【解】 如图 9.26 所示建立直角坐标系。设 $M(0,1,t)$ 为圆柱母线 CD 上任意一点，两孔位置分别为 $A(1,0,2)$，$B(-1,0,2)$。

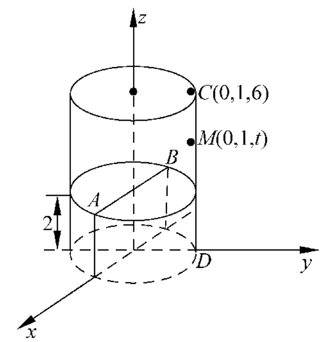


图 9.26 建立直角坐标系

设当水桶倾斜时，水平面恰好通过 A，B，M 三点，此平面的方程为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & t-2 \end{vmatrix} = 0$$

整理可得 $z=(t-2)y+2$，由 $z\geqslant 0$ 知 $y\geqslant\dfrac{-2}{t-2}$。

水桶容量为圆柱位于水平面下方的体积，故

$$\begin{aligned} V(t) &= \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1 \\ y\geqslant -\frac{2}{t-2}}} [(t-2)y+2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\frac{2}{t-2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}[(t-2)y+2]\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1}[(t-2)y+2]\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= 2t\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1}y\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y+4\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1}(1-y)\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= 2\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1}y\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y \\ &\quad -2t\left(\frac{-2}{t-2}\right)\sqrt{1-\frac{4}{(t-2)^2}}\cdot\frac{2}{(t-2)^2} \\ &\quad -4\left(1+\frac{2}{t-2}\right)\sqrt{1-\frac{4}{(t-2)^2}}\cdot\frac{2}{(t-2)^2} \\ &= 2\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1}y\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{2}{3}(1-y^2)^{3/2}\Big|_{-\frac{2}{t-2}}^{1} \\ &= \frac{2}{3}\left[1-\frac{4}{(t-2)^2}\right]^{3/2} \\ &= \frac{2}{3}\,\frac{[t(t-4)]^{3/2}}{(t-2)^3}\ (2\leqslant t\leqslant 6) \end{aligned}$$

由于 $2<t<4$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$，$4<t\leqslant 6$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}>0$，可知在驻点 $t=4$ 处，$V(t)$ 取得极小值，因此最大值只能在 $t=2$ 或 $t=6$ 处取得。经过计算可知

$$V(2)=\pi r^2 h=2\pi$$

$$V(6)=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ y\geqslant \frac{1}{2}}}(4y+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{3}\pi$$

所以，水桶的最大容水量 $V_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{3}\pi$。

9-84 薄片重心问题

设均匀薄片所占的闭区域 D 由 $y=\sqrt{2px}$，$x=x_0$，$y=0$ 所围成，求此薄片的重心。

【解】 不妨设该薄片的面密度为 1，则该薄片的质量

$$M=\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{x_0}\sqrt{2px}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sqrt{2p}x_0^{\frac{3}{2}}$$

静矩 $M_x=\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}y\mathrm{d}y=\frac{p}{2}x_0^2$

$$M_y=\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{x_0}x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}1\mathrm{d}y=\frac{2}{5}\sqrt{2p}x_0^{\frac{5}{2}}$$

重心坐标 $\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{3}{8}\sqrt{2px_0}$，$\bar{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{3}{5}x_0$。

即重心在点 $\left(\frac{3}{8}\sqrt{2px_0},\frac{3}{5}x_0\right)$。

9-85 转动惯量问题

设半径为 1 的半圆形薄片上各点处的面密度等于该点到圆心的距离，求此半圆的重心坐标及关于 x 轴(直径边)的转动惯量。

【解】 依题意，面密度 $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$。由对称性知，重心必在 y 轴，即 $\bar{x}=0$，故只需计算 $\bar{y}$。

$$M=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}$$

$$M_y=\iint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}$$

所以，$\bar{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{3}{2}$，即重心坐标为 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$。

对于 x 轴的转动惯量为

$$I_x=\iint\limits_D y^2\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^4\sin^2\theta\mathrm{d}r=\frac{\pi}{10}$$

9-86 火山喷发高度问题

某火山的形状可以用曲面 $z=h\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4h}}$ $(z>0)$来表示。在一次喷发后，有体积为 V 的熔岩黏附在山上，使它具有和原来一样的形状，求火山高度变化的百分比。

【解】 以 V_0 记火山喷发前的体积，V_1 为喷发后的体积，h_1 为喷发后火山的高度。

于是 $V=V_1-V_0$，要求的是$\dfrac{h_1-h}{h}$。先计算火山喷发前的火山体积$V_0=\iint\limits_D h\cdot e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4h}}dxdy$，由于火山的底很大，把它看成无限大，用极坐标计算，有

$$\begin{aligned}V_0&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}h\cdot e^{-\frac{r}{4h}}r\,dr\\&=2\pi h\cdot(-4h)\left[r\cdot e^{-\frac{r}{4h}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r}{4h}}dr\right]\\&=8\pi h^2\cdot(-4h)e^{-\frac{r}{4h}}\Big|_0^{+\infty}=32\pi h^3\end{aligned}$$

于是 $V_1=32\pi h^3$，$V=32\pi(h_1^3-h^3)$

$$h_1=\left(h^3+\frac{V}{32\pi}\right)^{\frac{1}{3}},\quad \frac{h_1-h}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{V}{32\pi}+h^3\right)^{\frac{1}{3}}-1$$

9-87 飓风能量问题

在一个简化的飓风模型中，假设速度只取单纯的圆周方向，其大小为$V(r,z)=\Omega re^{-\frac{z}{h}-\frac{r}{a}}$，其中$r,z$是柱坐标的两个坐标变量，$\Omega,h,a$为常量。以海平面飓风中心处作为坐标原点，如果大气密度$\rho(z)=\rho_0e^{-\frac{z}{h}}$，求运动的全部动能以及在哪一位置速度具有最大值？

【解】 求动能E。$\because E=\dfrac{1}{2}mv^2$，微元素

$$dE=\frac{1}{2}v^2\cdot\Delta m=\frac{1}{2}v^2\cdot\rho\cdot dV$$

故

$$E=\frac{1}{2}\iiint\limits_{(v)}\rho_0e^{-\frac{z}{h}}\cdot(\Omega re^{-\frac{z}{h}-\frac{r}{a}})^2dV$$

因为飓风活动空间很大，在选用柱坐标计算中z由$0\to+\infty$，r由$0\to+\infty$。

$$E=\frac{1}{2}\rho_0\Omega^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}r^2e^{-\frac{2r}{a}}r\,dr\int_0^{+\infty}e^{-\frac{3z}{h}}dz$$

其中$\int_0^{+\infty}r^3e^{\frac{2r}{a}}dr$用分部积分法算得为$\dfrac{3}{8}a^4$，

$$\int_0^{+\infty}e^{-\frac{3z}{h}}dz=-\frac{h}{3}\cdot e^{-\frac{3z}{h}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{h}{3}$$

最后有

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}\rho_0\Omega^2\cdot2\pi\cdot\frac{3}{8}a^4\cdot\frac{h}{3}\\&=\frac{h\rho_0\pi}{8}\Omega^2a^4\end{aligned}$$

下面计算何处速度最大。

$$v(r,z)=\Omega re^{-\frac{z}{h}-\frac{r}{a}}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial z}=\Omega r\left(-\dfrac{1}{h}\right)e^{-\frac{z}{h}-\frac{r}{a}}=0\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial r}=\Omega\left[e^{-\frac{z}{h}-\frac{r}{a}}+r\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)\cdot e^{-\frac{z}{h}-\frac{r}{a}}\right]=0\end{cases}$$

由方程组的第一个方程得 $r=0$，显然，当 $r=0$ 时 $v=\Omega r\mathrm{e}^{-\frac{z}{h}-\frac{r}{a}}=0$ 不是最大值(实际上是最小值)，舍去。由方程组的第二个方程解得 $r=a$。此时 $v(a,z)=\Omega a\cdot\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{z}{h}}$，它是 z 的单调下降函数。故 $r=a,z=0$ 处速度最大，也即海平面上风眼边缘边速度最大。

9-88　质点引力问题

设有半径为 R 的均匀球体($\mu=1$)，球外一点 P 放置一个单位质点，试求球体对该质点的引力。

【解】　设球心为原点，建立直角坐标系，使 P 点在 z 轴上，坐标为$(0,0,h)(h>R)$，由对称性知 $F_x=F_y=0$，

$$
\begin{aligned}
F_z&=\iiint\limits_V\frac{K\mu(z-h)}{[x^2+y+(z-h)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}V\\
&=\iiint\limits_V\frac{K\mu(r\cos\varphi-h)}{(r^2+h^2-2hr\cos\varphi)^{3/2}}\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\
&=K\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\frac{(r\cos\varphi-h)}{(r^2+h^2-2hr\cos\varphi)^{3/2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\
&=-\frac{K\mu\pi}{h}\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{(r^2+h^2-2hr\cos\varphi)^{1/2}}+\frac{h^2-r^2}{(r^2+h^2-2hr\cos\varphi)^{3/2}}\right]\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\
&=-\frac{K\mu\pi}{2h^2}\int_0^R r\left[2(r^2+h^2-2hr\cos\varphi)^{1/2}-\frac{2(h^2-r^2)}{(r^2+h^2-2hr\cos\varphi)^{1/2}}\right]_0^{\pi}\mathrm{d}r\\
&=-\frac{K\mu\pi}{2h^2}\int_0^R 8r^2\mathrm{d}r=-\frac{K\mu}{h^2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=-\frac{KM}{h^2}
\end{aligned}
$$

故所求引力 $\vec{F}=-\dfrac{KM}{h^2}$，其中 M 为球的质量，K 为引力常数，上式负号表示引力的方向与轴的正方向相反。

9-89　卫星覆盖问题

设有一颗地球同步轨道通信卫星，距地面的高度为 $h=36\,000\mathrm{km}$，运行的角速度与地球自转的角速度相同。试计算该通信卫星的覆盖面积与地球表面积的比值(地球半径 $R=6400\mathrm{km}$)。

【解】　取地心为坐标原点，地心到通信卫星中心的连线为 z 轴，建立坐标系。

通信卫星覆盖的曲面 Σ 是上半球面被半顶角为 α 的圆锥面所截得的部分。Σ 的方程为

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad x^2+y^2\leqslant R^2\sin^2\alpha$$

于是通信卫星的覆盖面积为

$$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

式中，$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\sin^2\alpha\}$是曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域。

利用极坐标，得

$$A=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\sin\alpha}\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho=2\pi R\int_0^{R\sin\alpha}\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=2\pi R^2(1-\cos\alpha)$$

由于 $\cos\alpha=\dfrac{R}{R+h}$，代入上式得

$$A = 2\pi R^2\left(1-\frac{R}{R+h}\right)= 2\pi R^2\ \frac{h}{R+h}$$

由此，得这颗通信卫星的覆盖面积与地球表面积之比为

$$\frac{A}{4\pi R^2}=\frac{h}{2(R+h)}=\frac{36\times 10^6}{2(36+6.4)\times 10^6}\approx 42.5\%$$

由以上结果可知，卫星覆盖了全球$\frac{1}{3}$以上的面积，故使用三颗相隔$\frac{2}{3}\pi$角度的通信卫星就可以覆盖几乎地球全部表面。

9-90 血液循环问题

泊萧叶(Poiseuille)公式即单位时间内的血流量正比于血管半径的四次方。下面我们用重积分更自然地导出泊萧叶公式。

【解】 假设血管有一个半径为R(单位为 cm)的圆截面，如图 9.27 所示。把注意力放在这个圆截面上，并测量 1s 内流过此截面的血流量。圆截面上P点的位置由r(单位为 cm)和θ决定，可以写成$P=(r,\theta)$，$0\leqslant r\leqslant R$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$。

用一组以极点为圆心的同心圆$r=$常数和一组从极点出发的射线$\theta=$常数，将血管的圆截面分成很多小的区域，如图 9.28 所示。每一个小区域可被近似地看成长为$\mathrm{d}r$、宽为$r\mathrm{d}\theta$的矩形，每个小区域的面积$\mathrm{d}A=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$。根据牛顿片流公式，血液的流速为

$$V=\frac{P_1-P_2}{4\eta L}(R^2-r^2)$$

因此，1s 内通过面积为$\mathrm{d}A$的小区域的血流量为

$$V\mathrm{d}A=\frac{P_1-P_2}{4\eta L}(R^2-r^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

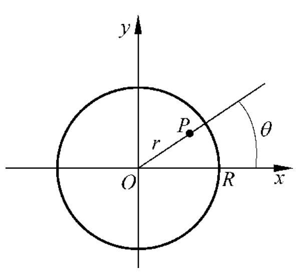


图 9.27 半径为R的血管的圆截面

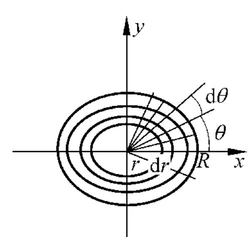


图 9.28 把截面圆分成许多小的区域

这里把通过面积为$\mathrm{d}A$的小区域的血的流速V看成一个常数。那么在 1s 内流过圆截面的血的总流量Q就是所有这些小的流量$V\mathrm{d}A$之和。

$$\begin{aligned}Q=\iint_S V\mathrm{d}A&=\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant R\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}}\frac{P_1-P_2}{4\eta L}(R^2-r^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\frac{P_1-P_2}{4\eta L}\int_0^{2\pi}\int_0^R(R^2r-r^3)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\frac{P_1-P_2}{4\eta L}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}R^2r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^R\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$= \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}R^4\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{8\eta L}R^4$$

这就是泊萧叶公式。

需要指出的是，泊萧叶公式在血液循环力学中的应用是一种理想化的近似。泊萧叶公式一般应用于小血管，而且通常是用于定性的描述。

思考题

1．设容器壁上液体表面下深为 h 的位置 P 处，有一个孔口，它的面积为 q，那么根据托里斯利（Torricelli）原理，液体在 P 处的水平流速 v 就用公式 $v=\sqrt{2gh}$ 来表示，通过灌注液体的办法，可以使 h 保持不变，那么在孔口处流速为常数。于是单位时间内通过 q 流出的液体量（密度设为 1）等于 qv，其中 v 是孔口某点 P 处的平均速度。今设孔口是铅直于底且是 xOy 面上的域（D）。如何求单位时间内通过孔口 D 的总流量 Q？

2．一个由曲面 $x^2+y^2=z^2$ 与 $z=H(H>0)$ 围成的漏斗盛满液体，斗内任一点 $M(x,y,z)$ 处液体的密度为 $\frac{1}{a^2+x^2+y^2}(a>0)$，求斗中液体的质量（m）。

3．某均匀物体（密度 ρ 为常量）占有的闭区域 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0$，$|x|=a$，$|y|=a$，所围成，

（1）求物体的重心；

（2）求物体关于 z 轴的转动惯量。

4．密度均匀的平面薄片，由曲线 $y=x^2$，$x=0$，$y=t>0$，$(x>\theta, t$ 可变）所围成，求该可变面积平面薄片的重心轨迹。

5．试证明立方体绕其对角线转动时的回转半径为 $k=\frac{d}{3\sqrt{2}}$，式中 d 为对角线的长度。

数学实验八

【实验目的】

1．进一步学习求积分的命令 Integrate，学会用画图的手段化重积分为累次积分。

2．了解 Mathematica 软件在重积分运算的重要作用。

【基本语句】

1．Integrate[f(x,y),{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]

功能　计算二元函数 $f(x,y)$ 在区域上的二重积分。

2．Integrate[f(x,y,z),{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax},{z,zmin,zmax}]

功能　计算三元函数 $f(x,y)$ 在区域上的二重积分。

【实验内容】

9-91　计算 $\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: 0\leqslant x\leqslant 1,\ 2x\leqslant y\leqslant x^2+1$。

Mathematica 语句

```
Integrate[x * y^2,{x,0,1},{y,2 * x,x^2 + 1}]
```

运行结果

$$\frac{11}{120}$$

9-92 计算$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant 1$。(由积分区域和被积函数的结构可知,此积分用极坐标计算简单,从而可把二重积分化为二次积分。)

Mathematica 语句

```
x = r * Cos[t];y = r * Sin[t];z = E^( - x^2 - y^2)
Integrate[z * r,{r,0,1},{t,0,2 * Pi}]
```

运行结果

$$\pi-\frac{\pi}{e}$$

9-93 计算抛物面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在平面 $z=1$ 下方的面积。(先画图,由积分区域和被积函数的结构可知,此积分用极坐标计算简单,从而可把二重积分化为二次积分)

Mathematica 语句

```
c = ParametricPlot3D[{u * Sin[v],u * Cos[v],u},{u,0,1.2},{v,0,2 * Pi},AxesLabel ->{x,y,z}];
d = Plot3D[1,{x, - 1,1},{y, - 1,1},AxesLabel ->{x,y,z}];
Show[c,d,AxesLabel ->{Style[x,15,Bold],Style[y,15,Bold],Style[z,15,Bold]}]
Eliminate[{z == Sqrt[x^2 + y^2],z == 1},z]
z = Sqrt[x^2 + y^2];
f = Sqrt[1 + D[z,x]^2 + D[z,y]^2]
x = r * Cos[t];
y = r * Sin[t];
s = Integrate[f * r,{r,0,1},{t,0,2 * Pi}]
```

运行结果

$$1-y^2==x^2$$

$$\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}$$

$$\sqrt{2}\pi$$

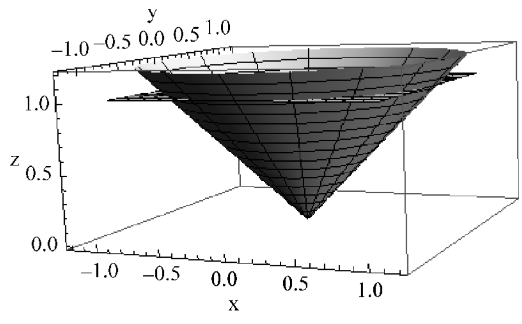


图 9.29

9-94　计算$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$由柱面$x^2+y^2-2x=0$，平面$z=0$，$z=a>0$，$y\geqslant 0$所围成。（先画图，再把三重积分化为三次积分求解。）

Mathematica 语句

```
g1 = ParametricPlot3D[{1 + Cos[u],Sin[u],v},{u,0,2Pi},{v, - 2,2}];
g2 = Plot3D[1.5,{x, - 0.5,2.5},{y, - 1,1}];
g3 = Plot3D[0,{x, - 0.5,2.5},{y, - 1,1}];
Show[g1,g2,g3,AxesLabel - >{Style[x,15,Bold],Style[y,15,Bold],Style[z,15,Bold]}]
Integrate[z * Sqrt[x^2 + y^2],{x,0,2},{y,0,Sqrt[2x - x^2]},{z,0,a}]
```

运行结果

$\frac{8a^2}{9}$

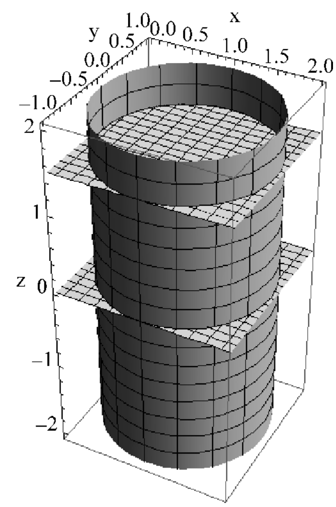


图　9.30

【练习】

计算下列三重积分的值。

1. $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V$，其中$\Omega$：$x^2+y^2+z^2\leqslant 4$。

2. $I=\iiint\limits_{\Omega}z\ln(1+x+y+z)\mathrm{d}V$，其中$\Omega$：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$0\leqslant z\leqslant 1$。