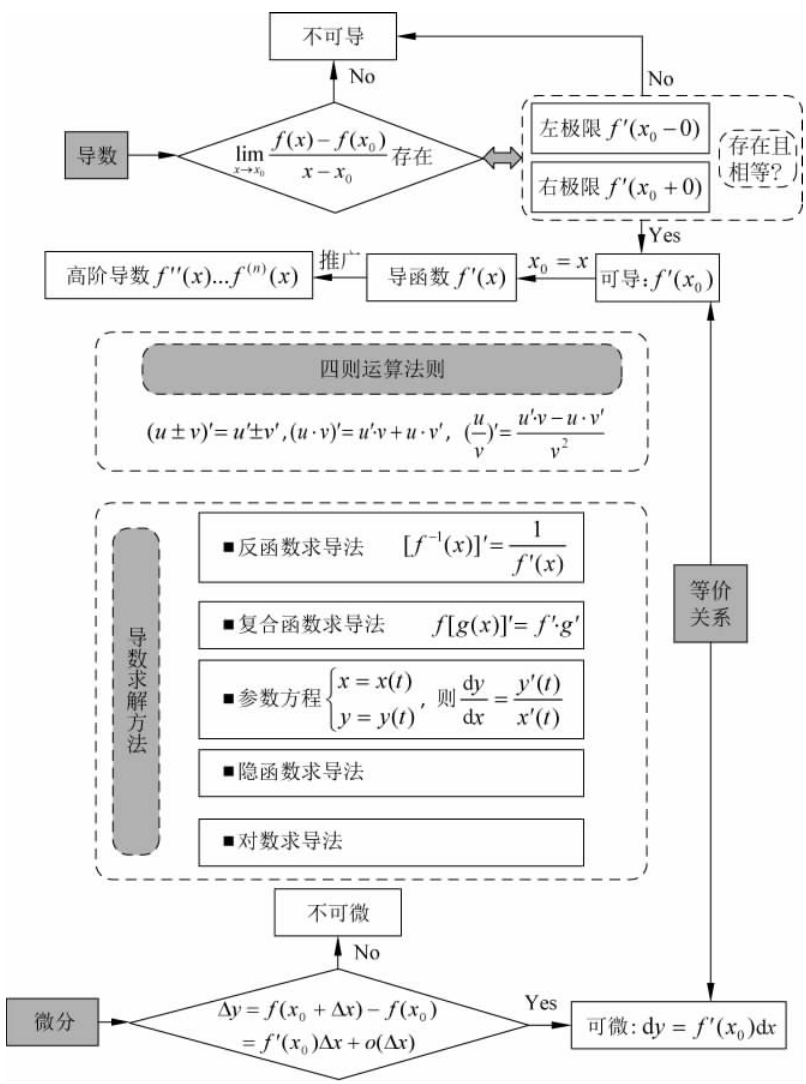
第3章

导数与微分

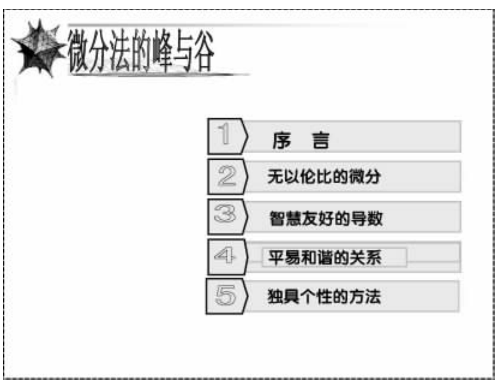
3.1 知识网络图

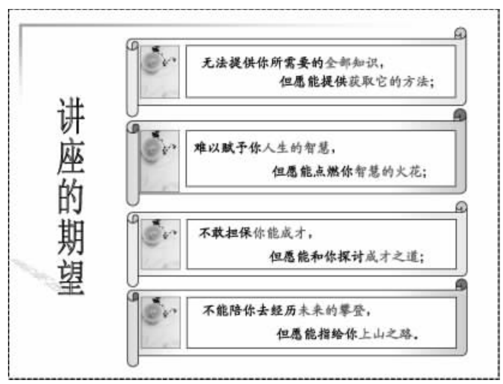


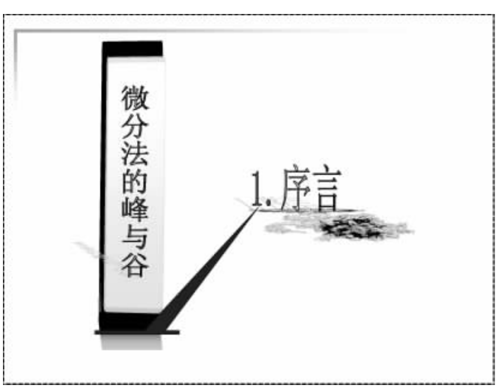
3.2　精品课堂


精品课堂
微分法的峰与谷


讲座的期望？


微分法的峰与谷
1 序　言
2 无以伦比的微分
3 智慧友好的导数
4 平易和谐的关系
5 独具个性的方法


讲座的期望
无法提供你所需要的全部知识，
但愿能提供获取它的方法；
难以赋予你人生的智慧，
但愿能点燃你智慧的火花；
不敢担保你能成才，
但愿能和你探讨成才之道；
不能陪你去经历未来的攀登，
但愿能指给你上山之路。


微分法的峰与谷
1.序言


数学是科学的皇后。 德国数学家：高斯
学习任何知识必须先学数学。数学在科学的等级中是最高级的，无论对普通教育还是专门教育，数学教育仍是任何教育的起点。
——法国哲学家：孔德

思考与联想

导数有哪些应用?

微分定义的简化

$y = f(x)$

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ $\xrightarrow{\text{可表为}}$ $A\Delta x + o(\Delta x)$

$\xrightarrow{\text{记作}}$ $\mathrm{d}y = A\Delta x$

$\Delta y - \mathrm{d}y = o(\Delta x)$

微分法的峰与谷

2.无与伦比的微分

微分的卓越贡献(1675)

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = \mathrm{d}y + o(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\Delta x}{\mathrm{d}y} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{f'(x)\Delta x} = 1$$

$\Delta y \sim \mathrm{d}y \qquad \Delta x \to 0$

$\Delta y \approx \mathrm{d}y \qquad |\Delta x| << 1$

- 微积分的发明确实使数学家们过去的劳动黯然失色。
- 牛顿、莱布尼茨在微积分方面的全部工作都是以微分作为基点的。

微分的诞生

微积分:伟大神秘,撼人心灵!

- 1675年,莱布尼茨首次引入“微分”和 $\mathrm{d}x$。

微积分学的创立,极大地推动了数学的发展,过去很多初等数学束手无策的问题,运用微积分,往往都能迎刃而解,显示出微积分学的非凡威力。

微积分

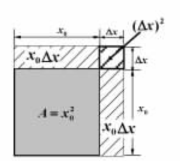
微分的通俗理解

$f(x) = x^2$

$\Delta f(x_0) = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2$

$= 2x_0\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$

$= 2x_0\cdot\Delta x + o(\Delta x)$



$f(x) = x^3$

$\Delta f(x_0) = (x_0+\Delta x)^3 - x_0^3$

$= 3x_0^2\cdot\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

$= 3x_0^2\Delta x + o(\Delta x)$

微分的定义

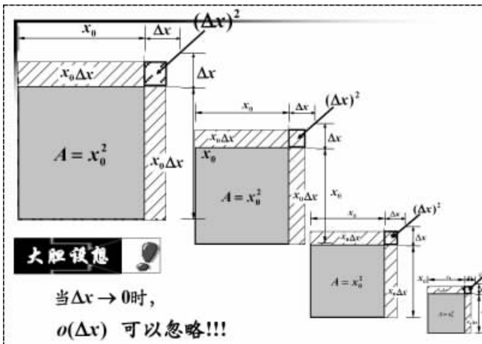
定义:若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的增量可表示为

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微,而 $A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的微分,记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f$,即

$$\mathrm{d}y = A\Delta x$$

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$



大胆设想

当 $\Delta x \to 0$ 时,

$o(\Delta x)$ 可以忽略!!!

微分概念的猜想

$y=f(x)$

$\Delta y=f(x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$

$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$

假如绝不让你负任何法律责任，你敢不敢猜想甚至断言二元函数的微分应当如何定义？

$z=f(x,y)$

$\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)$

$=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$

$\mathrm{d}z=f'_x(x)\mathrm{d}x+f'_y(x)\mathrm{d}y$

微分的卓越贡献

当 $x\to 0$ 时	当 $\lvert x\rvert \ll 1$ 时
$\sin x\sim x$	$\sin x\approx x$
$\arcsin x\sim x$	$\arcsin x\approx x$
$\tan x\sim x$	$\tan x\approx x$
$\arctan x\sim x$	$\arctan x\approx x$
$\ln(1+x)\sim x$	$\ln(1+x)\approx x$
$e^x-1\sim x$	$e^x-1\approx x$
$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$	$1-\cos x\approx\frac{1}{2}x^2$
$\sqrt[n]{x+1}-1\sim\frac{1}{n}x$	$\sqrt[n]{x+1}-1\approx\frac{1}{n}x$

请思考：两者的区别在哪里？

猜想

$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$

$u=f(x,y,z)$

$\Delta u=f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)$

$=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2})$

$\mathrm{d}u=f'_x\mathrm{d}x+f'_y\mathrm{d}y+f'_z\mathrm{d}z$

微分的卓越贡献

$f(x)-f(0)\approx f'(0)x$

$f(x)\approx f(0)+f'(0)x$ 当函数1阶可导时

$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2$ 当函数2阶可导时

$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$

当函数3阶可导时

$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$

当函数4阶可导时

微分的卓越贡献

微分在近似计算中的应用

$\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x$

当 $\lvert\Delta x\rvert$ 很小时，

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$

令 $x=x_0+\Delta x$

$f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)(x-x_0)$

$\boxed{f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}$

当 $x_0=0$，$\lvert x\rvert$ 很小时，

$\boxed{f(x)\approx f(0)+f'(0)x}$

思考与联想

微分有哪些应用？

1. 求函数的增量的近似值

   $\Delta y\approx \mathrm{d}y=f'(x_0)(x-x_0)$

2. 求函数的近似值

   $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

3. 利用一阶微分形式不变性求导数

微分的卓越贡献

常用近似公式（$\lvert x\rvert$ 很小）	常用等价无穷小公式 $x\to 0$
(1) $(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x$	(1) $(1+x)^\alpha\sim 1+\alpha x$
(2) $\sin x\approx x$	(2) $\sin x\sim x$
(3) $e^x\approx 1+x$	(3) $e^x\sim 1+x$
(4) $\tan x\approx x$	(4) $\tan x\sim x$
(5) $\ln(1+x)\approx x$	(5) $\ln(1+x)\sim x$

请思考：两者的区别在哪里？

已知 $x^2+y^2=1$，求 y'。

解法1 $2x+2yy'=0,\quad y'=-\frac{x}{y}$

解法2 令 $F=x^2+y^2-1$，

$y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x}{y}$

解法3 $2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=0\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$

$2y\mathrm{d}y=-2x\mathrm{d}x$

微分的卓越贡献

$f(x)-f(0)=f'(0)x+o(x)$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)$ 当函数1阶可导时

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$ 当函数2阶可导时

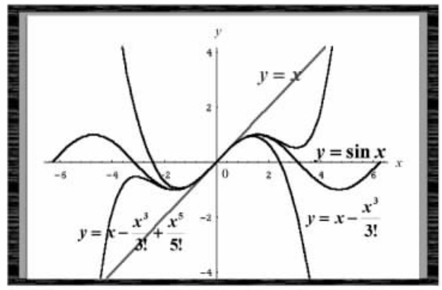
$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+o(x^3)$

当函数3阶可导时

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+o(x^4)$

当函数4阶可导时

1. Taylor 公式在近似计算中的应用



微分的卓越贡献

$f(x)-f(0)=f'(0)x+o(x)$

当函数任意阶可导时

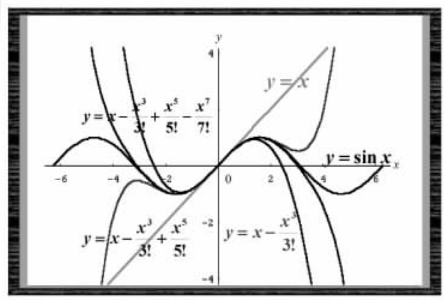
$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dots$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dots$

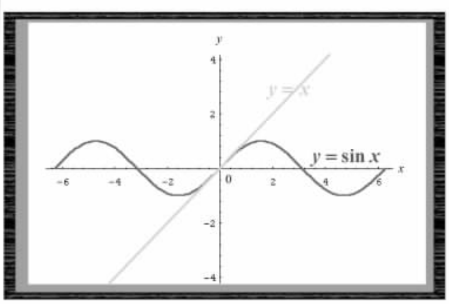
$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\dots$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\dots$

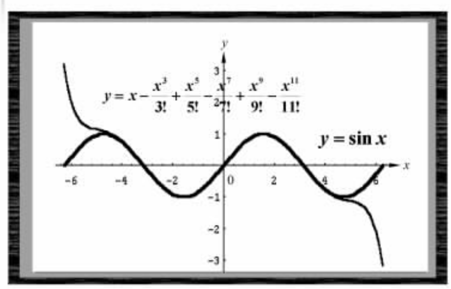
1. Taylor 公式在近似计算中的应用



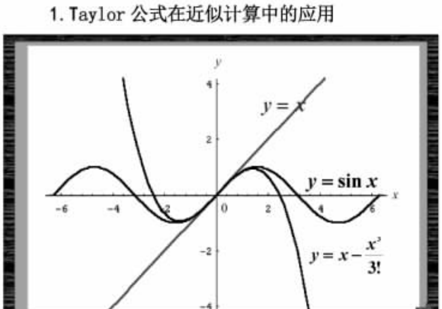
1. Taylor 公式在近似计算中的应用



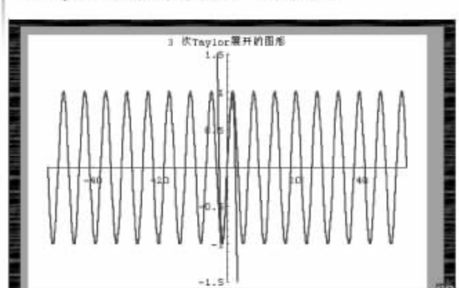
1. Taylor 公式在近似计算中的应用



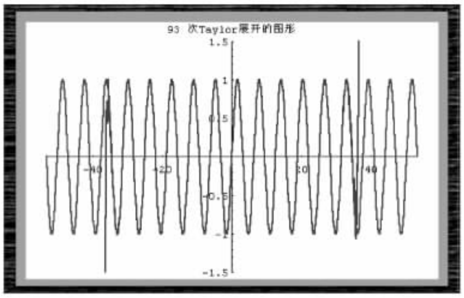
1. Taylor 公式在近似计算中的应用



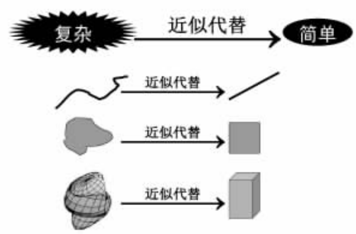
2. Taylor 公式的数学思想——局部逼近



2. Taylor 公式的数学思想——局部逼近



微分的思想实质



名家话微分

当直线和曲线的数学可以说已经山穷水尽的时候，一种新的几乎无穷无尽的道路，由那些把曲线视为直线（微分三角形）并把直线视为曲线（曲率无限小的一次曲线）的数学开拓出来了。

——恩格斯

(1)开区间可导

$f(x)$在(a,b)可导 $\Leftrightarrow \forall x_0 \in (a,b), f'(x_0)$存在

(2)闭区间可导

$f(x)$在$[a,b]$可导 $\Leftrightarrow \forall x_0 \in (a,b), f'(x_0)$存在 $+ f'_+(a)\exists$，且 $f'_-(b)\exists$

(3)高阶导数

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=x_0}$$

名家话微分

人类所取得的理论成就还没有什么像17世纪下半叶微积分的发现那样使人类整个精神达到最高的胜利。

——恩格斯

微分法的峰与谷

3. 智慧友好的导数

名家话微分

微积分是近代数学中最伟大的成就，对它的重要性无论做怎样的估计都不会过分。

——冯.诺依曼

导数的诞生

- 1629年，费尔马构造了 $f(a+E)-f(a)$。
- 1643年，牛顿变化率为“流数”，引出 $\dot{x}$，$\dot{y}$。
- 1650年，莱布尼茨提出“微商”的概念。
- 1750年，达朗贝尔引出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$。
- 1797年，拉格朗日首次提出“导数”和 $f'(x)$。

导数概念的内涵

1 导数定义的形式

(1) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

(2) $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

(3) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

追根溯源

设 $f'(x_0)$ 存在,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0+nh)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+mh)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0+nh)-f(x_0)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+nh)-f(x_0)}{h}$$

$$=mf'(x_0)-nf'(x_0)$$

(4) 右导数 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

左导数 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$f'(x_0)$存在 $\Leftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

注意

$f'_+(x_0)\neq f'_-(x_0)$时 $\Rightarrow f'(x_0)$一定不存在

$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$时,$f(x_0)$依然有可能存在

例1 设 $f'(x_0)$ 存在,求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h+h^2)-f(x_0)}{h}。$$

解

原式$=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x_0+h+h^2)-f(x_0)}{h+h^2}\cdot\dfrac{h+h^2}{h}\right]=f'(x_0)$

观察与思考

设$f(x)$在x_0处可导,且$f'(x_0)=4$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\frac{\Delta x}{2})-f(x_0-\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}=?$$

提示 $f'(x_0)=4$

2 导数定义的内涵

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta}$

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$f'(0)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{f(\Delta)-f(0)}{\Delta}$ "$\dfrac{0}{0}$"型不定式

$f'(0)=\lim\limits_{\Theta\to 0}\dfrac{f(\Theta)-f(0)}{\Theta}$ $\Delta\to 0$

$f'(0)=\lim\limits_{\Omega\to 0}\dfrac{f(\Omega)-f(0)}{\Omega}$

提供了一类求极限的方法

例2 设$f'(0)$存在,$f(x)$是奇函数,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^{x^2}-1)}{x\tan x}$。

解 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2}-1)=0$ $f(x)$是奇函数,故 $f(0)=0$。

联想到凑导数的定义式

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^{x^2}-1)-f(0)}{e^{x^2}-1}\times\dfrac{e^{x^2}-1}{x\tan x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^{x^2}-1)-f(0)}{e^{x^2}-1}\times\dfrac{x^2}{x^2}=f'(0)$

? 能否用洛比达法则

提醒注意 不能用洛比达法则!!!

思考与联想

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0)}{h}=mf'(x_0)$$

进一步

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0+nh)}{h}=(m-n)f'(x_0)$$

例3

若 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$ 存在,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{(e^x-1)\tan x}$。

提示

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin^2 x+\cos x-1)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\dfrac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$

$=\dfrac{1}{2}f'(1)$

例4　已知 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=A$，求 $f'(a)$。

$$\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

猜想　$f(a)=0$

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}(x-a)\times\frac{f(x)}{x-a}=f(a)=0$$

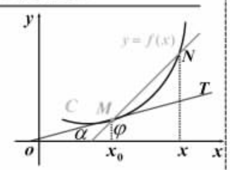
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=A$$

思考与联想　从切线反思导数定义？

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}$ 割线斜率＝切线斜率

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}$ 割线＝切线

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



$$\begin{cases}割线\neq 斜线,\quad \Delta x \xrightarrow{\times} 0\\ 割线=斜线,\quad \Delta x\longrightarrow 0\end{cases}$$

NEXT

已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，求 $f'(1)$。

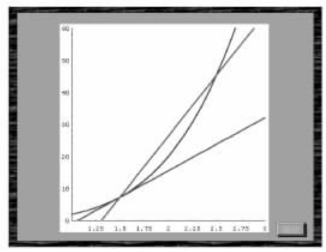
解　$f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\dfrac{f(x)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

切线问题　割线的极限位置——切线位置



例5　已知 $f'(x)$ 在 $x=a$ 连续，　$f'(x),f''(a)\exists$

且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^2}=A$ 求 $f''(a)$。

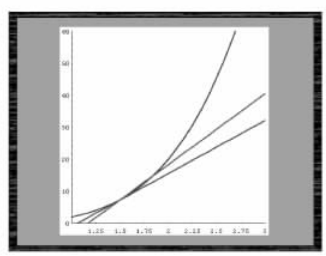
$$\boxed{f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}}$$

猜想：　$f'(a)=0$

$$\lim_{x\to a}f'(x)=\lim_{x\to a}(x-a)\times\frac{f'(x)}{x-a}=f'(a)=0$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{2(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}=\frac{1}{2}f''(a)=A$$

切线问题　割线的极限位置——切线位置



3　导数的几何意义

$$y'(x_0)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\tan\theta$$

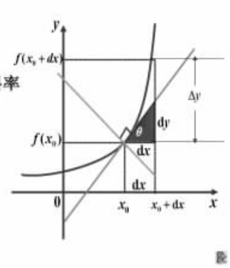
$y'(x_0)=k \xrightarrow{y=f(x)}$ 切线斜率

切线方程：

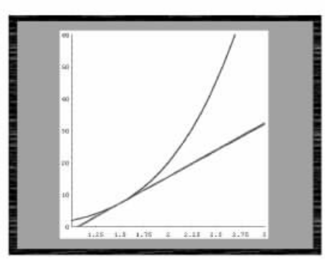
$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程：

$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$



切线问题　割线的极限位置——切线位置



思考与联想 从切线反思导数定义？

特别地，若 $f'(0)\exists$，则存在 $\cup(0,\delta)$，使得 $f'(x)\exists$。

高阶导数的几何意义 **导数阶数越高曲线越光滑**

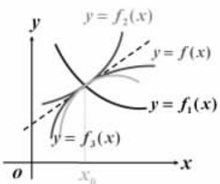
近似程度越来越好

(1) 在 x_0 点相交 $f_1(x_0)=f(x_0)$

(2) 有相同的切线 $f_2'(x_0)=f'(x_0)$

(3) 弯曲方向相同 $f_3''(x_0)=f''(x_0)$

…



$y'>0\Rightarrow f(x)\uparrow$ $\quad y'<0\Rightarrow f(x)\downarrow$

$y''>0\Rightarrow f(x)\cup$ $\quad y''<0\Rightarrow f(x)\cap$

4 应用导数定义讨论可导性 **提醒：难点**

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

【结论】 $f'(x_0)$存在 $\Leftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

例6 讨论 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，在点 $x=0$ 连续性与可导性。

解 连续性：$f(0)=0$，

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\dfrac{1}{x}=0$ $\therefore f(x)$在$x=0$处连续。

可导性：$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x}}{x}=\dfrac{\pi}{2}$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f(x)$在 $x=0$点不可导。

NEXT

设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性及可导性。

提示 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$ 连续

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$\Longrightarrow f'(0)=0$

即 $f(x)$在 $x=0$ 处可导。

例7 讨论 $y=\begin{cases}\sin x, & x\geqslant 0\\ x-1, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$连续性与可导性。

解 连续性：

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1\end{array}\right\}\therefore$ 函数在 $x=0$ 不连续。

不连续 $\Rightarrow$ 不可导

所以 函数在 $x=0$ 不可导。

例8 设 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$；

就α的取值情况讨论 $f(x)$的连续性与可导性。

【解】$x\neq 0$时，$f(x)\in C^0(-\infty,+\infty)$ (初等函数)

又$\because$ $\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$ $(\alpha>0)$

$\therefore$ $f(x)\in C^0(-\infty,+\infty)$ $\quad(\alpha>0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^\alpha\sin\frac{1}{x}-0}{x}=0=f'(0)$ $(\alpha>1)$

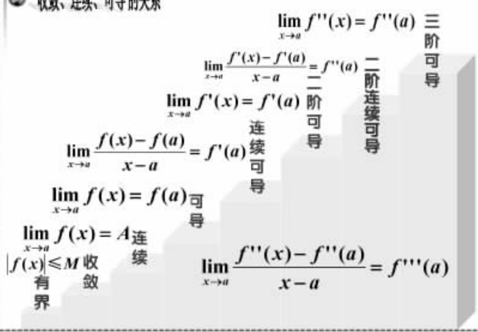
$f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$\therefore$ $\alpha>1$时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$处处可导。

$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x})=0\Leftrightarrow\alpha>2$

$\therefore$ $\alpha>2$时，$f(x)\in C^1$。

收敛、连续、可导的关系



例9 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ x^2, & x\le 0\end{cases}$，求 $f'(x)$。

解 $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x>0\\ 2x & x<0\end{cases}$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to0+}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0-}\frac{x^2-0}{x}=\lim_{x\to0-}x=0 \Longrightarrow f'(0)=0$$

故 $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 2x, & x\leqslant 0\end{cases}$

不难看出：$\alpha>3$ 时，$f''(0)=0$ 存在；

$\alpha>4$ 时，$f(x)\in C^2$；

$\alpha>5$ 时，$f'''(0)=0$ 存在；

$\alpha>6$ 时，$f(x)\in C^3$。

依此类推：$\alpha>2k-1$ 时，$f^{(k)}(0)=0$ 存在。
$\alpha>2k$ 时，$f(x)\in C^k$。

【错解】

当 $x>0$ 时，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$；

当 $x<0$ 时 $f'(x)=2x$；

当 $x=0$ 时 $f'(x)=f'(0)=0$。

提醒注意

此题常犯错误是在分界点 $x=0$ 的导数不用定义而直接求。

思考与联想

设 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$；试确定实数 α 的取值范围，使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 具有以下性质。

(1) 连续但不可导。　$0<\alpha\leqslant1$

(2) 可导但导函数不连续。　$1<\alpha\leqslant2$

(3) 一阶导函数连续。　$2<\alpha\leqslant3$

(4) 二阶可导。　$3<\alpha\leqslant4$

观察与思考？

设（1）$f(x)$ 在 x_0 连续，

（2）$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 内可导，

（3）$\lim\limits_{x\to x_0\pm0} f'(x)$ 存在，

则 $f'_\pm(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0\pm0} f'(x)$

该定理可以解决分段函数求分段点的导数的问题。

思考与联想

设 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$

就 α 的取值情况讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性。

设 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$

就 α 的取值情况讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性。

提醒注意

$f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0\\ 0, & x=0\\ x+\sin^2x, & x<0\end{cases}$，求 $f'(x)$。

提示

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+x}=1$　　$f'(0)=1$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0}(1+\sin2x)=1$

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x>0\\ 1, & x=0\\ 1+\sin2x, & x<0\end{cases}$

例10 确定常数 a 与 b，使下面的函数在 $x=1$ 处可导。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, & x\leqslant 1\\ ax^2+bx+1, & x>1\end{cases}$$

解　若使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，首先必须 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，即

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{4}{x}=4,$$

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}(ax^2+bx+1)=a+b+1$$

由此得 $a+b+1=4$ ………………(1)

这种方法不可取

按定义

$$f_-'(1)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\frac{4}{1+\Delta x}-4}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-4}{1+\Delta x}=-4$$

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{a(1+\Delta x)^2+b(1+\Delta x)+1-4}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0+0}(2a+a\Delta x+b)=2a+b$$

$$2a+b=-4$$

$$f'_-(1)=f'_+(1) \qquad f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

按定义 $f_-'(1)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\frac{4}{x}-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{-4}{x}=-4$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+bx+1-4}{x-1}\xrightarrow{L}\lim_{x\to 1+0}\frac{2ax^2+b}{1}=2a+b$$

$2a+b=-4$ ………………(2)

联立（1）、（2）解得　$a=-7$，$b=10$。

NEXT

$$f(x)=\begin{cases}e^{ax}, & x\leqslant 0\\ \sin 2x+b, & x>0\end{cases}$$

问当 a,b 为何值时，$f(x)$ 为可导函数？

提示　可导必连续，$f(0)=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{ax}=1=f(0)\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(\sin 2x+b)=b\end{array}\right\}\Rightarrow b=1$$

$$\left.\begin{array}{l}f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=a\lim\limits_{x\to 0^-}e^{ax}=a\\ f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x+b-1}{x}=2\end{array}\right\}\Rightarrow a=2$$

简便方法

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1}{x}=a\lim_{x\to 0^-}e^{ax}=a$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x+b-1}{x}=2 \qquad \Rightarrow a=2$$

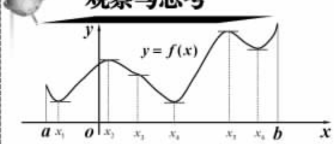
$$x<0,\ f'(x)=ae^{ax}\to a=f_-'(0)\quad (x\to 0)$$

$$x>0,\ f'(x)=2\cos 2x\to 2=f_+'(0)\quad (x\to 0)$$

$$f'(0)=a=2 \qquad \Rightarrow a=2$$

思考与联想　导数有哪些应用？

观察与思考　定性研究



单调性
有界性
奇偶性
周期性
收敛性
连续性
可微性
凹凸性
渐近性

如何判别单调性？

$y'>0\Rightarrow f(x)\uparrow \qquad y'<0\Rightarrow f(x)\downarrow$

如何判别凹凸性？

$y''>0\Rightarrow f(x)\cup[a,b] \qquad y''<0\Rightarrow f(x)\cap[a,b]$

如何判别奇偶性、周期性？

$f(x)$ 可导＋奇（偶）$\Rightarrow f'(x)$ 偶（奇）

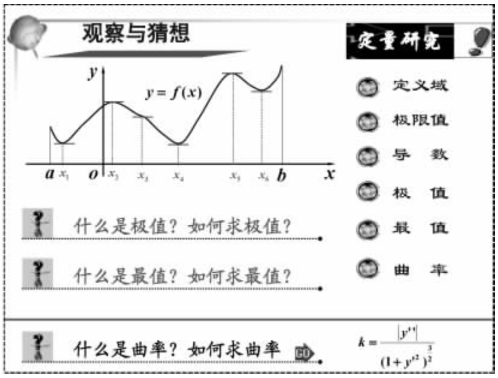
提示　奇　$f(-x)=-f(x),\ \Rightarrow f'(-x)=f'(x)$

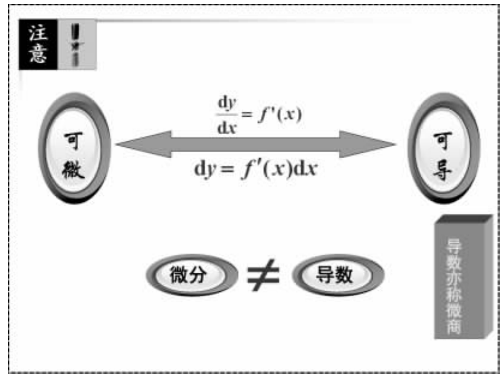
偶　$f(-x)=f(x),\ \Rightarrow f'(-x)=-f'(x)$

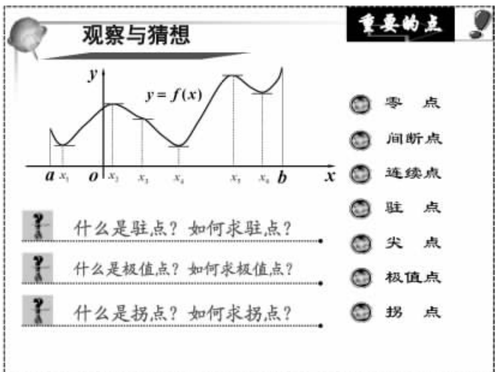
$f(x)$ 可导＋以 T 为周期 $\Rightarrow f'(x)$ 以 T 为周期

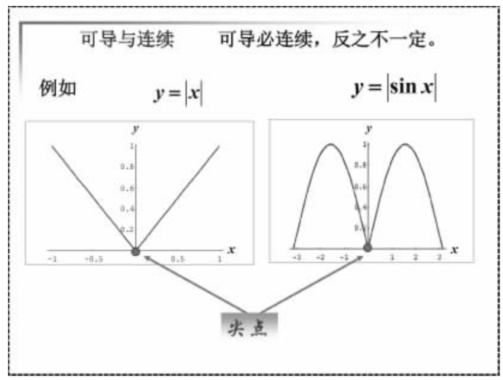
提示　$f(x+T)=f(x)\ \Rightarrow f'(x+T)=f'(x)$

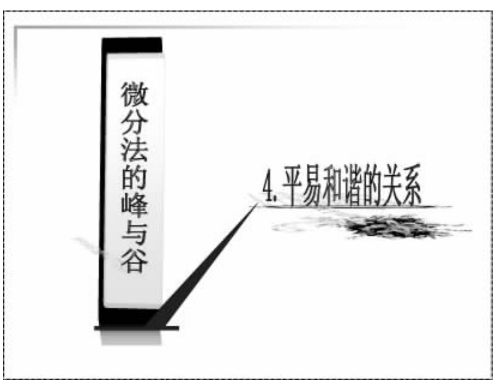
如何判别可微性？

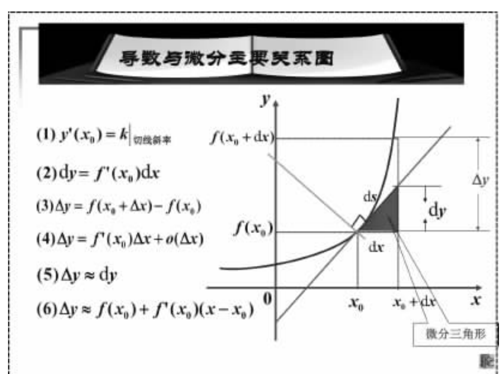

观察与猜想
定量研究
$y=f(x)$
定义域
极限值
导数
极值
最值
曲率
什么是极值？如何求极值？
什么是最值？如何求最值？
什么是曲率？如何求曲率
$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

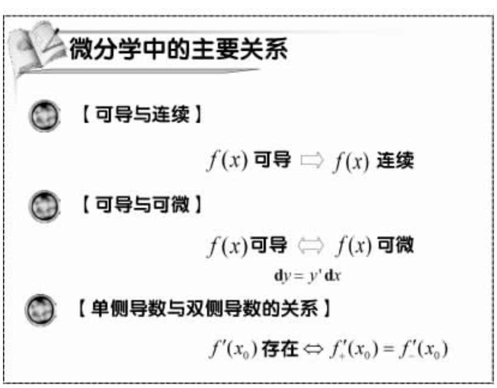

注意
$\frac{dy}{dx}=f'(x)$
可微
可导
$dy=f'(x)dx$
微分 ≠ 导数
导数亦称微商

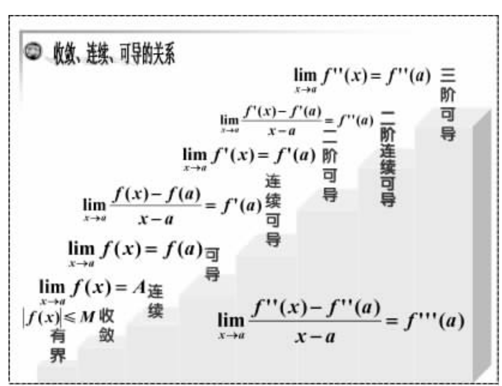

观察与猜想
重要的点
$y=f(x)$
零点
间断点
连续点
驻点
尖点
极值点
拐点
什么是驻点？如何求驻点？
什么是极值点？如何求极值点？
什么是拐点？如何求拐点？


可导与连续 可导必连续，反之不一定。
例如 $y=|x|$ $y=|\sin x|$
尖点


微分法的峰与谷
4.平易和谐的关系


导数与微分主要关系图
(1) $y'(x_0)=k|_{切线斜率}$
(2) $dy=f'(x_0)dx$
(3) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
(4) $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$
(5) $\Delta y\approx dy$
(6) $\Delta y\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$
$f(x_0+dx)$
$f(x_0)$
Δy
dy
dx
x_0
x_0+dx
微分三角形


微分学中的主要关系
【可导与连续】
$f(x)$ 可导 ⇨ $f(x)$ 连续
【可导与可微】
$f(x)$可导 ⇔ $f(x)$ 可微
$dy=y'dx$
【单侧导数与双侧导数的关系】
$f'(x_0)$ 存在 ⇔ $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$


收敛、连续、可导的关系
$|f(x)|\le M$ 有界
$\lim_{x\to a}f(x)=A$ 收敛
$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ 连续
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ 可导
$\lim_{x\to a}f'(x)=f'(a)$ 连续可导
$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=f''(a)$ 二阶可导
$\lim_{x\to a}f''(x)=f''(a)$ 二阶连续可导
$\lim_{x\to a}\frac{f''(x)-f''(a)}{x-a}=f'''(a)$ 三阶可导

微分法的峰与谷

5.独具个性的方法

先转换 再求导

例12 $y=(\frac{x}{1+x})^x$ 求 y'。

提示 两边取对数，$\ln y=x[\ln x-\ln(1+x)]$

例13 $y=(\ln x)^{e^x}$,$x>1$，求 y'。

提示 两边取对数，$\ln y=e^x\ln\ln x$

例14 求 $y=\sqrt{x^2\sin x\sqrt{1-e^x}}$ 的导数。

提示 $\ln y=\frac{1}{2}\left[2\ln x+\ln\sin x+\frac{1}{2}\ln\left(1-e^x\right)\right]$

直接求导应注意的问题

先化简 再求导

例11 求下列函数的导数。

$$(1)y=\frac{x^3}{x^3+1}\xrightarrow{化简}\frac{x^3+1-1}{x^3+1}=1-\frac{1}{x^3+1}$$

$$(2)y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\xrightarrow{化简}x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{8}}=x^{\frac{7}{8}}$$

$$(3)y=\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\xrightarrow{化简}\frac{1}{2}[\ln(x-1)-\ln(x+1)]$$

例15 求 $y=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$ 的导数。

提示 函数两边取对数

$$\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x$$

观察与思考

(1) $y=\frac{x^2+x}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$

(2) $y=xe^x(1+\ln x)$

复合函数求导应注意的问题

原理 $y=f(u),u=\varphi(x)\quad y=f[\varphi(x)]$

$y'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x)$

难点 重点

由外向内，逐层求导

注意

- 强化训练，熟能生巧（达标自测）
- 注意导数符号上的陷阱

有两类函数适合对数求导法

(1) 幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$，

(2) 形如下式的函数

$y=f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$,

$y=\frac{f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)}{g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x)}$

$y=\sqrt[m]{f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)}$

对数求导法

例16 已知 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$,求 y'。 $y=\frac{2x+3}{5x+4}$,求 y'。

提示 $y'=\frac{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$ $y=\frac{100x-1}{100x+1}$,求 y。

例17 已知 $y=\ln(\frac{ax+b}{cx+d})$,求 y'。 $y=\ln(\frac{2x+3}{5x+4})$,求 y'。

提示 $y'=\frac{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}{(ax+b)(cx+d)}$ $y=\ln(\frac{100x-1}{100x+1})$,求 y'。

思考与联想　$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$

$(x^{n})'=nx^{n-1}$

$(x^{\frac{m}{n}})'=\dfrac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}$

$(\dfrac{1}{x^{n}})'=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$

$(\dfrac{1}{x^{\frac{m}{n}}})'=-\dfrac{m}{n}\dfrac{1}{x^{\frac{m+n}{n}}}$

请你速算

$(x^{89})'=$

$(x^{\frac{89}{98}})'=$

$(\dfrac{1}{x^{77}})'=$

$(\dfrac{1}{x^{\frac{11}{12}}})'=$

例18　$y=2^{\sin^2(3x+1)}$　$(a>0)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

提示

由外向内

$y'=2^{\sin^2(3x+1)}\times\ln 2\times\sin 2(3x+1)\times 3$

由内向外

$y'=3\times\sin 2(3x+1)\times 2^{\sin^2(3x+1)}\times\ln 2$

隐函数求导应注意的问题

三种方法比较

- 直接求导法
- 公式法
- 利用微分形式不变性

简便；重点（1阶）

例19　求由方程 $xy-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$。

方法1　方程两边对 x 求导，

$$y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

解得　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-y}{x+\mathrm{e}^y}$，

由原方程知 $x=0,y=0$，$\therefore \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=\dfrac{\mathrm{e}^x-y}{x+\mathrm{e}^y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=1$

例19　求由方程 $xy-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$。

方法2　公式法　$y'(x)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x}{F_y}$

令 $F=xy-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y$

$$y'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{y-\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^y}$$

注意！　x,y 地位平等

例19　求由方程 $xy-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$。

方法3　利用一阶微分形式不变性

$$y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}y-\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=0$$

$$(x+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=-(y-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y-\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^y}$$

注意！　见变量就微分！！！

参数方程求导应注意的问题

由方程组 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ 确定了一个函数 $y=y(x)$，

那么　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]\boxed{\frac{1}{\varphi'(t)}}$$

注意！　高阶导数易出错

方法推荐？

$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'_t}{x'_t}$

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{(y')_t}{x'_t}$

$\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\dfrac{(y'')_t}{x'_t}$

$\dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}=\dfrac{(y''')_t}{x'_t}$

$\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=\dfrac{[y^{(n-1)}]'_t}{x'_t}$

只含有 t

例20 设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^3y}{dx^3}$。

$$\boxed{x'_t=\frac{2t}{1+t^2}}$$

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\dfrac{t^2}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\dfrac{t}{2})'}{x'_t}=\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{t}+t)'}{x'_t}=\frac{1}{4}\cdot\frac{-\dfrac{1}{t^2}+1}{\dfrac{2t}{1+t^2}}$$

NEXT $\begin{cases} x=\arctan t \\ y=t^2-\ln(1+t^2) \end{cases}$ 求 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$。

$$\boxed{x'_t=\frac{1}{1+t^2}}$$

提示 $$\frac{dy}{dx}=\frac{2t-\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2}}=2t^3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6t^2}{\dfrac{1}{1+t^2}}=6t^2+6t^4$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{12t+24t^3}{\dfrac{1}{1+t^2}}$$

例21 已知 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，且 $f'(t)$ 两次可微，$f''(t)\neq 0$

求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

$$\boxed{x'_t=f''(t)}$$

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$$

$$\frac{d^2y}{d^2x}=\frac{1}{f''(t)}$$

$$\frac{d^3y}{d^3x}=\frac{[\dfrac{1}{f''(t)}]'}{x'_t}=-\frac{f'''(x)}{[f''(t)]^3}$$

抽象函数求导应注意的问题

例22 设 $y=x^2f(\sin^2x)$ 其中 $f(u)$ 为可微函数，求 y'。

解 $y'=2xf(\sin^2x)+x^2f'(\sin^2x)\cdot\sin 2x$

例23 设 $f(x)=(x^{1996}-1)g(x)$，$g(x)$ 在 $x=1$ 连续，且 $g(1)=1$，求 $f'(1)$。

解 $f(1)=0$

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^{1996}-0}{x-1}g(x)$$

$$=1996g(1)=1996$$

注意！

$$f'(1)=[1996x^{1995}g(x)+(x^{1996}-1)g'(x)]|_{x=1}$$

$$=1996g(1)=1996$$ ⟵ 正确吗

例24 设 $f(x)=(x-a)^2\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 的导函数有界，求 $f''(a)$。

解 $f'(x)=2(x-a)\varphi(x)+(x-a)^2\varphi'(x)$

$f'(a)=0$

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$$ 利用二阶导数定义

$$=\lim_{x\to a}\frac{2(x-a)\varphi(x)+(x-a)^2\varphi'(x)-0}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}[2\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)]=2\varphi(a)$$

例25 设 $\varphi(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $f'(0)\exists$，

求 $F(x)=f[\varphi(x)]$ 在 $x=0$ 处的导数。

解 $$F(x)=f[\varphi(x)]=\begin{cases} f(x^3\sin\dfrac{1}{x}), & x\neq0 \\ f(0), & x=0 \end{cases}$$

$$F'(0)=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f[\varphi(x)]-f[\varphi(0)]}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x^3\sin\dfrac{1}{x})-f(0)}{x^3\sin\dfrac{1}{x}}\times x^2\sin\frac{1}{x}=f'(0)\cdot0=0$$

提醒注意 应记住导数存在是求导的前提。

求高阶导数应注意的问题

定义 $$f^{(n)}(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

(1) $(a^x)^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a \quad (a>0) \qquad (e^x)^{(n)}=e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(kx+n\cdot\dfrac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos(kx+n\cdot\dfrac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

$y^{(n)}=(x^n)^{(n)}=n! \qquad y^{(n+1)}=(n!)'=0$

(5) $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n} \qquad (\dfrac{1}{x})^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$

高阶导数的求法

1 逐阶求导法

2 间接法——利用已知的高阶导数公式

重点

:

例29 $y = x^3 \ln x$，求 $y^{(n)}$。

解 $y' = 3x^2 \ln x + x^2$ $\quad y'' = 6x\ln x + 5x$

$y''' = 6\ln x + 11$ $\quad \cdots$

$$y^{(n)} = \frac{6(-1)^{n-4}(n-4)!}{x^{n-3}} \quad (n \geqslant 4)$$

提醒注意

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x)^n}$$

例26 $y = \dfrac{1-x}{1+x}$，求 $y^{(n)}$。

解 $y = -1 + \dfrac{2}{1+x}$ 先化简再求导

可得 $\quad y^{(n)} = 2(-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

例27 $y = \dfrac{x^2}{x^2-3x-4}$，求$y^{(n)}$。 $\quad (\dfrac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$

解 $y = 1 - \dfrac{1}{5(x+1)} + \dfrac{16}{5(x-4)}$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}n!}{5}[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{16}{(x-4)^{n+1}}]$$

综合题解析

例30 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$，求 $f'(0)$。

解 方法1 利用导数定义

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-99) = -99!$$

方法2 利用求导公式

$$f'(x) = (x)'\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)] + x\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]'$$

$\therefore \quad f'(0) = -99!$

NEXT

(1) $y = \dfrac{1}{x^2+5x+6}$，求$y^{(100)}$。

提示 $\dfrac{1}{x^2+5x+6} = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3} \Rightarrow y^{(100)} = \dfrac{100!}{(x+2)^{101}} - \dfrac{100!}{(x+3)^{101}}$

(2) $y = \dfrac{x^3}{1-x}$，求 $y^{(n)}$。

提示 $y = -x^2 - x - 1 + \dfrac{1}{1-x} \Rightarrow y^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$，$n \geqslant 3$

例31 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)$，求$f^{(n)}(x)$。

提示 $\quad g(x) = (x-a)^n \Rightarrow g^{(n)}(x) = n!$

观察 $\quad f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

$f'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)$

$f^{(2)}(x) = 2(x-3) + 2(x-2) + 2(x-1)$

$f^{(3)}(x) = 2\times 3 = 3!$

猜想 $\quad f^{(n)}(x) = n!$

验证

例28 $y = \sin^4 x - \cos^4 x$，求 $y^{(n)}$。

解 $y = (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)$

$= \dfrac{1-\cos 2x}{2} - \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$= -\cos 2x$

$$y^{(n)} = -2^n \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$$

$$(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$$

例32 若 $f(t) = \lim\limits_{x\to\infty}[t(1+\dfrac{1}{x})^{2tx}]$ 求 $f'(t)$。

解 首先求$f(t)$，

$$f(t) = t\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x})^{2tx}] = te^{2t}$$

于是，$\quad f'(t) = (2t+1)e^{2t}$。

3.3 达标实训

导数与微分是微积分的重要组成部分，导数用于解决函数的变化率问题，微分用于解决函数的改变量问题。微分概念的建立依赖于导数概念，而导数又是函数的微分与自变量微分的商，求导数与求微分的方法基本上是一致的，因此导数是重点。通过完成本节达标实训练习，可使读者达到以下要求。

一级达标要求。准确理解掌握导数与微分的概念及其几何意义，能够熟练掌握导数基本公式及求导法则，包括函数的和、差、积、商与反函数、复合函数求导并熟记基本初等函数与常见初等函数的导数表达式。掌握微分运算法则、微分形式的不变性，会求函数的微分。

二级达标要求。在一级达标要求的基础上，理解连续、可导、可微、连续与可导之间的关系，能够掌握隐函数、参数方程所确定的函数及抽象函数的求导法，理解高阶导数的概念，掌握初等函数高阶导数的方法，能解决关于导数与微分的综合应用问题。

一级、二级标准是学习“导数与微分”必须达到的基本要求。

达标实训 Ⅰ

3-1 已知 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f'(a)=b$，求下列极限。

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a-h)}{2h}$

【解】
$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{2h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{2h}\\
&= \frac{3}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\\
&= \frac{3}{2}f'(a)+\frac{1}{2}f'(a)=2b
\end{aligned}
$$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h^2)-f(a)}{h}$

【解】 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h^2)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}h\right]=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot\lim\limits_{h\to 0}h=f'(a)\cdot 0=0$

3-2 已知函数 $f(x)$连续且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$,求曲线 $y=f(x)$上对应 $x=0$ 处的切线方程。

【解】 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$ 且 $f(x)$连续,则 $f(0)=0$,$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2$,所以切线方程为 $y=2x$。

3-3 设 $f'(0)$存在,且 $f(0)=0$,求

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos 2x)}{x\sin x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{\sin^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}$

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos 2x)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos 2x)-f(0)}{1-\cos 2x}\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

$$=f'(0)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=f'(0)\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}=2f'(0)$$

【解】 (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{\sin^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}{\sin^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}=9f'(0)$

3-4 设 $\varphi(x)$在 $x=a$ 处连续, $f(x)=(x^2-a^2)\varphi(x)$,求 $f'(a)$。

【解】 $\varphi(x)$在 $x=a$ 处连续,

$\therefore\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$　$\because f(a)=0$

$\therefore f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^2-a^2)\varphi(x)-0}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x+a)\varphi(x)=2a\varphi(a)$

3-5 用导数的定义求 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0\end{cases}$在 $x=0$ 处的导数。

【解】 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)-0}{x-0}=1$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-0}{x-0}=1$

$\because f'_+(0)=f'_-(0)$　$\therefore f'(0)=f'_+(0)=f'_-(0)=1$

3-6 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0\\ ax+b, & x\leqslant 0\end{cases}$可导,求常数 a,b 的值。

【解】 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=b$, $b=1$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{\ln(x+1)}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax+1-1}{x}=a$,　$a=-\dfrac{1}{2}$

3-7 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f'(x)$。

【解】 当 $x<0$ 时，$f'(x)=(\sin x)'=\cos x$

当 $x>0$ 时，$f'(x)=x'=1$

当 $x=0$ 时，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\therefore f'(0)=1$

$\therefore f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$

3-8 求下列函数的导数。

(1) $y=x^5+4x^3+2x$

【解】 $y'=5x^4+12x^2+2$ $\qquad y''=20x^3+24x$

(2) $y=x\sin x$

【解】 $y'=x'\sin x+x(\sin x)'=\sin x+x\cos x$

$y''=(\sin x)'+x'\cos x+x(\cos x)'=2\cos x-x\sin x$

(3) $y=\sqrt{1-x^2}$

【解】 $y'=\dfrac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y''=-\frac{x'\sqrt{1-x^2}-x(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2}=-\frac{\sqrt{1-x^2}-x(-x/\sqrt{1-x^2})}{1-x^2}=-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

(4) $y=\ln(1-x^2)$

【解】 $y'=\dfrac{(1-x^2)'}{1-x^2}=-\dfrac{2x}{1-x^2}$ $\qquad y''=-\dfrac{(2x)'(1-x^2)-2x(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}=-\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$

(5) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$

【解】 $y'=\dfrac{-(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$$y''=-\frac{(2x)'(x^2+1)^2-2x\cdot[(x^2+1)^2]'}{(x^2+1)^4}=-\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

(6) $y=xe^{x^2}$

【解】 $y'=x'e^{x^2}+x(e^{x^2})'=e^{x^2}+xe^{x^2}(x^2)'=e^{x^2}(1+2x^2)$

$y''=(e^{x^2})'(1+2x^2)+e^{x^2}(1+2x^2)'=2xe^{x^2}(1+2x^2)+e^{x^2}\cdot 4x=2xe^{x^2}(3+2x^2)$

3-9 求下列函数的 n 阶导数。

(1) $y=\dfrac{1}{5+x}$

【解】 直接利用常用高阶导数公式 $\left(\dfrac{1}{5+x}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(5+x)^{n+1}}$

(2) $y=\sin 5x+3^x$

【解】 直接利用常用高阶导数公式。

$$y^{(n)}=(\sin 5x)^{(n)}+(3^x)^{(n)}=5^n\sin\left(5x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+3^x\cdot\ln^n 3$$

3-10 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，求当 n 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数即 $f^{(n)}(x)$。

【解】 $f'(x)=[f(x)]^2$

$\therefore f''(x)=2f(x)\cdot f'(x)=2!\ [f(x)]^3$

$f'''(x)=6[f(x)]^2\cdot f'(x)=3!\ [f(x)]^4$

$f^{(4)}(x)=24[f(x)]^3\cdot f'(x)=4!\ [f(x)]^5$

归纳可得 $f^{(n)}=n!\ [f(x)]^{n+1}$

3-11 求下列隐函数的导数。

(1) $xy=\mathrm{e}^{x+y}$

【解】 方程两边同时对 x 求导，得 $y+xy'=\mathrm{e}^{x+y}(1+y')$

解得 $y'=\dfrac{y-\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^{x+y}-x}$

(2) $xy-\sin(\pi y^2)=0$

【解】 方程两边同时对 x 求导，得 $y+xy'-\cos(\pi y^2)\cdot 2\pi yy'=0$

解得 $y'=\dfrac{y}{2\pi y\cos(\pi y^2)-x}$

(3) $\mathrm{e}^{xy}+y^3-5x=0$

【解】 方程两边同时对 x 求导，得 $\mathrm{e}^{xy}\cdot(y+xy')+3y^2y'-5=0$

解得 $y'=\dfrac{5-y\mathrm{e}^{xy}}{x\mathrm{e}^{xy}+3y^2}$

(4) $y=1+x\mathrm{e}^y$

【解】 方程两边同时对 x 求导，得 $y'=\mathrm{e}^y+x\mathrm{e}^y y'$

解得 $y'=\dfrac{\mathrm{e}^y}{1-x\mathrm{e}^y}$

3-12 求下列参数方程确定的函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

(1) $\begin{cases}x=at^2\\ y=bt^3\end{cases}$

【解】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{3bt^2}{2at}=\dfrac{3bt}{2a}$

(2) $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin t\\ y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$

【解】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t}{\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t}=\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$

(3) $\begin{cases}x=\cos^2 t\\ y=\sin^2 t\end{cases}$

【解】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{2\sin t\cos t}{-2\cos t\sin t}=-1$

3-13 求下列参数方程所确定的函数的导数$\frac{d^2y}{dx^2}$。

(1) $\begin{cases} x=3e^{-t} \\ y=2e^{t} \end{cases}$

【解】 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2e^t}{-3e^{-t}}=-\frac{2}{3}e^{2t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{3}e^{2t}\right)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{2}{3}e^{2t}\right)\frac{dt}{dx}=-\frac{4}{3}e^{2t}\cdot\left(-\frac{1}{3e^{-t}}\right)=\frac{4}{9}e^{3t}$$

(2) $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$

【解】 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1-3t^2}{-2t}=-\frac{1-3t^2}{2t}$

$$\therefore\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{1-3t^2}{2t}\right)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1-3t^2}{2t}\right)\frac{dt}{dx}=-\frac{-6t^2-2}{4t^2}\cdot\frac{1}{-2t}=-\frac{3t^2+1}{4t^3}$$

(3) $\begin{cases} x=t+\ln t \\ y=t\ln t \end{cases}$

【解】 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\ln t+1}{1+\frac{1}{t}}=\frac{t(\ln t+1)}{t+1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left[\frac{t(\ln t+1)}{t+1}\right]\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t(t+2+\ln t)}{(t+1)^3}$$

3-14 求下列函数的导数。

(1) $f(x)=x^{e^x}$

【解】 令 $y=x^{e^x}$，两边取对数得 $\ln y=e^x\ln x$

两边关于 x 求导数得 $\frac{1}{y}\cdot y'=e^x\cdot\ln x+\frac{e^x}{x}$

$$y'=y\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)$$

即 $$y'=x^{e^x}\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)$$

(2) $y=x^y$

【解】 两边取对数得 $\ln y=y\ln x$

两边关于 x 求导数得 $\frac{1}{y}y'=y'\ln x+\frac{y}{x}$

整理得 $y'=\frac{y^2}{x-xy\ln x}$

(3) $y=(1+x^2)^{\tan x}$

【解】 等式两边同时取对数得 $\ln y=\tan x\ln(1+x^2)$

等式两边同时对 x 求导得　$\frac{1}{y}y'=\sec^2x\ln(1+x^2)+\tan x\cdot\frac{2x}{1+x^2}$

$\therefore y'=(1+x^2)^{\tan x}\left[\sec^2x\ln(1+x^2)+\frac{2x\tan x}{1+x^2}\right]$

(4) $y=(\tan x)^{\sin x}+x^x$

【解】　$y=(\tan x)^{\sin x}+x^x=e^{\sin x\ln\tan x}+e^{x\ln x}$

两边同时对 x 求导得 $y'=e^{\sin x\ln\tan x}\left[\cos x\ln(\tan x)+\sin x\cdot\frac{\sec^2x}{\tan x}\right]+e^{x\ln x}(\ln x+1)$

$$=(\tan x)^{\sin x}[\cos x\ln(\tan x)+\sec x]+x^x(\ln x+1)$$

(5) $y=\frac{\sqrt[5]{x-3}\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{x+2}}$

【解】　等式两边同时取对数得

$$\ln y=\frac{1}{5}\ln(x-3)+\frac{1}{3}\ln(3x-2)-\frac{1}{2}\ln(x+2)$$

等式两边同时对 x 求导得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{5}\cdot\frac{(x-3)'}{x-3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-2)'}{3x-2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+2)'}{x+2}$$

$\therefore y'=\frac{\sqrt[5]{x-3}\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{x+2}}\left[\frac{1}{5(x-3)}+\frac{1}{3x-2}-\frac{1}{2(x+2)}\right]$

(6) $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$

【解】　等式两边同时取对数得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x+2)+4\ln(3-x)-5\ln(x+1)$$

等式两边同时对 x 求导得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1}$$

$\therefore y'=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1}\right]$

(7) $y=\left[\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^3\cdot(x+4)}\right]^{\frac{2}{3}}$

【解】　两边取对数

$$\ln y=\frac{2}{3}[\ln(x+1)+\ln(x+2)+\ln(x+3)-3\ln x-\ln(x+4)]$$

两边关于 x 求导

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x+4}\right)$$

$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\left[\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^3\cdot(x+4)}\right]^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x+4}\right)$

3-15 求下列函数的导数,其中 $f(x)$ 为可导函数。

(1) $y=f(x^3)$

【解】 $y'=f'(x^3)\cdot(x^3)'=3x^2f'(x^3)$

(2) $y=f(\sin^2x)+f(\cos^2x)$

【解】 $y'=f'(\sin^2x)\cdot(\sin^2x)'+f'(\cos^2x)\cdot(\cos^2x)'$

$=\sin2x[f'(\sin^2x)\cdot-f'(\cos^2x)]$

(3) $y=f\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)$

【解】 $y'=f'\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)'=f'\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$=-f'\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

(4) $y=f[f(x)],f(x)=\ln(1+x)$

【解】 $y=f[f(x)]=\ln[1+\ln(1+x)]$

$\therefore\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+\ln(1+x)}\cdot[1+\ln(1+x)]'=\frac{1}{[1+\ln(1+x)](1+x)}$

3-16 若 $f''(x)$存在,求下列函数的二阶导数即$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

(1) $y=f(x^3)$

【解】 $y'=f'(x^3)\cdot3x^2$ $\quad\therefore y''=6xf'(x^3)+3x^2f''(x^3)\cdot3x^2=6xf'(x^3)+9x^4f''(x^3)$

(2) $y=\ln[f(x)]$

【解】 $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ $\quad\therefore y''=\frac{f''(x)\cdot f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$

3-17 计算下列近似值。

(1) $\sqrt[100]{1.002}$

【解】 令 $f(x)=\sqrt[100]{x}$,则 $f'(x)=\frac{1}{100}x^{-\frac{99}{100}}$

取 $x_0=1,\Delta x=0.002$,得$\sqrt[100]{1.002}\approx f(1)+f'(1)\Delta x=1+\frac{1}{100}\times0.002=1.000\,02$

(2) $\sin29°$

【解】 令 $f(x)=\sin x$,则 $f'(x)=\cos x$

取 $x_0=30°=\frac{\pi}{6},\Delta x=-1°=-\frac{\pi}{180}$,得 $\sin29°\approx\sin\frac{\pi}{6}+\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(-\frac{\pi}{180}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{360}$

(3) $\arcsin0.5002$

【解】 令 $f(x)=\arcsin x$,则 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

取 $x_0=0.5$，$\Delta x=0.0002$，得

$$\arcsin 0.5002 \approx \arcsin 0.5+\frac{1}{\sqrt{1-(0.5)^2}}\times 0.0002=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{7500}$$

达标实训Ⅱ

3-18 $f(x)$对任何x满足$f(x+1)=2f(x)$，且$f(0)=1$，$f'(0)=C$(常数)，求$f'(1)$。

【分析】 本题用到的知识点是导数的定义，关键是根据已知条件凑出函数在$x=0$和$x=1$两点导数定义的极限形式。

【解】 由$f(x+1)=2f(x)$得$f(1)=2f(0)=2$

$\because f'(0)=C$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=C$

而$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 令$x-1=t$，则$x=t+1$，当$x\to 1$时，$t\to 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t+1)-2}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2f(t)-2}{t}=2C$ 即$f'(1)=2C$

3-19 若函数$f(x)$在$x=1$处可导，且$f'(1)=1$，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}$$

【分析】 本题用到的知识点是导数的定义，将所求极限进行变形，凑出函数在点$x=1$的导数定义的极限形式，利用导数的定义求极限。

【解】 当$x\to 0$时，$x\sim\sin x$，$x\sim\tan x$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)+f(1+2\sin x)-f(1)-2[f(1-3\tan x)-f(1)]}{x}$$

$$=(1+2+6)f'(1)=9$$

3-20 设$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，讨论$f(x)$在$x=0$处的连续性与可导性。

【分析】 本题用到的知识点是函数连续与可导的定义，判断连续性，先求函数$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$是否成立；判断可导性，利用定义先求极限，看极限是否存在。

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}=0$

$\because \lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ $\quad\therefore f(x)$在$x=0$处连续

又$\because f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\sqrt{|x|}}=+\infty$

$\therefore f(x)$在 $x=0$ 处不可导

3-21 设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^{x}-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,求 $f'(0)$。

【分析】 本题用到的知识点是乘积的导数与复合函数的求导公式,利用公式 $(uv)'=u'v=uv'$计算函数 $f(x)$的导数,借助于$(\mathrm{e}^{x}-1)$在 $x=0$ 处的值为零求解。

【解】 $f'(x)=\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)+(\mathrm{e}^{x}-1)[(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)]'$

所以 $f'(0)=(-1)^{n-1}n!$

3-22 已知 $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & x<0\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0\end{cases}$在 $x=0$ 处有二阶导数,试确定参数 a,b,c 的值。

【分析】 本题用到的知识点是可导与连续的定义,以及可导与连续的关系,由已知条件得方程组,联立方程组求解

【解】 $\because f(x)$在 $x=0$ 处有二阶导数

$\therefore f(x)$在 $x=0$ 处连续,且 $f'(x)$在 $x=0$ 处连续

从而有 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$,即 $\lim\limits_{x\to 0^-}(ax^2+bx+c)=0$ $\quad\therefore c=0$

又 $\because f(x)$在 $x=0$ 处可导 $\quad\therefore f'_+(0)=f'_-(0)$

而 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax^2+bx}{x}=b$

$\therefore b=1$,且 $f'_+(0)=f'_-(0)=1$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}2ax+1, & x<0\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

又 $f(x)$在 $x=0$ 处二阶可导 $\quad\therefore f''_+(0)=f''_-(0)$

而 $f''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-1}{x}=-1$

$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(2ax+1)-1}{x}=2a$

$\therefore 2a=-1$,即 $a=-\dfrac{1}{2}$

3-23 设函数 $f(x)$在 $x=2$ 的某邻域内可导,且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$,$f(2)=1$,求 $f'''(2)$。

【分析】 本题用到的知识点是复合函数及其高阶导数,关键是正确处理抽象函数的导数。

【解】 由题设知,$f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$,两边对 x 求导得

$$f''(x)=\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)=\mathrm{e}^{2f(x)}$$

两边再对 x 求导得 $f'''(x)=2\mathrm{e}^{2f(x)}f'(x)=2\mathrm{e}^{3f(x)}$,又 $f(2)=1$,

故　$f'''(2)=2e^{3f(2)}=2e^3$

3-24　设函数 $u(x),v(x)$都在其定义域上可导,证明:

$$[u(x)^{v(x)}]'=u(x)^{v(x)}[v(x)\ln u(x)]'$$

【分析】　本题用到的知识点幂指函数求导,采用对数求导法,方程两边先取对数,然后化成最简形式。

【证明】　令 $y=u(x)^{v(x)}$,方程两边取对数

$$\ln y=v(x)\ln u(x),\quad \frac{1}{y}\cdot y'=[v(x)\ln u(x)]'$$

即 $y'=y[v(x)\ln u(x)]'=u(x)^{v(x)}[v(x)\ln u(x)]'$

3-25　求函数的 $y=\dfrac{x^3}{x^2-2x-3}$ 的 n 阶导数。

【分析】　本题用到的知识点是高阶导数公式

$$\left(\frac{1}{a+x}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(a+x)^{n+1}},\quad \left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)}=\frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$$

先将函数化简为高阶导数的形式,再求 n 阶导数。

【解】　$y=\dfrac{x^3-2x^2-3x+2x^2-4x-6+7x+6}{x^2-2x-3}=x+2+\dfrac{27}{4(x-3)}+\dfrac{1}{4(x+1)}$

所以 $y'=1-\dfrac{27}{4(x-3)^2}-\dfrac{1}{4(x+1)^2},y''=\dfrac{27\times 2}{4(x-3)^3}+\dfrac{2}{4(x+1)^3}$

$$y^{(n)}=\frac{27\times(-1)^n n!}{4(x-3)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{4(x+1)^{n+1}},\quad n\geqslant 2$$

3-26　$y=x^2\sin 2x$,求 $y^{(50)}$。

【分析】　本题用到的知识点是莱布尼茨公式求高阶导数,函数 $y=x^2\sin 2x$ 是两个函数乘积的类型,应用莱布尼茨公式,选取 $u=\sin 2x,v=x^2$。

【解】　$y^{(50)}=C_{50}^0x^2(\sin 2x)^{(50)}+C_{50}^1(x^2)'(\sin 2x)^{(49)}+C_{50}^2(x^2)''(\sin 2x)^{(48)}$

$$=2^{50}x^2\sin(2x+25\pi)+100x\cdot 2^{49}\sin\left(2x+\frac{49}{2}\pi\right)+1225\cdot 2\cdot 2^{48}\sin(2x+24\pi)$$

$$=2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x\right)$$

3-27　设 $f(x)=\arctan x$,求 $f^{(n)}(0)$。

【分析】本题用到的知识点是莱布尼茨公式,首先将原函数求导,转化为乘积函数,利用莱布尼茨公式求 n 阶导数。

【解】　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$　$\therefore (1+x^2)f'(x)=1$

等式两边同时求 n 阶导数,并由莱布尼茨公式,可得

$$f^{(n+1)}(x)(1+x^2)+nf^{(n)}(x)\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}f^{(n-1)}(x)\cdot 2=0$$

$\therefore$当 $x=0$ 时,有 $f^{(n+1)}(0)+n(n-1)f^{(n-1)}(0)=0$

$\therefore f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)f^{(n-1)}(0)\quad (n\geqslant 3)$

又∵ $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0$ ∴由上式递推，可得

$$f^{(2k)}(0)=0, f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k!) \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

3-28 设 $y=1-xe^y$，求$\frac{dx}{dy}, \frac{d^2x}{dy^2}$。

【分析】 本题用到的知识点是隐函数的求导，等式两边同时对 y 求导，然后解出$\frac{dx}{dy}$，再对一阶导数求导得二阶导数。

【解】 等式两边同时对 y 求导，得 $1=-e^y\frac{dx}{dy}-xe^y$

解得$\frac{dx}{dy}=-\frac{1+xe^y}{e^y}$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(-\frac{1+xe^y}{e^y}\right)=-\frac{e^y\left(e^y\frac{dx}{dy}+xe^y\right)-e^y(1+xe^y)}{(e^y)^2}=\frac{2+xe^y}{e^y}$$

3-29 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求 $y''(0)$。

【分析】 本题用到的知识点是隐函数的导数，先利用隐函数求导法求一阶导数，再对一阶导数求导，在求导过程中将 y 看做中间变量，利用复合函数求导法求之。

【解】 方程两边同时对 x 求导，得 $e^y\cdot y'+y+xy'=0$

得 $y'=-\frac{y}{e^y+x}$ $\quad$ $\therefore y''=-\frac{y'(e^y+x)-y(e^y\cdot y'+1)}{(e^y+x)^2}$

将 $x=0$ 代入方程得 $y=1, y'=-1$。$\therefore y''(0)=\frac{1}{e^2}$

3-30 设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=e^{1+g(x)}, h'(1)=1, g'(1)=2$，求 $g(1)$。

【分析】 本题用到的知识点是复合函数和隐函数求导，$h(x)=e^{1+g(x)}$ 两边对 x 求导，再令 $x=1$ 即可。

【解】 $h(x)=e^{1+g(x)}$ 两边对 x 求导，得

$$h'(x)=e^{1+g(x)}g'(x)$$

上式中令 $x=1$，又 $h'(1)=1, g'(1)=2$，可得

$$1=h'(1)=e^{1+g(1)}g'(1)=2e^{1+g(1)}\Rightarrow g(1)=-\ln 2-1$$

3-31 求曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程。

【分析】 本题用到的知识点是隐函数的求导和导数的几何意义，首先求出曲线在点 $(0,1)$ 处的导数，再利用导数的几何意义求切线方程。

【解】 对曲线方程两边同时求导得 $\cos(xy)(y+xy')+\frac{1}{y-x}(y'-1)=1$，

斜率 $k=y'=-\frac{y\cos(xy)+\frac{-1}{y-x}-1}{x\cos(xy)+\frac{1}{y-x}}$，在 $(0,1)$ 处，$k=1$，所以切线方程为 $y-1=x$，

即 $y=x+1$

如图 3.1 所示。

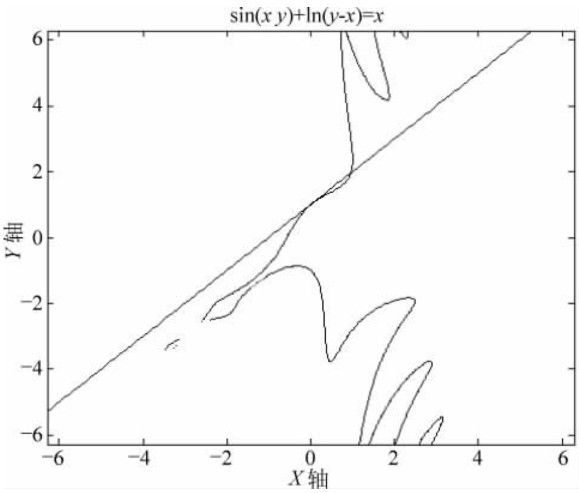


图　3.1

3-32　设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$。

【分析】　本题用到的知识点是隐函数的高阶导数。

【解】　将 $x=0$ 代入原方程可得 $y=0$

方程 $x^2-y+1=e^y$ 两端对 x 求导，有 $2x-\dfrac{dy}{dx}=e^y\dfrac{dy}{dx}$，将 $x=0,y=0$ 代入可得，所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$$

再次求导得 $2-\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+e^y\dfrac{d^2y}{dx^2}$，再将 $x=0,y=0,\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$ 代入可得

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=1$$

3-33　设 $y=y(x)$ 是方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$。

【分析】　本题用到的知识点是隐函数的高阶导数。

【解】　对方程 $xy+e^y=x+1$ 两边关于 x 求导有 $y+xy'+y'e^y=1$，得 $y'=\dfrac{1-y}{x+e^y}$

对 $y+xy'+y'e^y=1$ 再次求导可得 $2y'+xy''+y''e^y+(y')^2e^y=0$，

得 $y''=-\dfrac{2y'+(y')^2e^y}{x+e^y}$

当 $x=0$ 时，$y=0$，$y'_{(0)}=\dfrac{1-0}{e^0}=1$，代入上式得

$y''(0)=-\dfrac{2y'(0)+[y'(0)]^2e^0}{(0+e^0)^3}=-(2+1)=-3$

3-34　设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}\,(x>0,y>0)$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

【分析】　本题用到的知识点是无理函数的求导，一般采用对数求导法，在等式两边同时取对数去根号，再求隐函数的导数。

【解】 方程两边同时取对数，得$\frac{1}{x}\ln y=\frac{1}{y}\ln x$，即 $y\ln y=x\ln x$

等式两边同时对 x 求导，得 $y'\ln y+y'=\ln x+1$

$\therefore y'=\frac{\ln x+1}{\ln y+1}$

$\therefore \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{1}{x}(\ln y+1)-(\ln x+1)\frac{1}{y}y'}{(\ln y+1)^2}=\frac{y(\ln y+1)^2-x(\ln x+1)^2}{xy(\ln y+1)^3}$

3-35 设函数 $y=f(x)$的极坐标式为 $\rho=a(1+\cos\theta)$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

【分析】 本题用到的知识点是参数方程求导，利用函数的极坐标形式将原方程转化为参数方程，再进行参数方程求导。

【解】 由 $\rho=a(1+\cos\theta)$得$\begin{cases}x=\rho\cos\theta=a(1+\cos\theta)\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta=a(1+\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$

$\therefore \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-a\sin^2\theta+a(1+\cos\theta)\cos\theta}{-a\sin\theta\cos\theta-a(1+\cos\theta)\sin\theta}=-\frac{\cos2\theta+\cos\theta}{\sin2\theta+\sin\theta}$

3-36 设函数 $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\arctan x}(a>0)$，求 y'。

【分析】 本题用到的知识点是无理函数和指数函数的导数，一般采用对数求导法，即对方程两边取对数简化方程，再进行隐函数求导。

【解】 取对数得$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln a+\arctan\frac{y}{x}$

对 x 微分得$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2}$，于是 $y'=\frac{x+y}{x-y}$

3-37 设函数 $f(x)$在 $x=a$ 可导，且 $f(a)\neq0$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$。

【分析】 本题用到的知识点是关于 e 的重要极限和导数的定义，关键是将原式化为重要极限的形式。

【解】 记 $u(n)=\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}u(n)=0$，应用关于 e 的重要极限公式，有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}[1+u(n)]^{\frac{1}{u(n)}\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)\frac{1}{n}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{f(a)}\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

3-38 设 $f(x)$有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，求$\lim\limits_{x\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$。

【分析】 本题用到的知识点是重要极限和导数的定义，关键是得到$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1+x)}$的值。

【解】 由于 $f'(x)$连续，有

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1$

$\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}\frac{f(x)}{\ln(1+x)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(1+x)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$

3-39 设函数 $f(x)$ 当 $x\in[-1,1)$ 时有定义且可微分两次,应当如何选择系数 a,b,c,使函数

$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\leqslant x_0\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0\end{cases}$ 是可微分两次的函数?

【分析】 本题用到的知识点是可导与连续的关系,关键是由 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}F(x)=F(x_0)$ 和 $F'(x_0-0)=F'(x_0+0)$,$F''(x_0-0)=F''(x_0+0)$ 寻找 a,b,c 的关系。

【解】 按题设 $F'(x)$ 存在,所以 $F(x)$ 在点 x_0 连续,即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}F(x)=F(x_0)$

也即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}[a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c]=f(x_0)$,于是 $c=f(x_0)$

由 $F'(x_0-0)=F'(x_0+0)$ 得:$f'(x_0)=[2a(x-x_0)+b]\big|_{x=x_0}=b$

再有 $F''(x_0-0)=F''(x_0+0)$ 得:$f''(x_0)=2a$,于是 $a=\dfrac{1}{2}f''(x_0)$

达标自测题

1. 设 $y=10^{x^2}$,则 $y''=($ $)$。

(A) $2\cdot 10^{x^2}\ln 10(1+\ln 10)$ (B) $2\cdot 10^{x^2}\ln 10(1+2x^2\ln 10)$

(C) $10^{x^2}\ln 10(1+2x^2\ln 10)$ (D) $2\cdot 10^{x^2}\ln 10(1+x\ln 10)$

2. 已知 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$,则 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=($ $)$。

(A) $-\dfrac{y''}{(y')^3}$ (B) $-\dfrac{1}{(y')^2}$ (C) $-\dfrac{y''}{(y')^2}$ (D) $-\dfrac{1}{y''y'}$

3. 下列各式正确的是( )。

(A) $x^2\mathrm{e}^{2x}(3x+2)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x^3\mathrm{e}^{2x})$ (B) $\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)$

(C) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})$ (D) $\sin 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin^2 x)$

4. 曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin 2t\\ y=\mathrm{e}^t\cos 2t\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程是( )。

(A) $y=2x+1$ (B) $y=\dfrac{1}{2}x+1$ (C) $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ (D) $y=x+\dfrac{1}{2}$

5. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,则 $f(0)$ 及 $f'(0)$ 为( )。

(A) 0,0 (B) 0,1 (C) 1,0 (D) 1,1

6. 参数方程$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$所确定的函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$=(　　)。

(A) $-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$　　(B) $\dfrac{b}{a}\csc^2 x$

(C) $\dfrac{1}{a\sin^2 t\cos t}$　　(D) $-\dfrac{b}{a^2\cos^3 t\sin t}$

7. 已知 $x-y+\dfrac{1}{2}\sin y=0$,则$\dfrac{d^2y}{dx^2}$=(　　)。

(A) $-\dfrac{4\sin y}{(2-\cos y)^3}$　　(B) $\dfrac{\cos y}{2(2-\cos y)^3}$　　(C) $\dfrac{2\sin y}{(1-\cos y)^3}$　　(D) $\dfrac{\cos y}{(2+\cos y)^3}$

8. 参数方程$\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$,$f''(t)\neq 0$ 所确定的函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$=(　　)。

(A) $\dfrac{1}{f''(t)}$　　(B) 1　　(C) $\dfrac{1}{tf''(t)}$　　(D) $\dfrac{1}{f'(t)}$

9. 下列各函数的导数计算错误的是(　　)。

(A) $[(3x+5)^2(5x+4)^5]=(3x+5)^2(5x+4)^4(120x+161)$

(B) $(x^a+a^x+a^a)'=ax^{a-1}+a^x\ln a$

(C) $(e^{\tan\frac{1}{x}})'=-\sec^2\dfrac{1}{x}e^{\tan\frac{1}{x}}$

(D) $(\sqrt{x+\sqrt{x}})'=-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

10. 参数方程$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$所确定的函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$=(　　)。

(A) $-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$　　(B) $\dfrac{b}{a}\csc^2 x$

(C) $\dfrac{1}{a\sin^2 t\cos t}$　　(D) $-\dfrac{b}{a^2\cos^3 t\sin t}$

11. 已知 $y=(\tan x)^{\sin x}+x^x$,则 y'=(　　)。

(A) $(\tan x)^{\sin x}(\cos x\ln\tan x+\sec x)+x^x(\ln x+1)$

(B) $(\tan x)^{\sin x}(\sin x\ln\cot x+\csc x)+x^x(\ln x+1)$

(C) $(\cos x\ln\tan x-\sec x)+x^x(\ln x+1)$

(D) $(\tan x)^{\sin x}(\ln\tan x-\sec x)+(\ln x-1)$

12. 若 $f(x)$=(　　),则 $f'(x)=0$。

(A) $\cos(x^2)-\sin(x^2)$　　(B) $\sec(x^2)-\csc(x^2)$

(C) $\arccos(-x^2)-\arcsin(x^2)$　　(D) $\arcsin x-\arccos x$

13. 设 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\cos 2x$,则 $f^{(27)}(\pi)$的值等于(　　)。

(A) 0　　(B) $-\dfrac{1}{2^{27}}$　　(C) $2^{27}-\dfrac{1}{2^{27}}$　　(D) 2^{27}

14. 设函数 $y=\ln\sin(e^x)$，则 $dy=$(　　)。

(A) $\cot(e^x)dx$　　(B) $-\cot(e^x)dx$

(C) $e^x\cot(e^x)dx$　　(D) $-e^x\cot(e^x)dx$

15. 设 $f(x)$ 在 x_0 可导，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=2$，则 $f'(x_0)=$(　　)。

(A) 1　　(B) -1　　(C) 2　　(D) -2

16. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=3+\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 所确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$(　　)。

(A) $\dfrac{1+t^2}{4t}$　　(B) $\dfrac{1+t^2}{2t}$　　(C) $\dfrac{1+t^2}{4t^2}$　　(D) $\dfrac{1+t^2}{2t^2}$

17. 若函数 $y=f(x)$ 由方程 $2xy-e^x+e^y=0$ 所确定，则 $y'(0)=$(　　)。

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) -1

18. 设 $y=x^{99}+e^{3x}$，则 $y^{(100)}=$(　　)。

(A) $3^{100}e^{3x}$　　(B) $100!$　　(C) $100!+3^{100}e^{3x}$　　(D) $100!+e^{3x}$

19. 若已知 $dy=\dfrac{2}{t}dt$，则 y 是下列选项中的(　　)。

(A) $\ln\left(\dfrac{t}{2}\right)$　　(B) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{t}{2}\right)$　　(C) $\ln t^2$　　(D) $\ln^2 t$

20. 设函数 $y=xe^{\cos x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$(　　)。

(A) $e^{\cos x}(1-x\sin x)$　　(B) $-x\sin x e^{\cos x}$

(C) $e^{\cos x}(1+x\sin x)$　　(D) $x\sin x e^{\cos x}$

21. 已知 $y=e^{2x}$，则 $y'''=$(　　)。

(A) $2e^{2x}$　　(B) e^{2x}　　(C) $8e^{2x}$　　(D) $2xe^{2x}$

22. 由方程 $u\sin t-\cos(t-u)=0$ 所确定的函数 $u=u(t)$ 的导数 $u'=$(　　)。

(A) $\dfrac{u\cos t+\sin(t-u)}{\sin t-\sin(t-u)}$　　(B) $\dfrac{u\cos t+\sin(t-u)}{\sin(t-u)-\sin t}$

(C) $\dfrac{u\cos t-\sin(t-u)}{\sin t-\sin(t-u)}$　　(D) $\dfrac{u\cos t+\sin(t-u)}{\sin t+\sin(t-u)}$

23. 复合函数 $z=\dfrac{v}{u}$，而 $u=\ln x, v=e^x$，则 $\dfrac{dz}{dx}$ 为(　　)。

(A) $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{e^x}{\ln x}\left(1-\dfrac{1}{x\ln x}\right)$　　(B) $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{e^x}{\ln x}\left(1+\dfrac{1}{x\ln x}\right)$

(C) $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{\ln x}\left(1-\dfrac{1}{x\ln x}\right)$　　(D) $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{\ln x}\left(1+\dfrac{1}{x\ln x}\right)$

24. 函数 $xy=e^x+e^y$ 的微分 $dy=$(　　)。

(A) $\dfrac{e^x-y}{x-e^y}$　　(B) $\dfrac{x-e^y}{e^x-y}$　　(C) $\dfrac{e^x-y}{x-e^y}dx$　　(D) $\dfrac{x-e^y}{e^x-y}dx$

3.4 拓展实训

本节的主要内容是一元函数的导数与微分等概念和它们的各种计算方法,因为这是微积分学中最基本和最重要的理论之一。导数是一类特殊的函数极限,即$\frac{0}{0}$型极限。它有鲜明的几何意义和广泛的物理意义。函数的微分是函数增量与自变量增量之间关系的另一种表达形式,并且可微和可导是等价的。那为什么还要研究函数的微分呢?因为它更确切地体现了"以直代曲"的思想(在一点附近可用切线近似曲线),而且微分形式不变性是求不定积分的基础,用微分近似函数增量时泰勒公式的雏形。通过本部分的拓展实训练习,应熟练掌握如下知识:

(1) 导数定义　(2) 分段函数求导　(3) 四则运算法则
(4) 反函数求导　(5) 复合函数求导法则　(6) 隐函数求导
(7) 幂指函数求导　(8) 参数方程求导　(9) 高阶导数
(10) 变限函数求导

使读者提升到考研水准,其中内容(10)将在后续章节中详细介绍。在考研数学中,导数与微分和中值定理与导数应用问题的题量大概占高等数学部分题量的 8%。

拓展实训 Ⅰ

3-40　设函数 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$在 $x=1$ 处连续,则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$在 $x=1$ 处可导的(　　)。【2003 数四】

(A) 充分必要条件　(B) 必要但非充分条件
(C) 充分但非必要条件　(D) 既非充分也非必要条件

【分析】

本题考查的是导数的概念。被积函数含有绝对值,应当作分段函数看待,利用 $f(x)$在 $x=1$ 处左右导数的定义讨论即可。

【详解】

因为

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x-1}\cdot\varphi(x)=3\varphi(1)$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\lim_{x\to1^-}\frac{x^3-1}{x-1}\cdot\varphi(x)=-3\varphi(1)$$

可见,$f(x)$在 $x=1$ 处可导的充分必要条件是 $3\varphi(1)=-3\varphi(1)\Leftrightarrow\varphi(1)=0$,故应选(A)。

3-41　设函数 $f(x)$连续,且 $f'(0)>0$,则存在 $\delta>0$,使得(　　)。【2004 数一】

(A) $f(x)$在$(0,\delta)$内单调增加　(B) $f(x)$在$(-\delta,0)$内单调减少
(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$有 $f(x)>f(0)$　(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$有 $f(x)>f(0)$

【分析】

函数 $f(x)$只在一点的导数大于零，一般不能推出单调性，因此可排除(A)，(B)选项，再利用导数的定义及极限的保号性进行分析即可。

【详解】

由导数的定义，知 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$，根据保号性知，存在 $\delta>0$，当 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$时，有 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$，即当 $x\in(-\delta,0)$时，$f(x)<f(0)$；而当 $x\in(0,\delta)$时，有 $f(x)>f(0)$，故应选(C)。

3-42 设 $f'(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则下列结论中错误的是(　　)。

【2004 数三】

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(a)$

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(b)$

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$

【分析】

利用介值定理与极限的保号性可得到三个正确的选项，由排除法可选出错误选项。

【详解】

首先，由已知 $f'(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则由介值定理，

至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$；

另外，$f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，由极限的保号性，至少存在一点 $x_0\in(a,b)$

使得$\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0$，即 $f(x_0)>f(a)$。同理，至少存在一点 $x_0\in(a,b)$

使得 $f(x_0)>f(b)$。所以，(A)，(B)，(C)都正确，故选(D)。

3-43 设函数 $y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$确定，则曲线 $y=y(x)$在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是(　　)。

【2005 数二】

(A) $\dfrac{1}{8}\ln2+3$　　(B) $-\dfrac{1}{8}\ln2+3.$

(C) $-8\ln2+3$　　(D) $8\ln2+3$

【分析】

本题考查的是参数方程求导问题。先由 $x=3$ 确定 t 的取值，进而求出在此点的导数及相应的法线方程，从而可得所需的横坐标。

【详解】

当 $x=3$ 时，有 $t^2+2t=3$，得 $t=1$，$t=-3$(舍去，此时 y 无意义)，于是$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\left.\dfrac{\frac{1}{(1+t)}}{2t+2}\right|_{t=1}=\dfrac{1}{8}$，可见过点 $x=3$ (此时 $y=\ln2$)的法线方程为 $y-\ln2=-8(x-3)$。令

$y=0$,得其与 x 轴交点的横坐标为$\frac{1}{8}\ln2+3$,故应(A)。

3-44 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内(　　)。

【2005 数一】

(A) 处处可导　　(B) 恰有一个不可导点

(C) 恰有两个不可导点　　(D) 至少有三个不可导点

【分析】

本题考查的是导数的概念。先求出 $f(x)$的表达式,再讨论其可导情形。

【详解】

当$|x|<1$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$;当$|x|=1$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+1}=1$;当$|x|>1$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}|x|^3\left(\frac{1}{|x|^{3n}}+1\right)^{\frac{1}{n}}=|x|^3$. 即 $f(x)=\begin{cases}-x^3, & x<-1\\ 1, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x^3, & x>1\end{cases}$,可见 $f(x)$仅在 $x=\pm1$ 时不可导,故应选(C)。

3-45 以下四个命题中,正确的是(　　)。　　【2005 数三】

(A) 若 $f'(x)$在$(0,1)$内连续,则 $f(x)$在$(0,1)$内有界

(B) 若 $f(x)$在$(0,1)$内连续,则 $f(x)$在$(0,1)$内有界

(C) 若 $f'(x)$在$(0,1)$内有界,则 $f(x)$在$(0,1)$内有界

(D) 若 $f(x)$在$(0,1)$内有界,则 $f'(x)$在$(0,1)$内有界

【分析】

本题考查的是导数和连续的关系。通过反例用排除法找到正确答案即可。

【详解】

设 $f(x)=\frac{1}{x}$,则 $f(x)$及 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$均在$(0,1)$内连续,但 $f(x)$在$(0,1)$内无界,排除(A),(B);又 $f(x)=\sqrt{x}$在$(0,1)$内有界,但 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$在$(0,1)$内无界,排除(D),故应选(C)。

3-46 设函数 $g(x)$可微,$h(x)=e^{1+g(x)}$,$h'(1)=1$,$g'(1)=2$,则 $g(1)$等于(　　)。

【2006 数二】

(A) $\ln3-1$　　(B) $-\ln3-1$

(C) $-\ln2-1$　　(D) $\ln2-1$

【分析】

本题主要考查幂指函数求导。题设条件 $h(x)=e^{1+g(x)}$两边对 x 求导,再令 $x=1$ 即可。

【详解】

$h(x)=e^{1+g(x)}$两边对 x 求导,得 $h'(x)=e^{1+g(x)}g'(x)$,上式中令 $x=1$,又 $h'(1)=1$,$g'(1)=2$,可得

$1=h'(1)=e^{1+g(1)}g'(1)=2e^{1+g(1)}\Rightarrow g(1)=-\ln2-1$，故选(C)。

3-47　设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=($　　$)$。

【2012 数一】

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　(B) $(-1)^n(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$　　(D) $(-1)^n n!$

【分析】

见达标实训Ⅱ3-21。

3-48　设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则(　　)。　【2006 数三】

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在　　(B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在　　(D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

【分析】

从 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$ 入手计算 $f(0)$，利用导数的左右导数定义判定 $f'_-(0)$，$f'_+(0)$ 的存在性。

【详解】

由 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$ 知，$\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=0$. 又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=0$。

令 $t=h^2$，则 $1=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=f'_+(0)$，所以 $f'_+(0)$ 存在，故本题选(C)。

3-49　设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是(　　)。　【2007 数一】

(A) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

(B) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)=0$ 存在

(D) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)=0$ 存在

【分析】

本题主要考查导数和连续的概念。设 $f(x)=|x|$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|-|-x|}{x}=0$ 存在，但 $f'(0)$ 不存在。因此(C)是错误的，选(D)。

3-50　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$________。

(A) $-2f'(0)$　　(B) $-f'(0)$　　(C) $f'(0)$　　(D) 0

【分析】

本题考查的是导数概念的应用。

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-2\dfrac{f(x^3)-f(0)}{x^3}\right]$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，故原式为 $-f'(0)$ 故选(B)。

3-51 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点(1,1)处的切线方程是________。 【2003 数二】

【分析】

本题主要考查隐函数求导。先求出在点(1,1)处的导数，然后利用点斜式写出切线方程即可.

【详解】

等式 $xy+2\ln x=y^4$ 两边直接对 x 求导，得 $y+xy'+\dfrac{2}{x}=4y^3y'$，将 $x=1,y=1$ 代入上式，有 $y'(1)=1$。故过点(1,1)处的切线方程为 $y-1=1\cdot(x-1)$，即 $x-y=0$。

3-52 已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$________。 【2003 数三】

【分析】

本题主要考查导数的几何意义。曲线在切点的斜率为 0，即 $y'=0$，由此可确定切点的坐标应满足的条件，再根据在切点处纵坐标为零，即可找到 b^2 与 a 的关系。

【详解】

由题设，在切点处有 $y'=3x^2-3a^2=0$，有 $x_0^2=a^2$，又在此点 y 坐标为 0，于是有 $x_0^3-3a^2x_0+b=0$，故 $b^2=x_0^2(3a^2-x_0^2)^2=a^2\cdot 4a^4=4a^6$。

3-53 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为________。 【2004 数一】

【分析】

本题为基础题型，相当于已知切线的斜率为 1，由曲线 $y=\ln x$ 的导数为 1 可确定切点的坐标。

【详解】

由 $y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}=1$，得 $x=1$，可见切点为(1,0)，于是所求的切线方程为 $y-0=1\cdot(x-1)$，即 $y=x-1$。

3-54 设 $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$________。 【2004 数四】

【分析】

本题为基础题型，先求导函数即可。

【详解】

因为 $y=\arctan e^x-x+\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$，$y'=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}-1+\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$，所以，

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\frac{e-1}{e^2+1}$$

3-55　设 $y=(1+\sin x)^{x}$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}=$________。【2005 数二】

【分析】

本题属基本题型，幂指函数的求导(或微分)问题可化为指数函数求导或取对数后转化为隐函数求导。

【详解】

方法一　$y=(1+\sin x)^{x}=\mathrm{e}^{x\ln(1+\sin x)}$，于是 $y'=\mathrm{e}^{x\ln(1+\sin x)}\cdot\left[\ln(1+\sin x)+x\cdot\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right]$，从而 $\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}=y'(\pi)\mathrm{d}x=-\pi\mathrm{d}x$。

方法二　两边取对数，$\ln y=x\ln(1+\sin x)$，对 x 求导，得 $\dfrac{1}{y}y'=\ln(1+\sin x)+\dfrac{x\cos x}{1+\sin x}$，于是 $y'=(1+\sin x)^{x}\cdot\left[\ln(1+\sin x)+x\cdot\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right]$，故 $\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}=y'(\pi)\mathrm{d}x=-\pi\mathrm{d}x$。

3-56　设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-x\mathrm{e}^{y}$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=$________。【2006 数二】

【分析】

本题为隐函数求导，可通过方程两边对 x 求导(注意 y 是 x 的函数)，一阶微分形式不变性和隐函数存在定理求解。

【详解】

方法一　方程两边对 x 求导，得 $y'=-\mathrm{e}^{y}-xy'\mathrm{e}^{y}$。又由原方程知，$x=0$ 时，$y=1$，代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=y'\big|_{x=0}=-\mathrm{e}$$

方法二　方程两边微分，得 $\mathrm{d}y=-\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}x-x\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y$，代入 $x=0,y=1$，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=-\mathrm{e}$。

方法三　(此方法所涉及知识将在第六章介绍)令 $F(x,y)=y-1+x\mathrm{e}^{y}$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=0,y=1}=\mathrm{e}^{y}\Big|_{x=0,y=1}=\mathrm{e},\quad \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{x=0,y=1}=(1+x\mathrm{e}^{y})\Big|_{x=0,y=1}=1$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=0,y=1}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}\Big|_{x=0,y=1}}=-\mathrm{e}$。

3-57　设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$，$f(2)=1$，则 $f'''(2)=$________。【2006 数三】

【分析】

利用复合函数求导即可。

【详解】

由题设知，$f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$，两边对 x 求导得 $f''(x)=\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)=\mathrm{e}^{2f(x)}$，两边再对 x 求导得

$f'''(x)=2\mathrm{e}^{2f(x)}f'(x)=2\mathrm{e}^{3f(x)}$，又 $f(2)=1$，故　$f'''(2)=2\mathrm{e}^{3f(2)}=2\mathrm{e}^{3}$。

3-58 曲线$\begin{cases}x=\cos t-\cos^2 t\\ y=1+\sin t\end{cases}$上对应于$t=\frac{\pi}{4}$点处的法线斜率为________。

【2007 数二】

【分析】

本题考查的是参数方程求导和切线与法线的关系。

先求切线斜率 $k=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'}{x'}=\frac{\cos t}{-\sin t+2\cos t\sin t}=\frac{-1}{\tan t-2\sin t}$，于是 $k=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{-1}{1-\sqrt{2}}$，因此法线斜率为 $1-\sqrt{2}$。

3-59 设函数 $y=\frac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$________。 【2007 数二】

【分析】

本题考查的是高阶导数。用归纳法求解。

$y'=-2(2x+3)^{-2}$，$y''=2^2(-1)^2 2(2x+3)^{-3}$，$y^{(3)}=2^3(-1)^3 3!(2x+3)^{-4}$。易归纳证得 $y^{(n)}=2^n(-1)^n n!(2x+3)^{-(n+1)}$， 因此 $y^{(n)}(0)=(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{3}n!$。

3-60 已知函数 $f(x)$连续且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$，则曲线 $y=f(x)$上对应 $x=0$ 处的切线方程为________。 【2008 数四】

【分析】

本题考查的是导数的几何意义。由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ 且 $f(x)$连续，可得 $f(0)=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2$，所以切线方程为 $y=2x$。

3-61 设 $y=y(x)$是方程 $xy+\mathrm{e}^y=x+1$ 确定的隐函数，则$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{x=0}=$________。

【2009 数二】

【分析】

本题考查的是隐函数求二阶导数的问题。对方程 $xy+\mathrm{e}^y=x+1$ 两边关于 x 求导有 $y+xy'+y'\mathrm{e}^y=1$，得 $y'=\frac{1-y}{x+\mathrm{e}^y}$。对 $y+xy'+y'\mathrm{e}^y=1$ 再次求导可得 $2y'+xy''+y''\mathrm{e}^y+(y')^2\mathrm{e}^y=0$，得 $y''=-\frac{2y'+(y')^2\mathrm{e}^y}{x+\mathrm{e}^y}$。

当 $x=0$ 时，$y=0$，$y'(0)=\frac{1-0}{\mathrm{e}^0}=1$，代入得 $y'(0)=-\frac{2y'(0)+[y'(0)]^2\mathrm{e}^0}{(0+\mathrm{e}^0)^3}=-(2+1)=-3$。

3-62 设某产品的需求函数为 $Q=Q(P)$，其对应价格 P 的弹性 $\zeta=0.2$，则当需求量为 10 000 件时，价格增加 1 元会使产品收益增加________元。 【2009 数三】

【分析】

本题属于导数的简单应用。所求即为$(QP)'=Q'P+Q$。因为$\zeta_P=\dfrac{Q'P}{Q}=0.2$，所以$Q'P=0.2Q$。所以$(QP)'=0.2Q+Q=1.2Q$，将$Q=10\ 000$代入有$(QP)'=12\ 000$。

3-63 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)$________。【2011 数三】

【分析】

本题属于导数和重要极限的综合应用。

$$f(x)=\lim_{t\to 0}x\ (1+3t)^{\frac{x}{t}}=x\lim_{t\to 0}[(1+3t)^{\frac{1}{3t}}]^{3x}=xe^{3x},f'(x)=e^{3x}+3xe^{3x}=(1+3x)e^{3x}。$$

3-64 曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=e^{x}$ 在点$(0,0)$处的切线方程为________。【2011 数三】

【分析】

本题考查的是隐函数求导。$\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=e^{y}$ 两边对 x 求导数得 $\sec^2\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)=e^{y}\ \dfrac{dy}{dx}$，把 $x=0,y=0$ 代入得$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-2$，于是切线方程为 $y=-2x$。

3-65 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$，$y=f[f(x)]$，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$________。

【2012 数三】

【分析】

本题考查的是分段函数的求导问题。

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f'[f(x)]f'(x)\,|_{x=0}=f'[f(0)]f'(0)=f'(-1)f'(0)$，由 $f(x)$的表达式可知 $f'(0)=f'(-1)=2$，可知$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=4$。

3-66 设函数 $y=f(x)$由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$确定，则$\lim\limits_{n\to 0}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=$________。

【2013 数一】

【分析】

本题考查的是隐函数求导和导数的概念。令 $x=0$，得 $y=1$，两边求导得

$y'-1=e^{x(1-y)}(1-y-xy')$。将 $x=0,y=1$ 代入得 $y'(0)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1}{\dfrac{1}{n}}=f'(0)=1$。

3-67 设$\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$（$t$ 为参数），则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$________。【2013 数一】

【分析】

本题考查的是参数方程求二阶导数的问题。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t+t\cos t-\sin t}{\cos t}=t,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=1\cdot\frac{1}{\cos t}=\frac{1}{\cos t}\ \therefore\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$$

3-68 设曲线 $y=f(x)$ 和 $y=x^2-x$ 在点 $(0,1)$ 处有公共的切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=$ ________。 【2013 数三】

【分析】

本题属于导数的简单应用。

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+2}\cdot\frac{f\left(1-\frac{2}{n+2}\right)}{-\frac{2}{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+2}\cdot\frac{f\left(1-\frac{2}{n+2}\right)-f(1)}{-\frac{2}{n+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1-\frac{2}{n+2}\right)-f(1)}{-\frac{2}{n+2}}=-2f'(1)=-2$$

拓展实训Ⅱ

3-69 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数。(Ⅰ)写出 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式；(Ⅱ)问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。 【2004 数二】

【分析】

本题考查的是分段函数在分段点的可导性，因此只能用导数定义讨论。

【详解】

(Ⅰ) 当 $-2\leqslant x<0$，即 $0\leqslant x+2<2$ 时，

$$f(x)=kf(x+2)=k(x+2)[(x+2)^2-4]=kx(x+2)(x+4)$$

(Ⅱ) 由题设知 $f(0)=0$，

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x^2-4)}{x}=-4$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)}{x}=8k$$

令 $f'_-(0)=f'_+(0)$，得 $k=-\frac{1}{2}$。即当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

3-70 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定。设 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$。 【2007 数二】

【详解】

本题考查的是导数应用。由方程 $y-xe^{y-1}=1\Rightarrow y(0)=1$，求导得

$y'-e^{y-1}-xe^{y-1}y'=0\Rightarrow y'(0)=1$，再求导得

$y''-2e^{y-1}y'-x(e^{y-1}y')'=0\Rightarrow y''(0)=2$。现由 $z=f(\ln y-\sin x)\Rightarrow$

$$\frac{dz}{dx}=f'(\ln y-\sin x)\left(\frac{y'}{y}-\cos x\right)\Rightarrow\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}=f'(0)\times0=0$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f''(\ln y-\sin x)\left(\frac{y'}{y}-\cos x\right)^2+f'(\ln y-\sin x)\left(-\frac{y'^2}{y^2}+\frac{y''}{y}+\sin x\right)$$

$$\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}=f''(0)\times 0+f'(0)=1$$

3.5 应用实训

导数是微分学的核心概念之一，它是一种特殊的极限，反映了函数变化的快慢程度，在物理学，经济学，制造业等方面都有广泛的应用，是开展科学研究必不可少的工具。本节中，借助导数讨论了物理学绝热过程中压力的变化，经济学中边际和弹性分析，医学中心输出量，核弹头的制造，玻璃钢瓶的使用，航空摄影等问题，让读者切身感受到导数在实际问题中的工具价值。

通过本节的学习，使读者理解并掌握导数与微分在求解实际问题中的应用方法，深刻体会导数的物理意义，几何意义及经济背景，提高解决实际问题的能力。

3-71 压力变化问题

在化学中，所谓绝热过程，是指既不能得到热量也不损失热量的过程。根据实验表明，在绝热过程中，某些气体（如氢或氧）在容器中的压力 P 和体积 V 满足公式

$$PV^{1.4}=C(\text{常数})$$

已知某时刻封闭容器中氢的体积是 4m^3，压力是 0.75kg/m^2，如果体积以 $0.5\text{m}^3/\text{s}$ 的速度增加，求此时压力的递减速度。

【解】 对方程 $PV^{1.4}=C$ 两端对 t 求导得

$$P\frac{d}{dt}(V^{1.4})+\frac{dP}{dt}\cdot V^{1.4}=0$$

即

$$P\times 1.4\times V^{0.4}\frac{dV}{dt}+\frac{dP}{dt}\times V^{1.4}=0$$

故

$$\frac{dP}{dt}=\frac{-1.4PV^{0.4}}{V^{1.4}}\frac{dV}{dt}=-1.4\frac{P}{V}\frac{dV}{dt}$$

代入数据，得

$$\frac{dP}{dt}=-1.4\times\frac{0.75}{4}\times 0.5=-0.131\,25$$

所以此时压力的递减速度是 $0.131\,25\text{kg/m}^2/\text{s}$。

3-72 边际利润问题

某企业生产一种产品，每天的总利润 $P(x)$（元）与产量 x（吨）之间的函数关系为

$$P(x)=250x-5x^2$$

（1）试给出边际利润函数的表达式；（2）试阐述 $x=10,25,30$ 时边际利润的意义。

【注】 规定若经济函数 $f(x)$ 可导，则其导数 $f'(x)$ 称为经济函数 $f(x)$ 的边际函数。例如，成本函数 $C(x)$ 的导数 $C'(x)$ 称为边际成本函数；收益函数 $R(x)$ 的导数 $R'(x)$ 称为

边际收益函数；利润函数 $L(x)$的导数 $L'(x)$称为边际利润函数。

【解】

(1) 边际利润为 $P'(x)=250-10x$。

(2) 在 $x=10$ 时，$P'(10)=150$ 元。它表示，在每天生产 10t 的基础上，再多生产 1t，总利润将增加 150 元。

在 $x=25$ 时 $P'(25)=0$，说明当每天的产量是 25t 时，再多生产 1t，总利润几乎没有变化，这一吨产量并没有产生利润。

在 $x=30$ 时，$P'(30)=-50$，表明产量在 30 吨/天时，再多生产 1t，总利润就要减少 50 元。

这说明并非生产的产品数量越多，利润越高。

3-73 机翼影子移动问题

一架飞机沿抛物线 $y=x^2+1$ 的轨道向地面俯冲，x 轴取在地面上，机翼到地面的距离以 100m/s 的固定速度减少。问机翼离地面 2501m 时，机翼影子在地面上的运动速度是多少(假设太阳光线是铅直的)。如图 3.2 所示。

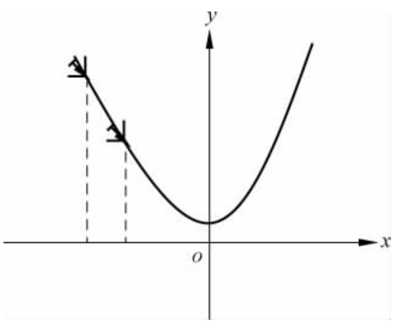


图 3.2

【解】 机翼到地面的距离以 100m/s 的速度递减，所以机翼垂直下降的速度是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-100$$

(取负号是因为下降，方向向下。)又因为太阳光是垂直的，太阳到地面的距离比飞机到地面的距离要大得多，所以，机翼影子在地面的运动速度就是飞机机翼的水平速度$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$。

因为

$$y(t)=1+x^2(t)$$

两边对 t 求导，即有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

由上式得

$$x(t)=\sqrt{y(t)-1}$$

当 $y=2510\text{m}$ 时，$x=-50\text{m}$，代入得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1\text{m/s}$$

3-74 弹性分析问题

某商品的需求量 Q 为价格 P 的函数

$$Q=150-2P^2$$

求(1) 当 $P=6$ 时的边际需求，并说明其经济意义；

(2) 当 $P=6$ 时的需求弹性，并说明其经济意义；

(3) 当 $P=6$ 时，若价格下降 2%，总收益将变化百分之几？是增加还是减少？

【解】 (1) $Q'(P)=-4P, Q'(6)=-24$

说明当价格为 6 时，再提高(下降)一个单位价格，需求将减少(增加)24 个单位商品量。

(2) $\eta(P)=-\dfrac{P}{Q}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\dfrac{4P^2}{150-2P^2}$　　　$\eta(6)\approx 1.85$

说明价格上升(下降)1%，则需求约减少(增加)1.85%。

(3) $R(P)=150P-2P^3$　$\dfrac{ER}{EP}=-\dfrac{P}{R}\cdot\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=\dfrac{-P}{150P-2P^3}\cdot(150-6P^2)=-\dfrac{150-6P^2}{150-2P^2}$

$$\left.\frac{ER}{EP}\right|_{P=6}\approx 0.846$$

∴若价格下降 2%，总收益约增加(0.846×2)%，即 1.692%。

3-75 球手击球问题

在垒球比赛中，当投球手将球投出时，击球手总想要盯住飞行的球，这样，击球的准确性才更大。为此，击球手的眼睛就要随着球的飞行而转动。设球速为 40m/s，为方便起见，假设球在击球手眼睛的水平面上飞行，本垒离击球手 0.6m，试问，当球穿过本垒时，击球手眼睛的转动速度为多少才能盯住飞行的球？

【解】 角 θ 如图 3.3 所示，y 为球距本垒的距离，则变量 y 和 θ 都随时间变化而变化，且满足下列关系式。

$$\cos\theta=-\frac{h}{\sqrt{y^2+h^2}}$$

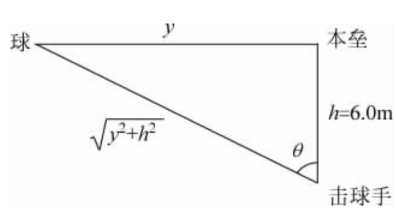


图 3.3

对上式两边求导得

$$-\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{-hy}{(y^2+h^2)^{3/2}}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

将 $\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{y^2+h^2}}$代入得

$$\frac{-y}{\sqrt{y^2+h^2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{-hy}{(y^2+h^2)^{3/2}}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{h}{y^2+h^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$称为角速度，即当球距本垒 y/m 时，球以速度$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$飞行，而击球手以速度$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$转动他的眼睛。当球穿过本垒时，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-40\mathrm{m/s},\quad h=0.6\mathrm{m},\quad y=0\mathrm{m}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{0.6}{0^2+0.6^2}(-40)\approx-67\mathrm{rad/s}\approx-3839^\circ/\mathrm{s}$$

其中，负号表示转动的方向是使 θ 减小的方向。

下面来简单分析一下以上结论，假定一般人的眼睛$\frac{1}{5}$s 能转动 180°，即转动速度为每秒 900°，这一速度只是以上结果的$\frac{1}{4}$，因而一般人很难在比赛中真正盯住飞行的球。有趣的是，当取 $h=2.5$m 时，$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$约为每秒 917°，此时，你能够盯住飞行的球，但你离本垒太远，已无法击球。

3-76 心输出量问题

心输出量是指心脏(一侧心室)每分钟泵出的血液量。这个指标有重要的临床价值，在危重病人的监护方面更是重要的生理指标。通过测量每分钟人体的耗氧量及血样中氧的浓度可以算出心输出量。

设 c 为心脏每分钟泵出的血液量(L)，即心输出量；x 为每分钟人体的耗氧量(ml)；y 为每升动脉血中的含氧量(ml)；z 为每升混合静脉血中的含氧量(ml)。

每分钟人体的耗氧量=[从每升血中获得的氧气量]·[心输出量]

即

$$x=(y-z)\cdot c$$

所以

$$c=\frac{x}{y-z}$$

x,y 的值能相当精确地测得，但 z 的值很难准确测得。假设某人在安静状态下，测得 $x=250\mathrm{ml/min}$，$y=180\mathrm{ml}/l$，$z=140\mathrm{ml}/l$，则 $c=6.25\mathrm{L/min}$。若测量值 z 的相对误差为 1%，试估计 c 的绝对误差及相对误差。

【解】 z 的相对误差为 1%，即$\frac{\mathrm{d}z}{z}=1\%$，$\therefore \mathrm{d}z=1\%z$

$$c=\frac{x}{y-z},\quad \therefore\quad \mathrm{d}c=\frac{x\mathrm{d}z}{(y-z)^2}$$

所以 c 的绝对误差为 $|\mathrm{d}c|=\frac{250\times140\times1\%}{(180-140)^2}=\frac{7}{32}$，$c$ 的相对误差为 $\left|\frac{\mathrm{d}c}{c}\right|=\frac{7/32}{6.25}=3.5\%$。

可见，测量值 z 的微小误差会导致心输出量计算结果的较大误差。目前尚无完善的直接测定心输出量的方法。

3-77　核弹头制造问题

核弹在与它的爆炸量（系指核裂变或聚变时释放出的能量，通常用相当于多少千吨 T. N. T 炸药的爆炸威力来量度）的立方根成正比的距离内会产生 $0.3516\mathrm{kg/cm^3}$ 的超压，这种距离算作有效距离。若记有效距离为 D，爆炸量为 x，则二者的函数关系为

$$D=Cx^{\frac{1}{3}}$$

其中 C 是比例常数。又知当 x 是 100 千吨（T. N. T 当量）时，有效距离 D 为 3.2186km。于是

$$3.2186=C\cdot100^{\frac{1}{3}}$$

即

$$C=\frac{3.2186}{100^{\frac{1}{3}}}\approx0.6934$$

所以

$$D=0.6934x^{\frac{1}{3}}$$

这样，当爆炸量增至 10（变成 1000 千吨＝1 百万吨）时，有效距离增至

$$0.6934\times(1000)^{\frac{1}{3}}=6.934\mathrm{km}$$

差不多仅为 100 千吨时的 2 倍，说明其作用范围（πD^2）并没因爆炸量的大幅度增加而显著增加。

下面再来研究爆炸量与相对效率的关系（这里相对效率的含义是，核弹的爆炸量每增加 1 千吨 T. N. T 当量时有效距离的增量）。

由 $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{3}\cdot0.6934\cdot x^{-\frac{2}{3}}=0.2311x^{-\frac{2}{3}}$ 知

$$\Delta D\approx0.2311x^{-\frac{2}{3}}\cdot\Delta x$$

若 $x=100$ 时，$\Delta x=1$，则

$$\Delta D\approx0.2311\,(100)^{-\frac{2}{3}}\approx0.0107\mathrm{km}=10.7\mathrm{m}$$

这就是说，对 100 千吨（10 万吨级）爆炸量的核弹来说，爆炸量每增加 1 千吨，有效距离差不多增加 10.7m；

若 $x=1000$ 时，$\Delta x=1$，则

$$\Delta D\approx0.2311(1000)^{-\frac{2}{3}}\approx0.0023\mathrm{km}=2.3\mathrm{m}$$

即对百万吨级的核弹来说，每增加 1 千吨的爆炸量，有效距离差不多仅增加 2.3m，相对效率是下降的。

可见,除了制造、运载、投放等技术因素外,无论从作用范围还是从相对效率来说,都不宜制造当量级太大的核弹头。事实上,1945 年第二次世界大战中美国投放在日本广岛、长崎的原子弹,其爆炸量为 20 千吨,有效距离为 1.87km。

3-78 玻璃钢瓶的使用问题

玻璃钢瓶的制作过程是,先用玻璃纤维沿经向和纬向缠绕成型(图 3.4),然后再加工处理成质地如钢的玻璃瓶。由于纤维在压力作用下(设瓶内充以高压氧气)会伸长,若纤维原长是 l,在压力作用下伸长 Δl,则$\frac{\Delta l}{l}$为纤维的应变,习惯上用符号 ε 表示。有一种很小的仪器,只要往瓶上一贴,即可测出纤维的应变。现测出经向纤维的应变为 $\varepsilon_\theta=\frac{\Delta H}{H}$,纬向纤维的应变 $\varepsilon_\varphi=\frac{2\pi\Delta R}{2\pi R}=\frac{\Delta R}{R}$,问瓶子体积的应变是多少?当体积应变超过规定的标准时,瓶子就不能继续使用了,所以必须有简单的方法求出体积的变化。

图 3.4

【解】 实际问题往往是合理的近似就行,不必要也不可能要求绝对的准确。把玻璃钢瓶近似看成一个高为 H,底半径为 R 的圆柱体,其体积为

$$V=\pi R^2H$$

由经线、纬线的伸长,使瓶的体积有一增量 ΔV,

$$\Delta V\approx \mathrm{d}V=2\pi RH\Delta R+\pi R^2\Delta H$$

于是体积的应变为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V}{V}&\approx\frac{2\pi RH\Delta R}{\pi R^2H}+\frac{\pi R^2\Delta H}{\pi R^2H}\\&=2\frac{\Delta R}{R}+\frac{\Delta H}{H}=2\varepsilon_\varphi+\varepsilon_\theta\end{aligned}$$

这说明体积的应变等于两倍纬线的应变加上经线的应变,只要考虑这个值是否超过规定的标准,即可决定钢瓶能否继续使用。

3-79 钟表误差问题

机械挂钟的钟摆周期为 1s,在冬季摆长缩短了 0.01cm,这只钟每天大约快多少?

【解】 由 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$(单摆的周期公式,其中 l 是摆长,单位:cm,g 是重力加速度为 $980\mathrm{cm/s^2}$)可得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}l}=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}$$

当 $|\Delta l|\ll l$ 时,

$$\Delta T\approx \mathrm{d}T=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}\Delta l$$

据题设,摆的周期是 1s,即 $1=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,由此可知摆的原长是 $\frac{g}{(2\pi)^2}$。现摆长的改变量

$\Delta l = -0.01\text{cm}$，于是由上式得摆周期的相应改变量是

$$\Delta T \approx \mathrm{d}T = \frac{\pi}{\sqrt{g \cdot \frac{g}{(2\pi)^2}}} \times (-0.01)$$

$$= \frac{2\pi^2}{g} \times (-0.01) \approx -0.0002\text{s}$$

这就是说，由于摆长缩短了 0.01cm，钟摆的周期便相应缩短了约 0.0002s，即每秒约快 0.0002s，从而每天约快 $0.0002 \times 24 \times 60 \times 60 = 17.28$ s。

3-80 拉船靠岸问题

如图 3.5 所示，在离水面高度为 h(单位为 m)的岸上，用绳子拉船靠岸。假定绳长为 l(单位为 m 米)，船位于离岸壁 s(单位为 m)处，试问，当收绳速度为 v_0(单位为 m/s)时，船的速度、加速度各是多少？

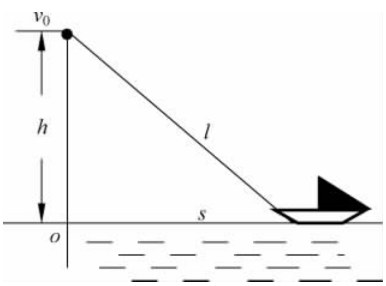


图 3.5

【解】 l,h,s 三者构成了直角三角形，由勾股定理得

$$l^2 = h^2 + s^2$$

两端对时间求导，得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 0 + 2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

由此得

$$l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

l 为绳长，按速度定义，$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$为收绳速度 v_0，船只能沿 s 线在水面上行驶逐渐靠近岸壁，因而 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$应为船速 v，将它们代入上式得船速

$$v = \frac{l}{s}v_0$$

利用 $l^2 = h^2 + s^2$ 消去 l，得

$$v = \frac{\sqrt{h^2 + s^2}}{s}v_0$$

其中 h, v_0 均为常数，只有 s 是变量。按加速度定义

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$= \left(-\frac{h^2}{s^2\sqrt{h^2 + s^2}}v_0\right)v$$

代入上式，得

$$a = -\frac{h^2 v_0^2}{s^3}$$

(这里的负号表明加速度的方向与 x 轴正向相反，事实上，船速 v、收绳速度 v_0 的方向也

与 x 轴正向相反。)

综上,船速与船的加速度均与船的位置有关,它们是变化的,当船靠近岸时,船速与加速度都不断增大。

3-81 航空摄影问题

飞机在离地面 2km 的高度,以每小时 200km 的速度飞临某目标之上空,以便进行航空摄影。试求飞机飞至该目标上方时摄像机转动的速度。

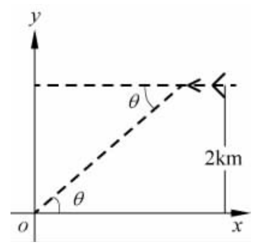


图 3.6

【解】 坐标系的选择如图 3.6 所示。

把目标取为坐标原点,飞机与目标的水平距离为 x(单位为 km),则有

$$\tan\theta = \frac{2}{x}$$

由于 x 与 θ 都是时间 t 的函数,将等式两边分别对 t 求导,可得

$$\sec^2\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{x^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -2 \cdot \frac{\cos^2\theta}{x^2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2+4} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
$$= \frac{-2}{x^2+4} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

因为 $x=0\mathrm{km}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -200\mathrm{km/h}$(负号表示 x 在减小),故有

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{-2}{4} \cdot (-200) = 100\mathrm{rad/h}$$

即角速度为 100rad/h,化为角度就是

$$\frac{100}{60 \times 60} \times \frac{180}{\pi} = \frac{5}{\pi}{}^{\circ}/\mathrm{s}$$

3-82 重力加速度问题

试利用高等数学方法推导重力加速度 g。

【解】 设一物体质量为 m,距地面高度为 h,由万有引力定律知地球对它的引力为

$$f = G\frac{mM}{(R+h)^2}$$

其中 $R=6371\mathrm{km}$ 是地球的半径,M 是地球的质量,G 是常数。又据牛顿第二定律知

$$f = mg$$

于是由以上两式得

$$g = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

这就是重力加速度随高度(h)变化的公式。显然,这个公式对计算 g 是不实用的(因为公式中有 M,G),下面找一个合适的近似公式取代它。

当物体在地球表面时,$h=0$,若用 g_0 表示此时的重力加速度,则 $g_0=\frac{GM}{R^2}$,将

$$GM = g_0R^2$$

代入 $g=\frac{GM}{(R+h)^2}$，得

$$g = \frac{g_0R^2}{(R+h)^2} = g_0\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}$$

当 h 相对于地球半径 R 很小时，即 $\frac{h}{R}\ll 1$ 时，利用近似公式 $(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x$，可得

$$g= g_0\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2} \approx g_0\left(1-2\,\frac{h}{R}\right)$$

$$= g_0\left(1-\frac{2h}{6371}\right)= g_0(1-3.14\times 10^{-4}h)$$

这里 R 的单位是 km，因此 h 的单位也应是 km。

这就是重力加速度随高度变化的近似公式，只要知道 h 及 g_0 的值即可算出 g 的近似值。例如，北京地区的 $g_0=980.122\text{cm/s}^2$（利用单摆摆动可以测定 g_0 的值，其公式为

$$g_0 = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

式中 l 为摆长，T 为振动周期，于是在 $h=5000\text{m}$ 的高空，重力加速度为

$$g \approx 980.122(1-3.14\times 10^{-4}\times 5) = 978.58(\text{cm/s}^2)$$

思考题

1. 假定落在平静水面上的石子，产生同心波纹，如果最外一圈波半径以 0.6m/s 的速度向外扩张，问在 2s 末时，扰动水面面积增长的速度是多少？

2. 某酸乳酪商行发现它的收入函数 $R(x)$ 与成本函数 $C(x)$ 分别为 $R(x)=12x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}$ 与 $C(x)=3x^{\frac{1}{2}}+4$，$0\leqslant x\leqslant 5$，x 的单位是千升，$R(x)$、$C(x)$ 以千元记。试写出它的边际成本函数，并说明是否生产越多赚钱越多？

3. 设巧克力糖每周的需求量 Q（单位：kg）是价格 P（单位：元）的函数

$$Q = f(P) = \frac{1000}{(2P+1)^2}$$

求当 $P=10$ 元时，巧克力糖的边际需求量，并说明其经济意义。

4. 有一长度是 a（单位为 m）的梯子靠在铅直的墙上，如果梯子下端沿地板以 b（单位为 m/s）的速度离开墙根滑动，问当梯子下端距墙根 $\frac{a}{2}$（单位为 m）时，梯子的上端下滑的速度是多少？

5. 某人高 1.8m，在水平路面上以每秒 1.6m 的速率走向一街灯，若此街灯在路面上方 5m，当此人与灯的水平距离为 4m 时，人影端点移动的速率为多少？

6. 某化工厂日产能力最高为 1000t，每日产品的总成本 C（单位：元）是日产量 x（单位：t）的函数

$$C = C(x) = 1000 + 7x + 50\sqrt{x} \quad x\in[0,1000]$$

(1) 求当日产量为100t时的边际成本;

(2) 求当日产量为100t时的平均单位成本。

数学实验二

【实验目的】

1. 熟悉Mathematica基本求导语句。

2. 掌握函数求导数和求微分的有关操作命令。

3. 学会利用Mathematica软件求解隐函数和参数方程导数。

【基本语句】

在Mathematica系统中,$f'[x]$,$f''[x]$等表示关于x的n阶导数。

1. $D[f[x],x]$

功能　求$f(x)$对x的一阶导数。

2. $D[f[x],\{x,n\}]$

功能　求$f(x)$对x的n阶导数。

3. Dt[$f[x],x$]

功能　求$f(x)$的微分。

4. equ=$D[F[x]=\ =0,x]$

功能　方程两边对x求导,得到含有y'方程。

5. Solve[equ,$y'[x]$]

功能　解出y'。

6. Dt[$f[x],x$]

功能　求$f(x)$的微分。

【实验内容】

1. 求以下函数的导数。

(1) $y=2x^5+3x^4+4x^3+5x^2++6x+7$,求函数的一阶到五阶导数。

Mathematica语句

```
D[2x^5 + 3 * x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7,x]
D[2x^5 + 3 * x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7,{x,2}]
D[2x^5 + 3 * x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7,{x,3}]
D[2x^5 + 3 * x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7,{x,4}]
D[2x^5 + 3 * x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7,{x,5}]
```

运行结果

$6+10x+12x^2+12x^3+10x^4$

$10+24x+36x^2+40x^3$

$24+72x+120x^2$

$72x+240x$

240

(2) $y=\sin(x+\sqrt{1+x^2})$，求 dy 并绘制 y，y'的图形。

Mathematica 语句

```
Dt[sin[x + Sqrt[1 + x^2]],x]
D[sin[x + Sqrt[1 + x^2]],x];
Plot[{ % ,Sin[x + Sqrt[1 + x^2]]},{x, - 10,
10},AxesStyle - > Arrowheads[0.06],
AxesLabel - >{x,y},AxesLabel - >
{Style[x, 15, Bold], Style[y, 15, Bold]}]
```

运行结果

$1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cos[x+\sqrt{1+x^2}]$

图形见图 3.7。

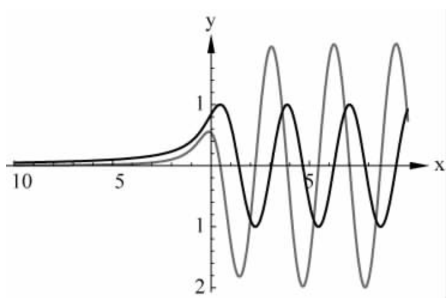


图 3.7

2. 求解分段函数分段点处的导数。

函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x+\cos x, & x<0\\ x^3+x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f'(0)$并绘制 $f(x)$的图形。

Mathematica 语句

```
Clear;
f1[x_]: = Sin[x] + Cos[x];
f1[x]
F1 = Simplify[(f1[h] - f1[0])/h];
Fl = Limit[F1,h - > + 0]
f2[x_]: = x^3 + x + 1;
f2[x]
F2 = Simplify[(f2[h] - f2[0])/h];
F2 = Limit[F2,h - > - 0]
tu1 = Plot[{f1[x]},{x, - 10,0}];
tu2 = Plot[{f2[x]},{x,0,10}];
    Show[tu1,tu2,PlotRange - >{ - 10,10}, AxesStyle - > Arrowheads[0.06], AxesLabel - >
{Style[x, 15, Bold], Style[y, 15, Bold]}]
```

运行结果

cos[x]+sin[x]

1

$1+x+x^3$

1

图形见图 3.8。

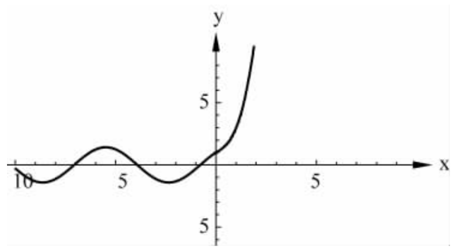


图 3.8

3. $y+x=e^{xy}$，求解$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

Mathematica 语句

```
Clear[F,y]
F[x_]: = y[x] + x - Exp[x * y[y]]
equ1 = D[F[x] == 0,x]
Solve[equ1,y'[x]]
```

运行结果

$1-e^{xy[y]}y[y]+y'[x]==0$

$\{\{y'[x]\to -1+e^{xy[y]}y[y]\}\}$

下面求解隐函数二阶导数。

Mathematica 语句

```
Clear[F,y]
F[x_]: = y[x] + x - Exp[x * y[y]]
equ1 = D[F[x] == 0,x];
equ2 = D[equ1,x];
Solve[{equ1,equ2},{y'[x],y''[x]}]    //Simplify
```

运行结果

$\{\{y'[x]\to -1+e^{xy[y]}y[y], y''[x]\to e^{xy[y]}y[y]^2\}\}$

图形见图 3.9。

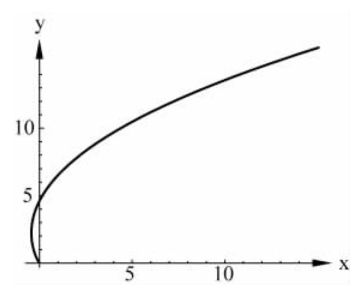


图 3.9

4. 设$\begin{cases} x=t^4-\sin t \\ y=2t+3t^2 \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$并绘制 y,y',y'' 的图形。

Mathematica 语句

```
Clear;
x[t_] : = t^4 - Sin[t] ;
y[t_] : = 2t + 3t^2 ;
```

```
G1 = D[y[t],t]/ D[x[t],t]        //Simplify
G2 =  D[G1,t]/ D[x[t],t]         //Simplify
ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,0,2}, AxesStyle->Arrowheads[0.04], AxesLabel->{Style[x, 15, Bold], Style[y, 15, Bold]}]
Plot[G1, {t,0,2}, AxesStyle->Arrowheads[0.04], AxesLabel->{Style[x, 15, Bold], Style[y, 15, Bold]}]
Plot[G2, {t,0,2}, AxesStyle->Arrowheads[0.04], AxesLabel->{Style[x, 15, Bold], Style[y, 15, Bold]}]
```

运行结果

$$\frac{2+6t}{4t^3-\cos[t]}$$

$$\frac{2\{12t^2[1+2t]+3\cos[t]+[1+3t]\sin[t]\}}{\{-4t^3+\cos[t]^3\}}$$

图形见图 3.10 和图 3.11。

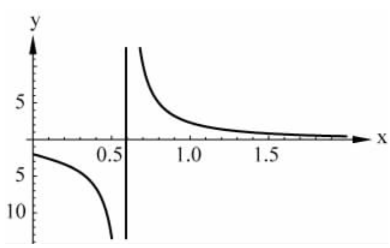


图　3.10

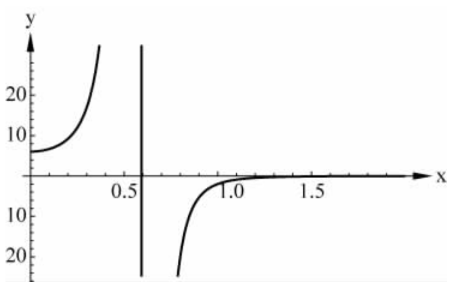


图　3.11

【练习】

1. 求下列函数的二阶导函数。

(1) $y=e^{-x^2}$

(2) $y=\ln\sin x$

(3) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

2. 求下列方程确定函数的$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

(1) $y\sin x-\cos(x-y)=0$

(2) $e^{xy}+\sin(x^2y)=y^2$

3. 求下列参数方程确定函数的$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

(1) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=\arctan t\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=e^{2t}-1\\ y=t^3+1\end{cases}$