第3章

导数与微分

数学中研究导数、微分及其应用的学科称为微分学，研究不定积分、定积分及其应用的学科称为积分学。微分学与积分学统称为微积分学。

微积分是在 17 世纪末由英国物理学家、数学家牛顿和德国数学家莱布尼兹建立起来的。微积分由微分学和积分学两部分组成，微分学是基础，应用领域非常广泛。微分学的基本概念是导数和微分，核心概念是导数。导数反映了函数相对于自变量的变化率问题，微分则表示函数相对于自变量的近似计算问题。本章主要讨论导数和微分的概念及其运算，至于导数的应用，将在第 4 章详细讨论。

内容初识

3.1 导数的概念

3.1.1 问题的提出

16 世纪的欧洲，正处在资本主义萌芽时期，生产力得到了很大的发展，生产实践的发展对自然科学提出了新的课题，迫切要求力学、天文学等基础学科向前发展，而这些学科都是依赖于数学的，因而其发展也推动了数学的发展。在各类学科对数学提出种种要求的前提下，下列三类问题导致了微分学的产生。

(1) 求变速运动的瞬时速度；

(2) 求曲线上某一点处的切线；

(3) 求最大值和最小值。

这三类实际问题的现实原型在数学上都可归结为函数相对于自变量变化而变化的快慢程度，即所谓的函数变化率问题，牛顿从第一个问题出发，莱布尼兹从第二个问题出发，分别给出了导数的概念。

定义 3.1 设变量 u 从初值 u_1 变化到终值 u_2，终值与初值的差 u_2-u_1 称为变量 u 的改变量(或称为增量)，记作 Δu，即 $\Delta u=u_2-u_1$。

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某一邻域内有定义，当自变量 x 在此邻域内从 x_0 变到

$x_0+\Delta x$ 时,函数 y 相应地由 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$,因此,函数的相应改变量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,如图 3.1 所示。

引例 1　切线的斜率问题

曲线的切线是微积分学的重要背景,17 世纪前期,人们就对带有特殊性质的曲线切线进行了研究,如古希腊数学家阿基米德(Archimedes)对螺旋切线的研究。到 17 世纪,德国数学家莱布尼兹在前人的研究基础上系统地研究了曲线切线的斜率问题。

如图 3.2 所示,设点 $M_0(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 上一定点,取 $M(x,f(x))$ 为曲线上 M_0 附近的一动点,作割线 M_0M,设其倾角为 φ,则割线 M_0M 的斜率为

$$\tan\varphi=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

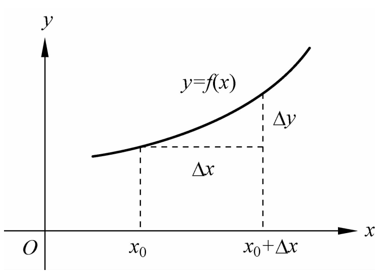


图 3.1

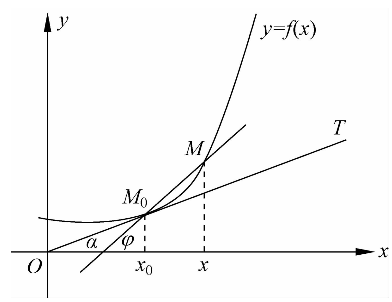


图 3.2

当 $x\to x_0$ 时,动点 M 将沿曲线趋于定点 M_0,从而割线 M_0M 也随之变动而趋向于极限位置——直线 M_0T,称此直线为曲线在定点 M_0 处的切线。若当 $x\to x_0$ 时,割线 M_0M 斜率的极限存在,设为 k,即

$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{3.1}$$

称为切线 M_0T 的斜率,这里 $k=\tan\alpha$,其中 α 是切线 M_0T 的倾角。

用 $\Delta x=x-x_0$ 表示自变量的增量,则相应地函数增量为

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

当 $x\to x_0$ 时,等价于 $\Delta x\to 0$,这时式(3.1)可写为

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

这就是说,切线 M_0T 的斜率是函数增量与自变量增量之比的极限。

引例 2　变速直线运动的瞬时速度问题

设物体作变速直线运动,s 表示物体从某个时刻开始到时刻 t 所经过的路程,则 s 是时间 t 的函数 $s=s(t)$,称为位置函数,求物体在 t_0 时刻的瞬时速度。

假设物体在时刻 t_0 的位置为 $s(t_0)$,在 $t_0+\Delta t$ 时刻的位置为 $s(t_0+\Delta t)$,于是在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内,物体走过的路程为 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$,平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

当$|\Delta t|$较小时，平均速度$\bar{v}$可以用来近似地表示物体在时刻t_0的速度，而且$|\Delta t|$越小，它的近似程度越好，这时令$|\Delta t|\to 0$，平均速度$\bar{v}$的极限（如果这个极限存在），就定义为物体在时刻t_0的瞬时速度，设为$v(t_0)$，即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

就是说，物体运动的瞬时速度是位置函数增量和时间增量之比的极限。

引例3　产品总成本的变化率问题

设某产品的总成本C是产量x的函数，即$C=f(x)$，当产量由x_0变到$x_0+\Delta x$时，总成本相应地改变量为

$$\Delta C=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

当产量由x_0变到$x_0+\Delta x$时，总成本的平均变化率为

$$\frac{\Delta C}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

当$\Delta x\to 0$时，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限是产量为x_0时总成本的变化率。

类似地，加速度是速度增量与时间增量之比的极限；角速度是转角增量与时间增量之比的极限；线密度是质量增量与长度增量之比的极限；电流强度是电量增量与时间增量之比的极限。

以上问题虽然有着不同的实际意义，但是从数量关系上看，它们有共同的数量形式，其实质都归结为函数增量与自变量增量之比的极限，由此引出函数导数的概念。

3.1.2　导数的定义

定义3.2　设函数$y=f(x)$在x_0的邻域$U(x_0,\delta)$内有定义，当自变量x在x_0点取得增量Δx（$\Delta x\neq 0$，且$x_0+\Delta x\in U(x_0,\delta)$）时，相应地函数增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\tag{3.2}$$

存在，则称函数$y=f(x)$在点x_0处可导，并称这个极限值为函数$y=f(x)$在点x_0处的导数，记为

$$f'(x_0),\quad y'|_{x=x_0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\quad 或\quad \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

【注】

(1) 若式(3.2)极限不存在，则称函数$y=f(x)$在点x_0处不可导，如果不可导的原因是由于$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$，也说函数$y=f(x)$在点$x_0$处的导数为无穷大。

(2) $f'(x_0)$是函数$y=f(x)$在点x_0处的变化率，它反映了函数$y=f(x)$在点x_0处随自变量x变化的快慢程度。

定义3.3　如果函数$y=f(x)$在开区间I内的任意点处都可导，则称函数$f(x)$在开

区间 I 内可导。这时，$\forall x\in I$，都有一个确定的导数值 $f'(x)$ 与之对应，这样就产生了定义在区间上的函数 $f'(x)$，称这个函数为 $f(x)$ 的导函数(简称导数)，记作

$$y',\quad f'(x),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

其表达式为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{3.3}$$

显然，$f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$$

【注】 根据导数的定义求导数，一般包含以下三个步骤。

(1) 求函数的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$。

(2) 求两增量的比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$。

(3) 求极限 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$。

例 3.1 求函数 $f(x)=C$(C 为常数)的导数。

【解】 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=0$

即

$$(C)'=0 \tag{3.4}$$

例 3.2 求函数 $f(x)=x^3$ 的导数。

【解】

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{(\Delta x+x)-x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}[(x+\Delta x)^2+x(x+\Delta x)+x^2]=3x^2\end{aligned}$$

即

$$(x^3)'=3x^2$$

一般地，对于幂函数 $y=x^\mu$(μ 为常数)，有

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1} \tag{3.5}$$

快捷公式

(1) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$　　(2) $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$

(3) $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　　(4) $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'=\dfrac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}$

【练习】 求(1) $\left(\dfrac{1}{x^4}\right)'$，(2) $\left(\dfrac{1}{x^{100}}\right)'$，(3) $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'$，(4) $\left(x^{\frac{100}{99}}\right)'$。

例 3.3 已知 $y=\dfrac{1}{x^9\cdot\sqrt[10]{x}}$，求 y'。

【分析】 此函数求导之前应先化简成幂函数形式。

【解】　因为 $y=\dfrac{1}{x^9\cdot\sqrt[10]{x}}=\dfrac{1}{x^{9+\frac{1}{10}}}=\dfrac{1}{x^{\frac{91}{10}}}=x^{-\frac{91}{10}}$

利用式(3.5)，有

$$y'=\left(x^{-\frac{91}{10}}\right)'=-\frac{91}{10}x^{-\frac{101}{10}}$$

快捷公式

(1) $\left(x^kx^{\frac{m}{n}}\right)'=\left(k+\dfrac{m}{n}\right)\dfrac{x^kx^{\frac{m}{n}}}{x}$　　(2) $\left(\dfrac{1}{x^kx^{\frac{m}{n}}}\right)'=-\left(k+\dfrac{m}{n}\right)\dfrac{1}{xx^kx^{\frac{m}{n}}}$

【练习】　求(1) $(x^{89}\sqrt{x})'$，(2) $(x^2\cdot\sqrt[4]{x})'$，(3) $\left(\dfrac{1}{x^{89}\sqrt{x}}\right)'$，(4) $\left(\dfrac{1}{x^{24}\cdot\sqrt[10]{x}}\right)'$。

例 3.4　求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数。

【解】

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x\end{aligned}$$

即

$$(\sin x)'=\cos x \tag{3.6}$$

类似可得

$$(\cos x)'=-\sin x \tag{3.7}$$

例 3.5　求函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$的导数。

【解】

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}\\&=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a\end{aligned}$$

即

$$(a^x)'=a^x\ln a \tag{3.8}$$

特殊地，

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x \tag{3.9}$$

【练习】　求(1) $(\sin x)'|_{x=\frac{\pi}{4}}$，(2) $(\cos x)'|_{x=\frac{\pi}{4}}$，(3) $(\mathrm{e}^x)'|_{x=0}$，(4) $\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)'$。

3.1.3　导数的几何意义

由导数的定义可知：函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$在几何上表示曲线 $y=$

$f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处切线的斜率,即

$$f'(x_0)=\tan\alpha$$

其中α是切线的倾角,如图3.3所示。

于是$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \tag{3.10}$$

过曲线$y=f(x)$上的点$M(x_0,y_0)$且与切线垂直的直线称为曲线在该点的法线。由于切线与法线垂直,所以当$f'(x_0)\neq 0$时,$f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \tag{3.11}$$

【注】 如果函数在点x_0处的导数为无穷大,则曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的切线为$x=x_0$,垂直于x轴。例如$y=\sqrt[3]{x}$在$x_0=0$点处导数为无穷大,切线为$x=0$(如图3.4所示)。

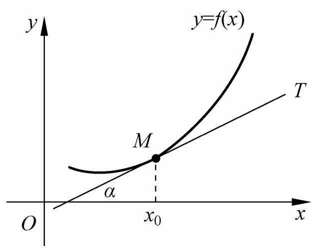


图 3.3

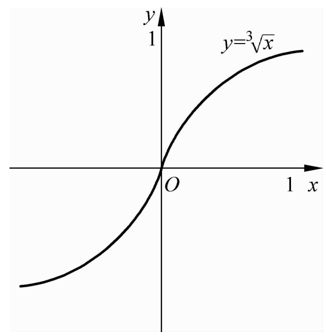


图 3.4

例 3.6 求抛物线$y=x^2+4x+3$在点(0,3)处的切线方程和法线方程。

【解】 根据导数的几何意义可知,所求切线的斜率为$k=y'|_{x=0}$,由于$y'=2x+4$,于是$k=4$,从而所求切线的方程为

$$y-3=4(x-0)$$

即

$$y=4x+3$$

于是所求法线方程为

$$y-3=-\frac{1}{4}(x-0)$$

即

$$y=-\frac{1}{4}x+3$$

例 3.7 求曲线$y=\sqrt[3]{x}$上一点使其在该点处的切线与直线$y=\frac{1}{3}x-1$平行,并写出其切线方程。

【解】 因$y'=(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$,由题意$\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3}$,得$x=\pm 1$,相应地$y=\pm 1$,则在点(1,1),(−1,−1)处与直线$y=\frac{1}{3}x-1$平行的切线方程分别为

$$y-1=\frac{1}{3}(x-1),\quad y+1=\frac{1}{3}(x+1)$$

即

$$x-3y\pm 2=0$$

【练习】

(1) 求等边双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 处的切线斜率，并写出在该点处的切线方程和法线方程。

(2) 求曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 在点(1,1)的切线方程。

3.2　微分的概念

前面我们已经研究了函数的变化率，并建立了导数的概念。在工程技术中，还会遇到与导数密切相关的另一类问题，即函数改变量的近似计算问题，这就是本节要解决的问题——微分。

3.2.1　问题的提出

引例　面积增量问题

如图3.5所示，有一块正方形场地，其边长为 x，问当边长有增量 Δx 时，场地面积改变了多少？

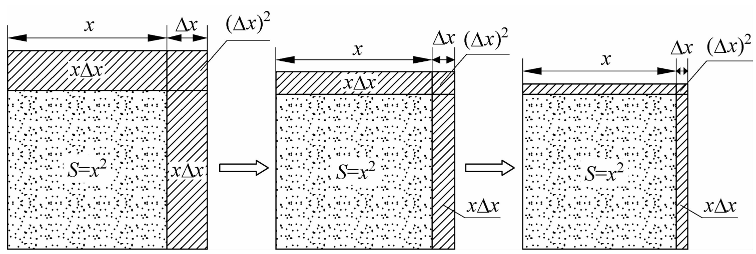


图　3.5

【分析】 设正方形场地的面积为 S，则 $S=x^2$，当边长有增量 Δx 时，面积的增量

$$\Delta S=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

ΔS 由两部分组成，第一部分 $2x\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，直观上是面积增量的主要部分，称为线性主部；而第二部分 $(\Delta x)^2$ 是小正方形的面积，当 $\Delta x\to 0$ 时，是比 Δx 高阶的无穷小 $(\Delta x)^2=o(\Delta x)$，即 $|\Delta x|$ 很小时，$(\Delta x)^2$ 可忽略，于是 ΔS 可近似地用第一部分来代替，即 $\Delta S\approx 2x\Delta x$。

【思考】 在上述引例中，由于函数的表达式比较简单，从而使得函数的改变量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可以较为轻松地计算出来，但是在实际问题中，函数的表达式可能比较复杂(如 $y=\mathrm{e}^x\cdot\arctan\sqrt{x^2-1}+x^2$)，此时当自变量 x 有微小增量 Δx 时，函数改变量的计算比较困难，那么如何建立计算 Δy 的近似式，使它

既简单又有一定的精确度呢？

通过对上述引例的分析，不难发现，如果函数 $y=f(x)$ 的增量 Δy 可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

当 $A\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，可以用 $A\Delta x$ 来近似地代替 Δy，进而简化函数增量的计算，这就是下面要探讨的微分问题。

3.2.2 微分的定义

定义 3.4 设函数 $y=f(x)$ 在某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，且 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$，如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的，而 $A\Delta x$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相对于自变量增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}$ 或 $\mathrm{d}f(x)|_{x=x_0}$，即

$$\mathrm{d}y\,|_{x=x_0} = A\Delta x$$

$\mathrm{d}y$ 称为函数增量 Δy 的线性主部。

【注】

(1) $\mathrm{d}y$ 为自变量增量 Δx 的线性函数。

(2) A 是与 Δx 无关的常数，但与 $f(x)$ 在点 x_0 的值有关。

下面进一步讨论函数可微的条件及 A 的值。

定理 3.1 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，且当函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微时，其微分是

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

【证】 **必要性** 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微，由定义知

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

从而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

于是，当 $\Delta x\to 0$ 时，

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$

即 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $A=f'(x_0)$。

充分性 如果 $f(x)$ 在点 x_0 可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ 存在，由收敛变量与其极限的关系，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,\qquad \text{其中 } \alpha\to 0 \quad (\text{当 } \Delta x\to 0)$$

由此有

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$$

即

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

所以 $f(x)$在点 x_0 可微，且

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

【注】

(1) 通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，记作 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$。于是函数 $y=f(x)$在点 x_0 的微分又可记作 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$。

(2) 函数 $y=f(x)$在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$，函数的导数就是函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商，因此，导数也称为"微商"。

例 3.8　求函数 $y=x^2$ 在 $x=2$，$\Delta x=0.1$ 的微分。

【解】　函数在任意点 x 的微分

$$\mathrm{d}y = (x^2)'\Delta x = 2x\Delta x$$

函数当 $x=2$，$\Delta x=0.1$ 时的微分

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}} = 2x\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}} = 4\times 0.1 = 0.4$$

例 3.9　求函数 $y=\cos x$ 的微分。

【解】　因 $y'=-\sin x$，故 $\mathrm{d}y=-\sin x\mathrm{d}x$。

3.2.3　微分的几何意义

如图 3.6 所示，MT 是曲线上点 M 处的切线，设 MT 的倾角为 α，曲线上另一点为 N，观察三角形 MQP（又称微分三角形）可知，

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x = \tan\alpha\cdot\Delta x$$

而 $\tan\alpha=\frac{QP}{MQ}$，$MQ=\Delta x$，所以 $\mathrm{d}y=QP$。

由此可见，函数 $y=f(x)$的微分 $\mathrm{d}y$ 就是过M 点的切线的纵坐标改变量，图 3.6 中线段 PN 是 Δy 与 $\mathrm{d}y$ 之差，它是 Δx 的高阶无穷小。

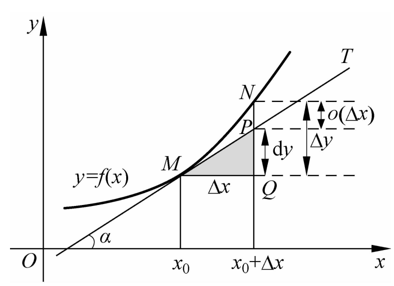


图　3.6

经典解析

3.3　导数的计算

在 3.2 节中由导数定义求出了几个基本初等函数的导数，由于常见函数大多是初等函数，而初等函数是由基本初等函数构成的，所以只要获得一些基本法则和另一些基本初等函数的求导公式，就能比较方便地求出初等函数以及其他较复杂函数的导数。本节将讨论函数的求导方法。

3.3.1 四则运算法则

定理 3.2 如果函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 可导，那么它们的和、差、积、商(除分母为零的点外)都在点 x 可导，且

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$ (3.12)

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ (3.13)

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0)$ (3.14)

【注】

(1) 定理 3.2 可简单地表示为

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$
$$(uv)'=u'v+uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

(2) 定理 3.2 中式(3.13)和式(3.14)可推广到任意有限个可导函数的情形。

例如，设 $u=u(x)$，$v=v(x)$，$w=w(x)$ 均可导，则有

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'$$
$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$$

特别地，

$$(Cu)'=Cu'\quad (C\text{ 为常数})\tag{3.15}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{-v'}{v^2}\quad (v\neq 0)\tag{3.16}$$

例 3.10 设 $y=x^3-5\sqrt{x}+x+2$，求 y'。

【解】

$$y'=(x^3-5\sqrt{x}+x+2)'=(x^3)'-(5\sqrt{x})'+(x)'+(2)'$$
$$=3x^2-5\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+1$$

例 3.11 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+2\sin x-\cos 3$，求 $f'(x)$。

【解】

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'+2(\sin x)'-(\cos 3)'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}+2\cos x$$

例 3.12 设 $y=xe^x\sin x$，求 y'。

【解】

$$y'=(x)'e^x\sin x+x(e^x)'\sin x+xe^x(\sin x)'$$
$$=e^x\sin x+xe^x\sin x+xe^x\cos x$$

【练习】 求下列函数的导数。

(1) $y=4x^5+3\cdot\sqrt[3]{x}+5x$ (2) $y=2^x\sin x-\cos 2$ (3) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

例 3.13　求下列函数的导数。

(1) $y=\tan x$　　(2) $y=\sec x$

【解】

(1)
$$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即
$$(\tan x)'=\sec^2 x \tag{3.17}$$

(2)
$$y'=(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{(1)'\cos x-1\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x$$

即
$$(\sec x)'=\sec x\tan x \tag{3.18}$$

用类似方法,还可求得
$$(\cot x)'=-\csc^2 x \tag{3.19}$$
$$(\csc x)'=-\csc x\cot x \tag{3.20}$$

3.3.2 反函数的求导法则

定理 3.3　如果函数 $x=f(y)$在区间 I_y 内单调、可导,且 $f'(y)\neq 0$,则它的反函数 $y=\varphi(x)$在区间 $I_x=\{x|x=f(y),y\in I_y\}$内也可导,且
$$\varphi'(x)=\frac{1}{f'(y)} \tag{3.21}$$

【证】　由于 $x=f(y)$在 I_y 内单调、连续,所以 $y=\varphi(x)$存在,且 $\varphi(x)$在 I_x 内也单调、连续。

任取 $x\in I_x$,增量 $\Delta x(\Delta x\neq 0,x+\Delta x\in I_x)$,由 $y=\varphi(x)$的单调性
$$\Delta y=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\neq 0$$

于是有
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

所以
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

因 $y=\varphi(x)$连续,故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,从而
$$[\varphi(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{f'(y)}$$

例 3.14 计算下列函数的导数。

(1) $y=\arcsin x$ (2) $y=\arctan x$ (3) $y=\log_a x$

【解】

(1) $y=\arcsin x$ 有反函数 $x=\sin y$,在开区间 $I_y=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内单调、可导,且

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=(\sin y)'=\cos y>0$$

因此,由式(3.21),在对应区间 $I_x=(-1,1)$内有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{\cos y}$$

因 $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$,从而

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.22}$$

用类似的方法可得

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.23}$$

(2) $y=\arctan x$ 有反函数 $x=\tan y$,在 $I_y=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内单调、可导,且

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=(\tan y)'=\sec^2 y\neq 0$$

因此,由式(3.21),在对应区间 $I_x=(-\infty,+\infty)$内有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{\sec^2 y}$$

因$\sec^2 y=1+\tan^2 y=1+x^2$,从而

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \tag{3.24}$$

用类似的方法可得

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2} \tag{3.25}$$

(3) $y=\log_a x$ 有反函数 $x=a^y(a>0,a\neq 1)$,在区间 $I_y=(-\infty,+\infty)$内单调、可导,且

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=(a^y)'=a^y\ln a\neq 0$$

因此,由公式(3.21),在对应区间 $I_x=(0,+\infty)$内有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{a^y\ln a}$$

由于 $a^y=x$,于是有

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a} \tag{3.26}$$

特别地，$a=\mathrm{e}$ 时，

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{3.27}$$

至此，基本初等函数的求导公式已经全部给出，汇总如下：

(1) $(C)'=0$ (2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$

(3) $(\sin x)'=\cos x$ (4) $(\cos x)'=-\sin x$

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$ (6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$ (8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$，

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$，$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$ (10) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(11) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (12) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(13) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ (14) $(\mathrm{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

【注】 请读者将这些基本公式熟记于心，这是正确求导的基础。

3.3.3 复合函数的求导法则

首先来分析复合函数 $y=\ln\cos x$，该函数不是基本初等函数，显然，$y'=(\ln\cos x)'\neq\dfrac{1}{\cos x}$，这是因为 $\ln\cos x$ 是 x 的复合函数，是由两个基本初等函数 $y=\ln u$，$u=\cos x$ 复合而成的，所以函数是复合函数时，不能直接利用基本初等函数求导公式求解。那么如何求复合函数的导数？看下面的链式法则。

定理 3.4（链式法则） 若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 可导，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=\varphi(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 可导，且其导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(u)\cdot\varphi'(x) \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{3.28}$$

【证】 由于 $y=f(u)$ 在点 u 可导，因此

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$$

存在，由收敛变量与其极限的关系有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)+\alpha$$

其中 α 是 $\Delta u\to 0$ 时的无穷小，且 $\Delta u\neq 0$，用 Δu 乘上式两端，得

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha\cdot\Delta u$$

当 $\Delta u=0$ 时，规定 $\alpha=0$，这时 $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)=0$，而上式右端也为零，故上式对 $\Delta u=0$ 仍然成立。上式两端除以 $\Delta x(\neq 0)$，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$$

因为 $u=\varphi(x)$ 在点 x 可导，有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x)$$

又因为可导必连续，故 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u=0$，从而

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \lim_{\Delta u \to 0} \alpha = 0$$

故

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

(说明：$\alpha=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}-f'(u)$ 是 Δu 的函数，$\alpha=\alpha(\Delta u)$，这里函数当 $\Delta u=0$ 时无定义，当 $\Delta u \to 0$ 时，$\alpha \to 0$。规定 $\Delta u=0$ 时，$\alpha=0$，则函数在 $\Delta u=0$ 处连续。)

【注】

(1) 此定理说明复合函数的导数等于函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数。

(2) 当多个函数复合时，也有类似法则。如 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$ 都可导，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \quad 或 \quad y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

(3) 应用链式法则时，要由外向内逐层求导，注意不要漏层，在对每一层求导时，特别注意它对哪一个变量求导，然后这个变量作为函数再对下一个变量求导。

例 3.15 设 $y=\mathrm{e}^{2x^3+x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

【解】 $y=\mathrm{e}^{2x^3+x}$ 可看做由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=2x^3+x$ 复合而成，因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^u \cdot (6x^2+1) = (6x^2+1)\mathrm{e}^{2x^3+x}$$

例 3.16 设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

【解】 $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$ 可看做由 $y=\ln u$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x}{2}$ 复合而成，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} \cdot \sec^2 v \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\tan\dfrac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\sin x}$$

【注】 当读者能较熟练地分解复合函数后，中间变量可不必写出，直接写出求导结果。

例 3.17 设 $y=\arcsin\sqrt{x^2-3}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

【解】 不写出中间变量，求解过程如下。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=(\arcsin\sqrt{x^2-3})'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x^2-3})^2}}\cdot(\sqrt{x^2-3})'\\&=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-3}}\cdot(x^2-3)'\\&=\frac{x}{\sqrt{(4-x^2)\cdot(x^2-3)}}\end{aligned}$$

例 3.18 设 $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}(x>2)$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

【分析】 先用对数的性质化简，然后再用复合函数求导法则。

【解】

$$y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{3}\ln(x-2)$$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x-\frac{1}{3(x-2)}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{3(x-2)}$$

【注】 求导的方法不是唯一的，求导前先将函数化简往往会达到事半功倍的效果。

例 3.19 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}(a>0)$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

【解】

$$\begin{aligned}y'&=(x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x})'=(x^{a^a})'+(a^{x^a})'+(a^{a^x})'\\&=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a(x^a)'+a^{a^x}\ln a(a^x)'\\&=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a+1}x^{a-1}\ln a+a^{a^x+x}(\ln a)^2\end{aligned}$$

【练习】 求下列函数的导数。

(1) $y=\sin 3x\cdot\sin^3 x$　(2) $y=\ln\sin\frac{x}{2}-3^x\ln\cos\sqrt{x}$　(3) $y=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

复合函数求导过程中应注意搞清复合函数结构，由外向内，逐层求导。

例 3.20 已知 $y=\frac{2x+3}{5x+4}$，求 y'。

【解】 利用复合函数求导原则和函数商的求导法则，有

$$\begin{aligned}y'&=\left(\frac{2x+3}{5x+4}\right)'=\frac{(2x+3)'(5x+4)-(2x+3)(5x+4)'}{(5x+4)^2}\\&=\frac{-7}{(5x+4)^2}\end{aligned}$$

【注】 上例结果中分子恰好等于有理分式函数系数组成二阶行列式的结果，即 $-7=\begin{vmatrix}2&3\\5&4\end{vmatrix}$，事实上，这是一个必然的速算结论。

快捷公式

(1) 如果 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$,则 $y'=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$。 (3.29)

(2) 如果 $y=\ln\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)$,则 $y'=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(ax+b)(cx+d)}$。 (3.30)

【练习】 利用上述结论,请速算下列函数的导数。

(1) 已知 $y=\dfrac{1000x-1}{1000x+1}$,求 y'。

(2) 已知 $y=\ln\left(\dfrac{2x+3}{5x+4}\right)$,求 y'。

例 3.21 求下列函数的导数。

(1) $y=10\sin^2 8x$ (2) $y=10\cos^2 8x$

【解】 利用复合函数求导法则和正弦、余弦函数的导数公式,有

(1) $y'=(10\sin^2 8x)'=10\times 2\sin 8x\cdot\cos 8x\cdot 8=80\sin 16x$

(2) $y'=(10\cos^2 8x)'=10\times 2\cos 8x\cdot(-\sin 8x)\cdot 8=-80\sin 16x$

快捷公式

$$\{k\sin^2[ax+b]\}'=ak\sin 2(ax+b) \tag{3.31}$$

$$\{k\cos^2[ax+b]\}'=-ak\sin 2(ax+b) \tag{3.32}$$

例 3.22 已知 $y=2^{\sin^2(3x+1)}$,求 y'。

【解】 利用上述结论,直接由外向内逐层求导。

$$y'=2^{\sin^2(3x+1)}\cdot\ln 2\cdot 3\sin 2(3x+1)$$

3.4 微分的计算

从函数微分的表达式 $dy=f'(x)dx$ 可以看出,计算函数的微分,只要计算函数的导数,再乘以自变量的微分,因此,可得下面的微分公式和微分运算法则。

3.4.1 基本初等函数的微分公式

导数公式	**微分公式**
$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$	$d(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}dx$
$(\sin x)'=\cos x$	$d(\sin x)=\cos x dx$
$(\cos x)'=-\sin x$	$d(\cos x)=-\sin x dx$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$d(\tan x)=\sec^2 x dx$
$(\cot x)'=-\csc^2 x$	$d(\cot x)=-\csc^2 x dx$
$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$d(\sec x)=\sec x\tan x dx$
$(\csc x)'=-\csc x\cot x$	$d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$d(a^x)=a^x\ln a dx$

$(e^x)'=e^x$　　$d(e^x)=e^x dx$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　$d(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}dx$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$　　$d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　$d(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$

$(\text{arccot}\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$　　$d(\text{arccot}\,x)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$

3.4.2　微分的运算法则

求导法则	**微分法则**
(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$	(1) $d(u\pm v)=du\pm dv$
(2) $(Cu)'=Cu'$(C 是常数)	(2) $d(Cu)=Cdu$
(3) $(uv)'=u'v+uv'$	(3) $d(uv)=vdu+udv$
(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$　$(v\neq0)$	(4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$　$(v\neq0)$

例 3.23　求函数 $y=3x^3-x^2+x\sin x$ 的微分。

【分析】　应用微分的运算法则(1)和(3)。

【解】

$$\begin{aligned}dy&=d(3x^3-x^2+x\sin x)=3d(x^3)-d(x^2)+d(x\sin x)\\&=9x^2dx-2xdx+\sin xdx+x\cos xdx\\&=(9x^2-2x+\sin x+x\cos x)dx\end{aligned}$$

【练习】　求下列函数的微分。

(1) $y=\sin(x^2+2)$　　(2) $y=x^2\ln x$

例 3.24　求函数 $y=x^3e^{2x}$ 的微分 dy。

【解】　利用乘积求导法则,有

$$y'=3x^2e^{2x}+2x^3e^{2x}=x^2e^{2x}(3+2x)$$

所以

$$dy=x^2e^{2x}(3+2x)dx$$

例 3.25　设 $y=\arctan\sqrt{x}$,求 dy。

【解】　利用复合函数求导法则,有

$$y'=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

所以

$$dy=\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}dx$$

例 3.26 设 $y=e^{3x}\sin(2-x)$,求 dy。

【解】

$$\begin{aligned}dy&=\sin(2-x)\cdot d(e^{3x})+e^{3x}d[\sin(2-x)]\\&=3e^{3x}\cdot\sin(2-x)dx-e^{3x}\cdot\cos(2-x)dx\\&=e^{3x}[3\sin(2-x)-\cos(2-x)]dx\end{aligned}$$

3.4.3 微分形式的不变性

考虑对函数 $y=f(u)$的微分,若 u 为自变量,显然 $dy=f'(u)du$;若 u 为中间变量,即 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$,则由复合函数的求导法则,$y'=f'(u)\varphi'(x)$,得

$$dy=f'(u)\varphi'(x)dx=f'(u)d\varphi(x)=f'(u)du$$

表明无论 u 是自变量还是中间变量,总有

$$dy=f'(u)du$$

即微分形式保持不变,这一性质称为微分形式的不变性。

例 3.27 设 $y=\ln(1+e^{x^2})$,求 dy。

【解】 利用微分形式不变性,对方程两边求微分得

$$dy=\frac{1}{1+e^{x^2}}d(1+e^{x^2})=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}\cdot 2xdx=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx$$

例 3.28 设 $y\sin x-\cos(x-y)=0$,求 $dy,\frac{dy}{dx}$。

【解】 利用微分形式不变性,对方程两边求微分得

$$d(y\sin x)-d[\cos(x-y)]=0$$

从而

$$\sin xdy+y\cos xdx+\sin(x-y)d(x-y)=0$$

整理得

$$dy=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}dx$$

则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$$

例 3.29 求函数 $y=\ln\sin(\arctan x)$的微分。

【解】

$$\begin{aligned}dy&=\frac{1}{\sin(\arctan x)}d[\sin(\arctan x)]\\&=\frac{1}{\sin(\arctan x)}\cos(\arctan x)d(\arctan x)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\sin(\arctan x)}\cdot\cos(\arctan x)\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\cot(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

概念反思

3.5 再论导数与微分

3.5.1 导数定义的等价形式

前面介绍的导数定义给出了求导数的方法和步骤，在学习导数的过程中，要注意正确理解导数的定义，深刻体会其本质。

回顾导数的定义式 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，事实上，适当变形可得到如下等价形式。

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x} \tag{3.33}$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{3.34}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{3.35}$$

特别地

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} \tag{3.36}$$

【注】 式(3.35)和式(3.36)是今后经常用到的求导公式，务必熟记于心!!

为了加深对导数定义的理解，洞悉导数定义的内涵，请读者仔细观察下列等式。

(1) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta}$　　(4) $f'(0)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{f(\Delta)-f(0)}{\Delta}$

(2) $f'(x_0)=\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{f(x_0+\theta)-f(x_0)}{\theta}$　　(5) $f'(0)=\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)-f(0)}{\theta}$

(3) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Omega\to 0}\frac{f(x_0+\Omega)-f(x_0)}{\Omega}$　　(6) $f'(0)=\lim\limits_{\Omega\to 0}\frac{f(\Omega)-f(0)}{\Omega}$

不难发现，无论形式怎么变化，只要 Δ,θ,Ω 是无穷小量，(1)、(2)和(3) 表达的都是函数 $f(x)$在 x_0 点的导数；(3)、(4)和(5) 表达的都是函数 $f(x)$在 $x_0=0$ 点的导数。

例 3.30 已知 $f'(x_0)$存在，求$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0)}{h}$。

【解】

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0)}{h}$$
$$=m\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0)}{mh}=mf'(x_0)$$

【练习】

(1) 已知 $f'(1)=3$,求$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}$。

(2) 已知 $f'(x_0)$存在,求$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{h}$。

【联想】 已知 $f'(x_0)$存在,求极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0+nh)}{h}$。

极限定义了导数,反之导数定义也为求极限提供了新的方法。

(一) 利用导数定义求极限

例 3.31 设 $f'(0)$存在且 $f(0)=0$,求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2}-1)}{x\tan x}$。

【分析】 该极限可凑成 $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$的形式,令 $h=e^{x^2}-1$。

【解】

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{f[0+(e^{x^2}-1)]-f(0)}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x\tan x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f[0+(e^{x^2}-1)]-f(0)}{e^{x^2}-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x\tan x}$$
$$=f'(0)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=f'(0)$$

例 3.32 若 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$存在,求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)}{(e^x-1)\tan x}$。

【分析】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)}{x^2}$,$\lim\limits_{x\to 0}(\sin^2x+\cos x)=1$ 且 $f(1)=0$,联想到凑导数的定义式。

【解】

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2x+\cos x-1)-f(1)}{\sin^2x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}$$
$$=f'(1)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}=f'(1)\cdot\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2x}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right]$$
$$=f'(1)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f'(1)$$

例 3.33 已知 $f(x)$在 $x=1$ 连续,且$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$,求 $f'(1)$。

【分析】 由 $f(x)$在 $x=1$ 连续,知$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$,求出 $f(1)$,再应用导数定义 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$即可。

【解】

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

推广　已知 $f(x)$在 $x=a$ 连续,且$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=A$,则 $f'(a)=A$。

（二）利用导数定义求导数

例 3.34　设 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$,求 $f'(1)$。

【解】 因为 $f(1)=0$,利用导数定义,有

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-3)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$$

例 3.35　设 $f'(x)$存在,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,求 $f'(1)$。

【解】 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+(-x))-f(1)}{(-x)}=\dfrac{1}{2}f'(1)=-1$,所以 $f'(1)=-2$。

例 3.36　设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$在 $x=a$ 处连续,求 $f'(a)$。

【分析】 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$为抽象函数,即没有给出具体解析式的函数,由题设可知 $f(x)$在 $x=a$ 处连续,但可导性未知,所以只能用定义求导。

【解】

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)-(a-a)\varphi(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)\quad（因为\ \varphi(x)在\ x=a\ 处连续）$$

例 3.37　设所给函数可导,证明:

(1) 奇函数的导函数是偶函数,偶函数的导函数是奇函数。

(2) 周期函数的导函数仍是周期函数。

【证】

(1) 设 $f(x)$为奇函数,则

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[-f(x-\Delta x)]-[-f(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x+(-\Delta x))-f(x)}{(-\Delta x)}=f'(x)$$

设 $f(x)$为偶函数,则

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=-\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x+(-\Delta x))-f(x)}{(-\Delta x)}=-f'(x)$$

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 T 的函数,则

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[(x+T)+\Delta x]-f(x+T)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

3.5.2 单侧导数

(一) 单侧导数定义

定义 3.5 导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 是一个极限,该极限的左、右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{ 和 }\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

分别称为函数在 x_0 点的左导数和右导数,记作 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$,即

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\tag{3.37}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\tag{3.38}$$

左导数和右导数统称为单侧导数。

由极限存在的充要条件及导数的定义,不难得出下列结论。

定理 3.5 $f'(x_0)$ 存在的充分必要条件是 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 都存在并且相等。

定义 3.6 若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导,且 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 都存在,则称 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导。

(二) 分段函数的连续性和可导性

讨论分段函数 $f(x)=\begin{cases}g_1(x), & x\geqslant x_0\\ g_2(x), & x<x_0\end{cases}$ 的连续性与可导性。

连续性 若 $g_1(x)$,$g_2(x)$ 为初等函数,由于初等函数在其定义域内连续,因此只需讨论 $f(x)$ 在点 x_0 处的连续性。若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,则 $f(x)$ 在 x_0 处连续(从而 $f(x)$ 在定义域上是连续函数),否则 $f(x)$ 在 x_0 处不连续。

可导性 若 $g_1(x)$,$g_2(x)$ 为初等函数,只需讨论 $f(x)$ 在点 x_0 处可导性。若 $f(x)$ 在 x_0 连续,利用左右导数定义。若 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 存在且相等时,$f(x)$ 在 x_0 处可导(从而 $f(x)$ 在定义域上是可导),否则 $f(x)$ 在 x_0 处不可导。

例 3.38 讨论 $f(x)=|x|$ 在分段点 $x=0$ 处的可导性。

【分析】 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,$x=0$ 是分段点。

【解】 当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，由单侧导数定义

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{-x-0}{x}=-1$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x-0}{x}=1$$

因为 $f'_{-}(0)\neq f'_{+}(0)$，所以函数在点 $x=0$ 不可导。

例 3.39 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\ln(1+x), & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

【解】 如图 3.7 所示。

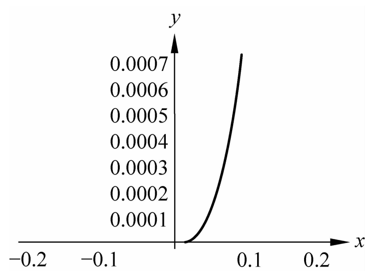


图 3.7

连续性 因为

$$\begin{aligned}f(0+0)&=\lim_{x\to 0^{+}}x^2\ln(1+x)=0\\&=f(0)=f(0-0),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

可导性 因为

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{0}{x}=0,$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x^2\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}x\ln(1+x)=0$$

即 $f'_{-}(0)=f'_{+}(0)=f'(0)=0$。

综上可知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处既连续又可导。

例 3.40 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0\\ ax+b, & x\leqslant 0\end{cases}$，确定 a,b 的值，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处既连续又可导。

【解】 因为函数连续，则有 $\lim\limits_{x\to 0^{-}}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}f(x)=f(0)$，得 $b=0$。

又因为函数在 $x=0$ 处可导，可知

$$\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{ax}{x}=a$$

$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

所以 $a=1,b=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

【练习】 求下列函数在点 $x=0$ 的导数。

(1) $f(x)=1-|x|$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin x, & x\geqslant 0\\ x, & x<0\end{cases}$

【注】 分段函数在分段点处的可导性分为如下两种：

(1) 对于在分段点处连续的函数，若分段点处左、右导数存在且相等，则该点导数存在。

(2) 若分段点处左、右导数存在但不相等或其中一个不存在，则该点导数就不存在。

不可导的情形很多，下列四种情形比较典型，如图 3.8～图 3.11 所示。

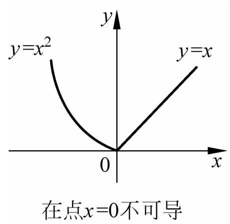


图 3.8

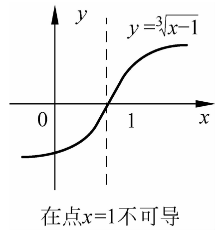


图 3.9

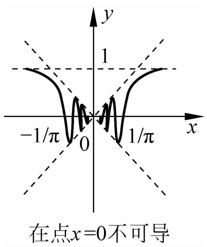


图 3.10

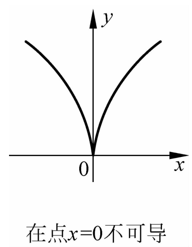


图 3.11

3.5.3 微分的实质

一般说来，当自变量 x 有微小增量 Δx 时，函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 的计算比较困难。然而函数的微分为该问题提供了一种既简单又有一定精确度的有效算法，下面深入分析 $\mathrm{d}y$ 与 Δy 之间的关系，因为

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = \mathrm{d}y + o(\Delta x)$$

所以，$\Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小。

又因为

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\Delta x}{\mathrm{d}y}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\mathrm{d}y}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\Delta x}{\mathrm{d}y}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{f'(x)\Delta x}=1\end{aligned}$$

所以，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\sim \mathrm{d}y$。

因此，当 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y\approx \mathrm{d}y$。

事实上，微分的实质就是“以直代曲”，借用这种思想，可以将复杂不规则的问题转化为简单规则的问题进行处理，如图 3.12 所示。

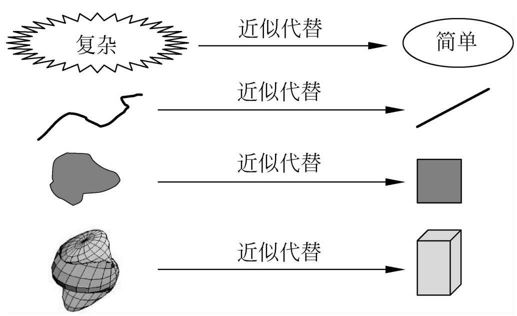


图 3.12

当然，这种近似代替只有在微小的几何体上才能达到较高的精度，这就是本书下册积分学中要介绍的微元。

例 3.41　有一批半径为 1cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度定为 0.01cm，估计一下，每只球需用铜多少克(铜的密度为 8.9g/cm^3)。

【解】　已知球体体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，铜体积为 V 在 $R=1$，$\Delta R=0.01$ 时体积的增量 ΔV

$$\Delta V \approx \mathrm{d}V\Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}} = V'\mathrm{d}R = V'\Delta R = 4\pi R^2\Delta R\Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}} \approx 0.13(\text{cm}^3)$$

因此每只球需用铜约为

$$8.9\times 0.13 = 1.16(\text{g})$$

理论探究

3.6　一元微分学中的主要关系

3.6.1　可导与连续的关系

历史上很长一段时期，几乎所有的数学家都相信，一个连续函数除了极个别点之外在任一点都可导，直到 19 世纪，人们才认识到函数的连续与可导有重大区别，那么函数在某一点的可导性与连续性有怎样的联系呢?

定理 3.6　若函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，则必在点 x_0 处连续。

【证】　由已知 $f(x)$在点 x_0 可导，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，从而

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+\alpha(x)$$

其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，因此

$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)\cdot(x-x_0)$$

即

$$\lim_{x\to x_0}f(x) = f(x_0)$$

故函数 $y=f(x)$在点 x_0 连续。

【注】

(1) 函数在某一点处可导是指在该点处导数值有限，导数不存在(包括导数为无穷大)称为不可导，但函数在某点处的导数为无穷大时，该点处的切线是存在的。

例如，函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$在点 $x=0$ 处连续但不可导，因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

即导数为无穷大，在图形中表现为曲线 $y=\sqrt[3]{x}$在原点具有垂直于 x 轴的切线 $x=0$。

(2) 定理 3.6 说明可导⇒连续；不连续⇒不可导。此外，上例说明连续不一定可导。

(3) 判断函数在特殊点的连续性与可导性，主要是用定义及定义推导出的充要条件。

$f(x)$在 x_0 处连续$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$

$f(x)$在 x_0 处可导$\Leftrightarrow f'(x_0)$存在$\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

例 3.42 讨论 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geqslant 0\\ x-1, & x<0\end{cases}$在点 $x=0$ 处的连续性与可导性。

【解】 如图 3.13 所示。

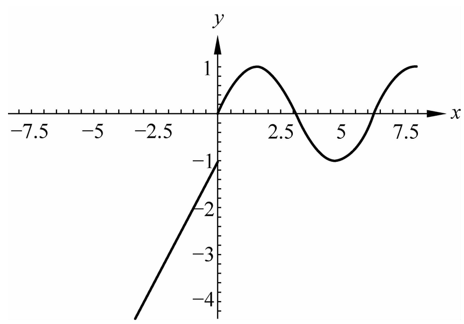


图 3.13

连续性 因 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，所以

$$f(0-0)\neq f(0+0)$$

故函数在 $x=0$ 不连续，由函数连续性与可导性的关系知，函数在 $x=0$ 处不可导。

例 3.43 设 $f(x)=\begin{cases}e^{ax}, & x\leqslant 0\\ \sin 2x+b, & x>0\end{cases}$，问当 a,b 为何值时，$f(x)$为可导函数？

【解】 当 $x\neq 0$ 时，显然 $f(x)$为可导函数，要使 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导，只要在 $x=0$ 点可导即可。$f(0)=1$，由可导必连续，则

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}(\sin 2x+b)=b=f(0)$$

所以 $b=1$，又因为

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{x}=a$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x+b-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{x}=2$$

由 $f'_-(0)=f'_+(0)$，得 $a=2$。

【练习】

(1) 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$在 $x=0$ 处的连续性和可导性。

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\sin ax, & x\leqslant 0\\ \ln(1+x)+b, & x>0\end{cases}$，问当 a,b 为何值时，$f(x)$为可导函数？

3.6.2 可导与可微的关系

（一）导数与微分的联系

回顾3.2.2节定理3.1，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，且当函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微时，其微分是 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$。不难发现，对一元函数而言，函数可导与函数可微是等价的。

（二）导数与微分的区别

尽管一元函数可导与可微是等价的，但是二者也是存在区别的。

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 是定数，而微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$ 是 Δx 的线性函数。

(2) 从几何意义上来看，$f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率，而微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程在点 x_0 的纵坐标增量（如图3.6所示）。

3.6.3 可导与连续可导的关系

定义3.7　如果 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在区间 I 上连续，则称 $y=f(x)$ 连续可导，记作 $f'(x)\in C^0(I)$ 或 $f(x)\in C'(I)$。

根据3.1.1节的引例2知道，物体作变速直线运动时，其瞬时速度 $v(t)$ 就是路程函数 $s=s(t)$ 对时间 t 的导数，即

$$v(t)=s'(t)$$

根据物理学知识，速度函数 $v(t)$ 对于时间 t 的变化率就是加速度 $a(t)$，即 $a(t)$ 是 $v(t)$ 对于时间 t 的导数

$$a(t)=v'(t)=[s'(t)]'$$

于是，加速度 $a(t)$ 就是路程函数 $s(t)$ 对时间 t 的二次导数，称为 $s(t)$ 对 t 的二阶导数。记为 $s''(t)$。因此，变速直线运动的加速度就是路程函数 $s(t)$ 对 t 的二阶导数，即

$$a(t)=s''(t)$$

定义3.8　若 $y'=f'(x)$ 在 x 处可导，则 $y'=f'(x)$ 在 x 处的导数称为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y''，$f''(x)$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$y''=(y')'\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

若 $f''(x)$ 在区间 I 上连续，则称 $f(x)$ 二阶连续可导，记作 $f(x)\in C^2(I)$。若 $f^{(k)}(x)$ 在 I 上连续，则称 $f(x)k$ 阶连续可导，记作 $f(x)\in C^k(I)$。

相应地，把 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的一阶导数。类似地，二阶导数的导数称为三阶导数，三阶导数的导数称为四阶导数……一般地，$n-1$ 阶导数的导数称为 n 阶导数，分别记作

$$y''',y^{(4)},\cdots,y^{(n)}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3},\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$$

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数。

函数 $f(x)$ 具有 n 阶导数，也常说成函数 $y=f(x)$ 为 n 阶可导。如果函数 $y=f(x)$ 在

点 x 处具有 n 阶导数,那么函数 $y=f(x)$ 在点 x 的某一邻域内必定具有一阶至 $(n-1)$ 阶的导数。

【注】

(1) 二阶导数的定义式为

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

(2) 连续可导必可导,但是未必二阶可导。

例 3.44 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,其中 $\alpha>0$,就 α 的取值情况讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性。

【解】 **$f(x)$的连续性**

$x\neq 0$ 时,$f(x)\in C^0(-\infty,+\infty)$(初等函数),又因为

$$\lim_{x\to 0}x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}=0=f(0)\quad(\alpha>0)$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以

$$f(x)\in C^0(-\infty,+\infty)\quad(\alpha>0)$$

$f(x)$的可导性

因为

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}=0\quad(\alpha>1)$$

所以

$$f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

即当 $\alpha>1$ 时,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$处处可导($f'(x)$存在)。

【思考】 按照例 3.44 的解题思路继续讨论,当 $\alpha>2,\alpha>3,\cdots,\alpha>2k$ 时,能得出什么结论?

仿照例 3.44 的解题思路继续讨论当 $\alpha>2$ 时,考虑 $f'(x)$的连续性,因为

$$f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

又因为

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}\right)$$

$$=0=f'(0)\qquad(f'(x)\text{ 在 }x=0\text{ 处连续})$$

即当 $\alpha>2$ 时,$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,即 $f(x)\in C^1(-\infty,+\infty)$。

考虑 $f'(x)$的可导性,因为

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}\right)-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\alpha x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-3}\cos\frac{1}{x}=0\quad(\alpha>3)$$

所以

$$f''(x)=\begin{cases}\left(\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x}\right)', & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

即当 $\alpha>3$ 时，$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$处处可导($f''(x)$存在)。

继续重复上述过程，不难验证：

当 $\alpha>4$ 时，$f(x)\in C^2(-\infty,+\infty)$。

当 $\alpha>5$ 时，$f'''(x)$存在。

当 $\alpha>6$ 时，$f(x)\in C^3(-\infty,+\infty)$。

……

依次类推，得出结论：

当 $\alpha>2k-1$ 时，$f^{(k)}(x)$存在。

当 $\alpha>2k$ 时，$f(x)\in C^k(-\infty,+\infty)$。

【联想】 若 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，实数 α 在什么取值范围内，$f(x)$具有以下性质。

(1) 连续但不可导；

(2) 可导但导函数不连续；

(3) 一阶导函数连续；

(4) 二阶可导。

至此，函数有界、收敛、连续、可导、连续可导以及高阶导数诸概念已经全部给出，我们将这些概念之间的关系用图 3.14 表示。

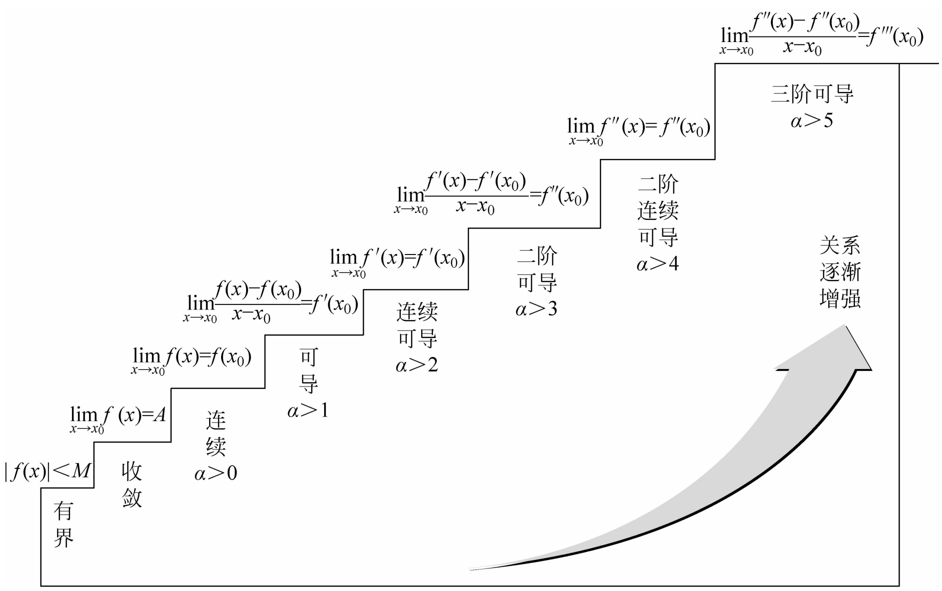
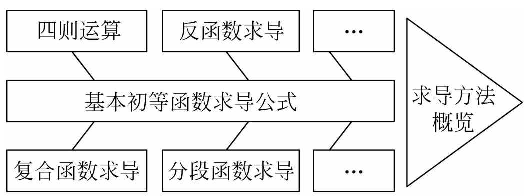


图 3.14

方法纵横

3.7 微分法拓展

函数求导是高等数学中的一个重要部分,同时,也是下册积分学的基础,除了在3.3节导数经典计算中介绍的常用求导方法以外,本节将深入探讨函数的高阶导数、隐函数求导、参数方程求导等问题。



3.7.1 高阶导数求导公式及其运算法则

(一)常用函数的高阶导数公式

求高阶导数就是多次连续地求导数,所以,我们仍可应用前面学过的求导方法来计算高阶导数。

例 3.45 设 $y=\arctan x$,求 y'''。

【解】

$$y'=\frac{1}{1+x^2};\quad y''=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=\frac{-2x}{(1+x^2)^2};\quad y'''=\left[\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right]'=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

例 3.46 求函数 $y=\mathrm{e}^{ax}$ 的 n 阶导数。

【解】

$$y'=a\mathrm{e}^{ax},\quad y''=a^2\mathrm{e}^{ax},\quad y'''=a^3\mathrm{e}^{ax},\quad y^{(4)}=a^4\mathrm{e}^{ax},\cdots$$

一般地,可得

$$y^{(n)}=a^n\mathrm{e}^{ax}$$

即

$$(\mathrm{e}^{ax})^{(n)}=a^n\mathrm{e}^{ax} \tag{3.39}$$

特别地,

$$(\mathrm{e}^{x})^{(n)}=\mathrm{e}^{x}$$

【练习】 (1) $y=\mathrm{e}^{2x}$,求 $y^{(5)}$。 (2) $y=2^x$,求 $y^{(8)}$。

例 3.47 求幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$的 n 阶导数公式。

【解】

$$y'=\alpha x^{\alpha-1},\quad y''=(\alpha x^{\alpha-1})'=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y'''=[\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}]'=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},\cdots$$

一般地，可得

$$(x^{\alpha})^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \tag{3.40}$$

特别地，若 $\alpha=-1$ 则有

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^{n}\frac{n!}{x^{n+1}}$$

若 α 为自然数 n，则有

$$(x^{n})^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots3\times2\times1=n!,\quad (x^{n})^{(n+1)}=(n!)'=0$$

【联想】

(1) 若 $y=ax^{n}$，则 $y^{(n)}=(ax^{n})'=a\cdot n!$。

(2) 若 $y=a_{0}+a_{1}x+a_{2}x^{2}+\cdots+a_{n}x^{n}$，则 $y^{(n)}=n!a_{n}$。

【练习】

(1) $y=1+2x+3x^{2}+\cdots+8x^{8}$，求 $y^{(8)},y^{(9)}$。

(2) $y=x^{-5}$，求 $y^{(5)}$。

(3) $y=(a-x)^{n+1}$，求 $y^{(n)}$。

一般函数的 n 阶导数没有通项公式，这里所列举的基本初等函数的 n 阶导数公式应当牢记。

例 3.48　求对数函数 $y=\ln(1+x)$ 的 n 阶导数。

【解】

$$y'=\frac{1}{1+x},\quad y''=-\frac{1}{(1+x)^{2}},\quad y'''=\frac{1\times2}{(1+x)^{3}},\quad y^{(4)}=-\frac{1\times2\times3}{(1+x)^{4}},\cdots$$

一般地，可得

$$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^{n}}\quad(n\geqslant1,0!=1)$$

例 3.49　求函数 $y=\sin kx$ 的 n 阶导数。

【解】

$$y'=k\cos kx=k\sin\left(kx+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=k^{2}\cos\left(kx+\frac{\pi}{2}\right)=k^{2}\sin\left(kx+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=k^{2}\sin\left(kx+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'''=k^{3}\cos\left(kx+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=k^{3}\sin\left(kx+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\cdots$$

一般地，可得

$$(\sin kx)^{(n)}=k^{n}\sin\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.41}$$

同理可得

$$(\cos kx)^{(n)}=k^{n}\cos\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.42}$$

例 3.50　求函数 $y=\dfrac{1}{1+x}$ 的 n 阶导数。

【解】　首先将函数写成幂函数形式，即

$$y=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1},\quad y'=-(1+x)^{-2},\quad y''=1\times2\,(1+x)^{-3},$$

$$y''' = -1\times 2\times 3\,(1+x)^{-4},\cdots$$

一般地有

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

即

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

快捷公式

$$\left(\frac{1}{a+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(a+x)^{n+1}} \tag{3.43}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}} \tag{3.44}$$

【练习】 (1) $y=\dfrac{1}{2+x}$,求 $y^{(4)}$。(2) $y=\dfrac{1}{2-x}$,求 $y^{(5)}$。

熟记下列公式,今后可以利用这些公式间接地求一些函数的高阶导数。

(1) $(a^x)^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a\quad(a>0)$,$(e^x)^{(n)}=e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin\left(kx+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

(3) $(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos\left(kx+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

(4) $\left(\dfrac{1}{a+x}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(a+x)^{n+1}}$

(5) $\left(\dfrac{1}{a-x}\right)^{(n)}=\dfrac{n!}{(a-x)^{n+1}}$

(二) 高阶导数的运算法则

若函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 处具有 n 阶导数,则函数 $u(x)\pm v(x)$ 也在点 x 处具有 n 阶导数,且

(1) $[u(x)\pm v(x)]^{(n)}=u\,(x)^{(n)}\pm v\,(x)^{(n)}$

(2) $(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$

(3)
$$\begin{aligned}(uv)^{(n)}&=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots\\&\quad+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}\\&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}\end{aligned} \tag{3.45}$$

式(3.45)称为莱布尼兹公式。

例 3.51 设 $y=x^2e^{2x}$,求 $y^{(100)}$。

【分析】 该函数是两个函数乘积的类型,可以用莱布尼兹公式,应选取 $u=e^{2x}$,$v=x^2$。

【解】 令 $u=e^{2x},v=x^2$，则 $u^{(k)}=2^k e^{2x}(k=1,2,\cdots,100)$

$$v'=2x,\quad v''=2,\quad v^{(k)}=0\quad(k=3,4,\cdots,100)$$

代入莱布尼兹公式，得

$$\begin{aligned}y^{(100)}&=(uv)^{(100)}=u^{(100)}v+C_{100}^{1}u^{(99)}v'+C_{100}^{2}u^{(98)}v''\\&=2^{100}\cdot e^{2x}\cdot x^2+100\times 2^{99}e^{2x}\cdot 2x+\frac{100\times 99}{2!}2^{98}\cdot e^{2x}\cdot 2\\&=2^{100}e^{2x}(x^2+100x+2475)\end{aligned}$$

【练习】 已知函数 $y=x^3e^x$，求 $y^{(20)}$。

前面用逐阶求导法直接求高阶导数，还可以利用已知的高阶导数公式及其求导法则，通过导数的四则运算、变量代换等方法，间接求出指定的高阶导数。

例 3.52 已知 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，求 $y^{(n)}$。

【分析】 该函数先化简 $y=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$，再套用式(3.44)。

【解】

$$y=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\qquad y^{(n)}=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

【练习】 求下列函数的 n 阶导数。

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$　　(2) $y=\dfrac{1}{x}$　　(3) $y=\ln(1+x)$　　(4) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$

例 3.53 已知 $y=\sin^4x-\cos^4x$，求 $y^{(n)}$。

【分析】 应先将函数降阶，再用公式(3.42)。

【解】

$$\begin{aligned}y&=(\sin^2x)^2-(\cos^2x)^2=(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^2x-\cos^2x)\\&=-\cos 2x\end{aligned}$$

所以

$$y^{(n)}=-2^n\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

【练习】 求函数 $y=\sin^2x$ 的 n 阶导数。

3.7.2 隐函数求导法则

前面提到的函数大多是形如 $y=f(x)$ 的形式，但是由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 在一定条件下也可确定 y 为 x 的函数。例如方程 $x^2+xy^3+3=0$，对于任意非零实数 x 对应唯一确定的 y 值，这样 y 是 x 的函数。

我们关心的问题是隐函数如何求导？一般容易想到的是：先把隐函数显化（把隐函数化成显函数）再求导。但有的隐函数不易显化，甚至不能显化，所以我们希望回避隐函数能否显化的困扰而直接求导。下面讨论的方法就是直接由方程 $F(x,y)=0$ 求出 y'。

隐函数求导的基本思想是：将方程 $F(x,y)=0$ 的两边同时对 x 求导，视 y 为 x 的函数，然后从关系式中解出 y' 即可。

例 3.54 求由方程 $xy+x=\mathrm{e}^{x+y}$ 所确定的隐函数 y 的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

【解】 方程的两边同时对 x 求导,得

$$y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=\mathrm{e}^{x+y}\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

即

$$(x-\mathrm{e}^{x+y})\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x+y}-y-1$$

解出$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$化简,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^{x+y}-y-1}{x-\mathrm{e}^{x+y}}$$

例 3.55 设 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

【分析】 $\arctan\frac{y}{x}$和 $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 均是 x 的复合函数,要注意 y 是 x 的函数。

【解】 方程两边对 x 求导,得

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'$$

即

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

解出 y',得 $y'=\frac{x+y}{x-y}$。

3.7.3 由参数方程所确定的函数的导数

还有一类函数,其函数关系是由参数方程给出的,那么这类函数如何求导呢?一般容易想到的是先消去参数再求导。如$\begin{cases}x=2t\\y=t^2\end{cases}$消去参数得 $y=t^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4}$,所以 $y'=\frac{x}{2}$。但有时消参困难或无法消参,因此,我们希望有一种方法能直接由参数方程计算它所确定的函数的导数。

在参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$中,若 $x=\varphi(t)$和 $y=\psi(t)$都可导,$\varphi'(t)\neq0$,且 $x=\varphi(t)$具有单调连续反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,则 $y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$,由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\quad\text{或}\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{y'_t}{x'_t}\tag{3.46}$$

【注】 x_t'表示 x 对 t 的导数，y_t'表示 y 对 t 的导数。

例 3.56　设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}$。

【解】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\dfrac{t^2}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$$

例 3.57　设曲线方程为$\begin{cases} x=t+2+\sin t \\ y=t+\cos t \end{cases}$，求此曲线在 $x=2$ 处的切线方程。

【解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{1-\sin t}{1+\cos t}$，当 $x=2$ 时，$t=0$，$y=1$，则

$$k=\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\frac{1-\sin t}{1+\cos t}\Big|_{t=0}=\frac{1}{2}$$

所求切线方程为

$$y-1=\frac{1}{2}(x-2)$$

【练习】

（1）计算下列参数方程所确定的函数的导数。

① $\begin{cases} x=\sin t^2 \\ y=\tan(e^t+1) \end{cases}$　　② $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$

（2）求椭圆$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$在相应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$点处的切线方程。

例 3.58　设$\begin{cases} x=t \\ y=t-e^t \end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

【分析】 属于参数方程求导问题，一阶导数 $y'=\dfrac{y_t'}{x_t'}$，在求二阶导数时，仍然看成参数方程$\begin{cases} x=t \\ y'=\dfrac{y_t'}{x_t'} \end{cases}$。

【解】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{1-e^t}{1}=1-e^t$$

则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{(y')_t'}{x_t'}=\frac{-e^t}{1}=-e^t.$$

一般地,参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$确定的函数 $y=y(x)$的各阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{(y')'_t}{x'_t}$$

同理可得

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{(y'')'_t}{x'_t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}=\frac{(y''')'_t}{x'_t}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=\frac{(y^{(n-1)})'_t}{x'_t}$$

【注】 求参数方程所确定函数的高阶导数时,分母永远是 x'_t。

【练习】 设$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\y=t-\arctan t\end{cases}$,求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

3.7.4 对数求导法

观察幂指函数 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$和函数 $y=\sqrt{x^2\sin x\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$,如果直接求导数比较麻烦甚至困难,这时可采用对数求导法。

所谓对数求导法,就是将函数表达式两边同时取自然对数,利用隐函数的求导方法。此法应属复合函数求导,但它的适用范围比较特殊,故单独列出。适合对数求导法的函数常见的有下面几种。

(1) 幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$;

(2) 连乘积形式的函数 $y=f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$;

(3) 分式形式函数 $y=\dfrac{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)}$;

(4) 无理函数 $y=\sqrt[m]{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)}$。

下面通过例题来说明这几种方法。

例 3.59 已知 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

【分析】 此函数是幂指函数,不可直接采用幂函数和指数函数的求导公式,方程两边先取对数,$\ln y=\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$,然后右边利用对数性质化成最简形式

$$\ln y=x\ln\frac{x}{1+x}=x[\ln x-\ln(1+x)]$$

再求导。

【解】 方程两边取对数

$$\ln y = x[\ln x - \ln(1+x)]$$

两边求导,得

$$\frac{y'}{y} = [\ln x - \ln(1+x)] + x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)$$

则

$$y' = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \left(\ln\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

例 3.60 求 $y=\sqrt{x^2\sin x\sqrt{1-e^x}}$ 的导数。

【分析】 此函数右边较复杂,直接求导麻烦,先取对数

$$\ln y = \ln\sqrt{x^2\sin x\sqrt{1-e^x}}$$

然后右边利用对数性质化成最简形式,再求导。

【解】 两边取对数

$$\ln y = \frac{1}{2}\left[2\ln x + \ln\sin x + \frac{1}{2}\ln(1-e^x)\right]$$

两边求导,得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1(0-e^x)}{2(1-e^x)}\right]$$

所以

$$y' = \frac{y}{2}\left[\frac{2}{x} + \cot x - \frac{e^x}{2(1-e^x)}\right]$$

例 3.61 求 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$ 的导数。

【解】 函数两边取对数

$$\ln y = \ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(x-1) - 2\ln(x+4) - x$$

上式两边求导

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{x+4} - 1$$

所以

$$y' = \frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{x+4} - 1\right]$$

【练习】 求下列函数的导数。

(1) $y=x^{\sin x}$　$(x>0)$, (2) $y=(\ln x)^{e^x}$, (3) $y=(x-1)\sqrt[3]{(3x+1)^2(x-2)}$。

3.7.5 抽象函数求导

所谓抽象函数,就是指没有给出具体解析式的函数,这种函数的导数当然也就不能由解析式求出,下面通过具体例子,介绍抽象函数求导的方法。

有些抽象函数,表面上不具备用定义求导的条件,这时,利用巧妙的数学变形把式子"配凑"成定义的形式,就能实现求导数的目的。

例 3.62 设 $f(x)=(x^{1996}-1)g(x)$,$g(x)$在 $x=1$ 连续,且 $g(1)=1$,求 $f'(1)$。

【解】 由题设知,$f(1)=0$,利用导数定义

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^{1996}-1}{x-1}g(x)=1996g(1)=1996$$

【思考】 例 3.62 中若采用下列做法是否正确?

$$f'(1)=[(x^{1996}-1)g(x)]'\big|_{x=1}=[1996x^{1995}g(x)+(x^{1996}-1)g'(x)]\big|_{x=1}=1996g(1)=1996$$

(提示:这种做法是错误的,因为 $g(x)$的可导性未知。)

例 3.63 设 $\varphi(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$,$f'(0)$存在,求 $F(x)=f[\varphi(x)]$在 $x=0$ 处的导数。

【解】 $\varphi(x)$如图 3.15 所示。

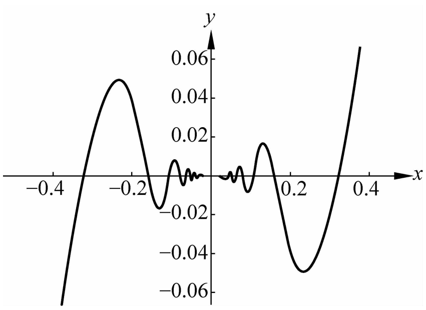


图 3.15

因为 $F(x)=f[\varphi(x)]=\begin{cases}f\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right) & x\neq0\\ f(0) & x=0\end{cases}$

利用导数定义,有

$$\begin{aligned}F'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f[\varphi(x)]-f[\varphi(0)]}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)-f(0)}{x^2\sin\frac{1}{x}}\cdot x\sin\frac{1}{x}\\&=f'(0)\cdot0=0\end{aligned}$$

例 3.64 设 $y=f\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)$,其中 $f(u)$可导,求 y'。

【解】 $y'=f'\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)'=f'\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'$

$$=f'\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^2}{1+x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=f'\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{1+x^2}$$

例 3.65　设 $y=x^2 f(\sin^2 x)$，其中 $f(u)$ 为可微函数，求 y'。

【解】　$y'=2xf(\sin^2 x)+x^2 f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x$

$=2xf(\sin^2 x)+x^2\sin 2x f'(\sin^2 x)$

【注】　若采用复合函数的求导法则对抽象函数求导时，要注意导数的写法。

【练习】　求下列函数的导数，其中 $f(x)$ 为可导函数。

(1) $y=\ln[f(x^2)]$，(2) $y=xf(x^4)$，(3) $y=f(\ln x)\cdot e^{f(x)}$。

应用欣赏

3.8　导数的应用

恩格斯曾指出："在一切理论成就中，未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样被看做人类精神的最高胜利了。"微积分的发展历史曲折跌宕，撼人心灵，是培养人们正确的世界观、科学的方法论，以及对人们进行文化熏陶的极好素材。

3.8.1　导数在经济学中的应用

导数是函数关于自变量的变化率，它客观地反映了事物变化的规律。在微观经济学中，很多变化率的问题其实质都是数学问题，可以利用导数知识加以研究并解决。

边际与弹性是经济学中的两个重要概念，它们与导数之间有着密切的关系，是导数在经济学中的重要应用之一。

（一）边际问题

在经济学中，边际就是描述经济函数的变化率。

定义 3.9　设经济函数 $f(x)$ 可导，则其导数 $f'(x)$ 称为经济函数 $f(x)$ 的边际函数。

例如，成本函数 $C(x)$ 的导数 $C'(x)$ 称为边际成本函数；收益函数 $R(x)$ 的导数 $R'(x)$ 称为边际收益函数；利润函数 $L(x)$ 的导数 $L'(x)$ 称为边际利润函数。$C'(x)$，$R'(x)$，$L'(x)$ 分别表示在一定的生产水平下再多生产一件产品而产生的成本，多售出一件产品而产生的收入与利润。

例 3.66　某产品在生产 8 到 20 件的情况下，生产 x 件的成本与销售 x 件的收入分别为

$$C(x)=x^3-2x^2+12x \quad 与 \quad R(x)=x^3-3x^2+10x$$

某工厂目前每天生产 10 件，试问每天多生产一件产品的成本为多少？每天多销售一件产品而获得的收入为多少？

【解】　在每天生产 10 件的基础上再多生产一件的成本大约为 $C'(10)$，

$$C'(x)=\frac{d}{dx}(x^3-2x^2+12x)=3x^2-4x+12,\quad C'(10)=272(元)$$

即多生产一件的附加成本为 272 元。边际收入为

$$R'(x)=\frac{d}{dx}(x^3-3x^2+10x)=3x^2-6x+10, R'(10)=250(元)$$

即多销售一件产品而增加的收入为 250 元。

例 3.67 设某种产品价格为 P,需求函数为 $x=1000-100P$,求需求量 $x=300$ 时的总收入、平均收入和边际收入。

【解】 销售 x 件价格为 P 的产品收入为 $R(x)=Px$,将需求函数 $x=1000-100P$,及 $P=10-0.01x$ 代入,得总收入函数

$$R(x)=(10-0.01x)x=10x-0.01x^2$$

平均收入函数为

$$\bar{R}(x)=\frac{R(x)}{x}=10-0.01x$$

边际收入函数为

$$R'(x)=(10x-0.01x^2)'=10-0.02x$$

$x=300$ 时的总收入为

$$R(300)=10\times 300-0.01\times 300^2=2100$$

平均收入为

$$\bar{R}(300)=10-0.01\times 300=7$$

边际收入为

$$R'(300)=10-0.02\times 300=4$$

【练习】 设某产品的需求函数为 $P=80-0.1x$(P 是价格,x 是需求量),成本函数为 $C=5000+20x$,试求边际利润函数 $L'(x)$,并分别求 $x=150$ 和 $x=400$ 时的边际利润。

(二) 弹性分析

在边际分析中所研究的是函数的绝对改变量与绝对变化率,经济学中常需研究一个变量对另一个变量的相对变化情况。例如一台空调的价格为 2000 元,一个计算器的价格为 20 元,它们各涨 2 元,这两种商品价格的绝对改变量都是 2 元,但对于空调机来讲,上涨 2 元是无关紧要的,因为只涨了 0.1%;而对于计算器就不同了,它上涨了 10%。这说明,仅有绝对变化率是不够的,因此有必要研究函数的相对改变量和相对变化率。这种相对变化率在经济分析中十分有用,它刻画了函数随自变量变化的灵敏程度。

定义 3.10 设函数 $y=f(x)$ 可导,函数的相对改变量

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}$$

与自变量的相对改变量 $\dfrac{\Delta x}{x}$ 之比 $\dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$,称为函数 $f(x)$ 在 x 与 $x+\Delta x$ 两点间的弹性(或相对变化率)。而极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$ 称为函数 $f(x)$ 在点 x 处的弹性(或相对变化率),记为

$$\frac{E}{Ex}f(x)=\frac{Ey}{Ex}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}=y'\frac{x}{y}$$

例如,求函数 $y=3+2x$ 在 $x=3$ 处的弹性,由 $y'=2$,得

$$\frac{Ey}{Ex}=y'\frac{x}{y}=\frac{2x}{3+2x},\quad \left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=3}=\frac{2\times 3}{3+2\times 3}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}\approx 0.67$$

设需求函数 $Q=f(P)$,这里 P 表示产品的价格。于是,定义该产品在价格为 P 时的

需求弹性如下：

$$\eta=\eta(P)=\lim_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P}=\lim_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{P}{Q}=P\frac{f'(P)}{f(P)}$$

当 ΔP 很小时，有

$$\eta=P\frac{f'(P)}{f(P)}\approx\frac{P}{f(P)}\frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

故需求弹性 η 近似地表示价格为 P 时，价格变动 1%，需求量将变化 η%。

例 3.68　设某种商品的需求量 Q 与价格 P 的关系为 $Q(P)=1600\left(\frac{1}{4}\right)^P$，求

(1) 需求弹性 $\eta(P)$；

(2) 当商品的价格 $P=10$ 元时，再上涨 1%，分析该商品需求量的变化情况。

【解】

(1) 需求弹性为

$$\eta(P)=P\frac{Q'(P)}{Q(P)}=P\frac{\left[1600\left(\frac{1}{4}\right)^P\right]'}{1600\left(\frac{1}{4}\right)^P}=P\frac{1600\left(\frac{1}{4}\right)^P\ln\frac{1}{4}}{1600\left(\frac{1}{4}\right)^P}$$

$$=P\ln\frac{1}{4}=(-2\ln 2)P\approx -1.39P$$

需求弹性为负，说明商品价格 P 上涨 1%时，商品需求量 Q 将减少 $1.39P$%。

(2) 当商品价格 $P=10$ 元时，$\eta(10)=-1.39\times 10=-13.9$，这表示价格 $P=10$ 元时，价格上涨 1%，商品的需求量将减少 13.9%，若价格降低 1%，商品的需求量将增加 13.9%。

3.8.2　导数在工程中的应用

（一）导数在桥梁颤振问题中的应用

桥梁断面颤振气动导数的准确识别是桥梁空气动力稳定性研究的基础，一直是桥梁风工程研究领域的前沿课题。由于桥梁截面不像机翼那样总是一面迎风，而是上下游都可能迎风，因而不可能制成机翼形状的完全流线型截面。受承力与施工方法影响，桥梁截面的颤振导数识别问题，仍有许多问题有待研究和解释。到目前，获取桥梁断面颤振导数的主要途径仍是节段模型风洞试验。通用的节段模型风洞试验识别颤振导数的方法包括两个阶段，第一阶段是获取信号阶段，通过风洞试验获取包含有气动自激力信息的振动时程信号，获取方法可分为自由振动法与强迫振动法。第二阶段是数据处理阶段，从振动信号中提取气动自激力信息，从而识别出颤振导数。

一般的作法是：考虑二维流场中的一个物体，假定离物体充分远处的来流是均匀场，风速为 U，攻角为 a_0，物体绕其平衡位置作频率为 ω 的小幅振动，具有竖向与扭转两个自由度，分别用 h 和 α 表示。按照气动弹性力学的观点，物体运动扰动了物体周围的流场，它又反过来引起流体作用于物体表面力的变化，这一部分变化的力与物体本身的状态向量(h',α',α,h)有关，因此称为气动自激力。气动自激力本是沿物体表面的分布力，为研究方便，可合成为向上的过物体弹性轴的升力和垂直于流场的扭矩，分别用 L 和 M 表示。

对于理想平板(厚度为零,宽度为 B,长度无限),可以建立自激力与颤振导数的关系式

$$L=\frac{1}{2}\rho U^2(2B)\left(kH'_1\frac{h'}{U}+kH'_2\frac{a'}{U}+k^2H'_3\alpha+k^2H'_4\frac{h}{B}\right)$$

$$M=\frac{1}{2}\rho U^2(2B^2)\left(kA'_1\frac{h'}{U}+kA'_2\frac{a'}{U}+k^2A'_3\alpha+k^2A'_4\frac{h}{B}\right)$$

其中,ρ 为空气密度;U 为来流速度;$k=\omega B/U$ 是约化频率,ω 是物体振动圆频率。

(二)导数在测量中的应用

目前建筑物的外形轮廓在设计中有的是由直线构成而棱角分明的,也有的为满足工作性能要求和一定的美观性采用圆滑的曲线相衔接。然而曲线(如幂函数曲线、圆弧曲线等)的测量给施工带来了一定的工作难度,其中圆弧曲线在测量放样中相对来说较简单一些。

若一座砌石重力坝由溢流坝段和非溢流坝段组成,其中溢流坝段部分由内砌浆砌石和外包一定厚度的混凝土组成,混凝土的平均厚度 $b=60\text{cm}$,溢流坝段顶部的混凝土曲线有一段是由幂函数 $y=0.089x^{1.85}$($0\leqslant x<5\text{cm}$)组成,由于混凝土外表面是一条曲线,并且 $b=60\text{cm}$ 厚的混凝土在方向上是垂直于混凝土外表面上每一点的切线。曲线上每一点对应的切线斜率等于该曲线方程的一阶导数,即

$$y'=\tan\alpha=(0.089x^{1.85})'=0.164\,65x^{0.85}$$

设对应与每一点的 b 值在铅垂方向上的数值为 h,根据三角函数关系式,有

$$h=b/\cos\alpha=b\sqrt{1+\tan^2\alpha}=b\sqrt{1+(0.164\,65x^{0.85})^2}$$

因为 h 值的方向是平行于铅垂线方向,在施工放样中比较容易控制。经过这样的换算就将原本复杂的问题简单化了,根据此方法在 Auto CAD 上画出图形和利用 Auto CAD 中某些命令直接画出的图形在 $0\leqslant x<5\text{cm}$ 取值范围内经过量取比较,误差最大的是在曲线的末端点,数值是 5cm,这对于浆砌石和混凝土来说能够满足精度要求。

(三)二阶导数在红外光谱定量分析中的应用

红外光谱法是一种既可以测定物质的含量,又可以分析物质结构变化的方法,具有测定时间短,精度高,并且可以进行多成分测定、非破坏性测定、连续测定等优点,是在线、实时、原位定量分析测定的主要方法之一。现阶段有关利用近红外光谱在环境监测、化工、医药、材料等领域进行定量分析的报道很多,这里简单介绍利用二阶导数对红外光谱进行预处理以消除这种干扰,并用于苯甲酸和邻苯二甲酸氢钾的定量分析过程。

取质量分数为 1% 苯甲酸和 1.5% 邻苯二甲酸氢钾以不同质量配比混合研磨均匀,取样压片扫描,然后在剩余样品中加入适量邻苯二甲酸氢钾混合研磨均匀,再取相同量的样品压片扫描,以此进行,可得到若干组不同浓度吸光值的数据库。考虑到二阶导数光谱可以去掉一些高频噪音及组分间的相互,可以利用二阶导数光谱法处理光谱数据。二阶导数光谱关于各组分的加和性表示如下。

$$\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}v^2}=\frac{\mathrm{d}^2A_1}{\mathrm{d}v^2}+\frac{\mathrm{d}^2A_2}{\mathrm{d}v^2}+\cdots+\frac{\mathrm{d}^2A_n}{\mathrm{d}v^2}$$

与建立各种数学模型一样,正确获取输入变量是建立模型最关键的一步。选择输入变量的基本原则是尽量做到“少而精”。另外,由于对光谱数据进行了二阶导数处理,在每条二阶导数光谱曲线中,导数光谱值有较大的幅度变化。研究发现,导数光谱值特别大

(或小)的点与浓度的线性相关未必理想,因为特别大(或小)的导数光谱值大多由极小的除数(或被除数)引起的,而极小的除数(或被除数)中噪音的相对值比较突出。

3.9　微分的应用

3.9.1　微分在近似计算中的应用

前面讨论过,如 $f'(x_0)\neq 0$,且 $|\Delta x|$ 很小时,得近似等式

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

即

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \tag{3.47}$$

或

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

令 $x=x_0+\Delta x$,即 $\Delta x=x-x_0$,上式成为

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \tag{3.48}$$

【注】 当 $f(x_0)$ 和 $f'(x_0)$ 容易求出时,可以利用此公式计算点 x_0 附近的函数值的近似值。

特别地,当 $x_0=0$ 时,上式为

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

由上式,当 $|x|$ 很小时,得到几个常用近似公式。

(1) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$

(2) $\sin x\approx x$(x 用弧度作单位表示)

(3) $\tan x\approx x$(x 用弧度作单位表示)

(4) $\mathrm{e}^x\approx 1+x$

(5) $\ln(1+x)\approx x$

例 3.69　利用微分计算 $\cos 29°$。

【解】 把29°化为弧度,$29°=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}$,设 $f(x)=\cos x$,如取 $x_0=\frac{\pi}{6}$,$\Delta x=-\frac{\pi}{180}$,于是

$$\cos 29° = \cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right)\approx \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0.8748$$

例 3.70　计算 $\sqrt{8.9}$ 的近似值。

【解】 取

$$f(x)=\sqrt{x},\quad x_0=9,\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

由公式(3.48)得

$$\sqrt{8.9}\approx\sqrt{9}+\frac{1}{2\sqrt{9}}\times(8.9-9)=3-\frac{1}{6}\times 0.1\approx 2.983$$

例 3.71 我们知道，牛顿的第二运动定律 $F=ma$(a 为加速度)中的质量 m 是被假定为常数的，但严格来说，这是不对的，因为物体的质量随其速度的增长而增长，在爱因斯坦修正后的公式中，质量为

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

当 v 和 c 相比很小时，v^2/c^2 接近于零，从而有

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\approx m_0\left[1+\frac{1}{2}(v^2/c^2)\right]=m_0+\frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

即

$$m\approx m_0+\frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

注意到上式中$\frac{1}{2}m_0v^2=k$ 是物体的动能，整理得

$$(m-m_0)c^2\approx\frac{1}{2}m_0v^2=\frac{1}{2}m_0v^2-\frac{1}{2}m_0 0^2=\Delta(k)$$

或

$$(\Delta m)c^2\approx\Delta(k)$$

换言之，物体从速度 0 到速度 v 的动能变化 $\Delta(k)$近似等于$(\Delta m)c^2$。

因为 $c=3\times10^8$ m/s，代入上式，得

$$\Delta(k)\approx9\times10^6\Delta m$$

由此可知，小的质量变化可以创造出大的能量变化。例如，1g 质量转换成的能量就相当于爆炸一颗 2 万吨级的原子弹释放的能量。

3.9.2 微分在误差计算中的应用

在生产实践中，经常要测量各种数据。由于测量仪器的精度、测量的条件和测量的方法等各种因素的影响，测得的数据往往带有误差，而根据带有误差的数据计算所得的结果也会有误差，我们把它叫做间接测量误差。

怎样利用微分来估计间接测量误差？首先介绍绝对误差与相对误差的概念。

定义 3.11 如果某个量的精确值为 A，它的近似值为 a，那么$|A-a|$叫做 a 的绝对误差，而绝对误差与$|a|$的比值$\frac{|A-a|}{|a|}$叫做 a 的相对误差。

在实际工作中，某个量的精确值往往是无法知道的，于是绝对误差和相对误差也就无法求得。但是根据测量仪器的精度等因素，有时能够确定误差在某一个范围内。

定义 3.12 如果某个量的精确值是 A，测得它的近似值是 a，又知道它的误差不超过 δ_A，即

$$|A-a|\leqslant\delta_A$$

那么 δ_A 叫做测量 A 的绝对误差限，而$\frac{\delta_A}{|a|}$叫做测量 A 的相对误差限。

例 3.72 设测得圆钢截面的直径 $D=60.03$mm，测量 D 的绝对误差限 $\delta_D=0.05$mm，

利用公式 $A=\frac{\pi}{4}D^2$ 计算圆钢的截面积时，试估计面积的误差。

【解】 把测量 D 时所产生的误差当作自变量 D 的增量 ΔD，那么，利用公式 $A=\frac{\pi}{4}D^2$ 来计算 A 时所产生的误差就是函数 A 的对应增量 ΔA。当 $|\Delta D|$ 很小时，可以利用微分 $\mathrm{d}A$ 近似地代替增量 ΔA，即

$$\Delta A \approx \mathrm{d}A = A' \cdot \Delta D = \frac{\pi}{2}D \cdot \Delta D$$

由于 D 的绝对误差限为 $\delta_D=0.05\mathrm{mm}$，所以

$$|\Delta D| \leqslant \delta_D = 0.05$$

而

$$|\Delta A| \approx |\mathrm{d}A| = \frac{\pi}{2}D \cdot |\Delta D| \leqslant \frac{\pi}{2}D \cdot \delta_D$$

因此得出 A 的绝对误差限约为

$$\delta_A = \frac{\pi}{2}D \cdot \delta_D = \frac{\pi}{2} \times 60.03 \times 0.05 \approx 4.715(\mathrm{mm}^2)$$

A 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{A} = \frac{\frac{\pi}{2}D \cdot \delta_D}{\frac{\pi}{4}D^2} = 2\frac{\delta_D}{D} = 2 \times \frac{0.05}{60.03} \approx 0.17\%$$

一般地，根据直接测量的 x 值按公式 $y=f(x)$ 计算 y 值时，如果已知测量 x 的绝对误差限是 δ_x，即

$$|\Delta x| \leqslant \delta_x$$

那么，当 $y'\neq 0$ 时，y 的绝对误差

$$|\Delta y| \approx |\mathrm{d}y| = |y'| \cdot |\Delta x| \leqslant |y'| \cdot \delta_x$$

即 y 的绝对误差限约为

$$\delta_y = |y'| \cdot \delta_x$$

y 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_y}{|y|} = \left|\frac{y'}{y}\right| \cdot \delta_x$$

以后常把绝对误差限与相对误差限简称为绝对误差与相对误差。

习　题　3

第一空间

1. 试利用导数的定义求下列极限。

(1) 若 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$________。

(2) 若 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=$________。

2. 若曲线 $y=x^3$ 在(x_0,y_0)处切线斜率等于 3,求点(x_0,y_0)的坐标。

3. 给定抛物线 $y=x^2-x+2$,求过点(1,2)的切线方程与法线方程。

4. 求下列函数的导数。

(1) $y=3x+5\sqrt{x}$　　(2) $y=5x^2-3^x+3e^x$

(3) $y=2\tan x+\sec x-1$　　(4) $y=\sin x\cdot\cos x$

(5) $y=x^3\ln x$　　(6) $y=e^x\cos x$

(7) $y=\dfrac{\ln x}{x}$　　(8) $y=(x-1)(x-2)(x-3)$

(9) $y=\dfrac{1+\sin t}{1+\cos t}$　　(10) $y=\sqrt[3]{x}\sin x+a^x e^x$

5. 求解下列问题。

(1) 求 $y=\ln x+e^x$ 的反函数 $x=x(y)$的导数。

(2) 设 $y=f(x)$是 $x=\varphi(y)$的反函数,且 $f(2)=4,f'(2)=3,f'(4)=1$,求 $\varphi'(4)$。

6. 求下列函数的导数。

(1) $y=\cos(4-3x)$　　(2) $y=e^{-3x^2}$

(3) $y=\sqrt{a^2-x^2}$　　(4) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$

(5) $y=\ln(\sec x+\tan x)$　　(6) $y=(2+3x^2)\sqrt{1+5x^2}$

(7) $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$　　(8) $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$

(9) $y=\dfrac{3x+1}{5x+6}$　　(10) $y=\ln\left(\dfrac{2x+2}{x+3}\right)$

(11) $y=e^{3\sin^2(2x+1)}$

7. 将适当的函数填入下列括号内,使等式成立。

(1) d(　)$=5x\mathrm{d}x$　　(2) d(　)$=\sin\omega x\mathrm{d}x$

(3) d(　)$=\dfrac{1}{2+x}\mathrm{d}x$　　(4) d(　)$=e^{-2x}\mathrm{d}x$

(5) d(　)$=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　(6) d(　)$=\sec^2 2x\mathrm{d}x$

8. 求下列函数的微分。

(1) $y=\ln x+2\sqrt{x}$　　(2) $y=x\sin 2x$

(3) $y=x^2e^{2x}$　　(4) $y=\ln\sqrt{1-x^3}$

(5) $y=(e^x+e^{-x})^2$　　(6) $y=\sqrt{x-\sqrt{x}}$

(7) $y=\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

第二空间

1. 已知 $f(x)$在 $x=a$ 处可导,且 $f'(a)=b$,求下列极限。

(1) $\lim\limits_{\Delta h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a-h)}{2h}$　　(2) $\lim\limits_{\Delta h\to 0}\dfrac{f(a+h^2)-f(a)}{h}$

2. 已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，求曲线 $y=f(x)$ 上对应 $x=0$ 处的切线方程。

3. 设 $f'(0)$ 存在，且 $f(0)=0$，求

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos 2x)}{x\sin x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)}{\sin^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}$

4. 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，$f(x)=(x^2-a^2)\varphi(x)$，求 $f'(a)$。

5. 用导数的定义求 $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ \ln(1+x) & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的导数。

6. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & x>0 \\ ax+b & x\leqslant 0 \end{cases}$ 可导，求常数 a,b 的值。

7. 设 $f(x)=\begin{cases} \sin x & x<0 \\ x & x\geqslant 0 \end{cases}$，求 $f'(x)$。

8. 若 $f(x)$ 二阶可导，求下列函数的二阶导数。

(1) $y=x^5+4x^3+2x$　　(2) $y=x\sin x$

(3) $y=\sqrt{1-x^2}$　　(4) $y=\ln(1-x^2)$

(5) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$　　(6) $y=xe^{x^2}$

9. 若 $f''(x)$ 存在，求下列函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

(1) $y=f(x^3)$　　(2) $y=\ln[f(x)]$

10. 求下列函数的 n 阶导数。

(1) $y=\dfrac{1}{5+x}$　　(2) $y=\sin 5x+3^x$

11. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，求当 n 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$。

12. 求下列隐函数的导数。

(1) $xy=e^{x+y}$　　(2) $xy-\sin \pi y^2=0$

(3) $e^{xy}+y^3-5x=0$　　(4) $y=1+xe^y$

13. 求下列参数方程确定的函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$。

(1) $\begin{cases} x=at^2 \\ y=bt^3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=\cos^2 t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$

14. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

(1) $\begin{cases} x=3\mathrm{e}^{-t} \\ y=2\mathrm{e}^{t} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=t+\ln t \\ y=t\ln t \end{cases}$

15. 求下列函数的导数。

(1) $y=x^{\mathrm{e}^x}$　　(2) $y=x^y$

(3) $y=(1+x^2)^{\tan x}$　　(4) $y=(\tan x)^{\sin x}+x^x$

(5) $y=\dfrac{\sqrt[5]{x-3}\ \sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{x+2}}$　　(6) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$

(7) $y=\left[\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^3(x+4)}\right]^{\frac{2}{3}}$

16. 求下列函数的导数,其中 $f(x)$ 为可导函数。

(1) $y=f(x^3)$　　(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$

(3) $y=f\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)$　　(4) $y=f[f(x)]$, $f(x)=\ln(1+x)$

17. 计算下列近似值。

(1) $\sqrt[100]{1.002}$　　(2) $\sin 29°$

(3) $\arcsin 0.5002$

18. 当 $|x|$ 较小时,证明下列近似公式。

(1) $\sin x\approx x$　　(2) $\mathrm{e}^x\approx 1+x$

(3) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{n}$

第三空间

1. $f(x)$ 对任何 x 满足 $f(x+1)=2f(x)$,且 $f(0)=1$, $f'(0)=C$(常数),求 $f'(1)$。

2. 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=1$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}$。

3. 设 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

4. 设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,求 $f'(0)$。

5. 已知 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & x<0 \\ \ln(1+x) & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处有二阶导数,试确定参数 a,b,c 的值。

6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导,且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$, $f(2)=1$,求 $f'''(2)$。

7. 设函数 $u(x)$, $v(x)$ 都在其定义域上可导,证明:

$$[u(x)^{v(x)}]'=u(x)^{v(x)}[v(x)\ln u(x)]'$$

8. 求函数的 $y=\dfrac{x^3}{x^2-2x-3}$ 的 n 阶导数。

9. 函数 $y=x^2\sin 2x$,求 $y^{(50)}$。

10. 设 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$。

11. 设 $y=1-xe^{y}$，求$\dfrac{dx}{dy},\dfrac{d^2x}{dy^2}$。

12. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{y}+xy=e$ 所确定，求 $y''(0)$。

13. 设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=e^{1+g(x)}$，$h'(1)=1$，$g'(1)=2$，求 $g(1)$。

14. 求曲线 $\sin xy+\ln(y-x)=x$ 在点$(0,1)$处的切线方程。

15. 设 $y=y(x)$是由方程 $x^2-y+1=e^{y}$ 所确定的隐函数，求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$。

16. 设 $y=y(x)$是方程 $xy+e^{y}=x+1$ 确定的隐函数，求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$。

17. 设函数 $y=f(x)$ 由方程$\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}\ (x>0,y>0)$所确定，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

18. 设函数 $y=f(x)$的极坐标式为 $\rho=a(1+\cos\theta)$，求$\dfrac{dy}{dx}$。

19. 设函数 $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\operatorname{arccot}\frac{y}{x}}\ (a>0)$，求 y'。

20. 设函数 $f(x)$在 $x=a$ 可导，且 $f(a)\neq 0$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{n}$。

21. 设 $f(x)$有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，求$\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$。

22. 设函数 $f(x)$当 $x\leqslant x_0$ 时有定义且可微分两次，应当如何选择系数 a,b,c，使函数

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & x\leqslant x_0 \\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c & x>x_0 \end{cases}$$是可微分两次的函数？