第3章

复变函数的积分

复变函数积分理论是复变函数的核心内容，是研究复变函数性质的重要方法和解决实际问题的有力工具. 本章首先介绍复变函数积分的概念、性质和计算方法，然后给出关于解析函数的柯西积分定理、柯西积分公式和高阶导数公式. 其中柯西积分定理和柯西积分公式是探讨解析函数性质的理论基础，在以后的章节中，经常要直接或间接地用到它. 值得一提的是，柯西积分公式和高阶导数公式是复变函数理论特有的.

3.1 复变函数积分的概念

这一节将实数域上有关积分的概念、性质推广到复数域上.

3.1.1 复变函数积分的定义

在高等数学中，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 定义为黎曼积分和的极限，这个积分在复平面上可以理解为：函数 $f(z)$ 沿直线 $y=0$ 从 a 到 b 的积分. 若将直线推广到曲线，a 和 b 引申到复数，则 $\int_a^b f(z)\mathrm{d}z$ 表示函数 $f(z)$ 沿某曲线 C 从复数 a 到复数 b 的积分.

定义 3.1 设函数 $w=f(z)$ 定义在区域 D 内，C 为区域 D 内起点为 A 终点为 B 的一条光滑的有向曲线. 把曲线 C 任意分成 n 个弧段，设分点为

$$A=z_0, z_1, \cdots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_n=B$$

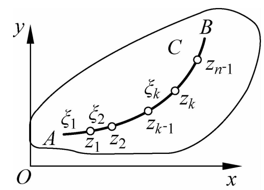

图 3.1

在每个弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 上任意取一点 ξ_k（见图 3.1），记 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$，$\Delta s_k=\widehat{z_{k-1}z_k}$ 的长度，$\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta s_k\}$. 当 n 无限增加，且 δ 趋于零时，且不论对 C 的分法及 ξ_k 的取法如何，如果和式极限

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(z_k-z_{k-1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k$$

存在，则称此极限值为 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分，记为 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$. 即

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k$$

其中 $f(z)$ 称为被积函数，z 为积分变量，$f(z)\mathrm{d}z$ 为被积表达式，曲线 C 为积分路径，

$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$ 为积分和.

【注】

(1) 当 C 是 x 轴上的区间 $a\leqslant x\leqslant b$,而 $f(z)=u(x)$ 时,这个积分定义就是一元实变函数定积分的定义.

(2) 关于简单闭曲线的正方向是指当曲线上的点 P 顺此方向沿该曲线前进时,邻近 P 点的曲线内部始终位于 P 点的左方.与之相反的方向就是曲线的负方向.

根据定义 3.1,可以证明复变函数具有下列性质,它们与实变函数中的积分性质相似:

(1) $\int_C f(z)\mathrm{d}z=-\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$ (其中 C^- 表示与曲线 C 为同一曲线,但方向相反).

(2) $\int_C kf(z)\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\mathrm{d}z$($k$ 为复常数).

(3) $\int_C [f(z)\pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z$.

(4) $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$(其中曲线 C 是由曲线 C_1, C_2,…,C_n 连接而成的).

(5) 设曲线 C 的长度为 L,函数 $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)|\leqslant M$,那么

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \leqslant ML$$

3.1.2 积分的存在定理及其计算公式

将复变函数积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 的被积函数和积分曲线方程分别按实部与虚部的形式展开,则关于积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 的计算有如下定理.

定理 3.1 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在光滑曲线 C 上连续,则 $f(z)$ 在曲线 C 上的积分存在,且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)$$

为了便于理解和记忆,被积表达式 $f(z)\mathrm{d}z$ 可以视为 $f(z)$ 和 $\mathrm{d}z$ 的乘积,其中 $f(z)=u+\mathrm{i}v$, $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y$,那么

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y) = \int_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)$$

当积分路径 C 由参数方程给出时,复积分又可以转化为实变量的定积分,这是计算复变函数积分的一种基本方法,今后我们所讨论的积分总是假定被积函数在 C 上连续,曲线 C 是光滑或分段光滑的有向曲线.

如果曲线 C 的参数方程为

$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t),\quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

其中,参数 α 和 β 分别对应曲线的起点和终点,且 $z'(t)\neq 0$.根据定理 3.1,有

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)\\ &= \int_\alpha^\beta \{u[x(t),y(t)]x'(t) - v[x(t),y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t\\ &\quad + \mathrm{i}\int_\alpha^\beta \{v[x(t),y(t)]x'(t) + u[x(t),y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t\\ &= \int_\alpha^\beta \{u[x(t),y(t)] + \mathrm{i}v[x(t),y(t)]\}\{x'(t) + \mathrm{i}y'(t)\}\mathrm{d}t\\ &= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

【例 3.1】 计算 $\int_C z\mathrm{d}z$,其中 C 为从原点到点 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段.

【解】 C 的参数方程为：$\begin{cases}x=3t\\ y=4t\end{cases}$,$0\leqslant t\leqslant 1$.
在 C 上,$z=(3+4\mathrm{i})t$,$\mathrm{d}z=(3+4\mathrm{i})\mathrm{d}t$,$0\leqslant t\leqslant 1$,于是

$$\int_C z\mathrm{d}z = \int_0^1 (3+4\mathrm{i})^2 t\mathrm{d}t = (3+4\mathrm{i})^2\int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{(3+4\mathrm{i})^2}{2}$$

【例 3.2】 计算 $\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z$,其中 C：

(1) 抛物线 $y=x^2$ 上从原点到点 $1+\mathrm{i}$ 的弧段；

(2) 从原点沿 x 轴到点 1 再到 $1+\mathrm{i}$ 的折线.

【解】

(1) 积分路径的参数方程为：$z(t)=t+\mathrm{i}t^2$,$0\leqslant t\leqslant 1$. 于是 $\mathrm{Re}z=t$,$\mathrm{d}z=(1+2t\mathrm{i})\mathrm{d}t$,

$$\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z = \int_0^1 t(1+2\mathrm{i}t)\mathrm{d}t = \left(\frac{t^2}{2}+\frac{2\mathrm{i}}{3}t^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}\mathrm{i}$$

(2) 积分路径由两段直线段构成. x 轴上直线段的参数方程为：$z(t)=t$,$0\leqslant t\leqslant 1$. 于是,$\mathrm{Re}z=t$,$\mathrm{d}z=\mathrm{d}t$. 1 到 $1+\mathrm{i}$ 直线段的参数方程为：$z(t)=1+\mathrm{i}t$,$0\leqslant t\leqslant 1$. 于是,$\mathrm{Re}z=1$,$\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{d}t$. 因此

$$\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z = \int_0^1 t\mathrm{d}t + \int_0^1 1\cdot\mathrm{i}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}+\mathrm{i}$$

【思考】 如果改变上述两个例题积分路径,是否会改变积分的结果?

【例 3.3】 计算 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$,$n\in\mathbf{Z}$,其中 C 为以 z_0 为中心,r 为半径的正向圆周(见图 3.2).

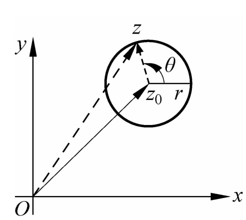

图 3.2

【解】 C 的参数方程为 $z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$,所以

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r^{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{i}}{r^n}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta$$

当 $n=0$ 时,$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \mathrm{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}$.

当 $n\neq 0$ 时,$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{\mathrm{i}}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - \mathrm{i}\sin n\theta)\mathrm{d}\theta = 0$. 所以

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

【注】 例 3.3 的结果以后经常要用到，该结果与积分路径圆周的中心和半径无关.

推论 3.1 若 C 为任意简单正向闭曲线，z_0 是 C 内部中任一点，则

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

【注】 推论 3.1 的推导过程在本章例 3.8 给出.

习题 3.1

1. 沿下列路径计算积分 $\int_0^{3+i} z^2 dz$.

(1) 从原点到 $3+i$ 的直线段.

(2) 从原点沿实轴到 3，再从 3 垂直向上到 $3+i$.

(3) 从原点沿虚轴到 i，再由 i 沿水平方向向右到 $3+i$.

2. 计算积分 $\int_C (x-y+ix^2) dz$，其中积分曲线 C 为：

(1) 从原点到 $1+i$ 的直线段.

(2) 从原点沿实轴到 1，再从 1 垂直向上到 $1+i$.

(3) 从原点沿虚轴到 i，再由 i 沿水平方向向右到 $1+i$.

3. 计算积分 $\int_C \mathrm{Im} z dz$，其中积分曲线 C 为：

(1) 从原点到 $2+i$ 的直线段.

(2) 上半圆周：$|z|=1$，起点为 1，终点为 -1.

(3) 圆周 $|z-a|=R(R>0)$ 的正向.

4. 计算积分 $\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|} dz$ 的值，其中积分曲线 C 为：

(1) $|z|=2$.

(2) $|z|=4$.

5. 计算积分 $\int_C (i-\bar{z}) dz$，其中积分曲线 C 为：

(1) 从原点到 $1+i$ 的直线段.

(2) 从原点沿抛物线 $y=x^2$ 到 $1+i$ 的弧段.

3.2 解析函数积分基本定理

3.2.1 柯西—古萨(Cauchy-Goursat)积分定理

设 D 为复平面内的单连通区域，$z_0, z_1 \in D$，C_1, C_2 为 D 内起点为 z_0 终点为 z_1 的两条不相同曲线. 一般来说，积分 $\int_{C_1} f(z) dz$ 和积分 $\int_{C_2} f(z) dz$ 的值是不相等的. 也就是说，

复变函数积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$的值，不仅与积分路径 C 的起点 z_0 和终点 z_1 有关，而且还与积分路径 C 有关. 例题 3.2 就说明了这一点，但是也有例外的情况，例题 3.1 中的积分仅与积分路径 C 的起点 z_0 和终点 z_1 有关，而与积分路径无关.

因此，必须要考虑的一个重要问题是，被积函数满足什么条件时，积分的值仅由积分曲线的起点和终点所决定，而与积分路径无关.

由于复变函数积分可以用两个实变函数线积分表示，即

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+\mathrm{i}\int_C(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y)$$

因此，复变函数积分与积分路径无关问题的研究，可以转化为实变函数的线积分与积分路径无关问题的研究. 在高等数学中，关于第二型曲线积分给出了一个重要的定理："如果 $P(x,y)$，$Q(x,y)$在单连通区域 D 内有一阶连续偏导数，并且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

则对于区域 D 内任意给定的两点 A，B，积分$\int_{AB}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)$的值只与 A，B 两点的位置有关，而与路径无关."

因此，为了保证实变函数积分$\int_C(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)$和$\int_C(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y)$都与积分路径无关，需要 u，v 的偏导数连续，并且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

即 $f(z)$在单连通区域 D 内解析.

定理 3.2(柯西—古萨积分定理)　设 $f(z)$在单连通区域 D 内解析，则 $f(z)$沿 D 内任一条简单闭曲线 C 的积分等于零，即

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$$

此定理的证明比较复杂，这里从略.

在定理 3.2 中，C 是单连通区域 D 内部的简单闭曲线，那么在 C 的外部与 D 的内部之间一定存在另外一条包围着 C 的简单闭曲线 C_1，使得函数 $f(z)$在 C_1 上及其内部的每一点处都解析. 这样，借助定理 3.2 可以得到下述推广定理.

定理 3.3　若函数 $f(z)$在简单闭曲线 C 及由 C 所围成的单连通区域内每一点都是解析的，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$$

类似于实变函数曲线积分的定理，可以从定理 3.2 和定理 3.3 得到关于复变函数积分与路径无关的定理.

定理 3.4　设 $f(z)$在单连通区域 D 内解析，z_0，z_1 为 D 内任意两点，C_1，C_2 是 D 内任意两条连接 z_0，z_1 的积分路线，则

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$

【证明】 由柯西—古萨积分定理,有

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1+C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

故

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$

定理 3.4 说明:当 $f(z)$在单连通区域 D 内解析时,积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与路径无关.也就是说,积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 的值仅仅由被积函数和积分路径的起点和终点确定.

【例 3.4】 计算$\int_C (2z^2+8z+2)\mathrm{d}z$ 的值,其中 C:$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 是摆线的一段(见图 3.3).

【解】 设 L 为从 0 到 $2\pi a$ 的直线段,则 L 和 C^- 构成闭曲线,因为 $2z^2+8z+2$ 在复平面内解析,根据定理 3.3 可知,

$$\int_{L+C^-} (2z^2+8z+2)\mathrm{d}z = 0$$

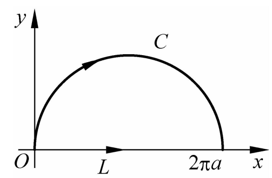

图 3.3

于是

$$\begin{aligned}\int_C (2z^2+8z+2)\mathrm{d}z &= \int_L (2z^2+8z+2)\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi a} (2x^2+8x+2)\mathrm{d}x \\ &= 4\pi a\left(\frac{4}{3}\pi^2 a^2 + 4\pi a + 1\right)\end{aligned}$$

3.2.2 不定积分

由柯西—古萨积分定理知,当 $f(z)$在单连通区域 D 内解析时,积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与路径无关.在区域 D 内取定点 z_0,取动点 z,则上述积分确定了一个关于上限 z 的函数:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$$

定理 3.5 如果 $f(z)$是单连通区域 D 内的解析函数,则 $F(z)$在 D 内解析,并且 $F'(z)=f(z)$.

【证明】

$$\begin{aligned}F(z) &= \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \\ &= P(x,y) + \mathrm{i}Q(x,y)\end{aligned}$$

这里

$$P(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y); \quad Q(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)$$

这两个曲线积分与路径无关,并且 u,v 在 D 内连续,故 P,Q 在 D 内可微,所以

$$\frac{\partial P}{\partial x}=u,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-v,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=v,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=u$$

于是

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}$$

因此，函数 $F(z)=P(x,y)+\mathrm{i}Q(x,y)$ 是 D 内的解析函数，并且

$$F'(z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}=u+\mathrm{i}v=f(z)$$

定义 3.2　在区域 D 内满足 $F'(z)=f(z)$ 的函数 $F(z)$ 称为 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数.

容易证明，$f(z)$ 的任何两个原函数相差一个常数.

定义 3.3　如果函数 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数，则称 $f(z)$ 的原函数的一般表达式 $F(z)+C$（C 为任意常数）为 $f(z)$ 的不定积分，记作 $\int f(z)\mathrm{d}z=F(z)+C$.

利用任意两个原函数之差为常数这一性质，我们可以推得与牛顿—莱布尼兹公式类似的解析函数积分计算公式.

定理 3.6　如果 $f(z)$ 是单连通区域 D 内解析函数，$F(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数，那么

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z=F(z_1)-F(z_0)$$

【证明】　因为 $\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$ 也是 $f(z)$ 的一个原函数，所以

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=F(z)+C$$

令 $z=z_0$，上式左端积分等于零，得 $C=-F(z_0)$，则

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=F(z)-F(z_0)$$

从而

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z=F(z_1)-F(z_0)$$

【注】　有了上述定理，复变函数的积分就可以利用类似实变函数微积分学中的方法去计算.

【例 3.5】　求 $\int_0^{\mathrm{i}} z\cos z\mathrm{d}z$ 的值.

【解】　利用分部积分法，

$$\int_0^{\mathrm{i}} z\cos z\mathrm{d}z=\int_0^{\mathrm{i}} z\mathrm{d}(\sin z)=[z\sin z]_0^{\mathrm{i}}-\int_0^{\mathrm{i}}\sin z\mathrm{d}z=[z\sin z+\cos z]_0^{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{-1}-1$$

【例 3.6】　试沿区域 $\mathrm{Im}(z)\geqslant 0,\mathrm{Re}(z)\geqslant 0$ 内的圆弧 $|z|=1$，计算 $\int_1^{\mathrm{i}}\frac{\ln(z+1)}{z+1}\mathrm{d}z$ 的值.

【解】　利用凑微分法，

$$\int_1^{\mathrm{i}}\frac{\ln(z+1)}{z+1}\mathrm{d}z=\int_1^{\mathrm{i}}\ln(z+1)\mathrm{d}\ln(z+1)=\left.\frac{\ln^2(z+1)}{2}\right|_1^{\mathrm{i}}=\frac{1}{2}[\ln^2(1+\mathrm{i})-\ln^2 2]$$

$$=-\frac{\pi^2}{32}-\frac{3}{8}\ln^2 2+\frac{\pi\ln 2}{8}\mathrm{i}$$

习题 3.2

1. 设 $f(z)$在单连通区域 D 内解析，C 为 D 内任一条简单正向闭曲线，那么

$$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]\mathrm{d}z = 0,\quad \oint_C \mathrm{Im}[f(z)]\mathrm{d}z = 0$$

是否成立？如果成立，给出证明；如果不成立，举例说明.

2. 设 $f(z)$在单连通区域 D 内解析且不为零，C 为 D 内任一条简单正向闭曲线，那么积分 $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$ 是否等于零？为什么？

3. 试用观察法得出下列积分的值：

(1) $\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z-2}$； (2) $\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2z+4}$； (3) $\oint_{|z|=2} \frac{z}{z-3}\mathrm{d}z$；

(4) $\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{\cos z}$； (5) $\oint_{|z|=1} z\mathrm{e}^2\mathrm{d}z$； (6) $\oint_{|z|=2} z^3\cos z\mathrm{d}z$；

(7) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z^2+4)}$；

(8) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z^3-1)}\mathrm{d}z$， C：$|z|=r<1$.

4. 计算下列积分：

(1) $\int_{-\pi\mathrm{i}}^{3\pi\mathrm{i}} \mathrm{e}^{2z}\mathrm{d}z$； (2) $\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}} \sin^2 z\mathrm{d}z$；

(3) $\int_0^1 z\sin z\mathrm{d}z$； (4) $\int_0^{\mathrm{i}} (z-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z$.

3.3 复合闭路定理

柯西—古萨积分定理的前提条件是被积函数在单连通域内解析，那么在多连通域内柯西—古萨积分定理的结论是否依然成立？在本节中，我们将柯西—古萨积分定理推广到多连通域的情形.

假设 C 及 C_1 为 D 内的任意两条正向简单闭曲线，C_1 在 C 的内部，而且以 C 及 C_1 为边界的区域 D_1 全含于 D. 作两条不相交的弧段$\widehat{AA'}$及$\widehat{BB'}$，它们依次连接 C 上某一点 A 到 C_1 上的一点 A'，以及 C_1 上的一点 B'(异于 A')到 C 上一点 B，而且此两弧段除去它们的端点外全含于 D_1，这样就使得 $AEBB'E'A'A$ 及 $AA'F'B'BFA$ 形成两条全在 D 内的简单闭曲线，它们的内部全含于 D(见图 3.4)，由此可知

$$\oint_{AEBB'E'A'A} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$$\oint_{AA'F'B'BFA} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

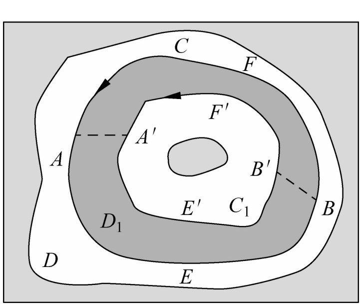

图 3.4

将上面两式相加，由$\oint_{AEBB'E'A'A} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{AA'F'B'BFA} f(z)\mathrm{d}z=0$，得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{\widehat{AA'}} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{\widehat{A'A}} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{\widehat{BB'}} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{\widehat{B'B}} f(z)\mathrm{d}z=0$$

即

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z=0$$

或

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z$$

如果把两条简单闭曲线 C 及 C_1^- 看成一条复合闭路 Γ，正向为外层的闭曲线 C 为逆时针方向，内部的闭曲线 C_1 为顺时针方向，那么

$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=0$$

上式说明：在区域内的一个解析函数沿闭曲线的积分，不会因为曲线在区域内作连续变形而改变它的值，只要在变形过程中曲线不经过函数 $f(z)$的不解析点. 这一重要的事实称为闭路变形原理.

用同样的方法，我们可以证明：

定理 3.7(复合闭路定理)　设 C 为多连通域 D 内的一条简单闭曲线，$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是在 C 内部的简单闭曲线，它们互不包含也互不相交，并且以 $C,C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为边界的区域全含于 D 中(见图 3.5)，如果 $f(z)$在 D 内解析，那么

(1)$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z$，其中 C 及 C_k 均取正方向；

(2)$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=0$，这里 Γ 为由 C 及 $C_k(k=1,2,\cdots,n)$ 所组成的复合闭路，其方向是 C 为逆时针方向，C_k 为顺时针方向.

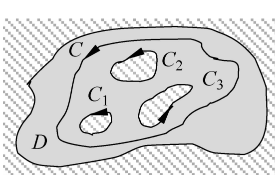

图　3.5

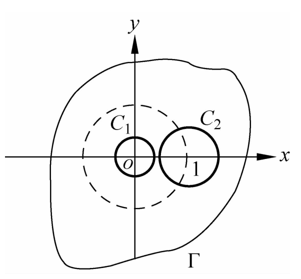

图　3.6

【例 3.7】　计算 $I=\oint_\Gamma \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 是任意一条正向简单闭曲线，点 $z_1=1$ 及 $z_2=0$ 在 Γ 的内部.

【解】　令 $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z}=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z}$，则 $f(z)$在 Γ 内有奇点 $z_1=1$ 和 $z_2=0$.

在 Γ 内部作两个互不包含互不相交的正向圆周 C_1 和 C_2. C_1 只包含奇点 $z=0$,C_2 只包含奇点 $z=1$(见图 3.6),根据复合闭路定理 3.7 得

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z \\ &= \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}\mathrm{d}z + \oint_{C_1} \frac{1}{z}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z}\mathrm{d}z \\ &= 0 + 2\pi\mathrm{i} + 2\pi\mathrm{i} + 0 = 4\pi\mathrm{i} \end{aligned}$$

【注】 从上例来看,复合闭路原理的应用价值在于将解析函数沿复杂积分路线的积分转化为较简单(如圆周)的曲线积分.这是计算积分常用方法之一.

【例 3.8】 计算 $I = \oint_C \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z, n \in \mathbf{Z}$,$C$ 是含 a 的任意一条正向简单闭曲线.

【解】 在曲线 C 的内部作一条简单闭曲线 C_1:$|z-a|=\rho$,故 $f(z)=\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$ 在以 $C+C_1^-$ 为边界的复连通域内处处解析.由复合闭路定理,有

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

利用例 3.3 的结论,有

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

习题 3.3

1. 计算下列积分:

(1) $\oint_C \left(\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}z$,其中 C:$|z|=4$ 为正向;

(2) $\oint_C \frac{2\mathrm{i}}{z^2+1}\mathrm{d}z$,其中 C:$|z-1|=6$ 为正向;

(3) $\oint_{C=C_1+C_2} \frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z$,其中 C_1:$|z|=2$ 为正向,C_2:$|z|=3$ 为负向;

(4) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}}$,其中 C 为以 $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{6}{5}\mathrm{i}$ 为顶点的正向菱形.

2. 下列两个积分的值是否相等?积分(2)的值能否利用闭路变形原理从(1)的值得到?为什么?

(1) $\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z}\mathrm{d}z$;　　　　(2) $\oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z}\mathrm{d}z$.

3. 设 C_1 与 C_2 为相交于 M,N 两点的简单闭曲线,它们所围的区域分别为 B_1 与 B_2,B_1 与 B_2 的公共部分为 B,如果 $f(z)$ 在 B_1-B 与 B_2-B 内解析,在 C_1 与 C_2 上也解析,证明:$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$.

3.4 柯西积分公式与高阶导数公式

本节将在柯西—古萨积分定理的基础上给出解析函数积分的柯西积分公式和高阶导数公式. 这两个公式,除了可以计算某些类型的积分以外,还在理论上解释了解析函数的如下特性:根据解析函数在区域边界上的函数值可以求它在区域内部点的函数值;解析函数具有任意阶导数且各阶导函数仍为解析函数.

3.4.1 柯西积分公式

设 B 为单连通域,z_0 为 B 中的一点,如果 $f(z)$在 B 内解析,那么函数$\dfrac{f(z)}{z-z_0}$在 z_0 不解析. 所以在 B 内沿围绕 z_0 的一条闭曲线 C 的积分$\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$一般不为零. 又根据闭路变形原理,积分的值沿任何一条围绕 z_0 的简单闭曲线都是相同的,下面来求这个积分的值.

在 B 内作积分曲线 C:$|z-z_0|=\delta$(取其正向),由 $f(z)$的连续性,在 C 上的函数 $f(z)$的值将随着 δ 的缩小而逐渐接近于它在圆心 z_0 处的值,从而$\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$的值随着 δ 的缩小而接近于

$$\oint_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z = f(z_0)\oint_C \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f(z_0)$$

即

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f(z_0)$$

于是,得到下面的定理:

定理 3.8(柯西积分公式) 设 C 是一条简单正向闭曲线,$f(z)$在以 C 为边界的有界闭区域 $\overline{D}$ 内解析,z_0 为 C 内任一点,则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

【注】 柯西积分公式提供了计算复变函数沿简单闭曲线积分的一种方法,即可以用

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f(z_0)$$

来计算特定的环路积分. 实际上柯西积分公式可以推广到多连通域的情形.

推论 3.2 若函数 $f(z)$在$|z-z_0|<R$ 内解析,在$|z-z_0|=R$ 上连续,则解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值,即

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$$

【证明】 因为 $z=z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$,根据柯西积分公式,有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{i}\,R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$$

【例 3.9】 求下列积分的值

(1)$\oint_{|z+i|=i}\dfrac{\cos z}{z+i}dz$； (2)$\oint_{|z|=2}\dfrac{z}{(5-z^2)(z-i)}dz$.

【解】

(1) 因为 $\cos z$ 在复平面内解析，根据柯西积分公式，有

$$\oint_{|z+i|=i}\frac{\cos z}{z+i}dz=2\pi i\cos z\big|_{z=-i}=2\pi i\cos(-i)=2\pi i\frac{e+e^{-1}}{2}=(e+e^{-1})\pi i$$

(2) 因为 z 在曲线 C：$|z|=2$ 上及其内部均解析，根据柯西积分公式，有

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2}\frac{z}{(5-z^2)(z-i)}dz&=\oint_{|z|=2}\frac{z}{(5-z^2)}\cdot\frac{1}{(z-i)}dz\\&=2\pi i\frac{z}{(5-z^2)}\bigg|_{z=i}=2\pi i\frac{i}{(5-i^2)}=-\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

【例 3.10】 计算$\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}}\dfrac{1}{z(z^2+1)}dz$的值.

分析：因为 $z(z^2+1)=z(z+i)(z-i)$，所以函数$\dfrac{1}{z(z^2+1)}$的奇点是 $z=0,z=\pm i$，而在圆周 C：$|z-i|=\dfrac{3}{2}$的内部包含两个奇点 $z=0,z=i$.

【解法 1】 将被积函数整理为部分分式：$\dfrac{1}{z(z^2+1)}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}\right)$

根据柯西—古萨积分定理和柯西积分公式，有

$$\begin{aligned}\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{1}{z(z^2+1)}dz&=\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+i}-\frac{1}{2}\frac{1}{z-i}\right)dz\\&=\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{1}{z}dz-\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{1}{z+i}dz-\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{1}{z-i}dz\\&=2\pi i-0-\frac{1}{2}2\pi i=\pi i\end{aligned}$$

【解法 2】 利用复合闭路定理，在 C：$|z-i|=\dfrac{3}{2}$内部作两条互不包含、互不相交的简单正向闭曲线 C_1,C_2，且分别包含两个奇点 $z=0,z=i$.

$$\begin{aligned}\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{1}{z(z^2+1)}dz&=\oint_{C_1}\frac{1}{z(z^2+1)}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z(z^2+1)}dz\\&=\oint_{C_1}\frac{\frac{1}{z^2+1}}{z}dz+\oint_{C_2}\frac{\frac{1}{z(z+i)}}{z-i}dz\\&=2\pi i\frac{1}{(z^2+1)}\bigg|_{z=0}+2\pi i\frac{1}{z(z+i)}\bigg|_{z=i}\\&=2\pi i+2\pi i\frac{1}{2i\cdot i}\\&=2\pi i-\pi i=\pi i\end{aligned}$$

【例 3.11】 设积分曲线 C：$|z|=3$，函数 $f(z)=\int_C\dfrac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi$，求 $f'(1+i)$.

【解】 当 z 不在 C 的内部时，$f(z)=0$.

当 z 在 C 的内部时，根据柯西积分公式，有

$$f(z)=\int_C \frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=2\pi\mathrm{i}\cdot(3\xi^2+7\xi+1)\big|_{\xi=z}=2\pi\mathrm{i}(3z^2+7z+1)$$

所以 $f'(z)=2\pi\mathrm{i}(6z+7)$. 因为 $1+\mathrm{i}$ 在 C 的内部，所以

$$f'(1+\mathrm{i})=2\pi(-6+13\mathrm{i})$$

3.4.2 解析函数的高阶导数

在学习实函数微积分的过程中我们知道，某个实函数 $f(x)$ 存在一阶导数 $f'(x)$ 却不一定存在二阶导数 $f''(x)$ 或更高阶导数 $f^{(n)}(x)$. 作为复函数的 $f(z)$ 却具有与实函数不同的结论.

关于解析函数 $f(z)$ 的高阶导数有如下定理.

定理 3.9　解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数，它的 n 阶导数公式为

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z,\quad n=1,2,\cdots$$

其中 C 为在函数 $f(z)$ 的解析区域 D 内围绕 z_0 的任意一条简单正向闭曲线，而且它的内部全含于 D.

【注】　高阶导数公式的作用不在于通过积分来求导，而在于通过求导来求积分，即可以用

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}f^{(n)}(z_0),\quad n=1,2,\cdots$$

来计算特定的环路积分.

【例 3.12】　设积分曲线 C：$|z|=r>1$，计算积分 $\oint_C \frac{\cos\pi z}{(z-1)^5}\mathrm{d}z$.

【解】　函数 $\frac{\cos\pi z}{(z-1)^5}$ 在 C 内有奇点 $z=1$，$f(z)=\cos\pi z$ 在 C 内处处解析，根据解析函数高阶导数公式，有

$$\oint_C \frac{\cos\pi z}{(z-1)^5}\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(5-1)!}(\cos\pi z)^{(4)}\big|_{z=1}=-\frac{\pi^5\mathrm{i}}{12}$$

【例 3.13】　设积分曲线 C：$|z|=2$，计算积分 $\oint_C \frac{1}{z^3(z+1)(z-1)}\mathrm{d}z$.

【解】　函数 $f(z)=\frac{1}{z^3(z+1)(z-1)}$ 在 C 内共有三个奇点 $z=0$，$z=\pm1$，在 C：$|z|=2$ 内部作三条互不包含、互不相交的简单正向闭曲线 C_1，C_2，C_3，且分别包含三个奇点 $z=0$，$z=\pm1$. 根据柯西积分公式和高阶导数公式，有

$$\begin{aligned}
&\oint_C \frac{1}{z^3(z+1)(z-1)}\mathrm{d}z\\
&=\oint_{C_1}\frac{\frac{1}{(z+1)(z-1)}}{z^3}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\frac{1}{z^3(z+1)}}{(z-1)}\mathrm{d}z+\oint_{C_3}\frac{\frac{1}{z^3(z-1)}}{(z+1)}\mathrm{d}z\\
&=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}\left[\frac{1}{(z+1)(z-1)}\right]''_{z=0}+2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{z^3(z+1)}\right]_{z=1}+2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{z^3(z-1)}\right]_{z=-1}\\
&=-2\pi\mathrm{i}+\pi\mathrm{i}+\pi\mathrm{i}=0
\end{aligned}$$

【思考】 如果函数 $f(z)$沿区域 D 内任一条简单闭曲线的积分均为零,这个函数一定在 D 内解析吗?

定理 3.10(Morera 定理) 如果函数 $f(z)$在单连通域 D 内连续,且对于 D 内的任意简单闭曲线 C,都有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

则 $f(z)$在 D 内解析.

【证明】 因为$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$,所以对于任意 $z_0, z \in D$,积分$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$与路径无关,设

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

则必有

$$F'(z) = f(z)$$

根据定理 3.9,解析函数 $F(z)$的导数也是解析函数,故 $f(z)$在 D 内解析.

习题 3.4

1. 沿指定曲线的正向计算下列各积分:

(1) $\oint_C \dfrac{\mathrm{e}^z}{z-2}\mathrm{d}z$, C: $|z-2|=1$;　　(2) $\oint_C \dfrac{1}{z^2-a^2}\mathrm{d}z$, C: $|z-a|=a$;

(3) $\oint_C \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+1}\mathrm{d}z$, C: $|z-2\mathrm{i}|=\dfrac{3}{2}$;　　(4) $\oint_C \dfrac{\sin z}{z}\mathrm{d}z$, C: $|z|=1$;

(5) $\oint_C \dfrac{\sin z}{\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}\mathrm{d}z$, C: $|z|=2$;　　(6) $\oint_C \dfrac{\mathrm{e}^z}{z^5}\mathrm{d}z$, C: $|z|=1$;

(7) $\oint_C \dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-\alpha)^3}\mathrm{d}z$,其中 α 为 $|\alpha|\neq 1$ 的任何复数,C: $|z|=1$ 为正向.

2. 证明:当 C 为任何不通过原点的简单闭曲线时,$\oint_C \dfrac{1}{z^2}\mathrm{d}z = 0$.

3. 设 C 为不经过 α 与 $-\alpha$ 的正向简单闭曲线,α 为不等于零的任何复数,试就 α 与 $-\alpha$ 跟 C 的各种不同位置,计算积分

$$\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z$$

的值.

4. 设 C_1 与 C_2 为两条互不包含、也不相交的正向简单闭曲线,证明:

(1) 当 z_0 在 C_1 内时,$\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_{C_1} \dfrac{z^2}{z-z_0}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \dfrac{\sin z}{z-z_0}\mathrm{d}z\right] = z_0^2$.

(2) 当 z_0 在 C_2 内时,$\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_{C_1} \dfrac{z^2}{z-z_0}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \dfrac{\sin z}{z-z_0}\mathrm{d}z\right] = \sin z_0$.

5. 设 $f(z)$与 $g(z)$在区域 D 内处处解析,C 为 D 内的任何一条简单闭曲线,它的内

部全含于 D. 如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上所有的点处成立，试证明：在 C 内所有点处，$f(z)=g(z)$ 也成立.

6. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，C 为 D 内任一条简单正向闭曲线，证明：对在 D 内但不在 C 上的任意一点 z_0，等式

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$$

成立.

实验三　复变函数的积分

一、实验目的

学习用 Matlab 计算复变函数的积分.

二、相关的 Matlab 命令（函数）

(1) Int(f)：计算函数 f 的不定积分.

(2) Int(f,z)：计算函数 f 关于变量 z 的不定积分.

(3) Int(f,a,b)：计算函数 f 对自变量从 a 到 b 的定积分.

(4) Int(f,z,a,b)：计算函数 f 对自变量 z 从 a 到 b 的定积分.

三、实验内容

【例 1】 计算 $\int e^z \mathrm{d}z$.

【解】 在 Matlab 命令窗口中输入：

```
>> syms z
>> syms f e
>> f=e^z;
>> int(f)
```

运行结果为：

```
ans=
      1/log(e)*e^z
```

【例 2】 计算 $\int_0^i z\sin z\mathrm{d}z$.

【解】 在 Matlab 命令窗口中输入：

```
>> syms z
>> f=z*sin(z);
>> jg=int(f,z,0,i)
```

运行结果为：

```
jg=
    sin(i)-i*cos(i)
```

【例 3】 计算积分 $\int_C z^2 dz$，C 为从 $z=0$ 到 $z=2+i$ 的直线段.

【解】 在 Matlab 命令窗口中输入：

```
>> syms z
>> syms t real   %声明 t 是一个实的符号变量
>> z=(2+i)*t;
>> int(z^2*diff(z),t,0,1)
```

运行结果为：

```
ans=
    1/3*(2+i)^3
```

【例 4】 试求出下面的曲线积分：

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)} dz$$

【解】 在 Matlab 命令窗口中输入：

```
>> i=sym(sqrt(-1)); syms z
>> f=1/((z+i)^10*(z-1)*(z-3));
>> r1=limit(diff(f*(z+i)^10,z,9)/prod(1:9),z,-i);
>> r2=limit(f*(z-1),z,1);
>> a=2*pi*i*(r1+r2)
```

运行结果为：

```
a =
    (237/312500000+779/78125000*i)*pi
```

【例 5】 求闭路积分：$\oint_{|z|=3} \frac{2z+3}{z^2+2z+3} dz$.

【解】 我们可以在 Matlab 中编写函数 jf 来实现函数在半径为 R 的闭曲线上的积分.

```
>> function jf(R,B,A)      %闭曲线半径为 r
                           %积分值为 v
[r,p,k]=residue(B,A);
sum=0;
for x=1:length(p)
if abs(p(x))<R             %闭曲线上的极点数
        sum=sum+r(x);      %留数定理
        end
end
v=sum*2*pi*i               %积分值
```

在命令窗口输入：

```
>> B=[2,3];
>> A=[1,2,3];
>> v=jf(3,B,A)
```

运行结果为：

```
v=
   0+12.5664i
```

四、实验习题

1. 计算积分 $\int_C z\mathrm{d}z$，其中 C 为从原点到点 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段.

2. 计算下列积分：

(1) $\int_{-\pi\mathrm{i}}^{3\pi\mathrm{i}} \mathrm{e}^{2z}\mathrm{d}z$；　　(2) $\int_0^1 z\sin z\mathrm{d}z$.

3. 计算积分 $\oint_C \frac{2\mathrm{i}}{z^2+1}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z-1|=6$ 的正向.

4. 计算积分 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}}$，其中 C 为以 $\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{6}{5}\mathrm{i}$ 为顶点的正向菱形.