第1章

行 列 式

本章从排列、对换等概念入手，引入 n 阶行列式的定义，介绍 n 阶行列式的性质、计算方法以及利用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

1.1 排列

1.1.1 排列的定义

在中学的时候，我们曾学过乘法原理.所谓乘法原理就是：如果一个过程可以分成两个阶段进行，第一阶段有 m 种不同的做法，第二阶段有 n 种不同的做法，且第一阶段的任何一种做法都可以与第二阶段的任何一种做法搭配成整个过程的一种做法，那么整个过程有 mn 种做法.

例 1.1 用数字 1,2,3,4 可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解 这个问题相当于：把四个数字分别放在百位、十位、个位上，有几种不同的放法？

我们可以将每种放法分为三个阶段进行.第一阶段，百位可以从四个数字中任选一个，有 4 种放法；第二阶段，十位可以从余下的三个数字中任选一个，有 3 种放法；第三阶段，个位可以从余下的两个数字中任选一个，有 2 种放法. 根据乘法原理，共有 $4\times3\times2=24$ 种放法，即有 24 个没有重复数字的三位数.

这里的数字 1,2,3,4 是我们考察的对象. 数学中把考察的对象称为**元素**. 例 1.1 即为：从 4 个不同的元素中任取 3 个排成一列，共有几种不同的排法？

将例 1.1 推广到 n 个不同元素的情形，可得下面定义.

定义 1.1 从 n 个不同的元素中，任取 $r(0<r\leqslant n)$ 个按照一定的顺序排成一列，这样的一列元素叫做从 n 个不同元素中取 r 个组成的一种排列. 通常将所有不同排列的种数记为 P_n^r.

例 1.2 从数字 $1,2,\cdots,n$ 中任取 r 个排成一列，共有多少种不同的排法？

解 这个问题相当于:从 n 个不同的元素中任取 r 个,放在 r 个不同的位置,共有多少种不同的放法?

显然,第一个位置可以从 n 个元素中任选一个放在该位置上,有 n 种放法;……第 r 个位置可以从余下的 $n-r+1$ 个元素中任选一个放在该位置上,有 $n-r+1$ 种放法.根据乘法原理,共有 $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)$种放法.

由此,我们可以得出计算 P_n^r 的方法,即

$$\mathrm{P}_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1),\quad 0 < r \leqslant n.$$

如果将例 1.2 中的 r 取为 n,可以得到一种特殊的排列,即全排列.

定义 1.2 把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的一个全排列(简称排列或 n 元排列).排列种数记为 P_n.

由例 1.2 可得

$$\mathrm{P}_n = n\times(n-1)\times\cdots\times 3\times 2\times 1 = n!.$$

在以后的实际应用中,通常只考虑由元素 $1,2,\cdots,n$ 组成的全排列.

1.1.2 逆序数

定义 1.3 对于元素 $1,2,\cdots,n$,我们规定各元素之间有一个标准次序(称为标准排列或自然排列,通常规定为由小到大的次序).在这 n 个元素所构成的一个排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 中,当 $i<j$ 时,$p_i<p_j$,就称 p_i 与 p_j 构成一个顺序,反之,就称 p_i 与 p_j 构成一个逆序.p_i 前比 p_i 大的元素的个数称为 p_i 的逆序数.排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中各个元素的逆序数的总和称为该排列的逆序数,记为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$.

显然

$$t(p_1p_2\cdots p_n) = p_1\text{ 的逆序数} + p_2\text{ 的逆序数} + \cdots + p_n\text{ 的逆序数}.$$

例 1.3 求 $t(n(n-1)\cdots 1)$.

解 在排列 $n(n-1)\cdots 1$ 中,$n-1$ 的逆序数为 1,$n-2$ 的逆序数为 2,……,1 的逆序数为 $n-1$,于是

$$t(n(n-1)\cdots 1) = 1+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

例 1.4 求 $t(53214)$.

解 在排列 53214 中,3 的逆序数为 1,2 的逆序数为 2,1 的逆序数为 3,4 的逆序数为 1,于是

$$t(53214) = 1+2+3+1 = 7.$$

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

1.2 对换

我们来看两个三元排列:

$$312,213.$$

显然排列 213 可以看成是将排列 312 中的元素 3，2 互换得到的，我们把这种互换称为一个对换.

定义 1.4 把一个排列中的某两个元素互换，而其余的元素保持不变得到另一个排列的过程称为一个对换. 相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $p_1\cdots p_n pq q_1\cdots q_m$，对换 p,q 后变为 $p_1\cdots p_n qp q_1\cdots q_m$. 显然，对换后 $p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_m$ 这些元素的逆序数不变，而 p,q 两元素的逆序数变为下面两种情形：当 $p<q$ 时，对换后 p 的逆序数增加 1，q 的逆序数不变；当 $p>q$ 时，对换后 p 的逆序数不变，q 的逆序数减少 1，所以原排列与 $p_1\cdots p_n qp q_1\cdots q_m$ 的奇偶性相反.

再证一般对换的情形.

设排列为 $p_1\cdots p_n p q_1\cdots q_m q r_1\cdots r_k$，将 q 与 $q_m,\cdots,q_1$ 依次作 m 次相邻对换，变为 $p_1\cdots p_n pq q_1\cdots q_m r_1\cdots r_k$；再将 p 与 $q,q_1,\cdots,q_m$ 依次作 $m+1$ 次相邻对换变为 $p_1\cdots p_n q q_1\cdots q_m p r_1\cdots r_k$. 总之，原排列经过 $2m+1$ 次相邻对换后变为 $p_1\cdots p_n q q_1\cdots q_m p r_1\cdots r_k$，所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 1.1 任意一个 n 元排列都可以经过一系列对换变成标准排列，且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

证 由定理 1.1 知，排列奇偶性的变化次数即为对换的次数，而标准排列为偶排列，故推论成立.

推论 1.2 在全部 $n!$ 个 n 元排列中，奇、偶排列的个数相等，各为$\dfrac{n!}{2}$个.

证 假设在 $n!$ 个 n 元排列中，有 s 个奇排列和 t 个偶排列，则 $s+t=n!$. 将 s 个奇排列的前两个元素都对换，即将 $p_1p_2p_3\cdots p_n$ 变为 $p_2p_1p_3\cdots p_n$，就得 s 个偶排列，显然 $s\leqslant t$. 同理可得 $t\leqslant s$，所以 $s=t=\dfrac{n!}{2}$.

1.3 行列式

1.3.1 行列式的定义

对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，用消元法可求出方程组(1.1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

在(1.2)式中，分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是方程组(1.1)的 4 个系数所确定的，把这 4 个数按其在方程组(1.1)中的位置排成 2 行 2 列(横排称为行、竖排称为列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.3)所确定的**二阶行列式**，记为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.4}$$

这里，数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式(1.4)的元素，第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列. 等式的右端称为**二阶行列式的展开式**.

二阶行列式可以按图 1.1 所示的对角线法则展开. 把 a_{11} 和 a_{22} 用实线(称为**主对角线**)连接，a_{12} 和 a_{21} 用虚线(称为**副对角线**)连接，二阶行列式就是主对角线上的两个元素之积与副对角线上的两个元素之积的差.

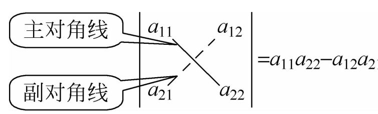

图 1.1

利用二阶行列式，方程组(1.1)的解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

这里分母 D 是由方程组的系数所确定的二阶行列式(称为**系数行列式**)，D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 后所得的二阶行列式，D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 后所得的二阶行列式.

例 1.5 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=1, \\ x_1+2x_2=0. \end{cases}$$

解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{1\times 2-1\times 0}{2\times 2-1\times 1}=\frac{2}{3},$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}}=\frac{2\times0-1\times1}{2\times2-1\times1}=-\frac{1}{3}.$$

定义 1.5　将 9 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{matrix}\tag{1.5}$$

表达式 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$称为数表(1.5)所确定的三阶行列式,记为$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$,即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

等式的右端称为三阶行列式的展开式.

三阶行列式可以按图 1.2 所示的对角线法则展开.

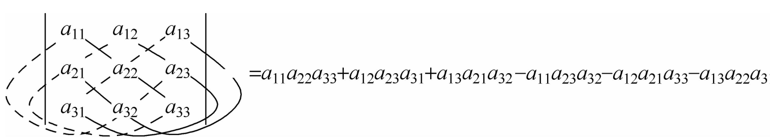

图　1.2

例 1.6　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&1\\3&2&1\end{vmatrix}.$$

解　直接用定义计算可得

$$D=1\times0\times1+1\times1\times3+1\times2\times2-1\times1\times2-1\times2\times1-1\times0\times3=3.$$

分析二阶行列式和三阶行列式,可以看出其展开式具有以下规律(n 为行列式的阶数):

(1) 行列式共有 $n!$ 项,带正、负号的项各占一半;

(2) 行标排列为自然排列;

(3) 每项均为 n 个元素的乘积,且这 n 个元素分别取自于不同的行和不同的列;

(4) 每项前的符号取决于列标排列的奇偶性.

于是,二阶行列式可以表示为

$$D=\sum_{p_1p_2}(-1)^{t(p_1p_2)}a_{1p_1}a_{2p_2},$$

这里的 $\sum\limits_{p_1p_2}$ 表示对数 1,2 的所有排列 p_1p_2 求和.

三阶行列式可以表示为

$$D=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{t(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

这里的 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对数 1,2,3 的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

依此类推,我们可以定义 n 阶行列式.

定义 1.6 将 n^2 个数排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{1.6}$$

表达式 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为数表(1.6)所确定的 n 阶行列式,记为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

这里 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对数 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和,数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式 D 中第 i 行、第 j 列的元素. n 阶行列式也可简记为 $\det(a_{ij})$.

行列式左上角到右下角的连线称为**主对角线**,右上角到左下角的连线称为**副对角线**. 当 $n=1$ 时,$|a|=a$.

例 1.7 判断以下各项是否是四阶行列式 $D_4=\det(a_{ij})$ 展开式中的一项,如是,它们前面的符号如何?

(1) $a_{11}a_{23}a_{34}$; (2) $a_{11}a_{23}a_{22}a_{34}$; (3) $a_{12}a_{43}a_{31}a_{24}$.

解 (1)、(2)不是;(3)是. 因为 $a_{12}a_{43}a_{31}a_{24}=a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$,$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ 的行标排列为标准排列,列标排列为 2413,$t(2413)=3$,所以该项带负号.

例 1.8 计算上三角行列式(当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$,即主对角线以下的元素全为 0)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　$D=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$. 在 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中，p_n 只有取 n 时，a_{np_n} 才可能不为 0. 此时，p_{n-1} 只有取 $n-1$ 时，$a_{n-1,p_{n-1}}$ 才可能不为 0. 依此类推，p_1 只有取 1 时，a_{1p_1} 才可能不为 0，D 的展开式中只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 可能不为 0，而这项的列标排列为标准排列，所以

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可得下三角行列式（当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$，即主对角线以上的元素全为 0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，对角行列式（当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$，即主对角线以外的元素全为 0，以后常把 0 元素略去不写）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.9　证明

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & ⋰ & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

证

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & ⋰ & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{记 } a_1=b_{1n},a_2=b_{2,n-1},\cdots,a_n=b_{n1}} \begin{vmatrix} & & & b_{1n} \\ & & b_{2,n-1} & \\ & \therefore & & \\ b_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{t(n(n-1)\cdots 1)} b_{1n}b_{2,n-1}\cdots b_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

例 1.10 计算

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 $D=\sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_5} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_5)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{5p_5}$. 在 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{5p_5}$ 中,p_5 只有取 1 或 2 时,a_{5p_5} 才可能不为 0,此时,p_4 只有取 2 或 1 时,a_{4p_4} 才可能不为 0. 由于展开式中的项为取自不同行、不同列的元素的乘积,所以 p_3 只能在 3,4,5 中选择,即 a_{3p_3} 必为 0,所以 $D=0$.

1.3.2 行列式的等价定义

对于 n 阶行列式

$$D = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

由于 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 是 n 个数的乘积,满足交换律,故可以将 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 中的元素进行交换. 当 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 经过 m 次交换化为 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 时,$a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 的行标排列 $12\cdots n$ 变为 $i_1 i_2 \cdots i_n$,行标排列的奇偶性变换 m 次;列标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 变为 $j_1 j_2 \cdots j_n$,列标排列的奇偶性也变换 m 次. 于是

$$\begin{aligned} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} &= (-1)^{t(12\cdots n)+t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \\ &= (-1)^{t(i_1 i_2 \cdots i_n)+m+t(j_1 j_2 \cdots j_n)+m} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \\ &= (-1)^{t(i_1 i_2 \cdots i_n)+t(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}. \end{aligned}$$

又 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 与 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 是相互惟一确定的,故

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \\ &= \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ (\text{或} j_1 j_2 \cdots j_n)}} (-1)^{t(i_1 i_2 \cdots i_n)+t(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \end{aligned}$$

由此可得 n 阶行列式的等价定义.

定义 1.6′

$$D=\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n\\(\text{或}j_1j_2\cdots j_n)}}(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

特别地,当列标排列为标准排列时,可得下面结论.

定义 1.6″

$$D=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{t(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

1.4 行列式的性质

n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项,当 n 较大时,用定义计算行列式是很困难的,此时通常利用行列式的性质来计算.

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{n1}\\\vdots&&\vdots\\a_{1n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

D^{T} 称为 D 的**转置行列式**.

性质 1.1 行列式与其转置行列式相等.

证 记

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},$$

这里 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,由行列式的定义知

$$\begin{aligned}D^{\mathrm{T}}&=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}\\&=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},\end{aligned}$$

而由行列式的等价定义 1.6″可知

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

故 $D^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1.1 表明,行列式对行成立的性质对列也成立,反之亦然.

性质 1.2 行列式的两行(列)互换,其值反号.

证 设 D 交换第 i,j 行后得到

$$D_1=\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},$$

这里,当 $k\neq i,j$ 时,$b_{kp}=a_{kp}$;当 $k=i,j$ 时,$b_{ip}=a_{jp}$,$b_{jp}=a_{ip}$. 于是

$$\begin{aligned}
D_1 &= \sum(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}\\
&= \sum(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}\\
&\xlongequal{a_{ip_j}\text{ 与 }a_{jp_i}\text{ 交换}} \sum(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}\\
&= \sum(-1)^{1+t(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}\\
&= -\sum(-1)^{t(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}\\
&= -D,
\end{aligned}$$

故 $D_1=-D$.

性质 1.3 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

推论 1.3 行列式的某两行(列)对应元素成比例,其值为零.

性质 1.4 行列式的某一行(列)中所有元素都是两个数之和,则该行列式等于相应的两个行列式之和. 例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{i1} & \cdots & b_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

性质 1.3、性质 1.4 都很容易用行列式的定义证明.

推论 1.4 行列式某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上,其值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$