第 3 章 chapter 3

集合与关系

本章要点

- 集合的概念与表示、集合的运算
- 关系及表示、关系性质、关系的运算
- 等价关系和偏序关系

本章学习目标

- 掌握集合的基本概念，掌握集合的基本运算
- 掌握幂集，掌握序偶、笛卡儿积和关系等基本概念
- 掌握关系的表示方法、运算方式和关系的特殊性质
- 理解关系的闭包，掌握其构造方法
- 理解等价关系的定义，能判定和证明
- 掌握偏序关系并讨论偏序集的某些性质

集合论是现代数学的基础，它几乎与现代数学的每个分支均有联系，并且已渗透到各个科学领域。集合论是计算机数学中很重要的一部分，它采用符号逻辑来表达集合概念，从而用符号化的形式语言来表述集合的相关问题。本章介绍集合论中最基本的概念，有集合的基本概念，如子集、幂集等，集合的基本运算和恒等式，集合上定义的关系和它的性质运算等。其中重点是关系，它是关系数据库理论的理论基础。在第 4 章中将从集合和关系的角度讨论函数。

3.1 集合的概念和表示

3.1.1 集合与元素

集合是数学中最基本的概念之一，它与几何中的“点”、“线”等概念一样，不可精确定义。简单地说，集合可以描述为把一些事物汇集到一起组成的一个整体。如“高二(1)班的学生”是一个集合，硬币的“正面、反面”也构成一个集合，还有“学校车棚内的车辆”、“笛卡儿坐标系内平面上所有的点”、“地球上的所有生物”、“满足方程 $x^2+y^2\leqslant 5^2$ 的全部的点”、“26 个英文字母构成的集合”等都是集合。

构成集合的具有共同性质的事物称为集合的元素或成员。通常用大写字母表示一个集合,用小写字母或数字表示一个元素。

一些常见的集合整理如下:

自然数集合 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$

整数集合 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$

有理数集合 $\mathbf{Q}=\{x|x=p/q,p,q\in\mathbf{Z}\}$

实数集合 $\mathbf{R}=\{x|x$ 是实数$\}$

复数集合 $\mathbf{C}=\{x|x=a+b\mathrm{i},a,b\in\mathbf{R},\mathrm{i}^2=-1\}$

关于集合,需要注意以下几点:

(1) 集合中元素之间的次序是无关紧要的,如$\{a, i, o, e, u\}=\{i, a, e, o, u\}$。

(2) 集合的元素是互不相同的,若某一元素重复出现,应该认为是同一元素,如{香蕉,梨,菠萝,芒果}={香蕉,芒果,菠萝,芒果,梨}。

(3) 集合的元素可以是具体事物或抽象概念,还可以是另一集合。如一本书、一支笔、集合$\{1,2,3\}$可以组成集合 $B=\{$一本书,一支笔,$\{1,2,3\}\}$。

(4) 集合中元素之间可以有某种关联,也可以彼此毫无关系,如 $A=\{a,1,$苹果,张三,o,®$\}$。

集合是由若干个元素构成的,集合的元素可以是任意的,甚至也可以是一个集合。因此不能简单地说集合和元素是孰大孰小的关系。用属于关系来描述元素与集合的关系。

对于某个集合而言,可以判断一个事物是否是某个集合的元素。如果一个元素 a 是某个集合 A 中的元素,则称 a 属于 A,记作 $a\in A$。如果一个元素 a 不是集合 A 的元素,称为 a 不属于 A,记为 $a\notin A$。

例如,$A=\{a,b,\{c,d\},\{\{e\}\}\}$,这里有 $a\in A,b\in A,\{c,d\}\in A,\{\{e\}\}\in A$,但是 $c\in\{c,d\},d\in\{c,d\},c\notin A,d\notin A,\{e\}\notin A$。

3.1.2 集合的表示

集合的概念是唯一的,但集合的表示方法可以是多种多样的。常用的集合表示法主要有列举法(或枚举法)和描述法(或谓词表示法)。

1. 列举法

列举法即列出集合的所有元素,元素之间用逗号分开,再用花括号将所有元素括起。通常,在集合中的元素个数比较少或者具有某种规律时,列举法比较合适。下述集合就是用列举法表示的:

$A=\{1,3,5,7,9\}$

$B=\{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{d},\cdots,\mathrm{z}\}$

$C=\{$A,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K,大王,小王$\}$

这里表明集合 A 是由数字 1,3,5,7,9 组成的,集合 B 是 26 个小写英文字母构成的集合,而 C 表示了不考虑花色时扑克牌的集合。

例 3.1 用列举法表示下列集合。

(1) 小于 20 的素数集合

(2) 构成单词 mississippi 的字母的集合

(3) 命题的真值构成的集合

解：

(1) $\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

(2) $\{\mathrm{m},\mathrm{s},\mathrm{i},\mathrm{p}\}$

(3) $\{\mathrm{T},\mathrm{F}\}$

2. 描述法

描述法即通过描述集合中元素具有的共同性质或用谓词公式来确定集合。个体域中能使谓词公式为真的那些元素确定了一个集合，因为这些元素都具有某种特殊性质。

以下集合是用描述法表示的：

$B=\{x\mid x\in \mathbf{R}\wedge x^2-1=0\}$，表示方程 $x^2-1=0$ 的实数解集。

$A=\{x\mid x$ 是英文字母表中的元音字母$\}$，与$\{\mathrm{a},\mathrm{e},\mathrm{i},\mathrm{o},\mathrm{u}\}$所表示的集合相同。

$\mathbf{N}=\{x\mid x$ 是自然数$\}$，表示自然数的集合。

$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x,y\in \mathbf{R}\}$，表示直径为 1 的圆及圆周内所有点的集合。

例 3.2 用描述法表示下列集合。

(1) $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

(2) 能被 7 整除的整数集合

解：

(1) $\{x\mid x\in \mathbf{I},|x|\leqslant 3\}$，其中 $\mathbf{I}$ 是整数集合

(2) $\{x\mid \exists y(y\in \mathbf{I}\wedge x=7y)\}$

描述某个集合时方法任选，只要它能方便、简洁、准确地界定出属于某个集合的所有元素或成员即可。如$\{1,-1\}$和$\{x\mid x^2=1\}$是同一集合的不同表示。

3.1.3 集合与集合的关系

集合的元素一旦给定，这一集合便完全确立。这一事实被形式化地叙述为外延公理。

外延公理 两集合 A 和 B 相等，当且仅当它们有相同的元素。若 A 与 B 相等，记为 $A=B$；否则，记为 $A\neq B$。

设 A、B 为任意集合，如果 A 中每个元素都是 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集，或称 A 包含于 B 中，或者说 B 包含 A，记作 $A\subseteq B$。

根据定义可以看出：

$A\subseteq B\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$

如果 A 不被 B 包含，则记作 $A\not\subseteq B$。

如 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{C}$，$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{N}$，但 $\mathbf{Z}\not\subseteq\mathbf{N}$。

由外延公理，要证明两个集合 A 和 B 相等(即 $A=B$)，可以通过证明 $A\subseteq B$ 并且 $B\subseteq$

A 来得到。根据集合的包含关系的概念，可以看到：

设 A、B 为集合，如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$。

即

$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$

也可以表示为：

$A=B\Leftrightarrow \forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)$

根据子集的定义，可以得到如下结论：

(1) 对任一集合 A，有 $A\subseteq A$。

(2) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$。

除此以外，有两个特殊的集合——空集和全集。

空集是指不含任何元素的集合，记为 $\varnothing$。例如，以 $\{x\mid x\in\mathbf{R}\wedge x^2+1=0\}$ 表述方程 $x^2+1=0$ 的实数解集，由于方程无解，故解是空集，也就是 $\{x\mid x\in\mathbf{R}\wedge x^2+1=0\}=\varnothing$。空集的等价表示形式有很多，如 $\{x\mid x$ 是二进制中除了 0、1 以外的数字表示的数$\}$ 也是空集。

还有一个集合囊括了所有的元素，称为全集或完全集，它相当于谓词逻辑中的全总个体域，在本书中用大写字母 $\mathbf{E}$ 来表示。

在集合 A 的一切子集中，$\varnothing$ 和 A 本身叫平凡子集。

这里可以将全集重新表述为：在一定范围内，如果所有集合都是某个集合的子集，则称该集合为全集，记作 $\mathbf{E}$。如果用谓词形式化表示就是(其中 $P(x)$ 为任何谓词公式)：

$\mathbf{E}=\{x\mid P(x)\vee\neg P(x)\}$

显然，全集 $\mathbf{E}$ 即谓词逻辑中的全总个体域。于是，每个元素 x 都属于全集 $\mathbf{E}$，即命题 $\forall x(x\in\mathbf{E})$ 为永真。

由定义易知，对任意集合 A，都有 $A\subseteq\mathbf{E}$。在实际应用中，常常把某个适当大的集合看成全集 $\mathbf{E}$。例如，在讨论学生的时候，可以根据需要将某个班的学生或者某个年级的学生作为全集进行讨论。

前面定义的空集也可以形式地表示为(其中 $P(x)$ 为任何谓词公式)：

$\varnothing=\{x\mid P(x)\wedge\neg P(x)\}$

要注意的是 $\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$ 是不同的：$\{\varnothing\}$ 表示以 $\varnothing$ 为元素的集合，而 $\varnothing$ 中没有元素。

例 3.3 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{b,c\}$，$D=\{c\}$，请说明 A、B、C、D 之间的关系。

根据包含关系的定义有：$B\subseteq A$，$C\subseteq A$，$D\subseteq A$，$D\subseteq B$，$D\subseteq C$。

例 3.4 判断下列命题的真假。

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$

(2) $\varnothing\in\varnothing$

(3) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$

(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$

解：以上命题中(2)为假，其余都是真命题。

通过这个例子，读者可以对空集的意义和特点有所理解。

定义 3.1 设 A 和 B 是两个集合，若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subset B$，也称 B 真包含 A。即

$A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge A\neq B$

用谓词公式表示，就是

$\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\exists x(x\in B\wedge x\notin A)$

例如，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$，但 $\mathbf{N}\not\subset\mathbf{N}$。

例 3.5 证明：空集是任意集合的子集。

证明：任给一集合 A，由子集定义可知有 $\varnothing\subseteq A\Leftrightarrow\forall x(x\in\varnothing\rightarrow x\in A)$。等价式右边的条件式因前件为假而为真命题，所以 $\varnothing\subseteq A$ 也为真。

例 3.6 写出集合 $A=\{0,1,2\}$ 的所有子集。

解：子集可以按元素个数分类，在本例中：

0 元子集有 1 个：$\varnothing$

1 元子集有 3 个：$\{0\},\{1\},\{2\}$

2 元子集有 3 个：$\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}$

3 元子集有 1 个：$\{0,1,2\}$

则 $A=\{0,1,2\}$ 的所有子集为

$\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}$

设 A 为集合，把 A 的全体子集构成的集合叫做 A 的幂集，记作 $\rho(A)$ 或者 2^A。

$\rho(A)=\{B\mid B\subseteq A\}$

因为空集是任意集合的子集，所以空集也一定是任意幂集的元素，即 $\varnothing\in\rho(A)$。

对于 n 元集 A，它的 0 元子集有 C_n^0 个，1 元子集有 C_n^1 个，……m 元子集有 C_n^m 个，……n 元子集有 C_n^n 个。子集总数为 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$ 个。所以幂集中的元素个数为 $|\rho(A)|=2^n$。

例如，设 $A=\{a,b,c\}$，则 A 的幂集为

$\rho(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

例 3.7 写出下列集合的幂集。

(1) $A=\{a\}$

(2) $B=\varnothing$

(3) $C=\{\varnothing,0,\{0\}\}$

解：

(1) $\rho(A)=\{\varnothing,\{a\}\}$

(2) $\rho(B)=\{\varnothing\}$

(3) $\rho(C)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{0\},\{\{0\}\},\{\varnothing,0\},\{\varnothing,\{0\}\},\{0,\{0\}\},\{\varnothing,0,\{0\}\}\}$

例 3.8 设 $A=\{a,\{a\}\}$，请问下述命题是否成立？

(1) $\{a\}\in P(A)$

(2) $\{a\}\subseteq P(A)$

(3) $\{\{a\}\}\in P(A)$

(4) $\{\{a\}\}\subseteq P(A)$

解：当 $A=\{a,\{a\}\}$时，$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$。所以：

$\{a\}\in P(A)$而且$\{\{a\}\}\in P(A)$，即(1)、(3)成立。

$\{a\}\not\subset P(A)$而且$\{\{a\}\}\not\subset P(A)$，即(2)、(4)不成立。

例 3.9 若 $A=\{a,\{b\}\}$，请问下述命题是否成立？

(1) $\{a\}\in P(A)$

(2) $\{a\}\subseteq P(A)$

(3) $\{\{a\}\}\in P(A)$

(4) $\{\{a\}\}\subseteq P(A)$

解：当 $A=\{a,\{b\}\}$时，$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{b\}\},\{a,\{b\}\}\}$。所以：

$\{a\}\in P(A)$而且$\{\{a\}\}\notin P(A)$，即(1)成立，(3)不成立。

$\{a\}\not\subset P(A)$而且$\{\{a\}\}\not\subset P(A)$，即(2)、(4)不成立。

3.2 集合的运算

集合运算是指从一个或多个已知的集合构造出新集合的过程。假设所有集合都是全集 **E** 的子集，下面依次介绍常见的集合运算。

3.2.1 交运算

设有两个集合 A 和 B，它们的交集是由那些既属于 A 又属于 B 的元素所构成的集合，记为 $A\cap B$。图 3.1 所示文氏图中的阴影部分就是集合 A 和 B 的交集，要注意文氏图只能作说明，不能用于严格证明。可以用谓词公式描述法表述如下：

$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$

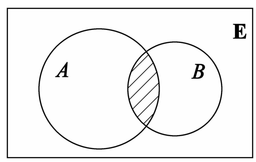

图 3.1 $A\cap B$

若 A 和 B 的交集是空集，即 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 和 B 是不相交的。同样的，求两个集合交集的运算可以扩展到 n 个集合的交。设有集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，它们的交集可以定义为

$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x\mid x\in A_1\wedge x\in A_2\wedge\cdots\wedge x\in A_n\}$

例 3.10 设 $A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$，$C=\{2,4,6,8\}$，求 $A\cap B$、$B\cap C$ 和 $A\cap C$。

解：$A\cap B=\{3,5,7\}$，$B\cap C=\varnothing$，$A\cap C=\{2\}$。

例 3.11 设 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{a,e,i,o,u\}$，$C=\{b,e,a,r\}$，求 $A\cap B$、$B\cap C$、$A\cap C$ 和 $A\cap B\cap C$。

解：$A\cap B=\{a,e\}$，$B\cap C=\{e,a\}$，$A\cap C=\{a,b,e\}$，$A\cap B\cap C=\{a,e\}$。

例 3.12 证明 $A\cap\mathbf{E}=A$。

证明：对任意的 x，$x\in A\cap\mathbf{E}\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\mathbf{E}\Leftrightarrow x\in A$(因为 $x\in\mathbf{E}$ 是永真命题)，所以

$A \cap \mathbf{E} = A$。

例 3.13　证明 $A \cap \varnothing = \varnothing$。

证明：对任意的 x，$x \in A \cap \varnothing \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \varnothing \Leftrightarrow x \in \varnothing$（因为 $x \in \varnothing$ 是永假命题），所以 $A \cap \varnothing = \varnothing$。

3.2.2　并运算

两个集合 A 和 B 的并集是由那些属于 A 或属于 B 的元素所构成的集合，记为 $A \cup B$。图 3.2 文氏图中的阴影部分就是集合 A 和 B 的并集，可以用谓词公式描述法表述如下：

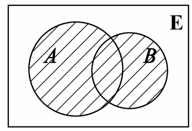

图 3.2　$A \cup B$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

同样地，并运算也可以扩展为 n 个集合的并运算。设有集合 A_1，A_2，…，A_n，它们的并集可以定义为

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$

例 3.14　设 $A = \{2,3,5,7\}$，$B = \{1,3,5,7,9\}$，$C = \{2,4,6,8\}$，求 $A \cup B$、$A \cup C$ 和 $B \cup C$。

解：$A \cup B = \{1,2,3,5,7,9\}$

$A \cup C = \{2,3,4,5,6,7,8\}$

$B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

例 3.15　设 $A = \{a,b,c,d,e\}$，$B = \{a,e,i,o,u\}$，$C = \{b,e,a,r\}$，求 $A \cup B$、$B \cup C$ 和 $A \cup B \cup C$。

解：$A \cup B = \{a,b,c,d,e,i,o,u\}$

$B \cup C = \{a,b,e,i,o,u,r\}$

$A \cup B \cup C = \{a,b,c,d,e,i,o,u,r\}$

例 3.16　证明 $A \cup \mathbf{E} = \mathbf{E}$。

证明：对任意的 x，$x \in A \cup \mathbf{E} \Leftrightarrow x \in A \vee x \in \mathbf{E} \Leftrightarrow x \in \mathbf{E}$（因为 $x \in \mathbf{E}$ 是恒真命题），所以 $A \cup \mathbf{E} = \mathbf{E}$。

例 3.17　证明 $A \cup \varnothing = A$。

证明：对任意的 x，$x \in A \cup \varnothing \Leftrightarrow x \in A \vee x \in \varnothing \Leftrightarrow x \in A$（因为 $x \in \varnothing$ 是永假命题），所以 $A \cup \varnothing = A$。

3.2.3　相对补与绝对补

集合 A 相对于集合 B 的补集是由那些属于 A 且不属于 B 的元素所构成的集合，记为 $A - B$，如图 3.3 所示。图中阴影部分就是集合 $A - B$ 的相对补集。可以用谓词公式描述法表述如下：

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

特别地，当 A 为全集 $\mathbf{E}$ 时，$A - B = \mathbf{E} - B$ 是所有不属于 B 的元素所构成的集合，称为 B 的绝对补集，记作 $\sim B$（见图 3.4）。

$\sim B=\mathbf{E}-B=\{x \mid x\in \mathbf{E}\wedge x\notin B\}$

例 3.18 计算下列集合：

(1) 设 $A=\{2,5,6\}$，$B=\{1,2,4,7,9\}$，求 $A-B$。

(2) 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{a\}$，$C=\{b,d\}$，求 $A-B$、$B-A$、$A-C$ 和 $C-A$。

(3) $E=\{a,b,c,d\}$，$A=\{a,c\}$，求 $\sim A$。

解：

(1) $A-B=\{5,6\}$

(2) $A-B=\{b,c\}$，$B-A=\varnothing$，$A-C=\{a,c\}$，$C-A=\{d\}$

(3) $\sim A=\{b,d\}$

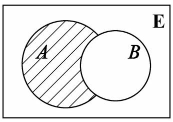

图 3.3　A－B

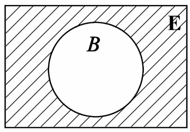

图 3.4　～B

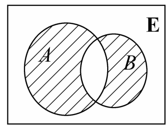

图 3.5　A⊕B

3.2.4　对称差

集合 A 和 B 的对称差是由那些属于 A 且不属于 B 的元素或者属于 B 且不属于 A 所构成的集合，记为 $A\oplus B$，如图 3.5 所示。可以用谓词公式描述法表述如下：

$A\oplus B=\{x \mid (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\notin A\wedge x\in B)\}=\{x \mid \neg(x\in A\leftrightarrow x\in B)\}$

从上式和图 3.5 可以看出，A 和 B 的对称差也可以理解为 $A-B$ 和 $B-A$ 的并集，即 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$。有时也把集合的对称差运算称为异或运算。

例 3.19 $A=\{a,b,e\}$，$B=\{a,c,d\}$，求 $B-A$、$A-B$、$A\oplus B$、$A\oplus A$ 和 $B\oplus B$。

解： $B-A=\{c,d\}$，$A-B=\{b,e\}$，$A\oplus B=\{c,d,b,e\}$，$A\oplus A=\varnothing$，$B\oplus B=\varnothing$。

在讨论了集合的运算之后，下面讨论集合运算的次序。其中补运算应该优先考虑，其他的 $\cup$、$\cap$、$-$ 和 $\oplus$ 运算由括号决定先后次序，圆括号对“()”具有最高优先级，可以用圆括号对来明确运算的次序。

3.2.5　集合运算中的恒等式

3.2.4 节介绍了集合的多种运算，从这些运算中可以总结出更多的性质，归纳并整理为如下运算律，为便于记忆给出了运算性质的名称。

幂等律　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

同一律　$A\cup\varnothing=A$，$A\cap\mathbf{E}=A$

零律　$A\cup\mathbf{E}=\mathbf{E}$，$A\cap\varnothing=\varnothing$

排中律　$A\cup\sim A=\mathbf{E}$

矛盾律 $A\cap\sim A=\varnothing$

吸收律 $A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$

德·摩根律 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C), A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C, \sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$

$\sim\varnothing=\mathbf{E}, \sim\mathbf{E}=\varnothing$

双重否定律 $\sim(\sim A)=A$

补交转换律 $A-B=A\cap\sim B$

其中一些运算中的两个公式很相像,可以通过替换$\cap$和$\cup$,$\varnothing$和$\mathbf{E}$得到。这些性质也类似于前两章所介绍的对偶模式,在集合中这样的对偶是成立的。因此,对于这些对偶的公式只需记忆其中之一即可。

以上运算规则都可以通过集合的定义以谓词逻辑的方法通过等价推演得到。下面选取其中的两个予以证明,其他的请读者课后自行证明。

例 3.20 证明分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

证明:对任意的 x,有

$x\in A\cup(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A\vee x\in(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)$

$\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)$

$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\wedge x\in(A\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

根据集合相等的定义可知

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

采用谓词逻辑等价推理的方法证明集合中的等价公式,其基本演算规则与谓词逻辑中的演算方式相同。请读者仔细体会推理的过程,并在推理的过程中加深对定理的理解。

例 3.21 证明德·摩根律 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$。

证明:对任意的 x,有

$x\in A-(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in(B\cup C))$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(\neg x\in B\wedge\neg x\in C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)$

$\Leftrightarrow(x\in A-B)\wedge(x\in A-C)$

$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$

所以 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$。

学了集合的运算和恒等式后,现在证明集合相等就有了两种方法了。一种是3.1.3节介绍的方法:通过证明两个集合互为子集来证明;另一种是应用本节学习的集合运算

的基本性质和恒等式来证明。除了上面的定律以外，集合的以下规则也是成立的。

$A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B$

$A\subseteq A\cup B, B\subseteq A\cup B$

$A-B\subseteq A, A-B=A\cap \sim B$

$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\varnothing$

$A\oplus B=B\oplus A, (A\oplus B)\oplus C=A\oplus (B\oplus C)$

$A\oplus \varnothing=A, A\oplus A=\varnothing$

$A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C$

例 3.22 用其他的恒等式证明吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$。

证明：$A\cup(A\cap B)$

$=(A\cap \mathbf{E})\cup(A\cap B)$

$=A\cap(\mathbf{E}\cup B)$

$=A\cap \mathbf{E}=A$

例 3.23 证明 $A-(A-B)=A\cap B$。

证明：$A-(A-B)$

$=A-(A\cap \sim B)$

$=A\cap \sim(A\cap \sim B)$

$=A\cap(\sim A\cup B)$

$=(A\cap \sim A)\cup(A\cap B)$

$=A\cap B$

3.2.6 包含排斥原理

给定两个有限集合 A 和 B，其元素个数分别记为 $|A|$ 和 $|B|$。那么两个集合的并集所包含的元素个数是多少呢？这可以通过下面的包含排斥原理来说明。

定理 3.1（两个集合的包含排斥原理） $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

证明：下面分别考虑两种可能的情况。

情况 1：A 和 B 没有公共元素，即 $A\cap B=\varnothing$，$|A\cap B|=0$，此时显然有

$|A\cup B|=|A|+|B|$

情况 2：$A\cap B\neq\varnothing$，此时 $A\cup B$ 中的元素由 3 部分组成，即只属于 A 的元素，只属于 B 的元素，以及 $A\cap B$ 中的元素。因此有

$|A\cup B|=|A\cap \sim B|+|\sim A\cap B|+|A\cap B|$

此外单独考虑 A 和 B，有

$|A|=|A\cap \sim B|+|A\cap B|$

$|B|=|\sim A\cap B|+|A\cap B|$

两式相加可得

$|A|+|B|=|A\cap \sim B|+|\sim A\cap B|+2|A\cap B|$

由此可得

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

证明完毕。

例 3.24 假设在 10 名学生中有 5 人选了计算机课，8 人选了英语课，还有 1 人这两门课都没选。问同时选了计算机课和英语课的学生有几人。

解： 设全集为 $\mathbf{E}$，其中选了计算机课的学生集合为 A，选了英语课的学生集合为 B，根据题意可知 $|A|=5$，$|B|=8$，$|\sim A\cap\sim B|=1$。那么有

$$|A\cup B|=|\mathbf{E}|-|\sim A\cap\sim B|=10-1=9$$

再利用包含排斥原理可得

$$|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=5+8-9=4$$

所以同时选了计算机课和英语课的学生有 4 人。

定理 3.1 很容易扩展到 3 个集合的情况。

定理 3.2（3 个集合的包含排斥原理）

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

证明：反复应用两个集合的包含排斥原理，推导过程如下。

$$\begin{aligned}
&|A\cup B\cup C|\\
&=|A|+|B\cup C|-|A\cap(B\cup C)|\\
&=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)|\\
&=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-(|A\cap B|+|A\cap C|-|(A\cap B)\cap(A\cap C)|)\\
&=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|
\end{aligned}$$

例 3.25 求 1～1000 之间能被 3、5、7 中任何一个整除的整数个数。

解： 令 A、B、C 分别表示 1～1000 之间能分别被 3、5、7 整除的整数集合，$\lfloor x\rfloor$表示不大于 x 的最大整数，那么有

$$|A|=\lfloor 1000/3\rfloor=333$$
$$|B|=\lfloor 1000/5\rfloor=200$$
$$|C|=\lfloor 1000/7\rfloor=142$$
$$|A\cap B|=\lfloor 1000/15\rfloor=66$$
$$|A\cap C|=\lfloor 1000/21\rfloor=47$$
$$|B\cap C|=\lfloor 1000/35\rfloor=28$$
$$|A\cap B\cap C|=\lfloor 1000/105\rfloor=9$$

根据包含排斥原理可得

$$\begin{aligned}
&|A\cup B\cup C|\\
&=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|\\
&=333+200+142-66-47-28+9\\
&=543
\end{aligned}$$

所以满足条件的整数个数为 543。

包含排斥原理可以进一步扩展到 n 个集合的情况。

定理 3.3（n 个集合的包含排斥原理）

$$\begin{aligned}
&|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|\\
&=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|
\end{aligned}$$

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$

定理 3.3 可在定理 3.1 和定理 3.2 的基础上通过数学归纳法证明,具体过程此处略。

3.3 序偶与笛卡儿积

3.3.1 序偶

在现实世界中,有许多事物是有序的,如点的坐标、父子关系、成绩单中学号和成绩的对应关系等。而本书此前介绍的集合概念中,集合中的元素是无序的,那么如何表现有序的事物呢?答案是用序偶来表现事物间的有序性。

定义 3.2 设有两个集合 A 和 B,a、b 是分别属于 A 和 B 的元素,用尖括号对表示 a、b 间的次序,叫做序偶,记作 $<a,b>$。其中来自集合 A 的元素 a 称为第一元素,来自集合 B 的元素 b 称为第二元素。

用这种方式,可以表述元素间的不同次序。如平面中点的坐标、大于、省会城市与所属省等都可以表示两个元素的不同。如<杭州,浙江>与<浙江,杭州>表达了不同的意思,前者正确反映了杭州是浙江省的省会城市,而后者却没能反映出这层信息。

由此可以分析得到序偶的如下性质:

(1) 当 $x \neq y$ 时,$<x,y> \neq <y,x>$。

(2) $<x,y> = <u,v>$ 的充分必要条件是 $x=u$ 且 $y=v$。

例 3.26 已知 $<x+4,5> = <3,2x+y>$,求 x 与 y 的值。

解:由序偶相等的定义可知:

$$\begin{cases} x+4=3 \\ 5=2x+y \end{cases}$$

解方程得

$$x=-1, \quad y=7$$

前面,用序偶表现两个元素的有序性,其实序偶也可以扩展表现 3 个或更多个元素间的有序性。如果有集合 A_1、A_2、A_3,分别从这些集合中取一个元素 a_1、a_2、a_3,可以形成一个序偶 $<<a_1,a_2>,a_3>$,其中的第一元素也是一个序偶 $<a_1,a_2>$。这时,把这个序偶简记为 $<a_1,a_2,a_3>$,称为三元组。对应的元素就称为第一元素、第二元素和第三元素。

现在可以发现以前定义的序偶只涉及两个元素,更准确地应该称为二元序偶,而现在的序偶就相应地称为三元序偶。

根据序偶的定义 $<<a_1,a_2>,a_3> \neq <a_1,<a_2,a_3>>$,因为 $<a_1,a_2> \neq a_1$,$a_3 \neq <a_2,a_3>$。所以 $<a_1,a_2,a_3> = <<a_1,a_2>,a_3>$,但 $<a_1,a_2,a_3> \neq <a_1,<a_2,a_3>>$。

同样地,可以定义 n 元序偶。如果有集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,分别从这些集合中取一个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,可以形成一个序偶 $<<a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}>,a_n>$,简记为 $<a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n>$。同样 $<<a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}>,a_n> \neq <a_1,<a_2,\cdots,a_{n-1},a_n>>$。类似地判断两个 n 元序偶 $<x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n>$ 和 $<y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},y_n>$ 是否相等,就是判断它们

的第一元素、第二元素、…、第 n 元素是否对应相等，即

$<x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n> = <y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n> \Leftrightarrow (x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2) \wedge \cdots \wedge (x_{n-1} = y_{n-1}) \wedge (x_n = y_n)$

至此本节介绍了二元序偶、三元序偶直至 n 元序偶，但从本质上说这些序偶的特性是相似的，只需研究最简单的二元序偶，就可以类似推得其他多元序偶的特性。因此，本书后续章节主要探讨的是二元序偶，简称为序偶。

3.3.2 笛卡儿积

在 3.3.1 节中用序偶表现了元素间的有序性，接下来讨论序偶的深入特性，以及若由序偶作为元素来构成一个集合，会有哪些特殊性质。多个序偶如果具有共同点当然也可以构成一个集合。比如{<杭州，浙江>，<南京，江苏>，<武汉，湖北>}就是一个集合，其中的元素都是二元序偶，并且都以省会城市为第一元素，该城市所在省为第二元素。

定义 3.3 设 A、B 为任意两个集合，用 A 中元素为第一元素，B 中元素为第二元素构成序偶，所有这样序偶的组成的集合叫做 A 和 B 的笛卡儿积，记作 $A \times B$。即

$$A \times B = \{<x, y> \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

如果 A 中有 m 个元素，B 中有 n 个元素，则 $A \times B$ 中有 mn 个元素。

例 3.27 若 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2\}$，求 $A\times A$、$B\times B$、$A\times B$、$B\times A$ 及 $(A\times B)\cap(B\times A)$。

解：$A\times A=\{<a,a>, <a,b>, <b,a>, <b,b>\}$

$B\times B=\{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>\}$

$A\times B=\{<a,1>, <a,2>, <b,1>, <b,2>\}$

$B\times A=\{<1,a>, <1,b>, <2,a>, <2,b>\}$

$(A\times B)\cap(B\times A)=\varnothing$

由上例可知，一般来说 $A\times B\neq B\times A$，所以说集合的笛卡儿积不满足交换律。因为笛卡儿积在本质上是一个集合，所以，可以对它进行集合的运算。同样，还可以用集合 A 和 B 的笛卡儿积再与集合 C 构造笛卡儿积，即 $(A\times B)\times C$。同样地，还可以构造 $A\times(B\times C)$。但是 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$。这是因为 $A\times(B\times C)$ 的元素是 $<a, <b,c>>$，而 $(A\times B)\times C$ 的元素是 $<<a,b>, c>$，前面曾经提到 $<a,<b,c>>\neq<<a,b>,c>$，所以 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$，即集合的笛卡儿积不满足结合律。

例 3.28 设 $A=\{1,2\}$，求 $P(A)\times A$。

解：
$$\begin{aligned}P(A)\times A &=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}\times\{1,2\}\\ &=\{<\varnothing,1>, <\varnothing,2>, <\{1\},1>, <\{1\},2>, <\{2\},1>,\\ &\quad <\{2\},2>, <\{1,2\},1>, <\{1,2\},2>\}\end{aligned}$$

笛卡儿积运算的性质可以总结如下：

(1) $A\times\varnothing=\varnothing$，$\varnothing\times A=\varnothing$。

(2) 不满足交换律和结合律。

(3) 并和交运算满足分配律：

(a) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(b) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

(c) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

(d) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

例 3.29 本例给出笛卡儿积运算的性质分配律(d)的证明，其他的请大家课后自行练习。

$$\begin{aligned}(A\cup B)\times C &=\{<x,y>|x\in(A\cup B)\wedge y\in C\}\\ &=\{<x,y>|(x\in A\vee x\in B)\wedge y\in C\}\\ &=\{<x,y>|(x\in A\wedge y\in C)\vee(x\in B\wedge y\in C)\}\\ &=\{<x,y>|(<x,y>\in A\times C)\vee(<x,y>\in B\times C)\}\\ &=\{<x,y>|<x,y>\in(A\times C\cup B\times C)\}\\ &=(A\times C)\cup(B\times C)\end{aligned}$$

例 3.30 设 A、B、C、D 为任意集合，判断以下命题是否为真，并说明理由。

(1) $A\times B=A\times C\Leftrightarrow B=C$

(2) 存在集合 A，使得 $A\subseteq A\times A$

解：

(1) 不一定为真。当 $A=\varnothing$，$B=\{1\}$，$C=\{2\}$时，有 $A\times B=\varnothing=A\times C$，但 $B\neq C$。

(2) 为真。当 $A=\varnothing$时有 $A\subseteq A\times A$ 成立。

还可以把笛卡儿积进行扩展。若有 n 个集合($n\geqslant 2$)$A_1,A_2,\cdots,A_n$，分别取 A_1 中元素为第一元素，A_2 中元素为第二元素，……，A_n 中元素为第 n 元素构成 n 元序偶，所有这样的序偶组成的集合叫做 n 重笛卡儿积。相应地，$A\times B$ 所得到的笛卡儿积就应该准确地称为二重笛卡儿积。

对于 n 重笛卡儿积，可以形式化地描述为

$$\begin{aligned}&A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\\ &=((A_1\times A_2)\times A_3)\times\cdots\times A_n\\ &=\{<x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n>|x_1\in A_1\wedge x_2\in A_2\wedge\cdots\wedge x_n\in A_n\}\end{aligned}$$

集合 A 自身的笛卡儿积 $A\times A$ 记作 A^2，与此类似：

$A\times A\times A=(A\times A)\times A=A^3$

$A\times A\times\cdots\times A=A^n$

例 3.31 $A=\{a,b\}$，$B=\{0,1,2\}$，$C=\{\alpha,\beta\}$，求$(A\times B)\times C$ 和 $A\times(B\times C)$。

解：$(A\times B)\times C=\{<a,0,\alpha>,<a,0,\beta>,<a,1,\alpha>,<a,1,\beta>,<a,2,\alpha>,<a,2,\beta>,<b,0,\alpha>,<b,0,\beta>,<b,1,\alpha>,<b,1,\beta>,<b,2,\alpha>,<b,2,\beta>\}$

$A\times(B\times C)=\{<a,<0,\alpha>>,<a,<0,\beta>>,<a,<1,\alpha>>,<a,<1,\beta>>,<a,<2,\alpha>>,<a,<2,\beta>>,<b,<0,\alpha>>,<b,<0,\beta>>,<b,<1,\alpha>>,<b,<1,\beta>>,<b,<2,\alpha>>,<b,<2,\beta>>\}$

从例 3.31 可以看出：

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$$

即笛卡儿积不满足结合律。

3.4 关系及其表示

3.4.1 关系的引入

关系是现实世界中广泛存在的概念。我们经常说朋友关系、父子关系，数学中的对称关系、相似关系，还有学生、课程和任课教师的关系等。在集合论里，关系是一个基础概念，有比较严谨的定义，与序偶的概念紧密结合。

3.4.2 关系的定义

定义 3.4 设集合 A 和 B，A 和 B 的笛卡儿积 $A\times B$ 的子集称为从 A 到 B 的一个二元关系。显然，二元关系是集合，它的元素是序偶，第一元素来自集合 A，第二元素来自集合 B。

例如，$A=\{0,1\}$，$B=\{1,2\}$，$A\times B=\{<0,1>,<0,2>,<1,1>,<1,2>\}$。

则因为 $R_1=\{<1,2>\}$，$R_2=A\times B$，$R_3=\varnothing$，$R_4=\{<0,1>,<1,2>\}$都是笛卡儿积 $A\times B$ 的子集，所以它们都是从 A 到 B 的二元关系。

设有一个二元关系 R，R 中任一序偶$<x,y>$可记作$<x,y>\in R$ 或 xRy。不在 R 中的序偶$<x,y>$记作$<x,y>\notin R$ 或 xRy。

用二元关系可以表示父子关系、票与位的对号关系和大于关系等。比如父子关系中的元素是这样的序偶，它的第一元素都来自父亲这个集合，第二元素都来自子女这个集合。

特别地，当 $A=B$ 时，$A\times A$ 的子集所构成的关系叫做 A 上的二元关系。

在序偶中，有二元序偶、三元序偶和 n 元序偶，则由二元序偶构成的集合就是二元关系，三元序偶构成的集合就是三元关系，n 元序偶构成的集合就是 n 元关系。当然，也可以理解一个 n 元关系就是 n 重笛卡儿积的一个子集。

本书以后也重点讨论二元关系的性质，如没有特别说明，下文中提到的关系就是指二元关系。

3.4.3 二元关系

首先讨论一些特殊的关系：空关系、全域关系和恒等关系。空关系$\varnothing$是 $A\times B$ 的最小子集——空集$\varnothing$。在关系里为了与其他关系名称一致，称之为空关系。而全域关系就是 $A\times B$ 的最大子集——$A\times B$ 本身，即全域关系 $\mathrm{E}_{A\times B}=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\}=A\times B$。而恒等关系是指 A 上的关系（$A\times A$ 的子集），并且它的第一元素和第二元素相同。取遍 A 中的所有元素，即 A 上的恒等关系 $\mathrm{I}_A=\{<x,x>|x\in A\}$。

如 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2\}$，则

$\mathrm{E}_{A\times B}=\{<a,1>,<a,2>,<b,1>,<b,2>\}$

$\mathrm{E}_{B\times A}=\{<1,a>,<2,a>,<1,b>,<2,b>\}$

$E_{A\times A}=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>\}$

$E_{B\times B}=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$

$I_{A\times A}=\{<a,a>,<b,b>\}$

$I_{B\times B}=\{<1,1>,<2,2>\}$

定义 3.5 设 R 是 A 到 B 上的二元关系，一切属于关系 R 的序偶 $<x,y>\in R$ 中，所有第一元素 x 组成的集合叫做 R 的前域，记作 $\mathrm{dom}R$，即

$$\mathrm{dom}R=\{x\mid \exists y \text{ 满足} <x,y>\in R\}$$

定义 3.6 设 R 是 A 到 B 上的二元关系，一切属于关系 R 的序偶 $<x,y>\in R$ 中，所有第二元素 y 组成的集合叫做 R 的值域，记作 $\mathrm{ran}R$，即

$$\mathrm{ran}R=\{y\mid \exists x \text{ 满足} <x,y>\in R\}$$

从前域和值域的定义可以看出，从 A 到 B 的二元关系 R 的前域是 A 的子集，而值域是 B 的子集。前域和值域统称域，记作 $\mathrm{FLD}R$，$\mathrm{FLD}R=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{ran}R$。

例 3.32 $A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$，求 R 的前域和值域及域。

解： $\mathrm{dom}R=\{1,2,4\}$

$\mathrm{ran}R=\{1,2,3,4\}$

$\mathrm{FLD}R=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{ran}R=\{1,2,3,4\}$

3.4.4 关系的表示法

通常来说，关系的表示方法有 3 种。关系的本质是一个集合，除了可以用集合的表达方式以外，那些从有穷集合到有穷集合的二元关系还可以用关系特有的关系图和关系矩阵法来表示。

1. 关系图

首先来看看关系图表示法。图形化的表示总是比较直观、易于理解。对于 A 到 B 的关系和 A 上的关系的图形表示略有不同，下面将一一说明。

1）A 到 B 的关系

将元素用小圆圈“○”表示，并写上元素名，集合 A 和集合 B 的所有元素分别排成两列小圆圈来表示。若 $x\in A$，$y\in B$，且 $<x,y>\in R$，则画一根以 x 为起点指向 y 的有向弧。这样每个序偶对应一条弧。描述了所有弧就可以得到关系图。

例 3.33 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{<a,4>,<b,1>,<b,3>\}$，请画出 R 的关系图。

解： R 的关系图如图 3.6 所示。

2）A 上的关系

如果用关系图描述 A 上的关系，也可以使用上述的方法。但考虑到 A 上的关系中两列元素是相同的，只需画一列就可以。这样，对 A 上的关系画关系图，可以描述为：把集合 A 上的每个元素用小圆圈“○”表示，并写上元素名，这里不要求元素排成列。若 $x\in A$，$y\in A$，且 $<x,y>\in R$，则画一根以 x 为起点指向 y 的有向弧。如果 $x\in A$，且 $<x,

$x> \in R$,则画一根以 x 出发指向自身的有向弧(这时也称之为环)。如果画出了关系中对应序偶的每一条有向弧,就得到了完整的关系图。以下举例说明。

例 3.34 设集合 $A=\{2,3,6,8,12,32\}$。试写出 A 上的整除关系 D。

解:A 上的整除关系 $D=\{<2,2>,<3,3>,<6,6>,<8,8>,<12,12>,<32,32>,<2,6>,<2,8>,<2,12>,<2,32>,<3,6>,<3,12>,<6,12>,<8,32>\}$。

D 的关系图如图 3.7 所示。

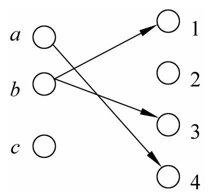

图 3.6 例 3.33 的关系图

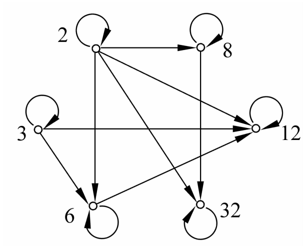

图 3.7 例 3.34 关系图

2. 关系矩阵

与采用集合方式表示关系相比,关系图比较直观,但是不适于计算,而矩阵在计算上很有优势,便于计算机进行数据处理。设有有限集合 A 和 B,若 A 中有 m 个元素,B 中有 n 个元素,假设事先为每一集合中的元素约定一个次序。这种次序一经约定,在讨论问题时就固定不变。不妨设 A 中的元素的次序为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$,B 中的元素的次序为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,就可以为 A 到 B 上的关系构造一个 m 行 n 列的矩阵,矩阵中位于第 i 行第 j 列元素 r_{ij} 只有两种可能:0 或 1,若 $<a_i,b_j>\in R$,则 $r_{ij}=1$,否则 $r_{ij}=0$。即

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

则称这个矩阵为关系 R 的关系矩阵,记作 $\boldsymbol{M}_R=(r_{ij})_{m\times n}$。

这样,当给定关系 R,可求出关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$;反之,若给出关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$,也能求出关系 R。

例 3.35 分别对例 3.33 和 3.34 中的两个关系 R 和 D 写出它们的关系矩阵。

解:

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{M}_D=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

这里按照集合的设置,把 A 中元素排成 a,b,c,把 B 中元素排成 1,2,3,4。在矩阵中第一行对应第一元素 a,第二行对应第二元素 b,同样,第一列对应第一元素 1,第二列对

应第二元素 2 等。$\boldsymbol{M}_R$ 中的第一行第一列元素 $r_{11}=0$ 表示 $<a,1>\notin R$，而 $r_{14}=1$ 表示 $<a,4>\in R$，这些与关系图的表示是一致的，也说明了关系图和关系矩阵都可以用来表示关系。

关系矩阵用中括号对把所有元素包起来，不能用竖线代替。因为前者表示一个矩阵，是一串数；而竖线把 m 行 n 列元素包起来，表示的是矩阵的行列式，是一个数值，不同于矩阵。

例 3.36 $A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$。求 R 的关系矩阵和关系图。

解：关系图如图 3.8 所示。

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

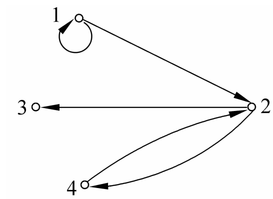

图 3.8 例 3.36 的关系图

有必要指出的是，为了使关系矩阵唯一地与一个确定的二元关系对应，要求对集合元素做出次序的约定。但是这种次序对一个关系不是本质的。因为它改变的仅仅是矩阵中行或列与元素的对应关系。

3.5 关系的性质

关系的性质是指集合中二元关系的性质，这些性质扮演着重要角色。本节定义这些性质，并给出它们在关系矩阵和关系图中可以观察到的特点。

3.5.1 自反性与反自反性

定义 3.7 令 $R\subseteq A\times A$，若对 A 中每个 x，都有 xRx，则称 R 是**自反的**，即

$$A\text{ 上关系 }R\text{ 是自反的}\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow xRx)$$

该定义表明，在自反的关系 R 中，除其他有序对外，必须包括有全部由每个 $x\in A$ 所组成的元素相同的有序对。许多关系具有自反性，如小于等于关系、整除关系和包含关系都是自反的。对一个确定的集合 A 来说，还可以发现，A 上的恒等关系 I_A 是 A 上最小的自反关系，而全域关系 E_A 是 A 上最大的自反关系。当然，也有很多关系不是自反的，如真包含关系$\subset$和小于关系。根据定义，可以判断任意关系是否是自反的。

例 3.37 设 $A=\{1,2,3\}$，$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$，$R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<1,3>\}$，$R_3=\{<1,3>\}$，说明 R_1、R_2、R_3 是否为 A 上自反的关系。

解：只有 R_2 是 A 上自反的关系，因为 $\mathrm{I}_A\subseteq R_2$；而 R_1 和 R_3 不是 A 上自反关系，因为 $<3,3>\notin R_1$，$<3,3>\notin R_3$。

定义 3.8 令 $R\subseteq A\times A$，若对于 A 中每个 x，有 $x\bar{R}x$，则称 R 是**反自反的**，即

$$A\text{ 上关系 }R\text{ 是反自反的}\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\bar{R}x)$$

该定义表明，一个反自反的关系 R 中不应包括有任何相同元素的有序对。小于关系

和真包含关系$\subset$都是反自反的，而小于等于关系不是反自反的。同样，A 上最小的反自反关系为空关系$\varnothing$，最大的反自反关系为 $E_A - I_A$，想想为什么？

根据定义，可以判断任意关系是否是反自反的。

例 3.38 $A=\{1,2,3\}$，$R_1=\{<1,1>,<1,2>\}$，$R_2=\{<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$，$R_3=\{<2,1>,<2,3>\}$，说明 R_1、R_2、R_3 是否为 A 上反自反的关系。

解：由反自反性的充要条件 $R\cap I_A=\varnothing$，可以判定只有 R_3 为 A 上反自反的关系。

下面尝试从关系图和关系矩阵的特点来判断一个关系是否具有自反性和反自反性。根据自反性的特征，容易知道，令 $R\subseteq A\times A$，若对 A 中每个 x，都有 xRx，则称 R 是自反的。而在关系矩阵中每个 xRx 所对应的恰好是关系矩阵主对角线上的元素为 1，在对应的关系图上的表示则是一个环。也就是说，如果关系满足自反性，则对 A 中每个 x，都有 xRx，则在关系矩阵上的表示是主对角线上的每个元素都是 1，在关系图上则表示为每个元素上都有一个自己到自己的环。

反之，根据反自反性的特征，容易知道，令 $R\subseteq A\times A$，若对 A 中每个 x，都有 $x\bar{R}x$，则称 R 是反自反的。而在关系矩阵中每个 $x\bar{R}x$ 所对应的恰好是关系矩阵主对角线上的元素为 0，在对应的关系图上的表示则是不存在自己到自己的环。也就是说，如果关系满足反自反性，则对 A 中每个 x，都有 $x\bar{R}x$，则在关系矩阵上的表示是主对角线上的每个元素都是 0，在关系图上则表示为每个元素上都没有自己到自己的环。

例 3.22 中 R_1、R_2、R_3 的关系矩阵如下所示，关系图如图 3.9 所示。

$$\boldsymbol{M}_{R_1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{M}_{R_2}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{M}_{R_3}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

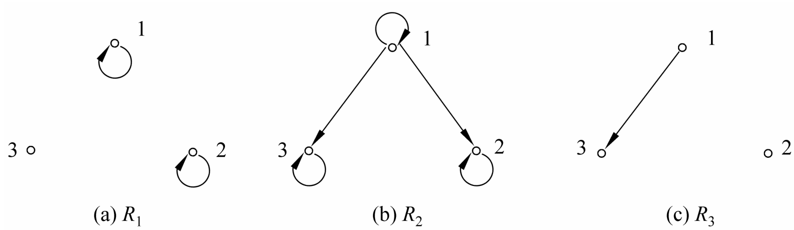

图 3.9 例 3.22 的关系图

从自反和反自反的定义可以判断：R_1 是既不是自反的也不是反自反的，R_2 是自反的但不是反自反的，R_3 不是自反的但是反自反的。如果总结一下，可以发现自反关系的关系矩阵有一个明显特征：主对角线（所有的 a_{ii}）上元素全为 1，关系图上则表现出每个元素都有一个圈（见图 3.9(b)）；而反自反关系的关系矩阵主对角线上元素全为 0，关系图上表现为每个元素都没有圈（见图 3.9(c)）。总结一下，自反和反自反关系考察的是矩阵的主对角元或图中元素的圈。

注意：应该指出，任何一个不是自反的关系，未必是反自反的；反之，任何一个不是反自反的关系，未必是自反的。这就是说，存在既不是自反的也不是反自反的二元关系。

例如，$A=\{1,2,3\}$，$R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>\}$既不是自反的也不是反自反的。

3.5.2 对称性与反对称性

定义 3.9 令 $R\subseteq A\times A$，对于 A 中每个 x 和 y，若 xRy，则 yRx，称 R 是**对称的**，即

$$A \text{ 上关系 } R \text{ 是对称的} \Leftrightarrow \forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\rightarrow yRx)$$

该定义表明，在表示对称的关系 R 的有序对集合中，若存在有序对 $<x,y>$，则必定存在有序对 $<y,x>$。在全集 **E** 的所有子集的集合中，相等关系就是对称的关系，包含关系 $\subseteq$ 和真包含关系 $\subset$ 都不是对称的；在整数集合 **Z** 中，相等关系 $=$ 是对称的，而关系 $\leqslant$ 和 $<$ 都不是对称的。A 上的全域关系 E_A、恒等关系 I_A 和空关系 $\varnothing$ 都是对称的关系。

定义 3.10 令 $R\subseteq A\times A$，对于 A 中每个 x 和 y，若 xRy，且 yRx，则 $x=y$，称 R 是反对称的，即

$$\begin{aligned}A \text{ 上关系 } R \text{ 是反对称的} &\Leftrightarrow \forall x\forall y(x,y\in A\wedge xRy\wedge yRx\rightarrow x=y)\\ &\Leftrightarrow \forall x\forall y(x,y\in A\wedge xRy\wedge x\neq y\rightarrow y\bar{R}x)\end{aligned}$$

该定义表明，在表示反对称关系 R 的有序对集合中，若存在有序对 $<x,y>$ 和 $<y,x>$，则必定是 $x=y$。或者说，在 R 中若有有序对 $<x,y>$，则除非 $x=y$，否则必定不会出现 $<y,x>$。

同样地，可以找到很多关系满足反对称性。比如在全集 **E** 的所有子集的集合中，相等关系 $=$、包含关系 $\subseteq$ 和真包含关系 $\subset$ 都是反对称的，人群中的父子关系也是反对称的，但 A 上的全域关系不是反对称的。在整数集合 **Z** 中，$=$、$\leqslant$ 和 $<$ 也都是反对称的。

可以看出，对称关系的关系矩阵是沿主对角线对称的，在关系图中表现为图中两个不同的点之间若有有向弧，那么有向弧必是成对出现的。而反对称关系的关系矩阵则表现为矩阵中所有沿主对角线对称的两个点不会同时为 1，在关系图中表现为任意两个不同的点之间最多有一条有向弧。在对称和反对称关系中考察的是主对角元素以外的矩阵元素之间的关系。

例 3.39 $A=\{1,2,3\}$，$R_1=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$，$R_2=\{<1,1>\}$，$R_3=\{<1,2>,<2,2>\}$，说明 R_1、R_2、R_3 是否为 A 上对称关系。

解：根据关系对称性的定义，R_1 和 R_2 都是 A 上的对称关系，R_3 不是 A 上的对称关系。

例 3.40 $A=\{1,2,3\}$，$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$，$R_2=\{<1,2>,<1,3>\}$，$R_3=\{<1,2>,<2,1>,<1,1>\}$。说明 R_1、R_2、R_3 是否为 A 上反对称的关系。

解：R_1 和 R_2 为 A 上的反对称关系，R_3 不是 A 上的反对称关系。

我们还是从关系图和关系矩阵来看看对称关系和反对称关系的特性。例 3.39 的 R_1、R_2、R_3 的关系矩阵如下：

$$\boldsymbol{M}_{R_1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{M}_{R_2}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{M}_{R_3}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

其关系图如图 3.10 所示。

从定义可以判断：对称关系有 R_1 和 R_2，反对称关系有 R_3。

从关系的性质可以看出，有些关系既是对称的又是反对称的，如恒等关系；而有些关