

精确总场/散射场平面波源条件^①

Tengmeng Tan, Mike Potter

3.1 引言

电磁波物理机制的数学关系由麦克斯韦方程组描述。像许多其他偏微分方程一样,仅在几种简单情况下存在解析解。因此,许多电磁波问题通过数值方法求解。其中最重要的一类问题是求解开域中电磁波照射任意目标所产生的散射场。这种目标可以是在自由空间中(例如飞机)或者是位于材料结构中(如地雷)。

FDTD 建模计算散射场的一种高效方法是采用总场/散射场(TF/SF)入射波源^[1],当前几乎所有主流的 FDTD 商业求解器均采用了这种方法。最重要的,TF/SF 技术是著名的电磁场等效原理^[2-4]的一个应用。利用这个原理,原来的开放空间任意传播方向、极化和波形入射波由包含目标的有限封闭空间表面的等效表面电流源和磁流源替代。重新构型的问题将入射波照射限制在一个紧凑的总场区域,并且通过采用吸收边界条件(ABC)在总场区域外提供有限大小的散射场区域,模拟 FDTD 网格外推到无穷远处。远场区域的散射场能够通过近远场变换(NFFT)获得^[1]。

图 3.1 显示了等效原理对任意目标在开放空间中散射电磁波的应用。其中,入射波由电流源 $\mathbf{J}_{\text{source}}$ 和磁流源 $\mathbf{M}_{\text{source}}$ 产生。在图 3.1(a)中,入射波与目标的相互作用产生了总的电场 $\mathbf{E}_T$ 和总的磁场 $\mathbf{H}_T$,并充满整个空间。从数学角度考虑,我们使用“总”这个字是想表明:总场是入射场和散射场的和,即 $\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_S$ 和 $\mathbf{H}_T = \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{H}_S$ 。

利用等效原理,图 3.1(b)显示的重新构型问题将空间划分为两个区域:一个是存在总场的内部区域;另一个是仅仅存在散射场的外部区域。其中,原始的入射场仅仅在总场区域中存在,由 TF/SF 边界 $\partial\Omega$ 上的等效电流源 $\mathbf{J}_{\text{inc}}$ 和磁流源 $\mathbf{M}_{\text{inc}}$ 产生。

① 本章是对文献[14]的改编和扩展。Tan T, Potter M. FDTD discrete planewave (FDTD-DPW) formulation for a perfectly matched source in TFSF simulations. IEEE Trans. Antennas and Propagation. 2010 IEEE, 2010, 58: 2641-2648.

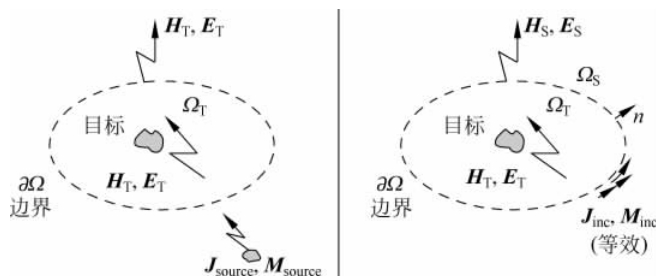


图 3.1 开放空间中目标散射电磁波的电磁场等效原理示意图：(a)原始问题——空间各点的总场；(b)等效问题——空间划分为总场和散射场两个区域

如文献[1]所概述,相对于许多 FDTD 仿真问题中其他纯散射场波源方法,TF/SF 公式有如下优点:

- 计算效率。仅仅沿着包含目标的 TF/SF 边界 $\partial\Omega$ 的二维表面计算波源,而不是在目标的整个三维空间计算波源。
- 目标编程相对简单。在目标中经过不同材料交界面的总电场和总磁场的切向分量需要的连续性自动由 FDTD 算法实现,因为所有的材料交界面位于沿时间推进的总场计算区域中。而且,TF/SF 交界面有固定的形状,与目标的几何和材料组成无关。
- 近场计算动态范围宽。在目标内部和目标附近微弱的总场直接通过时间推进方法计算。由于已知入射场和 FDTD 计算的散射场几乎相消,没有必要获得重要的可测量总场的小量(例如,在深阴影区域或者良好屏蔽目标内部腔体)。由于减法噪声,对消过程可能导致所要求总场值的较大误差,减法噪声中计算散射场的小比例误差能够在场对消后在总场中的大比例误差。

在具有这些优点的同时,TF/SF 公式也具有计算远场响应的能力并能够应用最新的理想匹配层(PML)ABC。NFFT 实际表面和 ABC 分别位于散射场区域中预定的位置。

3.2 FDTD 精确 TF/SF 公式的推导

原始的 TF/SF 公式由文献[5]给出,在文献[6]中得到改进。读者可参考文献[1]了解 TF/SF 技术与后来改进方法的详细处理过程。文献[6]中提出的改进方法是引入了一维辅助 FDTD 网格作为入射场数组(IFA),与基本网格 FDTD 仿真同时传播平面波源。然而,因为使用 IFA 作为查询表格所带来的插值误差,以及在形成 IFA 的一维辅助网格和基本的二维或三维网格上数值色散不匹配,存在入射波进入基本网格散射场区域时的非物理泄漏。这个泄漏数量级上是 $-40 \sim -30\text{dB}$,取决于入射波在基本网格中的传播方向。利用信号处理方法能够减小泄漏,可降低到大约 -70dB 的量级^[7-9],这个量级的残余泄漏仍旧会引入噪声,从而阻碍求解像低可探测目标的宽动态范围散射的真实远场响应。

IFA 的一种替代方法是直接从数值色散关系式构造数值入射波^[10,11]。这种方法命名

为解析场传播器(AFP)方法,本质上传播器法是解析方法,插值误差实际上不存在。利用 AFP 方法,能够直接解释数值耗散、色散、依赖频率的极化和场分量的非正交性。这将入射波泄漏减小到大约 -180dB ,对于实际问题并不存在这个量级的泄漏^[11]。然而,AFP 方法效率比 IFA 方法明显低,因为,在 TF/SF 交界面上各点的时变源函数在预处理步骤中必定产生,然后存储起来在仿真中使用。

最近,Tan 和 Potter 在文献[12-14]中呈现了 6 个 IFA 并由此产生平面波源,它与基本 FDTD 计算网格精确匹配。换句话说,入射场和散射场的隔离依赖于机器精度的量级(对于单精度为 -180dB)。通过几何变量,能够显示出 FDTD 规则网格中数值平面波的传播方向可以由可数的无限组角度表示^[13]。这个表达式允许在 IFA 中的场和基本网格中的场之间建立多对一响应,并且允许采用相同的数值色散关系式而不需进行场的插值。事实上,这种映射能够使 APF 方法更加有效。

在 3.3 节中,首先描述基本 TF/SF 公式,然后详细讨论文献[12-14]中报道的几种方法,并提供如何产生精确平面波源状态的演示算例。

3.3 基本 TF/SF 公式

对于图 3.1(b)显示的空间 TF/SF 界限,在介电常数 ϵ 、磁导率 μ 、电导 σ 、磁损 σ^* 的各向同性、非色散介质中的电场、磁场传播的麦克斯韦方程可写为

$$\epsilon(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{E}(\mathbf{x},t) + \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x},t) - \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{x}_{\partial\Omega},t) \quad (3.1a)$$

$$\mu(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{H}(\mathbf{x},t) + \sigma^*(\mathbf{x})\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = -\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x},t) - \mathbf{M}_{\text{inc}}(\mathbf{x}_{\partial\Omega},t) \quad (3.1b)$$

其中,算子 $\partial_t(\cdot)$ 是对时间的偏导数, $\mathbf{x}=[x,y,z] \in \mathbf{R}^3$ 。式(3.1a)和式(3.1b)包含强制函数由电流密度 $\mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{x}_{\partial\Omega},t)$ 和磁流密度 $\mathbf{M}_{\text{inc}}(\mathbf{x}_{\partial\Omega},t)$ 给定的非均匀偏微分方程组。特别地,如图 3.1(b)所示,这些波源仅仅位于总场区域 Ω_T 和散射场区域 Ω_S 的交界面 $\partial\Omega$ 上。这些电流和磁流密度不是独立的矢量场,按照能使 Ω_T 区域内部的电场和磁场与图 3.1(a)显示的原始问题中的电场和磁场相同来构造这些矢量场。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_S(\mathbf{x},t) + \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_T \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \mathbf{H}_S(\mathbf{x},t) + \mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_T \quad (3.2b)$$

其中,下标 S 和 inc 分别代表散射波和入射波。 Ω_S 区域的外部场仅仅是散射场:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_S(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_S \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \mathbf{H}_S(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_S \quad (3.3b)$$

换句话说,对于 $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ 和 $\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$ 是不连续的,认为这些场是不连续电流密度 $\mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{x}_{\partial\Omega},t)$ 和磁流密度 $\mathbf{M}_{\text{inc}}(\mathbf{x}_{\partial\Omega},t)$ 产生的。

3.4 TF/SF 交界面上的电流源和磁流源

为了便于后面对 FDTD 精确 TF/SF 公式的讨论,对于 $\mathbf{x} \in \partial\Omega$,引入另外一组能够处理场不连续的电流和磁流源:

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{x}_{\partial\Omega}, t) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{x}_{\partial\Omega}, t) \equiv \mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{x}_{\partial\Omega}, t) \partial\Omega_n \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{M}_s(\mathbf{x}_{\partial\Omega}, t) = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x}_{\partial\Omega}, t) \equiv \mathbf{M}_{\text{inc}}(\mathbf{x}_{\partial\Omega}, t) \partial\Omega_n \quad (3.4b)$$

其中, $\mathbf{n}$ 是界面 $\partial\Omega$ 上单位法线矢量, 从 Ω_T 区域指向 Ω_S 区域, $\partial\Omega_n$ 是平行于 $\mathbf{n}$ 的界面方向有关的厚度。这些源具有与相应的磁场强度和电场强度相同的单位。如果入射波不是一个脉冲, 则 $\mathbf{J}_s$ 和 $\mathbf{M}_s$ 的大小为有限值。这意味着对于 $\partial\Omega_n$ 无限小, 即界面没有厚度, $\mathbf{J}_{\text{inc}}$ 和 $\mathbf{M}_{\text{inc}}$ 必须是脉冲函数。然而, 在 FDTD 方法中, 这样的脉冲不是问题, 因为 $\partial\Omega_n$ 假定为网格离散的有限尺寸。因此, 我们能够把 $\mathbf{J}_{\text{inc}}$ 和 $\mathbf{M}_{\text{inc}}$ 看作 $\mathbf{J}_s$ 和 $\mathbf{M}_s$ 的空间重新缩放形式。例如, 如果 $\mathbf{J}_{\text{inc}}$ 是表面电流密度, 那么 $\mathbf{J}_s$ 是相应的线流密度。这同样适用于 $\mathbf{M}_{\text{inc}}$ 和 $\mathbf{M}_s$ 。

3.5 各向同性背景介质中入射平面波场

一般地, 在 TF/SF 公式中的入射场可以是满足麦克斯韦方程组的任意波, 可用于不均匀介质或随机背景介质。在这点上, 我们假定入射场在均匀各向同性介质中传播, 介质的材料参数为 $\epsilon(\mathbf{x}) = \epsilon_B, \mu(\mathbf{x}) = \mu_B, \sigma(\mathbf{x}) = \sigma_B, \sigma^*(\mathbf{x}) = \sigma_B^*$ 。对于入射波麦克斯韦方程可简化为

$$\epsilon_B \partial_t \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) + \sigma_B \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) \quad (3.5a)$$

$$\mu_B \partial_t \mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) + \sigma_B^* \mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \times \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) \quad (3.5b)$$

求解式(3.5a)和式(3.5b)给出的方程组时, 能够立即计算出表面电流密度 $\mathbf{J}_{\text{inc}}(\mathbf{x}_{\partial\Omega}, t)$ 和磁流密度 $\mathbf{M}_{\text{inc}}(\mathbf{x}_{\partial\Omega}, t)$, 因为这些是通过不连续方程(3.4)与入射场相关。我们注意到等效原理和这里的 TF/SF 公式适用于任意入射波源条件。然而, 大多数 FDTD 商业软件的 TF/SF 仅包括平面波源。因此, 在本章中我们仅关注平面波的实现。

为建立随后发展的基础, 现在我们考虑一维子空间的平面波。假定它的传播方向由笛卡儿矢量 $\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]$ 给出, 各分量与球坐标 θ 和 φ 的关系式由文献[1, 12-14]给出:

$$p_x = \sin\theta \cos\varphi, \quad p_y = \sin\theta \sin\varphi, \quad p_z = \cos\theta \quad (3.6)$$

注意: $\mathbf{p}$ 实际上是描述球坐标向笛卡儿坐标转化的投影矢量。通过定义, 平面波的场分量在垂直于传播方向的平面波前有相同的幅度和相位。本质上, 这意味着平面波实际上是一维实体^[12-14], 能够通过仅使用投影子空间 $r \in \mathbf{R}^1$ 完全表征特征, 因此:

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_{\text{inc}}(r, t), \quad \mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}_{\text{inc}}(r, t) \quad (3.7)$$

在点 $\mathbf{x} = [x, y, z] \in \mathbf{R}^3$, 每个入射场利用一对多映射与点 $r \in \mathbf{R}^1$ 相关联, 而这个映射通过将平面波前投影到投影矢量上所确定:

$$r = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = p_x x + p_y y + p_z z \quad (3.8)$$

对于平面波在子空间 r 中的具体实例, 表示(3.5)是简单的过程。仅仅需要确定 r 子空间中的等效旋度算子 $\nabla \times (\cdot)$ 。这可通过使用链式法则关系获得:

$$\partial_\xi(\cdot) = \partial_\xi[r] \partial_r(\cdot) \quad (3.9)$$

其中, $\xi \in \{x, y, z\}$ 。具体地, 利用式(3.8)替代链式法则如下:

$$\nabla \times (\cdot) = [\partial_x, \partial_y, \partial_z] \times (\cdot) = [\partial_x r, \partial_y r, \partial_z r] \times \partial_r(\cdot) = \mathbf{p} \times \partial_r(\cdot) \quad (3.10)$$

对于入射场, r 子空间中表达式(3.5)可简化为

$$\epsilon_B \partial_t \mathbf{E}_{\text{inc}}(r, t) + \sigma_B \mathbf{E}_{\text{inc}}(r, t) = \mathbf{p} \times \partial_r \mathbf{H}_{\text{inc}}(r, t) \quad (3.11a)$$

$$\mu_B \partial_t \mathbf{H}_{\text{inc}}(r, t) + \sigma_B^* \mathbf{H}_{\text{inc}}(r, t) = -\mathbf{p} \times \partial_r \mathbf{E}_{\text{inc}}(r, t) \quad (3.11b)$$

注意：因为叉积，矢量 $\mathbf{p}$ 、 $\mathbf{E}_{\text{inc}}$ 和 $\mathbf{H}_{\text{inc}}$ 形成了相互正交的关系，即描述了横向的电磁波。

投影关系式(3.8)必须对所有的 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ 有效，因此它在平移时保持不变，导致对于任意矢量 $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^3$ 均能够有 $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{d}) = r + \mathbf{p} \cdot \mathbf{d}$ 。当应用到式(3.7)中时，这个替代关系式为

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x} + \mathbf{d}, t) = \mathbf{E}_{\text{inc}}(r + \mathbf{p} \cdot \mathbf{d}, t), \quad \mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{x} + \mathbf{d}, t) = \mathbf{H}_{\text{inc}}(r + \mathbf{p} \cdot \mathbf{d}, t) \quad (3.12)$$

这称为平移不变性。平移不变性将明显简化构造数值平面波的过程，特别是在采用有限差分方法的时候。注意不需要时间相关的变换，因为内积 $r = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ 不依赖于 t 。

3.6 基本 TF/SF 公式的 FDTD 实现

在 FDTD 方法中，采用中心差分进行麦克斯韦方程组的空间和时间离散，在三个笛卡尔坐标方向空间离散步长分别为 Δx 、 Δy 和 Δz ，时间离散步长为 Δt 。为了实现 FDTD 方法中的 TF/SF 公式，式(3.1)能够展开为 6 个耦合的标量方程。使用记号 $g(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = g \Big|_{i,j,k}^n$ ，式(3.1)能够展开为适合 FDTD 时间推进的 6 个标量方程， E_x 迭代表达式可写为

$$\begin{aligned} E_x \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = & C_{x,a} E_x \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2} + C_{x,y} (H_z \Big|_{i,j+1,k+1/2}^n - H_z \Big|_{i,j,k+1/2}^n) + \\ & C_{x,z} (H_y \Big|_{i,j+1/2,k}^n - H_y \Big|_{i,j+1/2,k+1}^n) - C_{x,b} J_{x,\text{inc}} \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^n \end{aligned} \quad (3.13)$$

其中

$$C_{x,a} = \frac{2\epsilon \Big|_{i,j+1/2,k+1/2} - \sigma \Big|_{i,j+1/2,k+1/2} \Delta t}{2\epsilon \Big|_{i,j+1/2,k+1/2} + \sigma \Big|_{i,j+1/2,k+1/2} \Delta t} \quad (3.14a)$$

$$C_{x,b} = \frac{2\Delta t}{2\epsilon \Big|_{i,j+1/2,k+1/2} + \sigma \Big|_{i,j+1/2,k+1/2} \Delta t} \quad (3.14b)$$

$$C_{x,y} = C_{x,b}/\Delta y, \quad C_{x,z} = C_{x,b}/\Delta z \quad (3.14c,d)$$

E_y 迭代表达式可写为

$$\begin{aligned} E_y \Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} = & C_{y,a} E_y \Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n-1/2} + C_{y,z} (H_x \Big|_{i+1/2,j,k+1}^n - H_x \Big|_{i+1/2,j,k}^n) + \\ & C_{y,x} (H_z \Big|_{i,j,k+1/2}^n - H_z \Big|_{i+1,j,k+1/2}^n) - C_{y,b} J_{y,\text{inc}} \Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^n \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中

$$C_{y,a} = \frac{2\epsilon \Big|_{i+1/2,j,k+1/2} - \sigma \Big|_{i+1/2,j,k+1/2} \Delta t}{2\epsilon \Big|_{i+1/2,j,k+1/2} + \sigma \Big|_{i+1/2,j,k+1/2} \Delta t} \quad (3.16a)$$

$$C_{y,b} = \frac{2\Delta t}{2\epsilon \Big|_{i+1/2,j,k+1/2} + \sigma \Big|_{i+1/2,j,k+1/2} \Delta t} \quad (3.16b)$$

$$C_{y,z} = C_{y,b}/\Delta z, \quad C_{y,x} = C_{y,b}/\Delta x \quad (3.16c,d)$$

E_z 迭代表达式可写为

$$\begin{aligned} E_z \Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} = & C_{z,a} E_z \Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n-1/2} + C_{z,y} (H_x \Big|_{i+1,j+1/2,k}^n - H_x \Big|_{i,j+1/2,k}^n) + \\ & C_{z,x} (H_y \Big|_{i+1/2,j,k}^n - H_y \Big|_{i+1/2,j+1,k}^n) - C_{z,b} J_{z,\text{inc}} \Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^n \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中

$$C_{z,a} = \frac{2\epsilon \Big|_{i+1/2,j+1/2,k} - \sigma \Big|_{i+1/2,j+1/2,k} \Delta t}{2\epsilon \Big|_{i+1/2,j+1/2,k} + \sigma \Big|_{i+1/2,j+1/2,k} \Delta t} \quad (3.18a)$$

$$C_{z,b} = \frac{2\Delta t}{2\epsilon \left|_{i+1/2,j+1/2,k} + \sigma \right|_{i+1/2,j+1/2,k} \Delta t} \quad (3.18b)$$

$$C_{z,x} = C_{z,b}/\Delta x, \quad C_{z,y} = C_{z,b}/\Delta y \quad (3.18c,d)$$

类似地, H_x 迭代表达式可写为

$$\begin{aligned} H_x \Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1} = & D_{x,a} H_x \Big|_{i+1/2,j,k}^n + D_{x,y} (E_z \Big|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2} - E_z \Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}) + \\ & D_{x,z} (E_y \Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - E_y \Big|_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2}) + D_{x,b} M_{x,\text{inc}} \Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

其中

$$D_{x,a} = \frac{2\mu \left|_{i+1/2,j,k} - \sigma^* \right|_{i+1/2,j,k} \Delta t}{2\mu \left|_{i+1/2,j,k} + \sigma^* \right|_{i+1/2,j,k} \Delta t} \quad (3.20a)$$

$$D_{x,b} = \frac{2\Delta t}{2\mu \left|_{i+1/2,j,k} + \sigma^* \right|_{i+1/2,j,k} \Delta t} \quad (3.20b)$$

$$D_{x,y} = D_{x,b}/\Delta y, \quad D_{x,z} = D_{x,b}/\Delta z \quad (3.20c,d)$$

H_y 迭代表达式可写为

$$\begin{aligned} H_y \Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1} = & D_{y,a} H_y \Big|_{i,j+1/2,k}^n + D_{y,z} (E_x \Big|_{i,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2} - E_x \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}) + \\ & D_{y,x} (E_z \Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - E_z \Big|_{i-1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}) + D_{y,b} M_{y,\text{inc}} \Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中

$$D_{y,a} = \frac{2\mu \left|_{i,j+1/2,k} - \sigma^* \right|_{i,j+1/2,k} \Delta t}{2\mu \left|_{i,j+1/2,k} + \sigma^* \right|_{i,j+1/2,k} \Delta t} \quad (3.22a)$$

$$D_{y,b} = \frac{2\Delta t}{2\mu \left|_{i,j+1/2,k} + \sigma^* \right|_{i,j+1/2,k} \Delta t} \quad (3.22b)$$

$$D_{y,z} = D_{y,b}/\Delta z, \quad D_{y,x} = D_{y,b}/\Delta x \quad (3.22c,d)$$

H_z 迭代表达式可写为

$$\begin{aligned} H_z \Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1} = & D_{z,a} H_z \Big|_{i,j,k+1/2}^n + D_{z,x} (E_y \Big|_{i-1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - E_y \Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}) + \\ & D_{z,y} (E_x \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - E_x \Big|_{i,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2}) + D_{z,b} M_{z,\text{inc}} \Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

其中

$$D_{z,a} = \frac{2\mu \left|_{i,j,k+1/2} - \sigma^* \right|_{i,j,k+1/2} \Delta t}{2\mu \left|_{i,j,k+1/2} + \sigma^* \right|_{i,j,k+1/2} \Delta t} \quad (3.24a)$$

$$D_{z,b} = \frac{2\Delta t}{2\mu \left|_{i,j,k+1/2} + \sigma^* \right|_{i,j,k+1/2} \Delta t} \quad (3.24b)$$

$$D_{z,x} = D_{z,b}/\Delta x, \quad D_{z,y} = D_{z,b}/\Delta y \quad (3.24c,d)$$

3.7 构造 FDTD 精确 TF/SF 平面波源

从式(3.13)~式(3.24)的 TF/SF 公式中能够获得一些深刻见解,对于我们理解如何构造精确 TF/SF 平面波源条件具有重要的价值。在电场和磁场时间推进表达式中, $(J_{x,\text{inc}} \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^n, J_{y,\text{inc}} \Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^n, J_{z,\text{inc}} \Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^n)$ 和 $(M_{x,\text{inc}} \Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2}, M_{y,\text{inc}} \Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2},$

$M_{z,\text{inc}} \left|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2}\right\rangle$ 是虚拟的电流密度和磁流密度, 它们有准确的数学定义, 在总场区域 Ω_T 内能够产生需要的人射平面波。在 FDTD 术语中, 电流密度和磁流密度组成了“源”, 在总场区域 Ω_T 和散射场区域 Ω_s 中都产生辐射。可以认为 M 源辐射出一种波进入 Ω_s , 对消了由 J 源辐射产生的波, 因此, 在 Ω_s 中总的波传播被对消, 需要的人射波仅仅传播进入 Ω_T 。不完全对消将导致空间波传播进入 Ω_s 。由于组成 TF/SF 概念基础的电磁理论能够实现完全对消, 在 Ω_s 中观察到的任何波都源于有瑕疵的算法实现, 即数值误差。即使在 Ω_T 中不存在散射结构的情况下, 由于 Ω_s 中出现散射场而引起的误差经常被称为泄漏误差。注意 Ω_T 中入射波也将被这种误差破坏。

以下内容是理解如何完全消除泄漏误差的关键。回想到入射的电流密度 J_{inc} 和磁流密度 M_{inc} (还有 J_s 和 M_s) 不是独立的矢量场。实际上, 它们直接与麦克斯韦方程组确定的场相关联, 对于平面波, 简化到一维形式[式(3.11)]。另外, 这也是因为电流和磁流的密度矢量与入射场 E_{inc} 和 H_{inc} 通过不连续方程(3.4)相关联。因此, 获得 E_{inc} 和 H_{inc} 等同于求解适当的电流密度 J_{inc} 和磁流密度 M_{inc} (还有 J_s 和 M_s)。

因此, 构造理想的 TF/SF 公式使得数值计算中不存在泄漏误差(即入射波完全限制在总场区域中), 确保采用相同的离散矢量微积分算子离散公式[式(3.1)和式(3.5)]; 对于平面波源的特定情况, 后者的方程组为式(3.11)。采用这种方法, 对麦克斯韦方程[式(3.1)和式(3.11)]的数值误差是完全相同, 或相近的, 它们的数值色散关系式是完全相同的。我们将这种构造方法称为理想匹配或者精确 TF/SF 公式。

3.8 精确 TF/SF 公式的 FDTD 离散平面波源

现在, 我们将注意力转向适当离散 FDTD 公式的构造, 这样投影空间 $r \in \mathbf{R}^1$ 中的平面波完全等同于在全空间 $r \in \mathbf{R}^3$ 中的传播。这本质上意味着对式(3.9)和式(3.10)执行相同的链式法则过程, 但是这次是采用离散算子。具体地, 考虑对函数 $g(\mathbf{x}, t) = g(x, y, z, t) = g(r, t)$ 应用链式法则, 在连续公式中可写为

$$\partial_{\xi} g(x, y, z, t) = \partial_{\xi}[r] \partial_r g(r, t) \quad (3.25)$$

对 $\xi = x$ 方程左侧项应用中心差分格式, 产生

$$\partial_x g(x, y, z, t) \approx \frac{g \left|_{i+1/2, j, k}^n - g \left|_{i-1/2, j, k}^n}{\Delta x} \quad (3.26)$$

记住 $\mathbf{x}$ 和 r 是通过 $r = p_x x + p_y y + p_z z$ 相关联的。FDTD 主网格中的场是离散的, 因此它们仅仅在 $\mathbf{x} = [i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z]$ 点上存在。相应点 $r \in \mathbf{R}^1$ 为

$$r_{i,j,k} = p_x i \Delta x + p_y j \Delta y + p_z k \Delta z \quad (3.27)$$

通常, 沿着 FDTD 三维区域的边缘, 需要用到半步长位置上的场。这样, 为了便于标记, 网格中的推进步索引号也可标记为

$$r_{i \pm p_x \Delta x/2, j \pm p_y \Delta y/2, k \pm p_z \Delta z/2} = p_x \Delta x (i \pm 1/2) + p_y \Delta y (j \pm 1/2) + p_z \Delta z (k \pm 1/2) \quad (3.28)$$

例如, Δx 的改变必定导致在网格中 r 发生变化, 即 $\Delta r_x = r_{i+p_x \Delta x/2, j, k} - r_{i,j,k} = p_x \Delta x$ 。这意味着由于 x 方向上的变化, 当应用到时, 相同的中心差分应计算为:

$$\begin{aligned}\partial_x[r]\partial_r g(r,t) &\approx \left(\frac{r_{i+p_x \Delta x/2,j,k} - r_{i-p_x \Delta x/2,j,k}}{\Delta x} \right) \cdot \left(\frac{g|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j,k}}^n - g|_{r_{i-p_x \Delta x/2,j,k}}^n}{p_x \Delta x} \right) \\ &\approx \frac{g|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j,k}}^n - g|_{r_{i-p_x \Delta x/2,j,k}}^n}{\Delta x}\end{aligned}\quad (3.29)$$

使式(3.29)与式(3.26)相等,将产生 $(g|_{i+1/2,j,k}^n - g|_{i-1/2,j,k}^n)/\Delta x = (g|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j,k}}^n - g|_{r_{i-p_x \Delta x/2,j,k}}^n)/\Delta x$,实际上,这体现了式(3.12)中的平移不变性。对于三个笛卡儿方向的每个方向,这种变换关系式表示为

$$g|_{i\pm 1/2,j,k}^n = g|_{r_{i\pm p_x \Delta x/2,j,k}}^n, \quad g|_{i,j\pm 1/2,k}^n = g|_{r_{i,j\pm p_y \Delta y/2,k}}^n, \quad g|_{i,j,k\pm 1/2}^n = g|_{r_{i,j,k\pm p_z \Delta z/2}}^n \quad (3.30)$$

现在已经可以得到在 FDTD 离散网格 $r|_{i,j,k}$ 中表示的入射波。该解也能够从式(3.11)严格推导出来。然而,有一种更简单的方法是直接迭代式(3.13)~式(3.18)中的电场和式(3.19)~式(3.24)中的磁场,而忽略电流密度和磁流密度,然后使用式(3.30)将其平移到网格 $r|_{i,j,k}$ 上的等效方程。(这里,对于没有散射体存在的情况,总场区域中的场必须是没有源项的入射波产生的场。)这产生了新的电场迭代公式:

$$\begin{aligned}E_{x,\text{inc}}|_{r_{i,j+p_y \Delta y/2,k+1/2}}^{n+1/2} &= C_a E_{x,\text{inc}}|_{r_{i,j+p_y \Delta y/2,k+1/2}}^{n-1/2} + C_{b,y} (H_{z,\text{inc}}|_{r_{i,j+p_y \Delta y/2,k+p_z \Delta z/2}}^n - H_{z,\text{inc}}|_{r_{i,j,k+p_z \Delta z/2}}^n) + \\ &\quad C_{b,z} (H_{y,\text{inc}}|_{r_{i,j+p_y \Delta y/2,k}}^n - H_{y,\text{inc}}|_{r_{i,j,p_y \Delta y/2,k+p_z \Delta z}}^n)\end{aligned}\quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}E_{y,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j,k+p_z \Delta z/2}}^{n+1/2} &= C_a E_{y,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j,k+p_z \Delta z/2}}^{n-1/2} + C_{b,z} (H_{x,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j,k+p_z \Delta z}}^n - H_{x,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j,k}}^n) + \\ &\quad C_{b,x} (H_{z,\text{inc}}|_{r_{i,j,k+p_z \Delta z/2}}^n - H_{z,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j,k+p_z \Delta z/2}}^n)\end{aligned}\quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}E_{z,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j+p_y \Delta y/2,k}}^{n+1/2} &= C_a E_{z,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j+p_y \Delta y/2,k}}^{n-1/2} + C_{b,x} (H_{y,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j+p_y \Delta y/2,k}}^n - H_{y,\text{inc}}|_{r_{i,j+p_y \Delta y/2,k}}^n) + \\ &\quad C_{b,y} (H_{x,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j,k}}^n - H_{x,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j+p_y \Delta y/2,k}}^n)\end{aligned}\quad (3.33)$$

其中,

$$C_a = \frac{2\epsilon_B - \sigma_B \Delta t}{2\epsilon_B + \sigma_B \Delta t} \quad (3.34a)$$

$$C_{b,x} = \frac{2\Delta t/\Delta x}{2\epsilon_B + \sigma_B \Delta t}, \quad C_{b,y} = \frac{2\Delta t/\Delta y}{2\epsilon_B + \sigma_B \Delta t}, \quad C_{b,z} = \frac{2\Delta t/\Delta z}{2\epsilon_B + \sigma_B \Delta t} \quad (3.34b,c,d)$$

类似地,新的磁场迭代方程为

$$\begin{aligned}H_{x,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j,k}}^{n+1} &= D_a H_{x,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j,k}}^n + D_{b,y} (E_{z,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j-p_y \Delta y/2,k}}^{n+1/2} - E_{z,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j+p_y \Delta y/2,k}}^{n+1/2}) + \\ &\quad D_{b,z} (E_{y,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j,k+p_z \Delta z/2}}^{n+1/2} - E_{y,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j,k-p_z \Delta z/2}}^{n+1/2})\end{aligned}\quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}H_{y,\text{inc}}|_{r_{i,j+p_y \Delta y/2,k}}^{n+1} &= D_a H_{y,\text{inc}}|_{r_{i,j+p_y \Delta y/2,k}}^n + D_{b,z} (E_{x,\text{inc}}|_{r_{i,j+p_y \Delta y/2,k-p_z \Delta z/2}}^{n+1/2} - E_{x,\text{inc}}|_{r_{i,j+p_y \Delta y/2,k+p_z \Delta z/2}}^{n+1/2}) + \\ &\quad D_{b,x} (E_{z,\text{inc}}|_{r_{i+p_x \Delta x/2,j+p_y \Delta y/2,k}}^{n+1/2} - E_{z,\text{inc}}|_{r_{i-p_x \Delta x/2,j+p_y \Delta y/2,k}}^{n+1/2})\end{aligned}\quad (3.36)$$

$$H_{z,\text{inc}} \Big|_{r_{i,j,k+p_z\Delta z/2}}^{n+1} = D_a H_{z,\text{inc}} \Big|_{r_{i,j,k+p_z\Delta z/2}}^n + D_{b,x} \left(E_{y,\text{inc}} \Big|_{r_{i-p_x\Delta x/2,j,k+p_z\Delta z/2}}^{n+1/2} - E_{y,\text{inc}} \Big|_{r_{i+p_x\Delta x/2,j,k+p_z\Delta z/2}}^{n+1/2} \right) + D_{b,y} \left(E_{x,\text{inc}} \Big|_{r_{i,j+p_y\Delta y/2,k+p_z\Delta z/2}}^{n+1/2} - E_{x,\text{inc}} \Big|_{r_{i,j-p_y\Delta y/2,k+p_z\Delta z/2}}^{n+1/2} \right) \quad (3.37)$$

其中,

$$D_a = \frac{2\mu_B - \sigma_B^* \Delta t}{2\mu_B + \sigma_B^* \Delta t} \quad (3.38a)$$

$$D_{b,x} = \frac{2\Delta t/\Delta x}{2\mu_B + \sigma_B^* \Delta t}, \quad D_{b,y} = \frac{2\Delta t/\Delta y}{2\mu_B + \sigma_B^* \Delta t}, \quad D_{b,z} = \frac{2\Delta t/\Delta z}{2\mu_B + \sigma_B^* \Delta t} \quad (3.38b,c,d)$$

结合源函数,电场迭代公式[式(3.31)~式(3.34)]和磁场迭代公式[式(3.35)~式(3.38)]传播能够以理想匹配耦合到三维 FDTD TF/SF 公式[式(3.13)~式(3.18)和式(3.19)~式(3.24)]的一维 FDTD 平面波。然而,以当前形式的式(3.31)~式(3.34)和式(3.35)~式(3.38),这些更新方程计算复杂度为 $O(N^3)$, 因为网格 $r|_{i,j,k}$ 仍旧使用 i, j, k 三个整数标号索引,对于三维 FDTD 网格,有 $O(N^3)$ 个离散点。第 3.9 节将展示如何将网格 $r|_{i,j,k}$ 的复杂度降低到 $O(N)$ 。

3.9 高效整数映射

考虑平行于平面波传播方向的无限长直线。我们限制这条线必须至少经过 FDTD 网格 $\{\mathbf{x} \in [i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z]\}$ 中的两个场点 $\mathbf{x}$ 。通过空间离散的整数标号偏移分隔这两个点,这两个点也不必一定位于仿真区域中。这相当于定义一个传播角度,即

$$p_x \Delta x = m_x \Delta r, \quad p_y \Delta y = m_y \Delta r, \quad p_z \Delta z = m_z \Delta r \quad (3.39a,b,c)$$

其中, m_x, m_y 和 m_z 必须是整数, Δr 是 $r_{i,j,k} \in \mathbf{R}^1$ 中的需要确定的均匀离散空间尺度。能够决定传播方向的方位角和极化角为

$$\tan \varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{m_y \Delta x}{m_x \Delta y} \quad (3.40a)$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{p_z} = \frac{\sqrt{(m_x/\Delta x)^2 + (m_y/\Delta y)^2}}{(m_z/\Delta z)} \quad (3.40b)$$

将利用这些整数定义的角度称为有理角,因为如果长径比是一个有理数,则式(3.40a)也是有理数。注意到有理角是唯一的,仅需增加一个标量因子,即 $[m_x, m_y, m_z] = [1, 1, 1]$ 和 $[m_x, m_y, m_z] = [2, 2, 2]$ 以相同的角度传播。

将式(3.39)代入式(3.27),得到 $r_{i,j,k} = (p_x i \Delta x + p_y j \Delta y + p_z k \Delta z) = (m_x i + m_y j + m_z k) \Delta r$ 。这暗示着均匀剖分的网格 $r_{i,j,k}$ 能够采用标号索引表示为

$$r_{i,j,k} = r_{i_r} = i_r \Delta r \quad (3.41)$$

其中

$$i_r = m_x i + m_y j + m_z k \quad (3.42)$$

这种新的整数映射网格降低了复杂度,因为式(3.42)现在是多对一映射。也就是说, FDTD 网格中的许多点 $\{\mathbf{x} \in [i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z]\}$ 映射到一个网格点 $r_{i_r,k}$ 上。具体地,新网格的复杂度仅为 $O[(m_x + m_y + m_z)N]$ 。作为一个例子,最合适的描述(忽略沿着网格轴的传播)

出现在平面波沿着网格对角传播时,即 $[m_x, m_y, m_z] = [1, 1, 1]$ 。计算平面波仅需要 $O(3N)$ 个点,而不再是 $O(N^3)$ 个点。

注意在式(3.31)~式(3.38)中,为了正确地传播入射场,6个入射场分量必须全部使用,每个分量都在具有同一间距的均匀网格上传播。然而,总体上,由于式(3.31)~式(3.38)的耦合特性,网格中每个分量的离散场点与其他分量不能对齐——它们相互偏移了 $[\pm m_x/2, \pm m_y/2, \pm m_z/2]$ 。当将一个场分量的网格偏移与其他场分量关联时,偏移的索引号为:

$$r_{i \pm p_x \Delta x/2, j \pm p_y \Delta y/2, k \pm p_z \Delta z/2} = i_r \Delta r + (\pm m_x/2 \pm m_y/2 \pm m_z/2) \Delta r \quad (3.43)$$

利用式(3.42)和式(3.43),我们能够将式(3.31)~式(3.38)从 (i, j, k) 索引映射到 i_r 索引。最终的平面波电场 E 的更新表达式为

$$E_{x, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_y/2 + m_z/2}^{n+1/2} = C_a E_{x, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_y/2 + m_z/2}^{n-1/2} + C_{b,y} (H_{z, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_y + m_z/2}^n - H_{z, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_z/2}^n) + C_{b,z} (H_{y, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_y/2}^n - H_{y, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_y/2 + m_z}^n) \quad (3.44)$$

$$E_{y, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2 + m_z/2}^{n+1/2} = C_a E_{y, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2 + m_z/2}^{n-1/2} + C_{b,z} (H_{x, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2 + m_z}^n - H_{x, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2}^n) + C_{b,x} (H_{z, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_z/2}^n - H_{z, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x + m_z/2}^n) \quad (3.45)$$

$$E_{z, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2 + m_y/2}^{n+1/2} = C_a E_{z, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2 + m_y/2}^{n-1/2} + C_{b,x} (H_{y, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x + m_y/2}^n - H_{y, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_y/2}^n) + C_{b,y} (H_{x, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2}^n - H_{x, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2 + m_y}^n) \quad (3.46)$$

相应地,平面波磁场的更新表达式为

$$H_{x, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2}^{n+1} = D_a H_{x, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2}^n + D_{b,y} (E_{z, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2 - m_y/2}^{n+1/2} - E_{z, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2 + m_y/2}^{n+1/2}) + D_{b,z} (E_{y, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2 + m_z/2}^{n+1/2} - E_{y, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2 - m_z/2}^{n+1/2}) \quad (3.47)$$

$$H_{y, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_y/2}^{n+1} = D_a H_{y, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_y/2}^n + D_{y,z} (E_{x, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_y/2 - m_z/2}^{n+1/2} - E_{x, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_y/2 + m_z/2}^{n+1/2}) + D_{b,x} (E_{z, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2 + m_y/2}^{n+1/2} - E_{z, \text{inc}} \Big|_{i_r - m_x/2 + m_y/2}^{n+1/2}) \quad (3.48)$$

$$H_{z, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_z/2}^{n+1} = D_a H_{z, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_z/2}^n + D_{b,x} (E_{y, \text{inc}} \Big|_{i_r - m_x/2 + m_z/2}^{n+1/2} - E_{y, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_x/2 + m_z/2}^{n+1/2}) + D_{b,y} (E_{x, \text{inc}} \Big|_{i_r + m_y/2 + m_z/2}^{n+1/2} - E_{x, \text{inc}} \Big|_{i_r - m_y/2 + m_z/2}^{n+1/2}) \quad (3.49)$$

式(3.44)~式(3.49)包含了6个离散的相互关联的时间推进表达式,在6个耦合的一维网格上传播场。当给定源函数和初始条件时,这些方程通过将电磁波分解为6个分量进行仿真并在所有的空间传播。图3.2显示了6个一维网格的布局和在式(3.46)中迭代更新 E_z 使用的场分量。注意这6个网格物理上是相互交错排列的,彼此偏差半个整数,因为在三维主体网格中场量具有交错排列的性质。而且,注意在一维IFAs中计算模板没有使用最近的相邻网格。在每一个时间步上,场传播 Δr 的整数倍的距离,这取决于 $\{m_x, m_y, m_z\}$ 组的场分量。

关键在于:式(3.44)~式(3.49)传播的电磁波的数值场,本质上具有任意性,其色散关系与FDTD主网格是完全相同的。因此,当利用TF/SF公式耦合到FDTD主网格时,进入主网格中散射场区域的电磁泄漏为零。为了专门创建平面波源作为入射场,我们必须定义极化和传播方向。为了产生所希望的平面波,系统性地生成边界/源条件的完整过程将是下面讨论的主题。

射矢量。例如,电场和磁场的笛卡儿 x 分量表示为

$$E_{x,\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = (\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi)f(t - \sqrt{\mu_B\epsilon_B}\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \quad (3.54)$$

$$H_{x,\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = (\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi)f(t - \sqrt{\mu_B\epsilon_B}\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})/\eta_B \quad (3.55)$$

以上公式提供了非常简单的处理过程,能够建立 FDTD 平面波更新方程[式(3.44)~式(3.49)]所需的边界条件。以磁场 x 分量为特例,利用 $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(r, t)$ 指定入射波源网格中的场。重要的是需要注意到,在一个时间步中,平面波在 FDTD 主网格中最多传播距离 $\max\{\Delta\xi\}$,其中 $\xi \in \{x, y, z\}$ 。投影到源网格中,利用有理角条件 $p_\xi\Delta\xi = m_\xi\Delta r$,平面波在源网格中传播的最大距离是 $\max\{|m_\xi|\}$ 。这意味着,为恰当地初始化平面波,必须对 $\max\{|m_\xi|\}$ 这些点进行赋源。利用式(3.42)和式(3.43),在入射磁场网格中边界点上,对于 $0 \leq i_r < \max\{|m_\xi|\}$,完整的源条件可由下式给出:

$$H_{x,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_x/2}^{n+1} = P_{h_x} \cdot f[n\Delta t - \sqrt{\mu_B\epsilon_B}(i_r + m_x/2)\Delta r] \quad (3.56a)$$

$$H_{y,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_y/2}^{n+1} = P_{h_y} \cdot f[n\Delta t - \sqrt{\mu_B\epsilon_B}(i_r + m_y/2)\Delta r] \quad (3.56b)$$

$$H_{z,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_z/2}^{n+1} = P_{h_z} \cdot f[n\Delta t - \sqrt{\mu_B\epsilon_B}(i_r + m_z/2)\Delta r] \quad (3.56c)$$

注意: 这种简单的边界/源条件假定波在整个区域解析传播(即,时间延迟假定一个解析的相速度)。因此,重要的是,入射场是通过 TF/SF 公式耦合到主网格中,而不是通过边界点。必须从 $i_r \geq \max\{|m_\xi|\}$ 进行场的耦合。关于描述这些边界点上的数值耗散,更详细的方法见文献[12]。

最后,针对三维平面波问题已经构造了公式。为了将这种解法简化成一维或二维问题,仅仅需要对整数传播值 $[m_x, m_y, m_z]$ 进行相应的设置。例如,沿着 x 方向传播的平面波的特征为 $[m_x, m_y, m_z] = [1, 0, 0]$ 。

3.11 必需的流密度 J_{inc} 和 M_{inc}

我们接下来考虑出现在精确 TF/SF 平面波源式(3.13)、式(3.15)、式(3.17)、式(3.19)、式(3.21)和式(3.23)中的流密度。由前节发展的入射场网格映射的流密度 $\mathbf{J}_{\text{inc}}$ 和 $\mathbf{M}_{\text{inc}}$ 直接来自不连续方程(3.4)。在 FDTD 的 TF/SF 实施过程中,定义为总场和散射场交界面的封闭表面上的任意一点都有向外的单位法线向量 $\hat{\mathbf{n}} = [\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z]$ 。例如,扩展式(3.4a)可产生

$$J_{x,s} = \hat{n}_y H_{z,\text{inc}} - \hat{n}_z H_{y,\text{inc}} \quad (3.57a)$$

$$J_{y,s} = \hat{n}_z H_{x,\text{inc}} - \hat{n}_x H_{z,\text{inc}} \quad (3.57b)$$

$$J_{z,s} = \hat{n}_x H_{y,\text{inc}} - \hat{n}_y H_{x,\text{inc}} \quad (3.57c)$$

在大多数笛卡儿坐标系 FDTD 网格中,TF/SF 交界面是矩形,并且平行于网格的主轴方向。在这种情况下,TF/SF 交界面法向矢量的分量值假定为 $\hat{n}_\xi = 0, \pm 1$ 。例如, $\hat{\mathbf{n}} = [0, \pm 1, 0]$ 是垂直于 y 轴的两个 TF/SF 交界面平面的外法向矢量, $\hat{\mathbf{n}} = [0, 0, \pm 1]$ 是垂直于 z 轴的两个 TF/SF 交界面平面的外法向矢量。根据式(3.57a),只有这 4 个表面存在电流密度 $J_{x,s}$ 。因此,穿过法向为 $\hat{\mathbf{n}} = [0, \pm 1, 0]$ 的交界面考虑磁场不连续的电流密度简化为 $J_{x,s} = \pm H_{z,\text{inc}}$ 。根

据式(3.4a),这些值能够按比例缩放 $\hat{n}=[0, \pm\Delta y, 0]$, 导致 $J_{x,\text{inc}} = \pm H_{z,\text{inc}}/\Delta y$ 。穿过法向为 $\hat{n}=[0, 0, \pm 1]$ 的交界面考虑磁场不连续的电流密度简化为 $J_{x,s} = \pm H_{y,\text{inc}}$, 在按比例 $\hat{n}=[0, 0, \pm\Delta z]$ 缩放后变为 $J_{x,\text{inc}} = \pm H_{z,\text{inc}}/\Delta z$ 。采用类似的方式建立剩余的电流密度和磁流密度。需要比例缩放是因为麦克斯韦方程(以及 FDTD 方法)和入射波强制项表示为 $\mathbf{J}_{\text{inc}}$ 和 $\mathbf{M}_{\text{inc}}$ 项。

考虑矩形的 TF/SF 交界面, 尺寸索引从 $[I_0, J_0, K_0]$ 到 $[I_1, J_1, K_1]$ 。对于该界面, 下面给出的方程提供了全套所需以入射波、电场和磁场表示的流密度, 乘以相应的 FDTD 系数。注意到整数坐标变换遵循多对一的整数映射关系(3.42)或者 $i_r = m_x i + m_y j + m_z k$ [结合映射变换公式(3.43)]。在六面 TF/SF 交界面的每一个面上, 式(3.13)、式(3.15)和式(3.17)需要用到的表面电流密度为:

(1) y - z 平面($J_0 \leq j \leq J_1$ 和 $K_0 \leq k \leq K_1$)。

当 $i = I_0$ 时, 有

$$C_{y,b} J_{y,\text{inc}} \Big|_{I_0+1/2, j, k+1/2}^n = -C_{y,x} H_{z,\text{inc}} \Big|_{I_0, j, k+1/2}^n = -C_{y,x} H_{z,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_z/2}^n \quad (3.58a)$$

$$C_{z,b} J_{z,\text{inc}} \Big|_{I_0+1/2, j+1/2, k}^n = C_{z,x} H_{y,\text{inc}} \Big|_{I_0, j+1/2, k}^n = C_{z,x} H_{y,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_y/2}^n \quad (3.58b)$$

当 $i = I_1$ 时, 有

$$C_{y,b} J_{y,\text{inc}} \Big|_{I_1+1/2, j, k+1/2}^n = C_{y,x} H_{z,\text{inc}} \Big|_{I_1+1, j, k+1/2}^n = C_{y,x} H_{z,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_x+m_z/2}^n \quad (3.58c)$$

$$C_{z,b} J_{z,\text{inc}} \Big|_{I_1+1/2, j+1/2, k}^n = -C_{z,x} H_{y,\text{inc}} \Big|_{I_1+1, j+1/2, k}^n = -C_{z,x} H_{y,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_x+m_y/2}^n \quad (3.58d)$$

(2) x - z 平面($I_0 \leq i \leq I_1$ 和 $K_0 \leq k \leq K_1$)。

当 $j = J_0$ 时, 有

$$C_{x,b} J_{x,\text{inc}} \Big|_{i, J_0+1/2, k+1/2}^n = C_{x,y} H_{z,\text{inc}} \Big|_{i, J_0, k+1/2}^n = C_{x,y} H_{z,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_z/2}^n \quad (3.59a)$$

$$C_{z,b} J_{z,\text{inc}} \Big|_{i+1/2, J_0+1/2, k}^n = -C_{z,y} H_{x,\text{inc}} \Big|_{i+1/2, J_0, k}^n = -C_{z,y} H_{x,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_x/2}^n \quad (3.59b)$$

当 $j = J_1$ 时, 有

$$C_{x,b} J_{x,\text{inc}} \Big|_{i, J_1+1/2, k+1/2}^n = -C_{x,y} H_{z,\text{inc}} \Big|_{i, J_1+1, k+1/2}^n = -C_{x,y} H_{z,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_y+m_z/2}^n \quad (3.59c)$$

$$C_{z,b} J_{z,\text{inc}} \Big|_{i+1/2, J_1+1/2, k}^n = C_{z,y} H_{x,\text{inc}} \Big|_{i+1/2, J_1+1, k}^n = C_{z,y} H_{x,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_y+m_x/2}^n \quad (3.59d)$$

(3) x - y 平面($I_0 \leq i \leq I_1$ 和 $J_0 \leq j \leq J_1$)。

当 $k = K_0$ 时, 有

$$C_{x,b} J_{x,\text{inc}} \Big|_{i, j+1/2, K_0+1/2}^n = -C_{x,z} H_{y,\text{inc}} \Big|_{i, j+1/2, K_0}^n = -C_{x,z} H_{y,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_y/2}^n \quad (3.60a)$$

$$C_{y,b} J_{y,\text{inc}} \Big|_{i+1/2, j, K_0+1/2}^n = C_{y,z} H_{x,\text{inc}} \Big|_{i+1/2, j, K_0}^n = C_{y,z} H_{x,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_x/2}^n \quad (3.60b)$$

当 $k = K_1$ 时, 有

$$C_{x,b} J_{x,\text{inc}} \Big|_{i, j+1/2, K_1+1/2}^n = C_{x,z} H_{y,\text{inc}} \Big|_{i, j+1/2, K_1+1}^n = C_{x,z} H_{y,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_y/2+m_z}^n \quad (3.60c)$$

$$C_{y,b} J_{y,\text{inc}} \Big|_{i+1/2, j, K_1+1/2}^n = -C_{y,z} H_{x,\text{inc}} \Big|_{i+1/2, j, K_1+1}^n = -C_{y,z} H_{x,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_x/2+m_z}^n \quad (3.60d)$$

在六面 TF/SF 交界面的每一个面上, 式(3.19)、式(3.21)和式(3.23)需要用到的表面磁流密度为:

(4) y - z 平面($J_0 \leq j \leq J_1$ 和 $K_0 \leq k \leq K_1$)。

当 $i = I_0$ 时, 有

$$D_{z,b}M_{z,\text{inc}} \Big|_{I_0,j,k+1/2}^{n+1/2} = D_{z,x}E_{y,\text{inc}} \Big|_{I_0+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} = D_{z,x}E_{y,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_x/2+m_z/2}^{n+1/2} \quad (3.61a)$$

$$D_{y,b}M_{y,\text{inc}} \Big|_{I_0,j+1/2,k}^{n+1/2} = -D_{y,x}E_{z,\text{inc}} \Big|_{I_0+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} = -D_{y,x}E_{z,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_x/2+m_y/2}^{n+1/2} \quad (3.61b)$$

当 $i=I_1$ 时,有

$$D_{z,b}M_{z,\text{inc}} \Big|_{I_1+1,j,k+1/2}^{n+1/2} = -D_{z,x}E_{y,\text{inc}} \Big|_{I_1+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} = -D_{z,x}E_{y,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_x/2+m_z/2}^{n+1/2} \quad (3.61c)$$

$$D_{y,b}M_{y,\text{inc}} \Big|_{I_1+1,j+1/2,k}^{n+1/2} = D_{y,x}E_{z,\text{inc}} \Big|_{I_1+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} = D_{y,x}E_{z,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_x/2+m_y/2}^{n+1/2} \quad (3.61d)$$

(5) x - z 平面 ($I_0 \leq i \leq I_1$ 和 $K_0 \leq k \leq K_1$)。

当 $j=J_0$ 时,有

$$D_{z,b}M_{z,\text{inc}} \Big|_{i,J_0,k+1/2}^{n+1/2} = -D_{z,y}E_{x,\text{inc}} \Big|_{i,J_0+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = -D_{z,y}E_{x,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_y/2+m_z/2}^{n+1/2} \quad (3.62a)$$

$$D_{x,b}M_{x,\text{inc}} \Big|_{i+1/2,J_0,k}^{n+1/2} = D_{x,y}E_{z,\text{inc}} \Big|_{i+1/2,J_0+1/2,k}^{n+1/2} = D_{x,y}E_{z,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_x/2+m_y/2}^{n+1/2} \quad (3.62b)$$

当 $j=J_1$ 时,有

$$D_{z,b}M_{z,\text{inc}} \Big|_{i,J_1+1,k+1/2}^{n+1/2} = D_{z,y}E_{x,\text{inc}} \Big|_{i,J_1+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = D_{z,y}E_{x,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_y/2+m_z/2}^{n+1/2} \quad (3.62c)$$

$$D_{x,b}M_{x,\text{inc}} \Big|_{i+1/2,J_1+1,k}^{n+1/2} = -D_{x,y}E_{z,\text{inc}} \Big|_{i+1/2,J_1+1/2,k}^{n+1/2} = -D_{x,y}E_{z,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_x/2+m_y/2}^{n+1/2} \quad (3.62d)$$

(6) x - y 平面 ($I_0 \leq i \leq I_1$ 和 $J_0 \leq j \leq J_1$)。

当 $k=K_0$ 时,有

$$D_{y,b}M_{y,\text{inc}} \Big|_{i,j+1/2,K_0}^{n+1/2} = D_{y,z}E_{x,\text{inc}} \Big|_{i,j+1/2,K_0+1/2}^{n+1/2} = D_{y,z}E_{x,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_y/2+m_z/2}^{n+1/2} \quad (3.63a)$$

$$D_{x,b}M_{x,\text{inc}} \Big|_{i+1/2,j,K_0}^{n+1/2} = -D_{x,z}E_{y,\text{inc}} \Big|_{i+1/2,j,K_0+1/2}^{n+1/2} = -D_{x,z}E_{y,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_x/2+m_z/2}^{n+1/2} \quad (3.63b)$$

当 $k=K_1$ 时,有

$$D_{y,b}M_{y,\text{inc}} \Big|_{i,j+1/2,K_1+1}^{n+1/2} = -D_{y,z}E_{x,\text{inc}} \Big|_{i,j+1/2,K_1+1/2}^{n+1/2} = -D_{y,z}E_{x,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_y/2+m_z/2}^{n+1/2} \quad (3.63c)$$

$$D_{x,b}M_{x,\text{inc}} \Big|_{i+1/2,j,K_1+1}^{n+1/2} = D_{x,z}E_{y,\text{inc}} \Big|_{i+1/2,j,K_1+1/2}^{n+1/2} = D_{x,z}E_{y,\text{inc}} \Big|_{i_r+m_x/2+m_z/2}^{n+1/2} \quad (3.63d)$$

3.12 方法总结

目前,已完成了实现 FDTD 精确 TF/SF 平面波源的构造。为了总结,需要采用以下步骤执行这个公式:

编写程序。采用主流方法建立三维 FDTD 矩形计算区域。标记 TF/SF 交界面的网格位置(索引)。

标记入射平面波传播角度,并利用式(3.39)和式(3.40)映射到整数编号 $[m_x, m_y, m_z]$ 。基于这些整数和式(3.44)~式(3.49)建立 6 个人射平面波一维 FDTD 网格。基于式(3.56)建立这些一维网格的源场。

运行过程。根据式(3.13)、式(3.15)、式(3.17)、式(3.19)、式(3.21)和式(3.23)在三维 FDTD 基本网格中执行标准的电场和磁场迭代。

同时,按照式(3.58)~式(3.63)的定义,在 6 个辅助的一维 FDTD 入射平面波网格中执行标准的场迭代,沿着三维 FDTD 基本网格的 TF/SF 交界面生成所需的 $\mathbf{J}_{\text{inc}}$ 和 $\mathbf{M}_{\text{inc}}$ 源项。

3.13 仿真实例

上述发展的方法完全独立于用于初始化平面波源的时变波源函数。不管波源是高斯脉冲、矩形波或完全随机的值,这组 6 个辅助一维 FDTD 网格都如实传播基于该波源的平面波,且在基本三维 FDTD 网格的 TF/SF 交界面上出现绝对零值的非物理散射场。这是因为平面波源的数值色散特征与基本网格的数值色散特征完全相同。

图 3.3 显示了应用精确 TF/SF 平面波源的一个实例^[14]。这张图显示了沿着三维 TF/SF 网格的 y - z 平面横截面,在 1500 个时间步后的 FDTD 计算的电场 E_x 。因此,假定入射波有理想的矩形波形、随时间变化、沿着 $\varphi \approx 59^\circ$ 和 $\theta \approx 39.8^\circ$ 角度在网格中斜向传播,或者相当于 $[m_x, m_y, m_z] = [3, 5, 7]$ 。自由空间总场区域网格为 $120 \times 120 \times 120$,周围每个面都由 10 个单元的散射场区域包围,后者以理想导体终止。尽管在总场区域的左下角高频波分量很大的色散(波的尾迹部分),进入散射场区域的泄漏为零,达到了机器的精度($\sim 10^{-15}$ 或者 -300dB)。

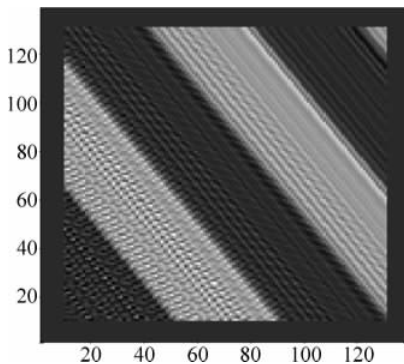


图 3.3 FDTD 计算的电场 E_x 的图像显示,沿着三维 TF/SF 网格的 y - z 平面截面,波在总场区域中沿着斜向传播。在计算机精度($\sim 10^{-15}$, 或者 -300dB)的条件下,没有泄漏进入散射场区域^[14]

图 3.4 显示了应用精确 TF/SF 平面波源的第二个实例^[14],这里是针对 $160 \times 160 \times 160$ 的网格,自由空间总场区域边界的每个面都包围着 10 个单元的散射场区域。入射波是随时间变化的正弦调制的高斯脉冲, $f(n) = \sin(n\pi/4) \exp[-(n-68)^2/125]$, 沿着 $\varphi \approx 63.4^\circ$ 和 $\theta \approx 36.7^\circ$ 角度在总场区域基本网格中斜向传播,或者相当于 $[m_x, m_y, m_z] = [1, 2, 3]$ 。

图 3.4(a)显示了 FDTD 计算的电场 E_x 在基本网格总场区域中的两种时变波形。 Q_{T1} 是记录在总场区域中源周围的波形。 Q_{T2} 是入射波从源向总场区域拐角传播大约 270 个单元后记录的波形。由于数值色散引起的相位误差积累,当对比这两个波形时,可看见明显的失真现象。图 3.4(b)显示了 FDTD 计算的电场 E_x 在基本网格散射场区域中的两种时变波形。 Q_{S1} 是记录 Q_{T1} 监视点相邻单元位置的波形,但仅位于散射场区域中的外侧。类似地, Q_{S2} 是记录 Q_{T2} 监视点相邻单元位置的波形,但仅位于散射场区域中的外侧。我们看到,尽管在脉冲传播过程中存在数值色散,在总场区域中拐角的邻近和远离位置散射场的幅度量级为零,达到计算机精度(约为 10^{-15})。

图 3.5 显示了图 3.4 算例中调制高斯脉冲传播穿过这个区域的图像^[14]。这个图像描绘了 TF/SF 网格中完整 y - z 平面上的 FDTD 计算的电场,包括总场区域和散射场区域(在平面的边缘上的细条纹)。散射场区域中的所有点的场值为零,达到了计算机的精度。

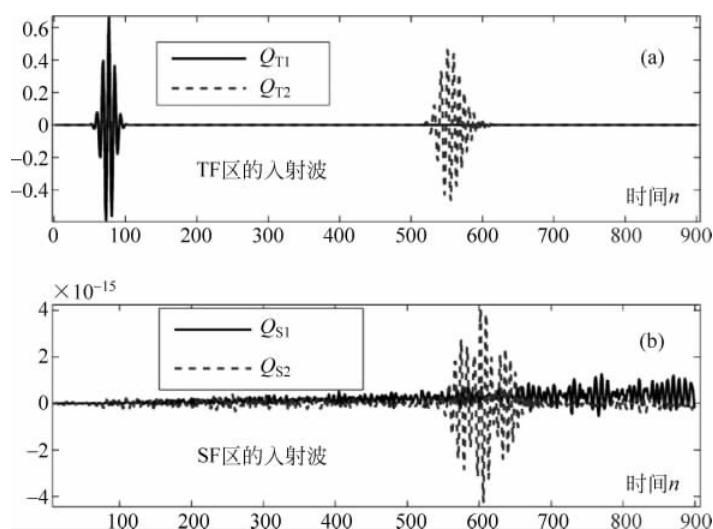


图 3.4 FDTD 计算的电场 E_x , 位于三维 TF/SF 网格总场区域的拐角, 传播带有调制的高斯脉冲时间波形的入射波: (a) 监视点位于总场区域的边界内侧; (b) 监视点位于散射场区域边界的外侧

实线——源周围的监视点; 虚线——由源形成的总场在拐角位置的监视点。尽管脉冲传播过程中存在相位失真的积累(与解析的平面波相比较), 进入散射场区域的泄漏为零, 达到计算机的精度^[14]

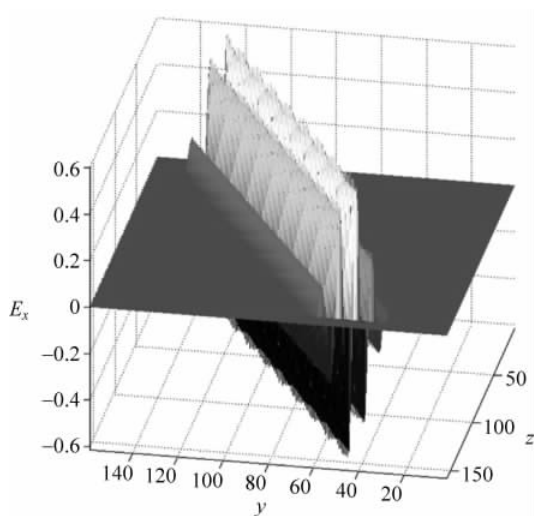


图 3.5 图 3.4 算例中 FDTD 计算的电场的图像, 位于 TF/SF 网格的 y - z 平面内。散射场区域的场(平面外侧周围的小条纹)量级为零, 达到计算机精度^[14]

3.14 讨论

针对任意传播方向、极化角度、稳定性和非均匀长径比,已经对 FDTD 精确 TF/SF 平面波源进行了测试。在每个研究算例中,观察到入射平面波进入散射场区域的泄漏为零,达到计算机精度的量级。为了获得这个好处,所付出的代价是需要进行更复杂的编程,相当于文献[1]中提出的标准入射场排布方法。除此以外,与三维基本网格的计算负担相比,即使执行精确 TF/SF 平面波源需要建立和处理 6 个辅助一维网格,额外增加的计算机内存和运行时间也可忽略,除非需要进行非常精细的角分辨。

在发展的精确 TF/SF 平面波源方法中,关于从三维空间投影场分量到一维空间中的几何关系(因此,6 个耦合的入射场数组)不需要假定使用 FDTD 基本网格的计算格式。因此,这种技术不限于标准的空间交错 FDTD 网格,也不限于标准的二阶精度计算格式。例如,在文献[16,17]中,精确 TF/SF 平面波源技术被改进,采用了场分裂公式和更高阶的 M24 格式;在文献[18]中,采用高阶偶对 FDTD 算法也是适合的;在文献[19]中,采用无条件稳定的 Crank-Nicholson 时间推进格式同样适用。

参考文献

- [1] Taflove, A., and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, 3rd ed., Norwood, MA: Artech House, 2005.
- [2] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, New York: McGraw Hill, 1941.
- [3] Harrington, R. F., *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, New York: IEEE / Wiley, 2001.
- [4] Balanis, C. A., *Advanced Engineering Electromagnetics*, 2nd ed., New York: Wiley, 2012.
- [5] Merewether, D., et al., "On implementing a numeric Huygen's source scheme in a finite difference program to illuminate scattering bodies," *IEEE Trans. Nuclear Science*, Vol. 27, 1980, pp. 1829-1833.
- [6] Umashankar, K. R., and A. Taflove, "A novel method to analyze electromagnetic scattering of complex objects," *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, Vol. 24, 1982, pp. 397-405.
- [7] Guiffaut, C., and K. Mahdjoubi, "A perfect wideband plane wave injector for FDTD method," in *Proc. IEEE APS International Symposium*, Vol. 1, Salt Lake City, UT, 2000, pp. 236-239.
- [8] Oguz, U., and L. Gurel, "Interpolation techniques to improve the accuracy of the plane wave excitations in the finite difference time domain method," *Radio Science*, Vol. 32, 1997, pp. 2189-2199.
- [9] Oguz, U., and L. Gurel, "An efficient and accurate technique for the incident-wave excitations in the FDTD method," *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, Vol. 46, 1998, pp. 869-882.
- [10] Moss, C. D., F. L. Teixeira, and J. A. Kong, "Analysis and compensation of numerical dispersion in the FDTD method for layered anisotropic media," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol. 50, 2002, pp. 1174-1184.
- [11] Schneider, J. B., "Plane waves in FDTD simulations and a nearly perfect total-field/scattered-field boundary," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol. 52, 2004, pp. 3280-3287.

- [12] Tan, T. , and M. Potter, "1-D multipoint auxiliary source propagator for the total-field/scattered-field FDTD formulation," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Lett.* , Vol. 6, 2007, pp. 144-148.
- [13] Tan, T. , and M. Potter, "On the nature of numerical plane waves in FDTD," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Lett.* , Vol. 8, 2009, pp. 505-508.
- [14] Tan, T. , and M. Potter, "FDTD discrete planewave (FDTD-DPW) formulation for a perfectly matched source in TFSF simulations," *IEEE Trans. Antennas and Propagation* , Vol. 58, 2010, pp. 2641-2648.
- [15] Tan, T. , and M. Potter, "Optimized analytic field propagator (O-AFP) for plane wave injection in FDTD simulations," *IEEE Trans. Antennas and Propagation* , Vol. 58, 2010, pp. 824-831.
- [16] Hadi, M. F. , "A versatile split-field 1-D propagator for perfect FDTD plane wave injection," *IEEE Trans. Antennas and Propagation* , Vol. 57, 2009, pp. 2691-2697.
- [17] Hui, W. , et al. , "Perfect plane wave injection into 3D FDTD (2,4) scheme," in *Proc. Cross Strait Quad-Regional Radio Science and Wireless Technology Conference (CSQRWC)* 2011, Harbin, China, 2011, pp. 40-43.
- [18] Hui, W. , et al. , "Perfect plane-wave source for a high-order symplectic finite-difference time-domain scheme," *Chinese Physics B* , Vol. 20, 2011, 114701, doi: 10. 1088/1674-1056/20/11/114701.
- [19] Huang, Z. , G. Pan, and H. K. Pan, "Perfect plane wave injection for Crank-Nicholson time-domain method," *IET Microwaves, Antennas and Propagation* , Vol. 4, 2010, pp. 1855-1862.